Cuestiones

Q1. (1 punto) Explique la Ley de Inducción de Faraday. ¿Qué aporta la Ley de Lenz a la inducción electromagnética?

Q2. (1 punto) Enuncie el Principio de Superposición en el contexto de las ecuaciones de Maxwell y explique su ámbito de validez y sus limitaciones.

Solución:

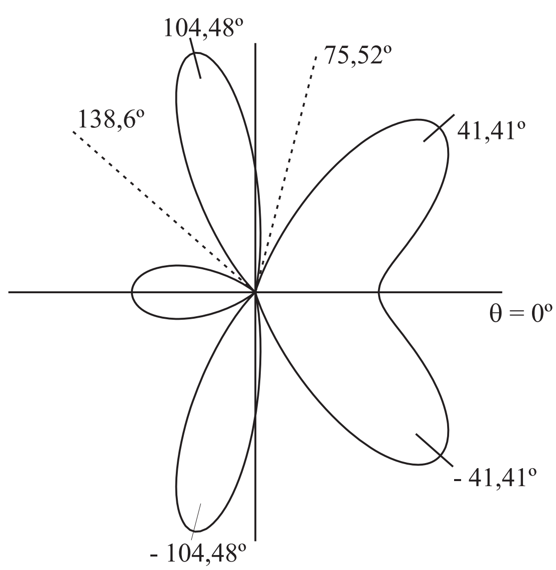
Véase la sección 3 del tema 4 (sin contar con el apartado 3.1).

Q3. (1 punto) Describa las diferencias entre la propagación de una onda plana en un dieléctrico perfecto y en un medio conductor. ¿Se verifica en ambos casos el principio de conservación de la energía? Justifique la respuesta.

Q4. (1 punto) Describa el diagrama $\omega - \beta$ para los modos de transmisión de una guía de ondas. ¿Qué ocurre para frecuencias mucho mayores que la frecuencia de corte?

Ejercicios

E1. (2,5 puntos) La figura adjunta respresenta el diagrama de radiación conjunta de dos antenas isótropas idénticas que emiten con una longitud de onda λ, con un desfase δ y separadas una distancia $d = m\lambda$. Determine δ y m y la expresión reducida para el factor de agrupación.



Solución:

El factor de agrupación normalizado de una agrupación de antenas viene dado por

$$F(\theta) = \frac{1}{N}\frac{\operatorname{sen}(N\Psi/2)}{\operatorname{sen}(\Psi/2)}$$

con $\Psi = \delta + kd\cos\theta$.

Para $N = 2$ el factor de agrupación presenta su máximo principal en $\psi = 0$ y su primer mínimo nulo en $\psi = \pi$. Según el diagrama dado y teniendo en cuenta que $d = m\lambda$:

Máximo principal:

$$\theta_{máx} = 104,48^o \qquad \Rightarrow \qquad \cos\theta_{máx} = -\frac{1}{4}$$

$$\psi = \delta + kd\cos\theta_{máx} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \delta = m\frac{\pi}{2}$$

Primer mínimo:

$$\theta_{mín} = 75,52^o \qquad \Rightarrow \qquad \cos\theta_{mín} = \frac{1}{4}$$

$$\psi = \delta + kd\cos\theta_{mín} = \pi \qquad \Rightarrow \qquad \delta + m\frac{\pi}{2} = \pi$$

y de ambas resulta:

$$m = 1 \qquad ; \qquad \delta = \frac{\pi}{2}$$

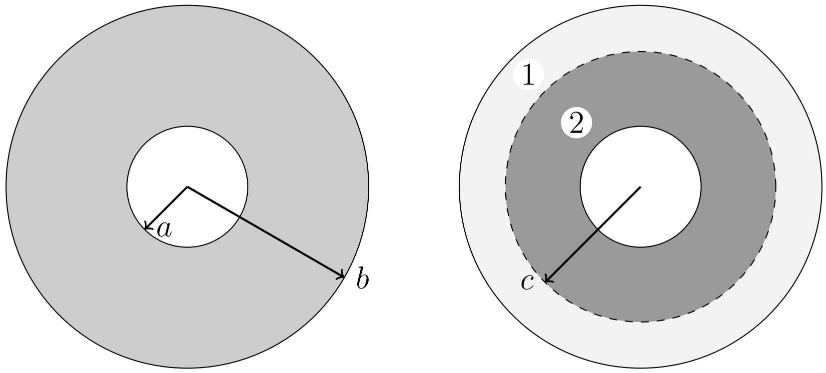
La forma final del factor de agrupación:

