

Deseo y espero que esta publicación sirva realmente de ayuda a los estudiantes, y también a los profesores, y haga más agradable (y asequible) el estudio de la Óptica Geométrica.

Valencia, Octubre de 1998

Carlos Ferreira García
Catedrático de Óptica
Universitat de València

ÍNDICE

I.- Introducción	13
II.- Conceptos y leyes fundamentales	17
III.- Superficies ópticas. Lentes delgadas.....	39
IV.- Espejos.....	69
V.- Refracción en superficies planas Láminas plano paralelas y prismas.....	85
VI.- Teoría general de los sistemas ópticos	115
VII.- Formulación matricial de la Óptica gaussiana	145
VIII.- Limitación de los haces de rayos. Diafragmas	167
IX.- Aberraciones monocromáticas	187
X.- Aberraciones cromáticas	225
Bibliografía	241

CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN

El estudio de la Óptica en general abarca un campo muy extenso y, siguiendo las definiciones clásicas, se puede entender la Óptica como el estudio de las radiaciones electromagnéticas de todas las frecuencias: producción, emisión, propagación, absorción y detección. A veces se precisa que la definición precedente es la de Óptica Física para distinguirla de acepciones más restringidas por su objeto o su método. La Ciencia de la Visión, que formaba inicialmente toda la Óptica constituye actualmente la Óptica Fisiológica. La Óptica Ondulatoria descansa sobre la teoría electromagnética de la luz; con determinadas aproximaciones se obtiene la Óptica Geométrica. El descubrimiento de una estructura cuántica de la luz (fotones) dio lugar al nacimiento de la Óptica Cuántica y el reconocimiento de ciertas analogías entre los fotones y las partículas dotadas de masa ha permitido el desarrollo de una Óptica Corpuscular.

El primer contacto con la Óptica normalmente se hace a través de la Óptica Geométrica ya que ésta se ocupa solamente de las cuestiones relacionadas con la propagación de la luz. Su objetivo es determinar las trayectorias de la energía radiante a través de distintos medios materiales, o estudiar la disposición de los medios de modo que la propagación se ajuste a determinadas trayectorias consiguiendo, por ejemplo, que toda una familia de ellas pase por un punto como ocurre en los casos de focalización. El desarrollo de la Óptica Geométrica se basa en los conceptos de rayo luminoso para caracterizar a la luz y el de índice de refracción para caracterizar a los materiales. De esta manera se desenvuelve como una teoría geométrica pura sobre un único postulado físico: el principio de Fermat que está íntimamente ligado al principio filosófico de mínimo, de gran aplicación en los fenómenos de la Naturaleza.

Un rayo luminoso no es más que la curva geométrica normal a las superficies de las ondas electromagnéticas en los medios ópticamente isótropos; en los medios ópticamente homogéneos, es una línea recta. Esta propiedad de normalidad es uti-

lizada por la Óptica Geométrica para determinar la formación de imágenes ópticas asimilando los rayos a las trayectorias de energía luminosa. Esto no es más que una aproximación, válida en tanto en cuanto los rayos utilizados formen un haz en forma de cono con un ángulo sólido suficiente, es decir, mientras que la superficie utilizada de las ondas, necesariamente limitada, no tenga un área excesivamente pequeña. La observación muestra que, en una región del haz de un tamaño del orden de la longitud de onda de la luz, aparecen fenómenos de difracción que no predice la Óptica Geométrica. Por tanto, si se reduce el área útil de una superficie de onda con un diafragma cuyo diámetro sea del orden de la longitud de onda, la noción de rayo pierde su significado. Se puede mostrar que la aproximación de la Óptica Geométrica se une a la Óptica Ondulatoria en el caso límite en el que la longitud de onda tienda a cero. En los medios ópticamente anisótropos, los rayos luminosos, trayectorias de la energía, no se confunden con las normales a las ondas.

El índice de refracción de un medio ópticamente transparente para una radiación electromagnética de frecuencia determinada, no es más que la relación entre la velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío ($c=299792458$ m/s) y la velocidad de fase en el medio (producto de la frecuencia por la longitud de onda). De esta manera, cada medio ópticamente transparente queda perfectamente caracterizado por su capacidad de ralentizar las radiaciones electromagnéticas que inciden sobre él.

Partiendo de estas premisas se puede definir la **Óptica Geométrica**, según J.P. Mathieu, A. Kastler y P. Fleury en su *Dictionnaire de physique* (3ª edición, ed. Masson, 1991), como el **conjunto de proposiciones que conciernen la propagación de la luz a través de los medios transparentes y la formación de imágenes ópticas, apoyándose en la noción de rayo luminoso. Estas proposiciones pueden deducirse del principio de Fermat o de las leyes equivalentes de Snell-Descartes sin otras hipótesis. La Óptica Geométrica constituye una aproximación de la Óptica Ondulatoria válida para longitudes de onda despreciables.**

En cualquier caso, ésta es la definición formal de la Óptica Geométrica que parte de las bases del conocimiento de la Teoría Electromagnética lo que no siempre ocurre a la hora de abordar esta materia. Para el lector que no haya tenido contacto ni con la Óptica ni con la Teoría Electromagnética, esta definición le puede llevar a pensar que se trata de una materia sumamente complicada, con una gran complejidad matemática y de difícil comprensión. Nada más lejos de la realidad que encarar esta materia con estas prevenciones. La Óptica Geométrica es, como se ha mencionado, una aproximación que nos permite movernos desde el punto de vista macroscópico, lo que permite explicar de una manera sencilla una gran cantidad de fenómenos de la vida diaria. Es necesario tener en cuenta que la mayor parte de la información la adquirimos a través de imágenes y es muy satisfactorio poder conocer cómo se forman y cómo se pueden manipular esas imágenes que obtenemos en nuestra retina, ya que el ojo no es más que un sistema óptico cuyo funcionamiento en este aspecto puede ser explicado con la Óptica Geométrica. Hay una gran cantidad de situaciones en las que la sencillez de la aproximación de la Óptica Geométrica compensa ampliamente su falta de precisión cuando se intentan describir fenómenos en los que interviene la naturaleza ondulatoria o corpuscular de la luz.

Desde el punto de vista matemático, la Óptica Geométrica es muy elegante, ya que desde un único principio (el principio de Fermat) puede deducirse todo su formalismo, de manera coherente. Es más, los razonamientos para esta deducción son de tipo geométrico por lo que unas nociones básicas de Geometría son, en general, suficientes para poder abordar el estudio de esta materia.

