Capítulo 16

Integrales I: Introducción y Cálculo de Primitivas

16.1. Introducción

El concepto de integral, lo que ahora llamamos **integral definida**, aparece ligado al problema del cálculo de un área delimitada por una curva. Pueden rastrearse ya algunas ideas en esta dirección en la antigua Grecia, y en los trabajos de Fermat. Años después Barrow, Newton y Leibnitz formulan por primera vez el **Teorema Fundamental del Cálculo** que relaciona esta **integral definida** con la derivada, como explicaremos en seguida.

Todo esto sucede antes de la aparición del concepto moderno de **función**. En aquel momento una función era sencillamente una relación dada por una expresión “sencilla” entre una variable dependiente y otra independiente, asemejándose más a lo que hoy conocemos como **función elemental**.

La **integral definida** de una función en un intervalo I es el área (con signo, ya hablaremos de eso) entre la gráfica y el eje. Gracias al desarrollo del concepto de límite y una mejor comprensión de los números reales, el cálculo de este área fue satisfactoriamente formalizado, incluso para funciones más complicadas que las elementales: las funciones **integrables de Riemann** e **integrables de Lebesgue**, entre otras.

Una **integral indefinida**, también llamada **primitiva** o **antiderivada**, de una función $f(x)$ (real de variable real) es una función $F(x)$ cuya derivada es $f(x)$. Hay personas que dicen que, en realidad, la primitiva de una función es el conjunto de todas las funciones con esta propiedad. Para funciones integrables de Riemann (como por ejemplo las elementales) el **Teorema Fundamental del Cálculo** nos dice intuitivamente que:

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, el área entre el eje OX y la gráfica de $f(x)$ es:

$$\int_0^x f(x)dx = F(x) - F(0)$$

Nosotros en este capítulo vamos a dedicarnos exclusivamente al problema del cálculo de primitivas. Lo demás lo veremos en el capítulo siguiente. Ahora sólo estamos interesados en el problema de aspecto inocente que pide, dada una determinada función $f(x)$ otra función función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.

Como se dijo antes, funciones hay muchas y pueden ser muy complicadas. Pero nosotros nos vamos a restringir a las llamadas **funciones elementales**. Dada una función elemental $f(x)$, decimos que $F(x)$ es una **primitiva elemental** si $F(x)$ es una primitiva suya y ademas es una función elemental. Es fácil comprobar que el conjunto de todas las primitivas elementales de $f(x)$ (encontrada una encontradas todas) es de la forma $F(x)+C \qquad C \in \mathbb{R}$. Sucede una cosa muy curiosa. Toda función elemental, tiene una derivada que también es una función elemental. Sin embargo:

No todas las funciones elementales tienen una primitiva elemental. Y tampoco hay que buscar muy lejos para encontrar un ejemplo: no existe ninguna función cuya derivada sea $f(x) = e^{-x^2}$.

El problema de el cálculo de primitivas es, en última instancia, un problema de cálculo simbólico que ya ha sido superado por al informática. **El algoritmo de Risch** determina si una función elemental tiene una primitiva elemental y de ser así es capaz de hallarla. Pero que los ordenadores sean capaces de hacerlo, no debería impedir que nosotros aprendamos al menos lo básico, ¿no?

16.2. Integrales Inmediatas

Si $F(x) = \int f(x)dx$ es una función cuya derivada $F'(x)$ es igual a $f(x)$, hay una primera forma muy sencilla de encontrar algunas primitivas: a ojo. Por ejemplo:

$$\int 2xdx = x^2 + C \qquad \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C \qquad \int 2x + x^2 dx = x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C$$

No es necesario saber nada excepto las fórmulas para las derivadas de las funciones elementales básicas y las reglas de derivación.

A consecuencia de estas últimas, si que hay algunos principios básicos, como por ejemplo:

$$\int (k \cdot f(x)dx) = k \cdot \int f(x)dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int f'(g(x)) \cdot f'(x)dx = f(g(x)) + C$$

No hemos puesto las fórmulas correspondientes a la derivada del producto y del cociente aunque, por supuesto, también se aplican de acuerdo a las reglas de derivación que vimos en la sección correspondiente.