$$\psi = \delta + 2m\pi\cos\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi\cos\theta$$

$$F(\theta) = \frac{1}{2}\frac{\sin\psi}{\sin\left(\dfrac{\psi}{2}\right)} = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\cos\theta\right)$$

E2. (3,5 puntos) La susceptibilidad magnética de los los gases depende de su densidad. Para estos medios se define una *susceptibilidad molar* independiente de la densidad, χ_m, de forma que la susceptibilidad es $\chi = n\chi_m$, donde n es la densidad del medio.

Tenemos un cable coaxial, de radio interior a, radio exterior $b = 3a$ y altura h lo suficientemente grande como para considerarlo indefinido. Supongamos que inicialmente llenamos el espacio entre los conductores con una mezcla equimolar de dos gases, uno de ellos magnéticamente inerte ($\chi \simeq 0$) y el otro paramagnético de susceptibilidad molar χ_m; la densidad de ambos gases es la misma, n_o, puesto que la mezcla es equimolar y ambos ocupan el mismo volumen. Mediante una batería externa hacemos circular una corriente I_o por el conductor central, la cual retorna por el conductor exterior.



(a) Calcule la permeabilidad magnética de la mezcla y los campos **H** y **B** en el interior del cable coaxial. Calcule la energía magnética contenida en el cable.

Ahora supongamos que, manteniendo cerrado el cable, el gas paramagnético pasa a ocupar la mitad de volumen en la parte más interna (entre a y c) y el gas inerte se queda en la mitad más externa y, además, mantenemos la misma corriente I_o.

(b) Calcule los nuevos campos $\mathbf{H}'$ y $\mathbf{B}'$ en cada uno de los medios y la energía magnética de esta nueva disposición.

(c) Compare la energía magnética en ambas situaciones y decida qué distribución de gases es más favorable magnéticamente.

Solución:

En el primer escenario la susceptibilidad viene dado por la mezcla de los dos gases. Puesto que la expresión de la susceptibildad parcial es dependiente de una magnitud intensiva (la densidad), la susceptibilidad total es la suma de susceptibilidades molares "pesadas" por las respectivas densidades:

$$\chi = n_1\chi_{m_1} + n_2\chi_{m_2} = 0 \cdot n_o + n_o\chi_m = n_o\chi_m$$

de donde:

$$\mu = \mu_o(1 + \chi_m n_o)$$

Aplicamos directamente la ley de Ampère con una circunferecia de radio $a < \rho < b$ para obtener el campo H:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho H = I_o, \quad \longrightarrow \quad H = \frac{I_o}{2\pi\rho}$$

donde sólo se tiene en cuenta la corriente que pasa por el conductor central al ser la que queda encerrada por el circuito de integración.

$$\mathbf{H} = \frac{I_o}{2\pi\rho}\mathbf{u}_\varphi$$

El campo B lo obtenemos de $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$:

$$\mathbf{B} = \mu_o(1 + \chi_m n_o)\frac{I_o}{2\pi\rho}\mathbf{u}_\varphi$$

La densidad de energía magnética es:

$$w = \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B} = \frac{\mu_o I_o^2}{8\pi^2\rho^2}(1 + \chi_m n_o)$$

de donde obtenemos la energía magnética a partir de

$$W = \int_{\text{cilindro}} w dv$$

con $dv = 2\pi h\rho d\rho$.