A la hora de desarrollar la Óptica Geométrica hay fundamentalmente dos maneras de hacerlo. Una más deductiva que consiste en plantear los principios generales y a partir de ellos estudiar los casos particulares (lentes, espejos, prismas...). Esta manera de actuar es la que presenta el libro de J. Casas, *Óptica* (7ª edición, 1994) que constituye una referencia clásica en el mundo de la Óptica. La otra forma es ir estudiando en primer lugar los casos más sencillos (lente delgada, espejo plano...) para poco a poco generalizar el estudio hacia los casos más generales. Un ejemplo clásico de este tipo de razonamiento es el libro de E. Hecht y A. Zajac, *Óptica* (ed. Addison-Wesley Iberoamericana, 1988). Esta segunda manera de abordar el problema es la que se utilizará a lo largo de este texto ya que presenta la ventaja de que el lector puede ir poco a poco familiarizándose con la materia y su lenguaje específico lo cual es básico cuando se trata del primer contacto con el mundo de la Óptica.

En cualquier caso parece muy interesante, cuando se quiere estudiar el conjunto de la Óptica, comenzar por adquirir unas bases sólidas de Óptica Geométrica pues con ella se pueden abarcar una gran cantidad de fenómenos, lo que permite, al menos, poder realizar un primer análisis del problema. Muchas cuestiones tanto de Óptica Ondulatoria (interferencias, difracción...) como incluso de Óptica Cuántica precisan, como paso previo, conocimientos del tipo de planos de formación de imágenes, trazados de rayos, etc. que la Óptica Geométrica proporciona de una manera sencilla.

La Óptica Geométrica que se va a desarrollar en los próximos capítulos es, en realidad, el caso particular más utilizado en la bibliografía por su simplicidad, en el que el origen de objetos y el origen de imágenes son puntos conjugados entre sí a través del sistema óptico y su aumento vale justamente la unidad (puntos principales). Dado que una de las funciones principales de la Óptica Geométrica es determinar para un objeto dado donde se forma su imagen a través de un sistema óptico más o menos complicado, la pregunta que puede surgir, para conocer la posición de dicho objeto con respecto al sistema, es qué punto es el origen desde el que se mide la posición del objeto. Lo inmediato sería pensar en elegir dos puntos cualesquiera como origen de objetos y de imágenes ya que, a fin de cuentas, un sistema óptico establece una aplicación biyectiva entre los puntos del espacio objeto con los correspondientes puntos del espacio imagen. Esta opción trae consigo un álgebra mucho más complicada que si se eligen esos dos puntos de tal manera que sean conjugados entre sí (uno imagen del otro). Dentro de esta elección el caso que proporciona las ecuaciones más sencillas ocurre cuando el aumento entre esos dos puntos (origen de objetos, origen de imágenes) es la unidad. Sólo en algunos casos muy determinados, fundamentalmente en la llamada ecuación de Newton, en los que las ecuaciones obtenidas son de gran utilidad a la vez que simples se van a utilizar orígenes diferentes. En cualquier caso, dentro de las condiciones impuestas

en el desarrollo de la Óptica Geométrica, si se utiliza correctamente esta álgebra, los resultados obtenidos son exactos y constituye una potente herramienta para el análisis de los sistemas ópticos.

Antes de entrar propiamente en el desarrollo de la Óptica Geométrica, conviene recordar que todas las materias gustan más cuando se las conoce. Siendo ésta una materia en la que a partir de un único principio se pueden deducir un conjunto de proposiciones que constituyen una aproximación aplicable en muchos casos para predecir con gran exactitud el comportamiento de la luz, no conviene ir excesivamente rápido en su estudio, ya que si el concepto en que se basa la relación a obtener no está bien asentado, difícilmente se logrará su comprensión. Un error frecuente consiste en tratar la Óptica Geométrica como un conjunto de relaciones matemáticas, con poca o ninguna conexión entre ellas, entre las que hay que “elegir” para resolver el problema planteado, olvidando en muchos casos que se trata de un conjunto coherente en el que existen muchos caminos para llegar a la meta. No hay que olvidar que, aunque la Óptica Geométrica es una disciplina que se estudia desde hace siglos, y en algún momento se puede caer en la tentación de pensar que no tiene nada que aportar, es fundamental para la comprensión de la Óptica y constituye una herramienta imprescindible para abordar la compensación visual y el estudio de los elementos oftálmicos.

Capítulo II

CONCEPTOS Y LEYES FUNDAMENTALES

II.1.- CONCEPTO DE RAYO LUMINOSO E ÍNDICE DE REFRACCIÓN

A continuación vamos a ver como la propagación de la luz en el espacio la podemos asimilar al concepto de rayo luminoso y que el medio material dónde tiene lugar ésta viene caracterizado por su índice de refracción.

Siempre que entre una fuente de luz y una pantalla se interpone un objeto opaco, la silueta de éste aparece delimitando una zona que comúnmente denominamos sombra. Conforme aumenta el tamaño de la fuente, aparece alrededor de la sombra y rodeándola otra región denominada penumbra cuya intensidad va variando conforme nos alejamos del centro de la sombra. Este hecho tan simple permite establecer que la luz se propaga en línea recta y que, además, las rectas que parten del foco emisor se pueden considerar como algo más que meras líneas geométricas. Dado que indican las trayectorias de la energía radiante reciben el nombre de **rayos de luz**.

El modo de acercarnos “físicamente” a este concepto es mediante la obtención de un cono de luz a partir de un foco emisor y un orificio en una pantalla opaca tal y como puede verse en la figura 2.1.

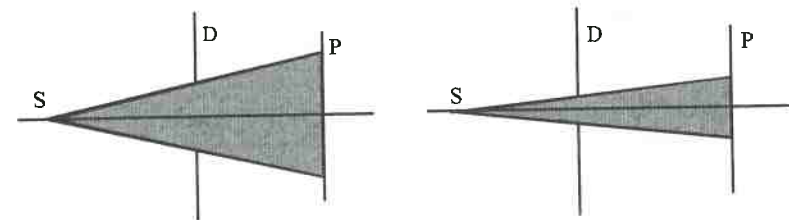


FIGURA 2.1. Haz y pincel de luz

A este cono lleno de luz que, geoméricamente determinan el foco emisor y el orificio se le denomina **haz de luz**. Si las dimensiones del orificio son pequeñas al cono de luz se le denomina pincel. Si hiciéramos tender el diámetro del orificio a cero, teóricamente, llegaríamos a una abstracción ideal que constituye el rayo luminoso.

Ahora bien, en el ámbito de la Óptica Geométrica, tanto el haz como el pincel no son considerados como tubos de luz por los que se conduce un flujo energético sino como el conjunto de todos sus rayos definidos por el punto emisor y cada uno de los puntos del orificio o superficie que atraviesan.

Como es bien conocido, la velocidad de la luz en el vacío, c , es una constante cuyo valor es aproximadamente de 300.000 km/s. Ahora bien, cuando la luz se propaga en los diferentes medios materiales su velocidad v , varía, ya que depende de la constitución de los mismos. Desde este punto de vista, cada medio puede ser caracterizado por un número, n , llamado **índice de refracción**, y que se define como:

$$n = c / v$$

De la propia definición, inmediatamente se deduce que este número, n , es adimensional puesto que es el cociente entre dos velocidades y siempre superior a la unidad. También se puede hablar de índice de refracción de una sustancia (1) respecto a otra (2) de acuerdo con la relación:

$$n_{12} = n_1 / n_2$$

Atendiendo a las características del índice de refracción los medios materiales se pueden clasificar en homogéneos o inhomogéneos y en isótropos o anisótropos.

