Cuestiones

Q1. (1 punto) Razone qué características tiene que tener un transformador para poder aplicar la relación $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1(N_2/N_1)$.

Q2. (1 punto) A través del Teorema de Helmholtz se establece que un campo vectorial queda bien determinado si se conocen su divergencia y su rotacional. Con esta premisa, explicar razonadamente cuáles son las fuentes del campo magnético $\mathbf{H}$ estático.

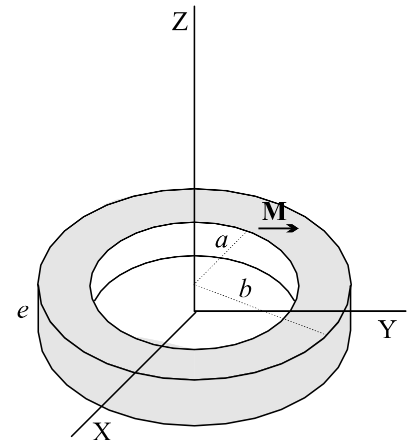
> **Solución:**
>
> A partir de la ecuación de Maxwell que se deriva del Teorema de Ampère tenemos
>
> $$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$
>
> (no se tiene en cuenta el término $\partial\mathbf{D}/\partial t$ porque sólo nos interesa el campo estático).
>
> Y la otra ecuación de Maxwell relacionada con el campo magnético dice $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. A partir de $\mu_o\mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{M}$ y tomando la divergencia en ambos lados:
>
> $$0 = \nabla \cdot \mathbf{H} + \nabla \cdot \mathbf{M} \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$$
>
> Por tanto, aplicando el Teorema de Helmholz, podemos decir que las fuentes de $\mathbf{H}$ son las corrientes de conducción y las inhomegeneidades en la imanación de divergencia no nula.

Q3. (1 punto) Analice el modo fundamental de propagación en una guía rectangular de dimensiones $a \times b$. Determine su frecuencia de corte y la expresión para los campos. Determine el rango de frecuencias en el que se transmitirá únicamente este modo.

Q4. (1 punto) Analice y discuta la veracidad de la siguiente afirmación: para una antena lineal de longitud h situada frente a tierra el diagrama de radiación se corresponde con el de una antena de longitud $2h$ alimentada por el centro, mientras que la potencia radiada es sólo la mitad de la radiada por la antena de longitud $2h$.

Ejercicios

E1. (3 puntos) En la figura se muestra un anillo imanado de espesor e y los respectivos radios interior y exterior son a y b. La imanación en el anillo es $\mathbf{M} = M_o \cos^2\varphi\, \mathbf{u}_y$.



(a) Calcule las densidades de corriente de imanación.

Solución:
En primer lugar vamos a calcular las densidades de corriente de imanación mediante las relaciones:

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \qquad \mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$$

Calculamos $\mathbf{K}_m$ utilizando la expresión de $\mathbf{M}$ y $\mathbf{n}$
Sobre las coronas circulares $\mathbf{n} = \pm\mathbf{u}_z$, es decir, perpendicular a $\mathbf{M}$ por tanto,

$$(\mathbf{K}_m)_s = M_o \cos^2\varphi\, \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z = M_o \cos^2\varphi\, \mathbf{u}_x$$

$$(\mathbf{K}_m)_s = M_o \cos^2\varphi\, \mathbf{u}_x$$

$$(\mathbf{K}_m)_i = M_o \cos^2\varphi\, \mathbf{u}_y \times (-\mathbf{u}_z) = -M_o \cos^2\varphi\, \mathbf{u}_x$$

$$(\mathbf{K}_m)_i = -M_o \cos^2\varphi\, \mathbf{u}_x$$

En la superficie cilíndrica de radio a, $\mathbf{n} = -\mathbf{u}_\rho = -(\mathbf{u}_x \cos\varphi + \mathbf{u}_y \operatorname{sen}\varphi)$, por tanto,

$$(\mathbf{K}_m)_a = M_o \cos^2\varphi\, \mathbf{u}_y \times (-\mathbf{u}_x \cos\varphi - \mathbf{u}_y \operatorname{sen}\varphi) = M_o \cos^3\varphi\, \mathbf{u}_z$$

En la superficie cilíndrica de radio b, $\mathbf{n} = \mathbf{u}_\rho$, de donde se deduce que,

$$(\mathbf{K}_m)_b = M_o \cos^2\varphi\, \mathbf{u}_y \times (\mathbf{u}_x \cos\varphi + \mathbf{u}_y \operatorname{sen}\varphi) = -M_o \cos^3\varphi\, \mathbf{u}_z$$

Densidad de corriente $\mathbf{J}_m$. Para calcular el rotacional nos interesa poner el vector imanación en coordenadas cilíndricas. A partir de las fórmulas de ayuda:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_\rho &= \mathbf{u}_x \cos\varphi + \mathbf{u}_y \operatorname{sen}\varphi \\ \mathbf{u}_\varphi &= -\mathbf{u}_x \operatorname{sen}\varphi + \mathbf{u}_y \cos\varphi\end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por $\operatorname{sen}\varphi$ y la segunda por $\cos\varphi$ y sumando ambas tenemos:

$$\mathbf{u}_y = \mathbf{u}_\rho \operatorname{sen}\varphi + \mathbf{u}_\varphi \cos\varphi$$

por tanto:

$$\mathbf{M} = M_o \cos^2\varphi \left(\mathbf{u}_\rho \operatorname{sen}\varphi + \mathbf{u}_\varphi \cos\varphi\right)$$

Calculamos el rotacional; en este caso, dado que $M_z = 0$ y que las componentes sólo dependen de la variable φ,

$$\nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\left(\rho M_\varphi\right)}{\partial\rho} - \frac{\partial M_\rho}{\partial\varphi}\right)\mathbf{u}_z$$

$$\nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{\rho}\left(M_\varphi - \frac{\partial M_\rho}{\partial\varphi}\right)\mathbf{u}_z = \frac{M_o}{\rho}\left(2\cos\varphi\ \operatorname{sen}^2\varphi - \cos^3\varphi + \cos^3\varphi\right)\mathbf{u}_z$$

por tanto la densidad de corriente $\mathbf{J}_m$ será,

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = \frac{2M_o}{\rho}\cos\varphi\ \operatorname{sen}^2\varphi\, \mathbf{u}_z$$

(b) Calcule el momento magnético del anillo.