16.3. Integración por Partes

Una consecuencia de la regla de la derivada del producto es la siguiente fórmula para integrar:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

o en una notación más parecida a la que estamos siguiendo en estas notas (aunque es la otra la que se suele utilizar tradicionalmente para las integrales por partes):

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

¿Cuándo utilizar esta fórmula? Esencialmente hay dos casos que recogemos a continuación. También queremos señalar que frecuentemente es necesario *iterar* el método (utilizarlo varias veces) para calcular la primitiva.

1. Cuando estamos integrando el producto de dos funciones (a lo mejor alguna es un invisible 1!), una de las cuales sabemos integrar, dv, y otra de las cuales sabemos derivar, u, de manera que vdu es "más sencillo" que udv. Un ejemplo claro es cuando u es un polinomio: al derivarlo (una o más veces) siempre se obtiene una función más sencilla. Los siguientes tipos de integrales suelen poder resolverse por este método:

$$\int \text{polinomio} \cdot \text{exponencial}dx \qquad \int \text{polinomio} \cdot sen(x)\ dx \qquad \int \text{polinomio} \cdot cos(x)\ dx$$

$$\int (\text{función arco})dx \qquad \int \text{logaritmo}\ dx$$

En cualquiera de los casos anteriores, se podía haber sustituido la x en $cos(x), sen(x)$ por una expresión del tipo $ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Cuando al utilizar partes (quizás varias veces) vuelve a salir la misma integral que al principio. En este caso es posible formar una ecuación de primer grado no trivial usando esta simetría cuya incógnita sea $\int udv$ y despejarla. Por este sistema suelen calcularse las siguientes integrales:

$$\int sen(x) \cdot \text{exponencial}dx \qquad \int cos(x) \cdot \text{exponencial}dx$$

$$\int sen^n(x)dx \qquad \int cos^n(x)dx$$

En cualquiera de los casos anteriores, se podía haber sustituido la x en $cos(x), sen(x)$ por una expresión del tipo $ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Ejercicio Resuelto 16.3.1 ***Calcula la integral indefinida*** $\int \mathbf{sen^2xdx}$.

Tomamos $u = senx, dv = senxdx$, y por tanto $du = cosxdx, v = -cosx$. Entonces e integramos por partes)

$$\int sen^2xdx = -senxcosx - \int -cos^2xdx = -senxcosx + \int (1 - sen^2x)dx =$$

$$\int sen^2xdx = -senxcosx + x - \int sen^2xdx$$

Podemos "despejar" la integral que nos han pedido:

$$\int sen^2xdx = \frac{1}{2}(x - senxcosx) + C$$

16.4. Integración Funciones Racionales

Vamos a estudiar en este capítulo como integrar **funciones racionales**, esto es, cocientes de dos polinomios:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$$

La idea es la siguiente:

1. Necesitamos que el grado del numerador $p(x)$ sea menor que el grado del denominador. Esto es sencillo de resolver: si no es así, dividimos $p(x)$ entre $q(x)$ obteniendo un cociente $c(x)$ y un resto $r(x)$ cuyo grado es menor que el de $q(x)$. Una vez hecho esto ya hemos reducido el calculo de nuestra integral inicial al de una función racional con los grados adecuados:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int c(x)dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}dx$$

2. Descomponemos el cociente de polinomios en una suma de funciones racionales de los tipos (enseguida explicaremos como):

$$\frac{A}{(x-a)}, \qquad \frac{A}{(x-a)^n}, \qquad \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)}, \qquad \frac{Ax+b}{(x^2+bx+c)^n}$$

con $a, b, A, B \in \mathbb{R}$ y $2 \leq n \in \mathbb{N}$.