Si el índice de refracción es una constante, la velocidad de la luz en el medio material será igual en todos sus puntos, decimos entonces que este medio es **“homogéneo e isótropo”**. Si n varía con la dirección, $n = f(s)$, el medio se denomina **“anisótropo”**, y si varía de unos puntos a otros pero en cada uno de esos puntos es independiente de la dirección, $n = f(x, y, z)$, entonces el medio se denomina **“heterogéneo”**. Como ejemplo digamos que los vidrios ópticos son homogéneos e isótropos, la atmósfera es heterogénea puesto que el índice de refracción varía con la altura, y anisótropos son los cristales de las sustancias que no cristalizan en el sistema regular por ejemplo el cuarzo y la calcita.

El índice de refracción del aire tiene un valor de 1.000293 a 0° C y 760 mm de Hg de presión (nosotros siempre consideraremos para el aire $n = 1$). Los índices de refracción de la mayor parte de los vidrios corrientes utilizados en los instrumentos ópticos están comprendidos entre 1,46 y 1,96. Solamente hay unas pocas sustancias que tiene índices de refracción mayores que este valor, siendo el diamante una de ellas, con un índice de refracción de 2,42.

La frecuencia de la luz no cambia cuando ésta se propaga por medios diferentes. El razonamiento es evidente, si en un medio material entra un determinado número de ondas luminosas por unidad de tiempo, dichas ondas no pueden acumularse dentro del material ni tampoco destruirse, luego deben salir de él el mismo número

de ondas por unidad de tiempo que entraron y por tanto la frecuencia permanece inalterada. Dado que la ecuación que liga la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad es:

$$v = \lambda \cdot f$$

si al atravesar el medio, cambia la velocidad de propagación de la luz será necesariamente por que la longitud de onda cambia. Si λ_0 es la longitud de onda de una radiación en el vacío, y λ la longitud de onda de la misma radiación en un medio de índice n tendremos:

$$\lambda = v / f = (v / c) (c / f) = \lambda_0 / n$$

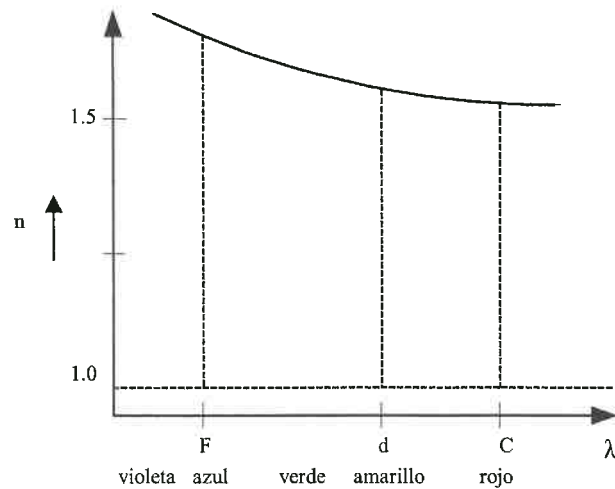
relación que nos muestra la variación de la longitud de onda con el índice de refracción. Esta dependencia de la longitud de onda con el índice de refracción, se conoce con el nombre de **dispersión cromática**.

II.2.- DISPERSIÓN CROMÁTICA

Alrededor de 1666, Isaac Newton, en una de sus experiencias sobre análisis y síntesis de luz blanca, colocó un prisma en la trayectoria de un haz de luz solar, consiguiendo obtener detrás del prisma una banda de colores desde el rojo hasta el violeta, que él denominó espectro. Así pues, observó que diferentes colores sufrían diferentes desviaciones cuando pasaban a través del prisma. Este hecho es debido a que, cuando la luz blanca se propaga por un medio material, cada onda monocromática que la compone (cada color) lo hace con una velocidad distinta y, por lo tanto, conduce a una dependencia del índice de refracción con la longitud de onda, provocando la dispersión cromática. Un medio no dispersivo será aquel en que no exista esta dependencia. El único que cumple esta condición es el vacío, aunque desde el punto de vista práctico también pueden considerarse como no dispersivos los gases a baja temperatura. Un ejemplo típico de cómo varía el índice de refracción en función de la longitud de onda en la mayoría de los medios materiales dieléctricos, lo podemos ver en la figura 2.2. Tal y como puede se puede apreciar, el índice disminuye conforme aumenta la longitud de onda.

Debido a este fenómeno de la dispersión cromática, si decimos que un medio tiene un determinado índice de refracción, se entiende que es para una determinada longitud de onda y, por tanto, habrá que especificar de cuál se trata.

Como consecuencia de esta diferencia entre las velocidades de propagación de las distintas longitudes de onda, cuando un rayo de luz blanca (o policromática) incide sobre un medio de índice n' diferente del índice n del medio del que procede, éste cambia de dirección y, además, cada una de las longitudes de onda que lo componen tiene una variación diferente en su dirección de propagación (fig. 2.3). La dispersión cromática es, pues, la responsable de que la separación angular respecto a la normal a la superficie de separación entre ambos medios sea diferente para cada longitud de onda (en la figura se ha exagerado este fenómeno para que se aprecie con

FIGURA 2.2. Variación de n en función de λ .

más claridad). Si, inicialmente, teníamos un rayo de luz blanca, en el segundo medio, tenemos tantos rayos (en direcciones diferentes) como longitudes de onda.

Como sería imposible analizar una a una todas y cada una de las longitudes de onda del espectro visible, normalmente el estudio de la luz policromática se hace solamente con algunas líneas espectrales de forma discreta y procurando abarcar todo el espectro visible. Se emplea para ello la nomenclatura de las franjas del espectro solar dadas por Fraunhofer; algunas de estas líneas espectrales, en concreto las más utilizadas aparecen en la tabla 2.1. A partir de ahora, si decimos que un medio material tiene un determinado índice de refracción sin especificar más, se sobreentenderá que se refiere al índice de refracción para la línea d, si quisiéramos

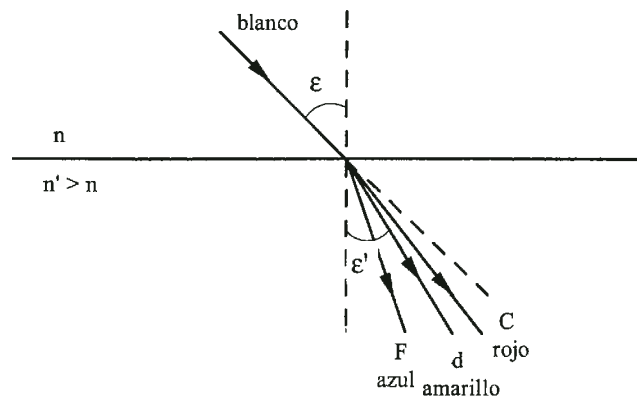


FIGURA 2.3. Dispersión cromática.

referirnos al índice de refracción para otra longitud de onda, deberemos especificar explícitamente de qué longitud de onda se trata.

