Capítulo 13

Límites y Continuidad

13.1. Introducción. ¿Qué es un límite?

Una sucesión es "conjunto infinito y ordenado" de números reales (o de otras cosas incluso):

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

Formalmente, es una función que va desde los naturales a los números reales (o a las otras cosas).

Una sucesión decimos que es **convergente**, o que tiene **límite**, si a medida que aumenta el subíndice los números "se van pareciendo" cada vez más a un determinado valor.

> Decimos que una sucesión $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ **tiene límite** l si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que:
>
> $$n \geq N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$

A propósito. Un concepto relacionado es el de **sucesión de Cauchy**. Decimos que una sucesión $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ es de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Es fácil comprobar que toda sucesión convergente es de Cauchy. Lo que no es tan fácil es comprobar la siguiente propiedad. Es una propiedad muy importante de los números reales. Los números reales son **completos**:

> Toda sucesión de números reales que sea de Cauchy es también convergente.

Dicho lo cual,

> **Definición sucesional de límite**
> Una función $f : D \to \mathbb{R}$ tiene límite l en un punto $x = a$ si para cualquier sucesión de elementos en el dominio $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ que converja a a, la sucesión de imágenes $(f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots)$ converge a l.

Es decir, a medida que los valores de la variable independiente se parecen más a a entonces los valores de sus imágenes se parecen más a l.

a no tiene por qué estar en el dominio de f. Basta con que sea un **punto de acumulación** de dicho dominio (que haya alguna sucesión de elementos de D que converja a a).

13.2. Definición $\varepsilon - \delta$ de límite

Hay otra definición posible, que es de mayor uso, de límite de una función en un punto:

Definición $\varepsilon - \delta$ de límite
Una función $f : D \to \mathbb{R}$ tiene un límite l en un punto $x = a$ si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Ejercicio Resuelto 13.2.1 ***Demuestra que*** $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{2}} \mathbf{x^2} = \mathbf{4}$.
Para cualquier ε, tenemos que encontrar un δ (que depende de ε) de manera que:

$$|x - 2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$$

Vemos que:

$$|x^2 - 4| = |x - 2| \cdot |x + 2| = |x - 2| \cdot |x - 2 + 4| \leq |x - 2| \cdot (|x - 2| + 4)$$

Si elegimos δ menor que el valor más pequeño entre 1 y $\frac{\varepsilon}{5}$ vemos que eso nos garantiza que el valor anterior es más pequeño que 5ε.

Las dos definiciones (sucesional y $\varepsilon - \delta$ que hemos visto de límite son equivalentes.

13.3. Propiedades de los límites

Si existe el límite cuando x tiende a a de $f(x)$, entonces es único.

Ejercicio Resuelto 13.3.1 ***Demuestra el resultado anterior.***
Supongamos que no es cierto. Y que existen dos valores l_1, l_2 que cumplen que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1, \delta_2 > 0 \text{ tales que } \begin{cases} |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon \\ |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon \end{cases}$$

Cojamos $\varepsilon < |l_1 - l_2|/2$. La condición anterior nos garantiza que existen dos números δ_1, δ_2 que hacen que se cumpla una cierta propiedad. Cojamos el más pequeño de ellos y llamémoslo δ. Entonces se tiene que:

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon \text{ y } |f(x) - l_2| < \varepsilon$$

Pero esto contradice la desigualdad triangular: ningún número $f(x)$ puede estar a una distancia menor, simultáneamente, de l_1, l_2 de $|l_1 - l_2|/2$.

Lema del Sandwich
Si tenemos dos funciones f, g, h definidas en un mismo dominio D, y se cumple que para todo punto $x \in D$, $f(x) < g(x) < h(x)$, entonces, para cualquier punto $a \in D$ se tiene que, si existen los siguientes límites y coinciden:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = l$$

entonces:

$$\lim_{x \to a} g(x) = l$$

Propiedades de los Límites
Si existen los límites $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ entonces:

- $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} (f(x)) + \lim\limits_{x \to a} (g(x))$,
- $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = (\lim\limits_{x \to a} (f(x))) \cdot (\lim\limits_{x \to a} (g(x)))$,
- Si $\lim\limits_{x \to a} (g(x)) \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x \to a} (\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{\lim_{x \to a} (f(x))}{\lim_{x \to a} (g(x))}$.
- $\lim\limits_{x \to a} (f(x)^{g(x)}) = (\lim\limits_{x \to a} (f(x)))^{(\lim\limits_{x \to a} (g(x)))}$.