3. Una vez que hemos hecho la descomposición de la fracción original en fracciones $R_1, \ldots, R_n$ de los tipos anteriores:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int (R_1(x) + \ldots + R_n(x))dx = \int R_1(x)dx + \ldots + \int R_n(x)dx$$

y la integral de cualquiera de las funciones de los tipos anteriores es una integral inmediata:

$$\int \frac{A}{(x-a)}dx = A \cdot ln(x-a), \qquad \int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \frac{-A(n-1)}{(x-a)^{n-1}},$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)}dx = \int \frac{Ax}{(x^2+bx+c)}dx + \int \frac{B}{(x^2+bx+c)}dx = \text{logaritmo} + \text{arcotangente},$$

$$\int \frac{Ax+b}{(x^2+bx+c)^n}dx \text{ (se resuelve usando integración por partes)}$$

¿Cómo se hace el paso 2? Queremos escribir una fracción algebraica $\frac{p(x)}{q(x)}$ como una suma de fracciones simples como los que hemos listado antes. Lo primero que debemos hacer es factorizar el denominador $q(x)$. Recordemos que un polinomio con coeficientes reales se puede factorizar como producto de polinomios de grados 0, 1 y 2, todos ellos irreducibles.

- Por cada uno de los posibles factores del tipo $(x-a)$ utilizaremos una fracción simple del tipo $\frac{A}{x-a}$.
- Por cada uno de los posibles factores del tipo $(x-a)^k$ (como los anteriores, pero que aparezcan repetidos), necesitaremos k fracciones simples:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

- Por cada uno de los posibles factores del tipo (x^2+bx+c) utilizaremos una fracción del tipo $\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$.
- Por último, para cada uno de los posibles factores del tipo $(x^2+bx+c)^k$ (como los anteriores pero repetidos), necesitaremos k fracciones simples:

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+bx+c)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{B_kx+C_k}{(x^2+bx+c)^k}$$

16.5. Cambio de Variable

El teorema del cambio de variable (para integrales indefinidas) dice sencillamente que:

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(u)du$$

que no es si no una consecuencia de la **Regla de la Cadena**.

¿Cómo usar el cambio de variable? Hay dos formas:

1. Hay que decidir quien juega el papel de $u = \phi(x)$ lo que determina cuánto vale $du = \phi'(x)dx$. Esto no es siempre posible, salvo en casos sencillos que podrían también considerarse integrales inmediatas.

2. Para casos particulares, memorizar los siguientes cambios y utilizarlos en el caso correspondientes, aunque no sea trivial comprender a simple vista por qué funcionan. Hay muchísimos cambios como los que mostramos a continuación. Sólo mostramos algunos de ellos, en los que una integral complicada se reduce a la integral de una función racional.

De aquí en adelante, $R(y_1, y_2)$ denota una función racional que depende de dos variables (un cociente de dos polinomios que dependen de dos variables), como por ejemplo $R(y_1, y_2) = \frac{y_1 \cdot y_2}{2y_1 - 7y_2}$.

- Para integrar $\int R(cosx, senx)dx$ hacemos el cambio $u = tg\frac{x}{2}$ porque en este caso:

$$senx = \frac{2u}{1+u^2} \qquad cosx = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad dx = \frac{du}{1+u^2}$$

  y la integral que queremos hacer se convierte en la integral de una función racional. Existen otros cambios más sencillos para los diferentes casos particulares que podamos encontrarnos. Pero nosotros nos conformamos con conocer este.

- Para integrar $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$ hacemos el cambio $x = asenu$ o $x = acosu$, y por lo tanto $dx = acosudu$ o $dx = -asenudu$. Así convertimos la integral anterior, en una de las del punto anterior (una función racional en dos variables evaluada en $cos(u), sen(u)$).

- Para integrar $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$ hacemos el cambio $x = atg(u)$ y por lo tanto $dx = \frac{1}{cos^2(u)}du$. Así convertimos la integral anterior, en una de las del punto anterior (una función racional en dos variables evaluada en $cos(u), sen(u)$).

- Para integrar $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$ hacemos el cambio $x = \frac{a}{cos(u)}$ y por lo tanto $dx = \frac{senu}{cos^2 u}du$. Así convertimos la integral anterior, en una de las del punto anterior (una función racional en dos variables evaluada en $cos(u), sen(u)$).

- Para integrar $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}}, \ldots, \sqrt[n_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}}\right)dx$ se resuelve con el cambio $u^\alpha = \frac{ax+b}{cx+d}$, donde α es el mínimo común múltiplo de $n_1, \ldots, n_k$. En este caso, podemos despejar:

$$x = \frac{b - d \cdot u^\alpha}{cu^\alpha - a}$$