Tabla 2.1 ALGUNAS LÍNEAS DE FRAUNHOFER

Denominación	Longitud de onda (nm)	Fuente de donde procede
C	656.2 (rojo)	H
D₁	589.5 (amarillo)	Na
D	Centro del doblete 589.2	Na
D₂	589.0 (amarillo)	Na
d	587.6 (amarillo)	He
F	486.1 (azul)	H
g	422.7 (violeta)	Ca

De acuerdo a esta nomenclatura, se define el **número de Abbe** de un medio material por la relación:

$$v = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}$$

donde aparecen los índices de refracción de las líneas C y F, así como para la raya d (o D) de modo que las longitudes de onda elegidas se encuentran en las regiones amarilla, azul y roja del espectro visible. El número de Abbe es un parámetro usualmente utilizado para caracterizar a los vidrios ópticos y su valor en estos medios varía normalmente entre 30 y 70. Al inverso del número de Abbe se le denomina **poder dispersivo**.

Atendiendo al valor numérico del número de Abbe, los vidrios ópticos se clasifican en vidrios **CROWN**, aquellos que tienen un número de Abbe igual o superior a 50, y vidrios **FLINT**, aquellos cuyo número de Abbe es igual o inferior a 50.

Los vidrios ópticos quedan totalmente caracterizados por su número de Abbe y por el índice de refracción correspondiente a la línea d (en otros textos se utiliza la línea D correspondiente al centro del doblete del sodio). Es importante conocer cuál es la nomenclatura propia de las casas comerciales ya que ésta varía de unas a otras. La casa Schott utiliza una representación gráfica cartesiana con el número de Abbe en el eje OX y el índice en el eje OY como se puede ver en la figura 2.4. De esta manera, cada punto de la gráfica proporciona una pareja de valores (v , n_d) quedando así perfectamente definido el vidrio.

Otra forma de definir un vidrio es la utilizada por la marca SOVIREL que define a cada vidrio por una letra y un número. La letra representa la unidad y la primera cifra decimal del valor del índice de acuerdo con la tabla 2.2. El número que sigue representa las siguientes cifras decimales del índice de refracción. Las cifras que aparecen después del guión dan directamente el número de Abbe del material. Por ejemplo, el vidrio B15-58 tiene un índice de 1.515 y un número de Abbe de 58.

A	B	C	D	E	F	G
1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0

Tabla 2.2

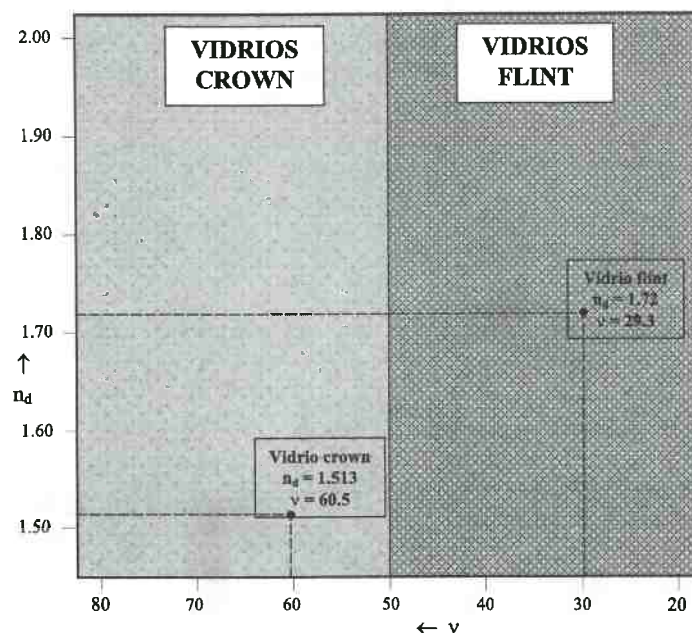


FIGURA 2.4. Representación de los vidrios.

Por último, otra manera de caracterizar a los vidrios se muestra en la Tabla 2.3. En la columna de la izquierda, se da a cada vidrio una pareja de números que pueden ser 6 u 8 dígitos. Los primeros números representan las cifras decimales del índice de refracción para el amarillo (n_d) y las siguientes, después de los dos puntos, el número de Abbe multiplicado por 10 si trata de tres dígitos o por 100 si son cuatro.

Tabla 2.3. VIDRIOS ÓPTICOS

Designación	Índice n_d	Nº de Abbe v	Tipo
511:635	1.511	63.5	Crown
523:586	1.523	58.6	Crown
605:380	1.605	38.0	Flint
666:324	1.666	32.4	Flint
5180:5960	1.5180	59.60	Crown
5287:5161	1.5287	51.61	Crown
6492:3378	1.6492	33.78	Flint
7200:2931	1.7200	29.31	Flint

II.3.- CONCEPTO DE CAMINO ÓPTICO. PRINCIPIO DE FERMAT.

Cuando la luz recorre una distancia d en un medio homogéneo de índice n , se define el camino óptico como:

$$(LCO) = (L) = n \cdot d \quad (2.1)$$

Así definido, el camino óptico representa la distancia que recorrería la luz en el vacío en un tiempo t igual al empleado en recorrer la distancia d en el medio de índice n .

$$(L) = n \cdot d = (c/v) d = c (d/v) = c \cdot t \quad (2.2)$$

El camino óptico es aditivo de manera que si la luz atraviesa un conjunto de distintos medios con diferentes índices n_i y diferentes espesores d_i (tal y como puede verse en la figura 2.4), el camino óptico total viene dado por la suma de todos los caminos ópticos, es decir:

$$(L) = n_1 d_1 + n_2 d_2 + \dots + n_i d_i + \dots + n_m d_m = \sum n_i d_i$$

$$(L) = (c/v_1)d_1 + (c/v_2)d_2 + \dots + (c/v_i)d_i + \dots + (c/v_m)d_m =$$

$$c(t_1 + t_2 + \dots + t_i + \dots + t_m) = c \cdot t \quad (2.3)$$

Nuevamente observamos que el camino óptico es el equivalente en cualquier medio a la distancia recorrida por la luz en el vacío, en el tiempo t .

En el caso de que el medio sea heterogéneo, (ver también figura 2.4) con una variación continua de índice, la trayectoria se puede descomponer en elementos infinitesimales, ds , dentro de los cuales se puede considerar el índice constante. En este caso, la expresión del camino óptico vendría dado por la integral:

$$(L) = \int_A^B n(s) ds \quad (2.4)$$

donde con $n(s)$ hemos expresado la variación del índice con la trayectoria.