13.4. Continuidad

El concepto de límite de una función en un punto y el concepto de continuidad de una función aparecieron y evolucionaron juntos, debido a la siguiente relación:

Una función es continua en un punto $a \in dom(f)$ si y sólo si:

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \text{ y además } \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Como veremos:

Las funciones elementales son continuas en todo su dominio.

Esto no podemos demostrarlo con las herramientas de este curso, pero es muy útil, sobretodo combinado con las propiedades de los límites:

Ejercicio Resuelto 13.4.1 ***Calcula el límite*** $\lim\limits_{\mathbf{x \to 1}} \left(\dfrac{\mathbf{cos\pi x}}{\mathbf{x^2 - 4 + log(x)}} \right)$

Como $cos\pi x$ *y* $x^2 - 4 + log(x)$ *son funciones elementales, son continuas en todo su dominio. El 1 está en el dominio de ambas. Por lo tanto:*

$$\lim_{x \to 1} cos\pi x = cos(\pi \cdot 1) = -1, \qquad \lim_{x \to 1} (x^2 - 4 + log(x) = 1^2 - 4 + log(1)) = -2$$

De modo que, combinando esto con las propiedades de los límites llegamos a:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{cos\pi x}{x^2 - 4 + log(x)} \right) = \frac{\lim_{x \to 1} cos\pi x}{\lim_{x \to 1} (x^2 - 4 + log(x) = 1^2 - 4 + log(1))} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

13.5. Límites Laterales.

Definición Sucesional de Límite Lateral
Decimos que una función $f(x)$ tiene límite l cuando x se acerca a a por la derecha (parecido sucede por la izquierda) si para cualquier sucesión $(a_0, a_1, \ldots)$ de números mayores que a (menores que a en el otro caso) que converja a a se tiene que $(f(a_0), f(a_1), \ldots)$ tiende a l.

Definición $\varepsilon - \delta$ de Límite Lateral
Decimos que una función $f(x)$ tiene límite l cuando x se acerca a a por la derecha (parecido sucede por la izquierda) si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } (x > a, |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

(cuando nos referimos al caso por la izquierda, simplemente ponemos $x < a$ en lugar de $x > a$).

Ambas definiciones son, por supuesto, equivalentes. Escribimos $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ para denotar a los límites laterales por la izquierda y por la derecha, respectivamente.

Se tiene el siguiente Teorema:

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \Longleftrightarrow \exists \lim_{x \to a^+} f(x), \exists \lim_{x \to a^-} f(x), \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Y la siguiente consecuencia:

Una función definida a trozos, donde los trozos son intervalos, que es continua en cada trozo y que tiene un cambio de criterio en a es continua en a si y sólo si:

$$\exists \lim_{x \to a^-} f(x), \exists \lim_{x \to a^+} f(x) \text{ y además } \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

13.6. Generalización del concepto de Límite: Límites en el infinito. Límites infinitos

En esta sección hablaremos de generalizaciones del concepto de límite. Esto quiere decir, en particular y aunque sea repetitivo recalcarlo, que los límites que aparecen en esta sección no son límites en el sentido estricto.

En primer lugar, tenemos que definir que significa que una sucesión "tienda a infinito".

La sucesión $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ tiende a $+\infty$ si:

$$\forall M \geq 0, \exists N > 0 \text{ tal que } n \geq N \Rightarrow a_n \geq M$$

Una definición similar corresponde a $-\infty$.

Estas sucesiones, no tienen límite en el sentido que explicamos en la primera sección de este capítulo. Son un tipo de lo que se conoce como sucesiones divergentes.

Definición Sucesional de Límite en el Infinito
Decimos que una función $f(x)$ tiene límite l cuando x tiende a $+\infty$ si para cualquier sucesión $(a_0, a_1, \ldots)$ de números que tienden a $+\infty$ tenemos que la sucesión de imágenes $(f(a_0), f(a_1), \ldots)$ tiende a l.

Definición $\varepsilon - \delta$ de Límite en el Infinito
Decimos que una función $f(x)$ tiene límite l cuando x tiende a $+\infty$ si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ tal que } x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Por supuesto, ambas definiciones son, de nuevo, equivalentes y existe una definición análoga para $-\infty$.