$$W = \frac{\mu_o I_o^2 h}{4\pi}(1 + \chi_m n_o)\int_a^b \frac{d\rho}{\rho}$$

$$W = \frac{\mu_o I_o^2 h}{4\pi}\ln(3)(1 + \chi_m n_o)$$

Pasamos ahora al caso en que la mezcla se distribuye por el hueco del cable de forma que el gas paramagnético ocupa el espacio entre a y c. Tenemos que calcular previamente c considerando que el volumen ocupado por el cable entre a y c tiene que ser la mitad del ocupado entre a y b:

$$h\pi(c^2 - a^2) = \frac{1}{2}h\pi(b^2 - a^2) \quad\longrightarrow\quad 2(c^2 - a^2) = b^2 - a^2$$

de donde

$$c^2 = \frac{b^2 + a^2}{2} \quad\longrightarrow\quad c = \sqrt{5}a$$

Además tenemos ahora dos medios distintos (llamamos al medio inerte 1 y al medio paramagnético 2). El medio inerte tiene una susceptibilidad $\chi_1' = 0\cdot 2n_o$ (se ha duplicado su densidad al concentrarse igual número de moléculas en la mitad del volumen, pero su susceptibilidad sigue siendo nula) de donde se obtiene una permeabilidad $\mu_1' = \mu_o$.

Igualmente el medio paramagnético tiene ahora una susceptibilidad $\chi_2' = 2n_o\chi_m$ donde también ocurre que la densidad del gas paramegnético se ha duplicado al ocupar la misma cantidad de materia la mitad del volumen. Por tanto $\mu_2' = \mu_o(1 + 2n_o\chi_m)$

Puesto que la inhomogeneidad va en la dirección radial la componente tangencial del campo **H** se conserva y se puede aplicar la ley de Ampère de forma idéntica al caso anterior y aprovechamos además que la corriente no ha cambiado:

$$\mathbf{H}_2' = \mathbf{H}_1' = \mathbf{H} = \frac{I_o}{2\pi\rho}\mathbf{u}_\varphi$$

El campo magnético en la región 1 sale de $\mathbf{B}_1' = \mu_1 \mathbf{H}_1'$:

$$\mathbf{B}_1 = \mu_o \frac{I_o}{2\pi\rho}\mathbf{u}_\varphi$$

la densidad de energía magnética es:

$$w_1' = \frac{1}{2}\mathbf{H}_1' \cdot \mathbf{B}_2' = \frac{\mu_o I_o^2}{8\pi^2\rho^2}$$

y la energía total almacenada en esa región:

$$W_1' = \frac{\mu_o I_o^2 h}{4\pi}\int_c^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_o I_o^2 h}{4\pi}\ln\frac{3}{\sqrt{5}}$$

Pasamos a la región 2:

$$\mathbf{B}_2 = \mu_o\left(1 + 2\chi_m n_o\right)\frac{I_o}{2\pi\rho}\mathbf{u}_\varphi$$

$$w_2 = \frac{1}{2}\mathbf{H}_2' \cdot \mathbf{B}_2' = \frac{\mu_o I_o^2}{8\pi^2\rho^2}\left(1 + 2\chi_m n_o\right)$$

$$W_2' = \frac{\mu_o I_o^2 h}{4\pi}\left(1 + 2\chi_m n_o\right)\int_a^c \frac{d\rho}{\rho}$$

$$W_2' = \frac{\mu_o I_o^2 h}{4\pi}\ln\sqrt{5}\left(1 + 2\chi_m n_o\right)$$

Por tanto la energía total acumulada es:

$$W' = W_1' + W_2' = \frac{\mu_o I_o^2 h}{4\pi}\left(\ln 3 + \chi_m n_o \ln 5\right)$$

Vamos a comparar ahora W y W'; para ello restamos ambas:

$$W' - W = \chi_m n_o \frac{\mu_o I_o^2 h}{4\pi}\left(\ln 5 - \ln 3\right) = \chi_m n_o \frac{\mu_o I_o^2 h}{4\pi}\ln\frac{5}{3}$$

Puesto que el gas activo es paramagnético $\chi_m > 0$ y por tanto $W' > W$. Como estamos manteniendo la corriente I_o constante (ver Tema 3, sección 5.1), el sistema tiende a maximizar la energía magnética y por tanto la segunda situación es más favorable magnéticamente.