Solución:

El momento magnético del anillo en función de la imanación viene dado por la relación,

$$\mathbf{m} = \int_V \mathbf{M} dv = \mathbf{u}_y \int_V M_o \cos^2\varphi\left(e\rho d\varphi d\rho\right)$$

Hemos sacado de la integral el vector unitario por que permanece constante en todo el volumen.

$$\mathbf{m} = \mathbf{u}_y\, e M_o \int_a^b \rho d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi$$

$$\mathbf{m} = e M_o \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)\left[\frac{1}{2}\cos x \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}x\right]_0^{2\pi} \mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{m} = eM_o \frac{\pi}{2} \left(b^2 - a^2\right) \mathbf{u}_y$$

E2. (3 puntos) A partir de mediciones de atenuación y reflexión de una señal de 1 MHz incidiendo normalmente a un medio, se determina que la impedancia intrínseca del mismo es $22{,}21\,\angle 45^o$ (Ω) y la profundidad de penetración $\delta = 3{,}183\,\text{cm}$. Calcule:

(a) La conductividad del material.

(b) La longitud de onda en el medio.

(c) La velocidad de fase de la onda.

(d) Escriba los fasores para los campos eléctrico y magnético en el medio si la amplitud del campo eléctrico incidente es de 30 V/m.

Importante: Hay una errata en el enunciado: el dato correcto de la frecuencia de la señal es de 125 MHz. Esta errata da lugar a que el valor que se obtiene de la conductividad sea diferente según el método empleado para calcularla. En la evaluación se han considerado ambos resultados correctos. El uso del valor correcto de la frecuencia implica también un valor de la velocidad de fase diferente. Obviamente se ha considerado correcto el cálculo a partir del dato dado en el enunciado.

Solución:

(a) En primer lugar, sabemos que se trata de un medio conductor puesto que presenta una impedancia compleja. Pasamos la impedancia compleja a su forma binómica

$$Z = 22{,}21(\cos 45 + j \operatorname{sen} 45) = 15{,}71(1 + j)$$

Comparando con la expresión para la impedancia compleja de un medio conductor, tenemos

$$Z = \frac{\alpha}{\gamma}(1 + j)$$

de donde

$$\frac{\alpha}{\gamma} = 15{,}71\,\Omega$$

Por otro lado, sabemos que la profundidad de penetración viene dada por

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = 3{,}183 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \Rightarrow \alpha = 31{,}415\text{m}^{-1}$$

Y por tanto, obtenemos para la conductividad

$$\gamma = 2\,\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$$

La conductividad también se puede determinar teniendo en cuenta que para un medio conductor α se puede aproximar por:

$$\alpha = \omega \left[\frac{\varepsilon' \mu}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2} \right) + 1 \right] \simeq \sqrt{\frac{\mu \omega \gamma}{2}}$$

despejando γ

$$\gamma = \frac{2\alpha^2}{\mu\omega} = 250\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1} \quad \textbf{Con el dato de frec. del enunciado}$$

ó

$$\gamma = \frac{2\alpha^2}{\mu\omega} = 2\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1} \quad \textbf{Con el dato de frecuencia correcto}$$

(b) Teniendo en cuenta que en un medio conductor se verifica $\varepsilon''/\varepsilon' \gg 1$ y que $\alpha = \beta$, obtenemos

$$\beta = 10\pi \ \mathrm{m}^{-1}$$

O bien, sabemos que para un medio conductor $\alpha = \beta = 10\pi \ \mathrm{m}^{-1}$. La longitud de onda de la señal es

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 0{,}2 \ \mathrm{m}$$

y la velocidad de fase

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{10\pi} = 2 \cdot 10^5 \ \mathrm{m/s} \quad \textbf{Con el dato de frec. del enunciado}$$

ó

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{10\pi} = 2{,}5 \cdot 10^7 \ \mathrm{m/s} \quad \textbf{Con el dato de frecuencia correcto}$$

El fasor correspondiente al campo eléctrico será

$$\mathbf{E} = E_o e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \mathbf{u}_x$$

Sustituyendo los datos

$$\mathbf{E} = 30 e^{-10\pi z} e^{-j10\pi z} \mathbf{u}_x \ \mathrm{V/m}$$

y el campo magnético será

$$\mathbf{H} = H_o e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \mathbf{u}_y$$

con

$$H_o = \frac{E_o}{Z} = \frac{30}{22{,}21 e^{j0{,}25\pi}} = 1{,}35 e^{-j\pi/4}$$

Por tanto, el fasor para el campo magnético es

$$\mathbf{H} = 1{,}35 e^{-10\pi z} e^{-j(10\pi z + 0{,}25\pi)} \mathbf{u}_y \ \mathrm{A/m}$$

Podemos comprobar que los campos se atenúan conforme penetran en el material y que los campos eléctrico y magnético no están en fase.