Definición Sucesional de Límite Infinito
Decimos que una función $f(x)$ tiene límite $+\infty$ cuando x tiende a a si para cualquier sucesión $(a_0, a_1, \ldots)$ de números que tienden a a tenemos que la sucesión de imágenes $(f(a_0), f(a_1), \ldots)$ tiende a $+\infty$.

Definición $\varepsilon - \delta$ de Límite Infinito
Decimos que una función $f(x)$ tiene límite $+\infty$ cuando x tiende a a si:

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

Puede hacerse una definición análoga para $-\infty$, de nuevo No es del todo correcto decir que el límite anterior "existe".

Hay muchas posibles "combinaciones". Por ejemplo están los límites infinitos en el infinito o los límites laterales infinitos. No vamos a incluir todas estas definiciones (y de hecho escribirlas es alguno de los ejercicios).

Las Propiedades de los Límites y el Lema del Sanwich, que ya vimos en una sección anterior, se pueden generalizar a estas nuevas definiciones de límite... pero hemos de hacerlo con cuidado. Porque no podemos operar con con cualquier expresión (como por ejemplo $+\infty$) como si fuera un número. De esto hablaremos en la sección siguiente. Estas expresiones pueden dar lugar a indeterminaciones.

13.7. Calculo Práctico de Límites. Lista de Indeterminaciones

Sabiendo que las funciones elementales son continuas, que en cualquier función continua el límite en cualquier punto del dominio coincide con el valor de la función en dicho punto y las propiedades de los límites podemos calcular muchos límites.

Pero como ya hemos indicado, al utilizar las propiedades de los límites es posible que al combinar dos límites que sí están bien definidos obtengamos una "cosa rara". ¿Por qué? porque estas propiedades de los limites permiten operar con expresiones con las que en general no se puede operar "alegremente": 0 e ∞. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{tg(x+\frac{\pi}{2})}{x} = \frac{+\infty}{0}$$

¿Y eso que es? Pues hay que tener mucho cuidado.

Algunas de las expresiones, no son tan misteriosas:

$$\forall k \in \mathbb{R},\ \pm\infty + k = \pm\infty \qquad k\cdot(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } k>0 \\ \pm\infty & \text{si } k<0 \end{cases}$$

$$\frac{+\infty}{0} = \pm\infty \qquad \frac{0}{\pm\infty} = 0$$

$$k^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{si } k>1 \\ 0 & \text{si } -1<k<0, 0<k<1 \\ \text{no hay límite} & \text{si } k<-1 \end{cases} \qquad k^{-\infty} = \begin{cases} 0 & \text{si } k>1 \\ +\infty & \text{si } 0<k<1 \\ \text{no hay límite} & \text{si } -1<k<0 \\ 0 & \text{si } k<-1 \end{cases}$$

Es común utilizar las expresiones $0^+, 0^-$ para referirse a "0 de signo positivo" y "0 de signo negativo" respectivamente.

Ejercicio Resuelto 13.7.1 ***Calcula el límite*** $\lim_{\mathbf{x}\to \mathbf{1}^-} \dfrac{\mathbf{x^2-2}}{\mathbf{x-1}}$

Utilizando las propiedades de los límites llegamos a que:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-2}{x-1} = \frac{\lim_{x\to 1^-} x^2-2}{\lim_{x\to 1^-} x-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

Sin embargo hay otras expresiones que aparecen, bastante más complicadas de resolver, son las llamadas **indeterminaciones**, expresiones que toman valores diferentes, dependiendo del ejercicio en el que nos encontremos:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty\cdot 0, \infty-\infty, 1^{\infty}, 0^{\infty}, \infty^0$$

En este curso, veremos algunos trucos para calcular el valor de estas indeterminaciones. Pero son sólo eso, algunos trucos, y no sirven para resolverlas en casos más complicados.

Ejercicio Resuelto 13.7.2 ***Encuentra un ejemplo de funciones*** f, g ***cuyo dominio sea*** $\mathbb{R}$ ***tales que:***

$$\lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = +\infty \qquad \lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\infty$$

y sin embargo:

$$\nexists \lim_{\mathbf{x}\to+\infty} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}))$$

La estrategia en este caso será encontrar primero una función F cuyo límite en $+\infty$ no exista y después encontrar dos funciones f y g cuya suma dé F. El ejemplo típico de función cuyo límite no existe en $+\infty$ es $F(x) = sen(x)$. Cojamos entonces $f(x) = x + senx$, $g(x) = -x$.

13.8. Algunos Métodos para Calcular Indeterminaciones.

Sólo vamos a aprender a resolver indeterminaciones.