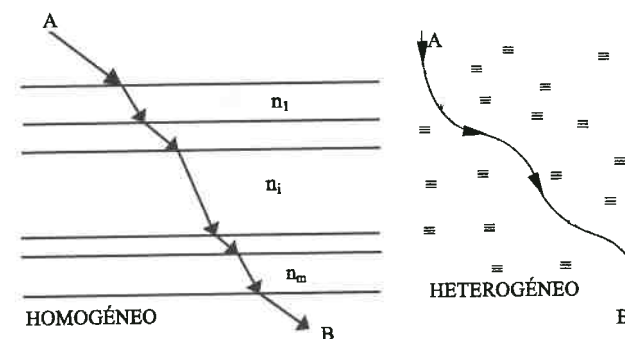


FIGURA 2.4. Medios de diferentes índices.

El camino óptico se considera positivo cuando se mide en la dirección de la luz y negativo en caso contrario.

Definido este concepto, podemos enunciar ahora el principio de Fermat:

“De todos los caminos geométricos posibles, entre dos puntos dados, sólo son caminos reales de luz aquellos cuyo camino óptico es máximo, mínimo o constante (es decir, el camino óptico en una trayectoria real de luz es estacionario)”.

Matemáticamente, esto se expresa:

$$\delta(L) = 0 \quad (2.5)$$

donde δ representa la variación de camino óptico. Fermat estableció asimismo que el tiempo requerido por la luz para recorrer su camino también sería máximo, mínimo o estacionario y que por tanto el camino óptico es una medida de ese tiempo.

II.4.- LEYES DE LA ÓPTICA GEOMÉTRICA

Basándonos en el principio de Fermat, la primera consecuencia inmediata es que **en un medio homogéneo e isótropo la luz se propaga en línea recta**. Esto resulta evidente, puesto que si la variación de camino óptico es nula, la luz recorre el camino más corto para ir de un punto a otro, y en un medio homogéneo e isótropo, la trayectoria más corta es la línea recta.

Veamos ahora las demás leyes de la Óptica Geométrica, también llamados postulados de Descartes o leyes de Snell.

II.4.1.- Ley de la reflexión

Supongamos, por sencillez, que la superficie donde se produce la reflexión es un plano (fig. 2.5). Vamos a buscar cuál es el camino que sigue la luz para ir desde un punto A hasta otro punto B después de reflejarse en la superficie plana considerada (plano Π). De todos los planos perpendiculares a Π que pasan por A, siempre podremos encontrar uno que contenga al punto B (plano Π'). El sistema de coordenadas cartesianas escogido es tal que el plano Π es el plano XY y el plano Π' se corresponde con el plano YZ. En ese sistema cartesiano, las coordenadas de los puntos A y B serán $(0, y_1, z_1)$ y $(0, y_2, z_2)$ respectivamente. Denominaremos $I(x, y, 0)$, al punto de incidencia sobre la superficie reflectante. Si la trayectoria AIB es un camino real de luz, debe cumplir el principio de Fermat. De todos los caminos posibles sólo habrá uno que cumplirá la condición de mínimo.

Calculemos dicho camino óptico:

$$(L) = (AIB) = n(AI + IB) = n \left[\sqrt{x^2 + (y - y_1)^2 + z_1^2} + \sqrt{x^2 + (y - y_2)^2 + z_2^2} \right]$$

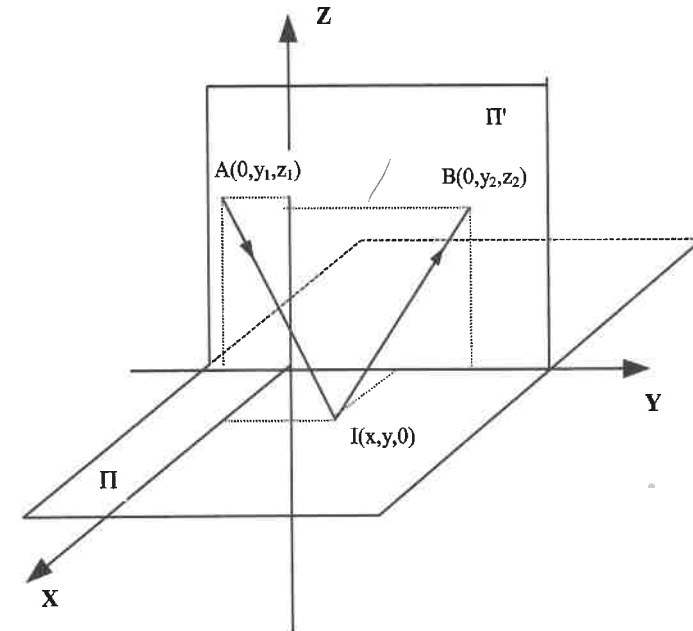


FIGURA 2.5. Ley de reflexión.

La condición de mínimo viene dada por: $\delta(L) = 0$, puesto que L depende de x y de y (A y B son fijos), entonces:

$$\delta(L) = \frac{\partial(L)}{\partial x} dx + \frac{\partial(L)}{\partial y} dy = 0$$

Para que esto se verifique, cada una de las derivadas parciales debe anularse por separado, es decir:

$$\frac{\partial(L)}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial(L)}{\partial y} = 0$$

Calculemos pues estas dos derivadas:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= n2x \left\{ \frac{1}{2AI} + \frac{1}{2IB} \right\} = 0 \\ nx \left\{ \frac{1}{AI} + \frac{1}{IB} \right\} &= 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

es decir, el punto I está en el eje OY, lo cual implica que **el rayo incidente, la**

normal a la superficie en el punto de incidencia, y el rayo reflejado, están en el mismo plano (constancia del plano de incidencia).

Teniendo en cuenta la condición expresada en la ec. (2.6), el camino óptico (AIB) vendría dado por (ver fig. 2.6):

$$(L) = (AIB) = n \left[\sqrt{(y - y_1)^2 + z_1^2} + \sqrt{(y - y_2)^2 + z_2^2} \right]$$

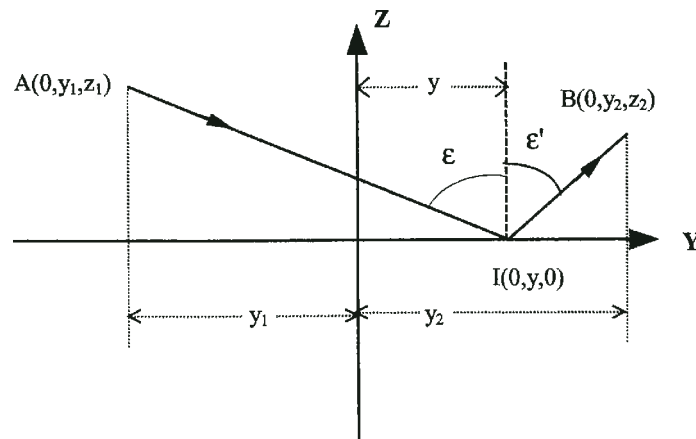


FIGURA 2.6. Reflexión. Constancia del plano de incidencia.

Como hemos visto anteriormente, también ha de cumplirse que $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = n \left\{ \frac{2(y - y_1)}{2AI} + \frac{2(y - y_2)}{2IB} \right\} = 0$$

$$\left\{ \frac{(y - y_1)}{AI} + \frac{(y - y_2)}{IB} \right\} = 0$$

De la figura 2.6, deducimos que:

$$\text{sen } \varepsilon = \frac{(y - y_1)}{AI} \quad \text{y} \quad \text{sen } \varepsilon' = -\frac{(y - y_2)}{IB}$$

y por tanto, si sustituimos queda:

$$\text{sen } \varepsilon - \text{sen } \varepsilon' = 0 \Rightarrow \text{sen } \varepsilon = \text{sen } \varepsilon' \quad (2.7)$$

y puesto que ε y ε' , son ángulos cuyos valores están comprendidos entre 0° y 90° entonces:

$$\varepsilon = \varepsilon' \quad (2.8)$$

es decir, el ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales.

II.4.2.- Ley de la refracción

De manera similar a lo que hemos hecho para la luz reflejada se puede hacer para el caso de la refracción, es decir cuando el rayo luminoso en su propagación cambia de medio material y por tanto pasa de un medio de índice n a otro de índice diferente n' . Supongamos esos dos medios de índices n y n' que están separados, en el caso más sencillo por una superficie plana (plano Π) y supongamos que el rayo de luz va desde un punto A hasta otro punto B refractándose en dicha superficie. Al igual como hemos hecho en el apartado anterior de todos los planos perpendiculares a Π que pasan por A, escogemos uno que contenga al punto B (plano Π'). El sistema de coordenadas cartesianas escogido vuelve a ser nuevamente aquel para el cual el plano Π es el plano XY y el plano Π' es el plano YZ (fig. 2.7). En dicho sistema cartesiano, las coordenadas de los puntos A y B serán $(0, y_1, z_1)$ y $(0, y_2, z_2)$ respectivamente.

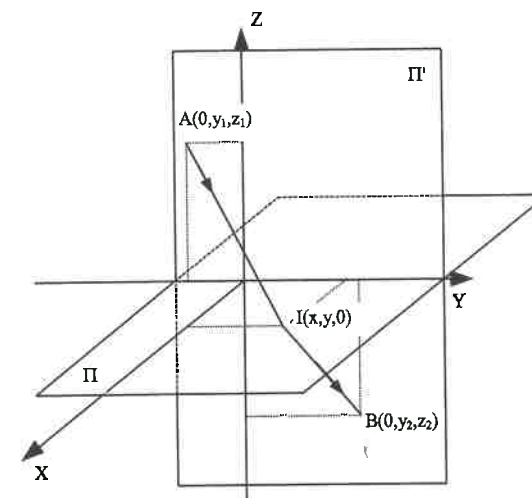


FIGURA 2.7. Ley de la refracción.

Sea $I(x, y, 0)$, el punto de incidencia sobre la superficie de separación entre los dos medios. Si la trayectoria AIB es un camino real de luz, deberá cumplirse el Principio de Fermat que en este caso se traducirá en que el camino óptico (AIB) debe ser mínimo. Calculemos dicho camino óptico:

$$(L) = (AIB) = nAI + n'IB =$$

$$= n\sqrt{x^2 + (y - y_1)^2 + z_1^2} + n'\sqrt{x^2 + (y - y_2)^2 + z_2^2}$$

La condición de mínimo se expresa: $\delta(L) = 0$, pero como L depende de x y de y (A y B son fijos), entonces:

$$\delta(L) = \frac{\partial(L)}{\partial x} dx + \frac{\partial(L)}{\partial y} dy = 0$$

Para que esto se verifique, cada una de las derivadas parciales debe anularse por separado, es decir:

$$\frac{\partial(L)}{\partial x} = 0 \quad y \quad \frac{\partial(L)}{\partial y} = 0$$

Calculemos pues estas dos derivadas:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{n2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 + z_1^2}} + \frac{n'2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{nx}{AI} + \frac{n'x}{IB}$$

Haciendo operaciones e igualando a cero:

$$\frac{nxIB + n'xAI}{AI \times IB} = 0 \Rightarrow x(nIB + n'AI) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (2.9)$$

Es decir, el punto I está en el eje OY, lo cual implica **que el rayo incidente, la normal a la superficie en el punto de incidencia, y el rayo refractado, están en el mismo plano (constancia del plano de incidencia).**

Incorporando esta condición, el camino óptico (AIB) será pues (fig. 2.8):

$$(L) = (AIB) = n\sqrt{(y - y_1)^2 + z_1^2} + n'\sqrt{(y - y_2)^2 + z_2^2}$$

Como hemos visto anteriormente, también ha de cumplirse que $\delta L / \delta y = 0$:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{n2(y - y_1)}{2\sqrt{y^2 - 2yy_1 + y_1^2 + z_1^2}} + \frac{n'2(y - y_2)}{2\sqrt{y^2 - 2yy_2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Operando:

$$n(y - y_1)/AI + n'(y - y_2)/IB = 0$$

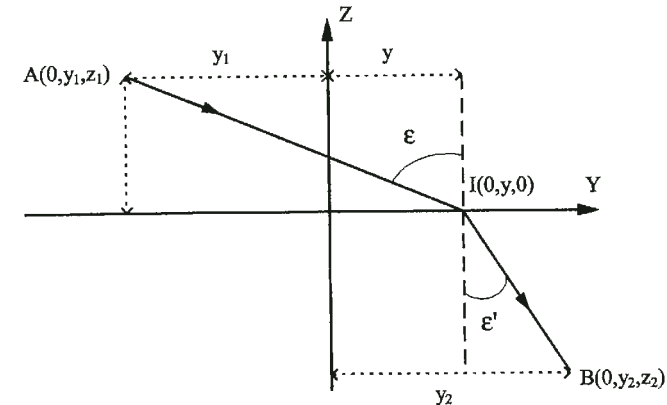


FIGURA 2.8. Refracción. Constancia del plano de incidencia.

De la figura 2.8, deducimos que:

$$\text{sen } \epsilon = (y - y_1)/AI \quad y \quad \text{sen } \epsilon' = -(y - y_2)/IB$$

y por tanto, si sustituimos queda:

$$\begin{aligned} n \text{ sen } \epsilon - n' \text{ sen } \epsilon' &= 0 \\ n \text{ sen } \epsilon &= n' \text{ sen } \epsilon' \end{aligned} \quad (2.10)$$

que es la ecuación de la ley de la refracción.