Algunos trucos para límites infinitos

(1) **Indeterminación $\infty - \infty$ procedente de un límite de una función polinómica (también funciona para "casi polinomios"):** Se tiene lo siguiente:

> El límite en el infinito de una función polinómica y el de su término principal coinciden. Por tanto será siempre $\pm\infty$. Lo único que hay que mirar con detalle es por tanto el signo, que dependerá del coeficiente del termino principal.

Ejercicio Resuelto 13.8.1 ***Calcula el siguiente límite:***

$$\lim_{\mathbf{x}\to+\infty}(-\mathbf{2x^3}+\mathbf{x}-\mathbf{3}) = \lim_{x\to+\infty} -2x^3 = -\infty$$

Si en lugar de un polinomio tenemos un "casi polinomio" (una suma de términos que pueden incluir, no sólo monomios, si no también raíces) esto sigue funcionando, siempre y cuándo haya un único "término de grado máximo" en el "casi polinomio".

Ejercicio Resuelto 13.8.2 ***Calcula el siguiente límite:*** $\lim_{\mathbf{x}\to+\infty}(\sqrt{\mathbf{2x^3}+\mathbf{1}}-\mathbf{x}+\sqrt[3]{x+1})$.

En este "casi polinomio" aparece una x "indirectamente elevada a $3/2$", una x elevada a 1 y otra "indirectamente elevada a $1/3$". Por lo tanto:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^3+1}-x+\sqrt[3]{x+1}) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x^3} = +\infty$$

(2) **Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ procedente del límite de una función racional (o del cociente de dos "casi polinomios"):** en este caso, hay que comparar el grado del polinomio (o "casi polinomio") del numerador y del denominador. Utilizando la observación anterior, sabemos que sólo tenemos que mirar a los correspondientes términos principales.

Ejercicio Resuelto 13.8.3 ***Calcula los siguientes límites:***

(a) $\lim_{\mathbf{x}\to+\infty}\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}-\mathbf{1}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$

(b) $\lim_{\mathbf{x}\to-\infty}\frac{\mathbf{x^2}+\mathbf{1}}{\mathbf{3x^3}+\mathbf{2x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{3x^3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3x} = 0$

(c) $\lim_{\mathbf{x}\to\pm\infty}\frac{\mathbf{x^3}+\mathbf{2x}+\mathbf{5}}{\mathbf{2x^3}-\mathbf{2x^2}+\mathbf{x}+\mathbf{3}} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{2x^3} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(3) **Indeterminación $\infty - \infty$ procedente del límite de la resta de dos raíces cuadradas:** El problema que podemos encontrarnos en un "casi polinomio" es que no haya un único "término de grado máximo". Pero si lo que tenemos es una resta de dos raíces cuadradas, podemos multiplicar y dividir por el conjugado, para reducir nuestro problema a uno del caso anterior.

Ejercicio Resuelto 13.8.4 ***Calcula el siguiente límite:***

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$$

(4) **Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ por comparación de grados**. Hay unos infinitos "más poderosos que otros". Si el infinito del numerador es "más poderoso" que el del denominador, el límite da $\pm\infty$. Si el infinito del denominador es "más poderoso" que el del numerador, el límite da 0. El orden de "menos poderoso a más poderoso" es el siguiente: el límite cuando x tiende a $+\infty$ de $ln(x)$, el límite de una función potencial de exponente positivo x^n, el límite cuando x tiende a $+\infty$ de una función exponencial con base mayor que 1 a^x.

Algunos trucos para límites en un punto

(1) **Indeterminación $\frac{0}{0}$ procedente del límite de una función racional:** Si al sustituir un valor a en el numerador y denomiandor de una función raciona obtenemos el valor de 0, eso quiere decir que a es una raiz del numerador y del denominador. Basta factorizar y simplificar el término común, como en el siguiente ejemplo:

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to1} \frac{(x+1)}{(x-2)} = -2$$

Algunos trucos generales

(1) **Convertir indeterminaciones $\frac{\infty}{\infty}$ en $\frac{0}{0}$ y viceversa:** Las indeterminaciones $\frac{\infty}{\infty}$ y $\frac{0}{0}$ son equivalentes en el siguiente sentido: la una se puede convertir en la otra y viceversa. Por ejemplo si tuviéramos:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{0}{0}$$

(2) **Indeterminación $0\cdot(\pm\infty)$:** Si tenemos que:

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0\cdot(\pm\infty)$$

entonces tenemos que:

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}$$

(3) **Indeterminaciones 0^0, ∞^0 y 1^∞**. Todas ella deben provenir de calcular el límite de una expresión del tipo $f(x)^{g(x)}$. Y todas se resuelven utilizando el mismo truco:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot ln(f(x))} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\cdot ln(f(x))}$$

La propiedad fundamental del número e: un truco más para la indeterminación 1^∞

Hay que conocer la siguiente propiedad:

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ (a puede ser infinito), entonces:

$$\lim_{x\to a} \left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = 1^\infty = e$$

Claro, esto no siempre lo vamos a encontrar así: en ocasiones tendremos que convertir la expresión que nos den, en algo que se parezca a la anterior, para poder usar esta propiedad.

Regla de L'Hopital

La estudiaremos en el tema de derivadas.

13.9. Teoremas sobre Funciones Continuas en Intervalos Cerrados

Teorema de Bolzano
Si $f(x)$ es una función continua y está definida en $[a, b]$ y se cumple que $f(a)$ y $f(b)$ son de signo opuesto, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de los Valores Intermedios
Si $f(x)$ es una función continua y está definida en $[a, b]$ y se cumple que $f(a) \neq f(b)$ entonces, para cualquier valor y_0 entre $f(a), f(b)$ existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = y_0$.

Teorema de Weirstrass
Si $f(x)$ es una función continua y está definida en $[a, b]$ y se cumple que $f(a)$ y $f(b)$ son de signo opuesto, entonces existen dos puntos x_m y x_M tales que f alcanza un mínimo absoluto en x_m un máximo absoluto en x_M.

Hoja de Ejercicios 9: Sistemas Lineales

Ejercicios Añadidos por Felipe Prieto

1. Demuestra que si una sucesión de números reales $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ es convergente, entonces es de Cauchy.

2. Demuestra que si el límite de $f(x)$ existe y es igual a l_1 y el límite de $g(x)$ existe y es igual a l_2, entonces el límite de $f(x) + g(x)$ existe también y es igual a $l_1 + l_2$.

3. Escribe la definición de "el límite de una sucesión es $-\infty$".

4. Escribe que quiere decir (sucesionalmente y $\varepsilon - \delta$) que "el límite cuando $f(x)$ tiende a $+\infty$ es igual a $-\infty$".

5. Calcula los siguientes límites, con x tendiendo a $\pm\infty$:

   (a) $\lim_{x \to +\infty} (2 + \frac{1}{x})^x$

   (b) $\lim_{x \to +\infty} (ln(x))^{2 - \frac{3}{x^2}}$

   (c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 1}{2x + 3}$

   (d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 - 1}{2x + 3}$

   (e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 4}{x^3 - 200}$

   (f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 1}{2x + 3}$

   (g) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 1}{2x^2 + 3}$

   (h) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 1}}{2x + 3}$

   (i) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{2x + 3}$

   (j) $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 - 1}{\sqrt{x^3 + 3}}$

   (k) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[5]{x^4 - 2}}{\sqrt[11]{2x^5 + 3}}$

   (l) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{2x^3 + x} - \sqrt{3x^3}$

   (m) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{3x^2}$

   (n) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{3x^3 - 2x} - \sqrt{3x^3 + 2}$

   (ñ) $\lim_{x \to +\infty} (ln(x + 3))^{\frac{4x^2 - 5}{\sqrt[3]{2x^6 - 3}}}$

6. Calcula los siguientes límites con x tendiendo a un número real:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{tg(x+\frac{\pi}{2})}{x^2}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{ln(x)}{ln(x-1)}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-x^2+x-1}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{ln(x)}{ln(x-1)}$

   (e) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^3+3x^2-1}{x^4+x}$

   (f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

   (g) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3-2x+1}{x^2-1}$

7. Calcula los siguientes límites, utilizando la propiedad fundamental del número e:

   (a) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+\dfrac{1}{x})^{2x}$

   (b) $\lim\limits_{x\to \infty} (\dfrac{x+1}{x})^{x}$

   (c) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\dfrac{x+1}{x})^{\frac{1}{x^2}}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\dfrac{1}{ln(x)})^{x}$

Ejercicios de la Hoja de la UAM

1. Calcula los límites siguientes:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{\cos \pi x}{x^2 - 4 + \log(x)}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-2}{x-1},$$

$$\text{(c)} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+2x+5}{2x^3-2x^2+x+3}, \qquad \text{(d)} \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{3x^3+2x}.$$