Así pues, de acuerdo con lo dicho hasta ahora, podemos enunciar las leyes de Descartes de la siguiente manera:

- 1) **La trayectoria de la luz en los medios homogéneos e isotropos es rectilínea.** Cuando la fuente de luz está muy alejada (en el infinito) todos los rayos que provienen de ella, supuesta puntual, son paralelos entre sí y en el caso de que estuviesen limitados por una abertura circular el haz de luz tendría forma cilíndrica
- 2) **Conservación del plano de incidencia.** Cuando un rayo de luz incide sobre la superficie de separación entre dos medios materiales, pueden ocurrir los siguientes fenómenos:

- a) **absorción**, esto ocurre en los cuerpos opacos,
- b) **refracción**, la superficie de separación es transparente y el rayo se refracta siguiendo una trayectoria rectilínea pero cambiando de dirección respecto a la trayectoria incidente,
- c) **reflexión**, la superficie de separación está especulada y el rayo incidente continúa propagándose en el primer medio con una trayectoria rectilínea simétrica de la incidente con respecto a la normal en el punto de incidencia.

En general, suelen ocurrir los tres fenómenos simultáneamente pero nosotros los trataremos por separado.

En lo que se refiere al fenómeno de la absorción, hay que indicar que ésta no sólo se produce en la superficie de separación sino a lo largo de toda la trayectoria; no obstante, puesto que se trata de un fenómeno que no afecta a la trayectoria del rayo sino a la energía que transporta, es un fenómeno que se sale del ámbito de la Óptica Geométrica y que por tanto no abordaremos en el presente texto.

En cualquiera de los dos últimos casos, refracción o reflexión, **el rayo incidente determina con la normal a la superficie en el punto de incidencia, un plano que contiene también al rayo refractado o reflejado. Dicho plano se denomina plano de incidencia.**

3) **Ley de la refracción.** La ley de Snell para la refracción se escribe:

$$n \sin \varepsilon = n' \sin \varepsilon'$$

donde n es el índice de refracción del primer medio, n' el del segundo medio, ε el ángulo de incidencia (ángulo entre el rayo incidente y la normal a la superficie) y ε' el ángulo de refracción (ángulo entre el rayo refractado y la normal a la superficie de separación entre los dos medios).

En este fenómeno de refracción (paso de la luz de un medio a otro de diferente índice de refracción) se pueden distinguir dos casos dependiendo de la relación de índices que haya entre un medio y otro.

- Si $n < n'$** (es decir cuando el rayo pasa de un medio menos denso a otro más denso) $\varepsilon > \varepsilon'$ y por lo tanto el rayo se acerca a la normal.
- Si $n > n'$** (el rayo pasa de un medio más denso a otro menos denso) en este caso $\varepsilon < \varepsilon'$ el rayo se aleja, entonces de la normal. En este segundo caso, habrá un momento en que el ángulo de incidencia es tal que el rayo refractado sale rasante. A ese ángulo de incidencia se le denomina ángulo límite ε_L y representa el máximo valor del ángulo de incidencia para el cual existe refracción. Su valor es:

$$n \sin \varepsilon_L = n' \sin 90^\circ \quad \sin \varepsilon_L = n'/n \quad (2.11)$$

Si se incide con un ángulo mayor, el rayo ya no puede refractarse y entonces se refleja cumpliendo la ley de la reflexión. A este fenómeno se le conoce con el nombre de reflexión total (fig. 2.9). Es el fenómeno por el cual, una superficie refractante (transparente) pasa a comportarse como un espejo para determinados ángulos de incidencia.

4) **Ley de la reflexión.** Este cuarto postulado de Descartes determina la trayectoria del haz reflejado. Si ε es el ángulo de incidencia y ε' el ángulo de reflexión (ángulo entre la normal y el rayo reflejado en el punto de incidencia), ambos son iguales, es decir:

$$\varepsilon = \varepsilon'$$

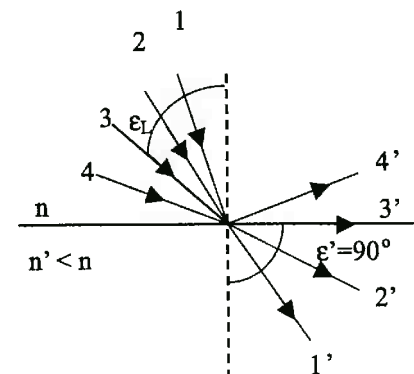


FIGURA 2.9. Reflexión total. Ángulo límite.

5) **Reversibilidad de la luz.** Las trayectorias que sigue la luz a través de los diferentes medios son reversibles. Supongamos un rayo que, partiendo de un punto A, incide sobre un conjunto de medios materiales refractándose y reflejándose hasta alcanzar el punto de llegada, B. Si tomásemos ahora ese punto B como punto de partida, la trayectoria que seguiría la luz para ir desde B hasta A sería exactamente la misma que siguió para ir desde A hasta B, pero en sentido inverso.

II.5.- TEOREMA DE MALUS-DUPIN

El teorema de Malus - Dupin establece que, si sobre cada uno de los rayos que emite un punto luminoso tomamos caminos ópticos iguales, el conjunto de puntos que limitan dichas trayectorias constituyen una superficie denominada "superficie de onda o frente de ondas", esta superficie es perpendicular a todos los rayos y equivale al lugar geométrico alcanzado por la luz en un tiempo dado. Si bien no lo vamos a demostrar por la dificultad que entraña, sí que es fácil extraer alguna consecuencia del mismo. Así por ejemplo, en el caso particular de que el punto emisor esté inmerso en un medio homogéneo, las superficies de onda serán esferas cuyo centro será el mismo punto emisor. Si ese punto emisor está en el infinito, los rayos formarían un haz paralelo y por tanto las superficies de onda serían planas.

Tanto la ley de la refracción como la ley de la reflexión, se pueden deducir del teorema de Malus - Dupin. Supongamos un frente de onda plano que incide sobre la superficie de separación entre dos medios materiales de índices n y n' . Sabemos que, despreciando el fenómeno de absorción, el frente de ondas incidente dará lugar simultáneamente a un frente de ondas plano reflejado y otro transmitido (Fig. 2.10, ver las líneas discontinuas). Cada frente de ondas forma el mismo ángulo con la superficie, que sus rayos correspondientes, con la normal a la superficie, por ser ángulos entre rectas perpendiculares. Supongamos que el frente de ondas incidente llega a AB. A partir de ese momento, el rayo que pasa por B recorrerá una distancia

BB' en el primer medio, mientras que en el mismo tiempo, el rayo que pasa por A recorrerá una distancia AA' en el segundo medio, menor que la anterior si $n < n'$.