2. Discute la existencia de los límites siguientes y calcula su valor cuando sea posible:

$$\text{(a)} \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4x-7}{7x^2-\sqrt{2x^6+x^5}}, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to\infty} \frac{(3x^2-1)^2(x+7)^3}{x^7+6}, \qquad \text{(c)} \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2-7},$$

$$\text{(d)} \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x}-x\right), \qquad \text{(e)} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x-1}, \qquad \text{(f)} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x-1},$$

$$\text{(g)} \lim_{x\to 0^+} e^{1/x}, \qquad \text{(h)} \lim_{x\to 0^-} e^{1/x}, \qquad \text{(i)} \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}},$$

$$\text{(j)} \lim_{x\to 0^-} \frac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}, \qquad \text{(k)} \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4}, \qquad \text{(l)} \lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1},$$

$$\text{(m)} \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad \text{(n)} \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{(o)} \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}},$$

$$\text{(p)} \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}, \qquad \text{(q)} \lim_{x\to 0} e^{1/x}, \qquad \text{(r)} \lim_{x\to 0} e^{(-1/x^2)},$$

$$\text{(s)} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x/2}}{x^{10}+48}, \qquad \text{(t)} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^{18}+1}} \qquad \text{(u)} \lim_{x\to+\infty} \frac{\log^2 x}{\sqrt{x+3}}.$$

3. Encontrar un ejemplo de funciones f, g, definidas en $\mathbb{R}$, tales que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty,$$

y para las que, sin embargo, $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x)+g(x)\big)$ no existe.

Indicación: Piensa primero en una función h que no tenga límite cuando $x \to +\infty$, y encuentra f y g en las condiciones anteriores de modo que $f+g=h$.

4. Calcula cuánto valen los límites siguientes:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{3-\sqrt{x^2+8}}.$$

Ayuda: Simplifica factores comunes.

5. Estudia el dominio y los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{5x-10}{x^2-2x}$, (b) $f(x) = \frac{x+1}{x}$, (c) $f(x) = \ln|x|$, (d) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$,

(e) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, (f) $f(x) = \frac{x^2-x}{\sin(\pi x)}$, (g) $f(x) = \frac{x^4-4}{x^2+4x+4}$, (h) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

6. Calcula qué valor debe tener c para que la función $f(x) = \begin{cases} \arctan x, & \text{para } x \leq 1 \\ \ln x + c, & \text{para } x > 1 \end{cases}$ sea continua, y dibuja la gráfica de f para ese valor.

7. Se considera la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ en el intervalo cerrado $[-2, 6]$. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo que alcanza f en dicho intervalo? Responde a la misma pregunta para las funciones $g(x) = x^4 + 3x^2$ y $h(x) = e^x$.

8. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$y = \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}, \qquad y = \operatorname{sen}(\ln x), \qquad y = \ln(x^2 \ln^3 x),$$

$$y = 2^x \text{ (Ayuda: usar } a^b = e^{b \ln a}\text{)}, \qquad y = x^x, \qquad y = \operatorname{sen}^4 x - 3x^4 \tan^2 x,$$

$$y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}, \qquad y = \frac{3x+\sqrt[3]{7x^2+1}}{e^{x^2}}, \qquad y = e^{\sqrt{\ln x}}.$$

9. Demuestra que la ecuación $6\,x^5 + 13\,x + 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

10. (a) Da un ejemplo de una función continua f, definida en el intervalo $[0, +\infty)$, tal que $f\big([0, +\infty)\big) = \mathbb{R}$.

    (b) Da un ejemplo de una función continua f, definida en el intervalo $[0, +\infty)$, que no alcanza ni máximo ni mínimo global en este intervalo y satisface $|f(x)| < 1$ para todo $x \in [0, +\infty)$.

11. Discute la existencia de los límites siguientes y calcula su valor cuando sea posible:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^2-3}{2x-2\sqrt{3}}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \big(2\operatorname{sen}^2 x - 1\big)\arctan(2x)$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{e^x+x}{e^x-x}}$, (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan^3 x}{x^4+x^3}$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2\operatorname{sen}^2 x}{\tan^3 x}$,

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + x^2}{2\,x^2}$, (h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$, (i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x$,

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (e^x+2x)^{3/x}$, (k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$, (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x}$,

(m) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan 5x}{\tan 3x}$, (n) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$, (o) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+2^x}{e^x-2^x}$.