Los caminos ópticos recorridos deben ser iguales, luego:

$$n BB' = n' AA' \quad (2.12)$$

Ahora bien, los frentes de onda AB y A'B' deben ser perpendiculares a los rayos BB' y AA' respectivamente, luego se puede escribir:

$$AA' = AB' \sin \epsilon' \quad BB' = AB' \sin \epsilon$$

Sustituyendo en la ecuación (2.12) y simplificando, se obtiene la ley de la refracción:

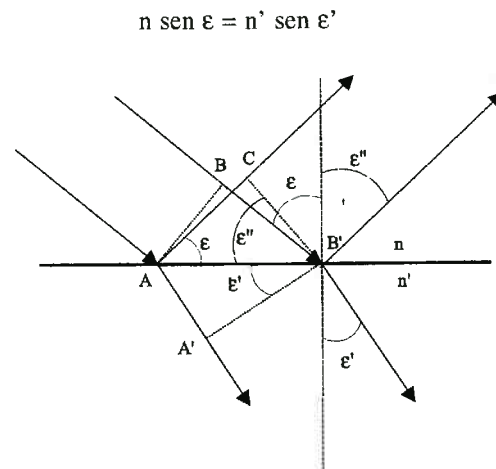


FIGURA 2.10. Refracción y reflexión de la luz según el teorema de Malus-Dupin.

De la misma manera si ahora nos fijamos en lo que le ocurre a la luz reflejada partiendo del instante en que el frente de ondas llega hasta AB. El rayo que pasa por el punto A recorrerá una distancia AC en el mismo medio, simultáneamente al rayo que pasa por B que recorrerá la distancia BB'. Dados que los caminos ópticos deben ser iguales:

$$AC = BB'$$

De la figura se deduce que:

$$AC = AB' \sin \epsilon'' \quad BB' = AB' \sin \epsilon$$

por lo tanto:

$$\epsilon = \epsilon''$$

que no es más que la ley de la reflexión.

II.6.- RELACIÓN OBJETO-IMAGEN. ESTIGMATISMO

Se considera que un punto es **imagen** de otro punto que denominaremos **objeto** siempre que todos los rayos que parten del objeto vayan a parar a la imagen independientemente del número de veces que se reflejen y/o se refracten.

Un sistema capaz de reproducir todos los puntos objeto en sus puntos imagen correspondientes recibe el nombre de **estigmático**. En un sistema de este tipo, el camino óptico seguido por cualquiera de los rayos que salen desde un punto objeto a su punto imagen correspondiente, es siempre el mismo. Es importante remarcar el hecho de que, desgraciadamente, los sistemas ópticos estigmáticos no existen a

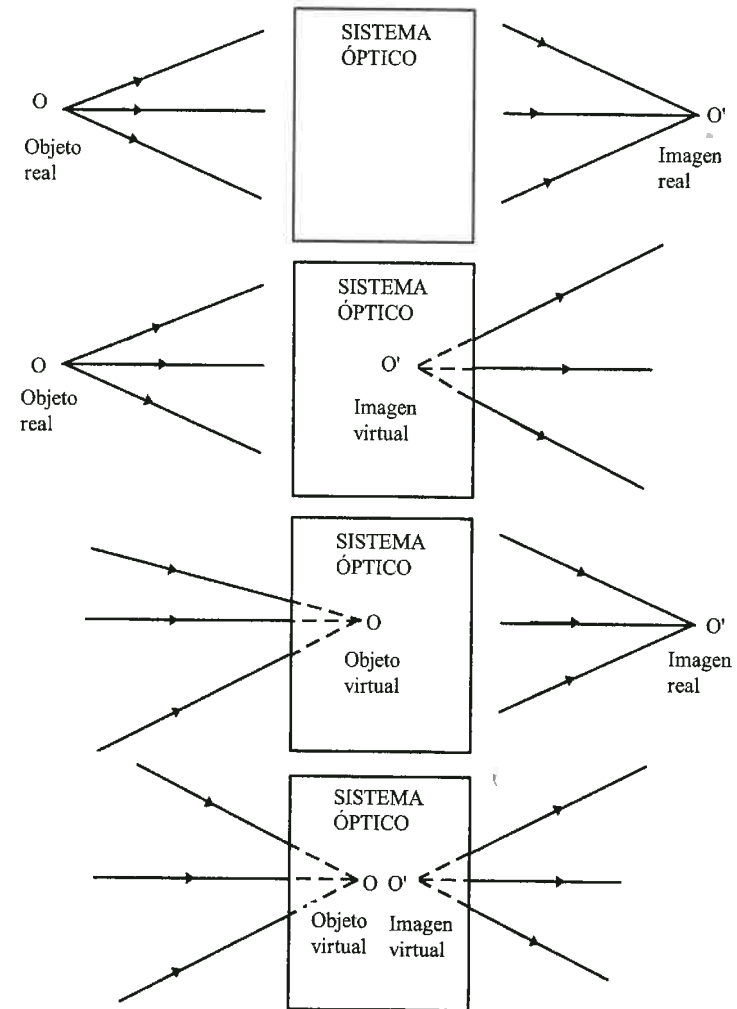


FIGURA 2.11. Objetos e imágenes reales y virtuales.

excepción del espejo plano. Éste es el único sistema óptico capaz de reproducir estigmáticamente cualquier punto objeto en su punto imagen correspondiente. Los demás, como ya se irá desarrollando en temas posteriores, sólo tendrán un comportamiento estigmático cuando se cumplan determinadas condiciones.

En la formación de imágenes por sistemas ópticos se pueden producir dos situaciones diferentes dependiendo de que los rayos converjan o no. Siempre que los rayos convergen a un punto dado, si en dicha zona colocamos una pantalla, aparecerá en la misma un punto real. Es lo que se denomina una **“imagen real”** y se forma por el cruce real de los rayos que salen de un sistema óptico. Pero en el caso de que los rayos diverjan, esa concentración de luz no tendrá lugar, y será la continuación “virtual” de dichos rayos divergentes la que dará lugar a la formación de la imagen. Es lo que se denomina una **“imagen virtual”** que se forma por el cruce de las prolongaciones de los rayos y que, a pesar de no poder ser “recogida” en una pantalla, el ojo puede ver perfectamente puesto que esos rayos son recogidos y concentrados en la retina. De la misma manera, extendiendo este concepto se pueden clasificar los objetos en reales o virtuales dependiendo de que los rayos entren al sistema óptico considerado pasando real o virtualmente por un punto objeto (Fig. 2.11).

CUESTIONES

1.- Concepto de camino óptico.

Cuando un rayo de luz recorre una cierta distancia “d” en un medio de índice “n”, emplea para hacerlo un cierto tiempo “t”. En ese mismo tiempo, en el vacío recorrería una distancia mayor, (L), puesto que la velocidad de la luz en el vacío es superior a la velocidad en cualquier medio. A la distancia (L) se le denomina camino óptico y en un medio homogéneo se puede calcular simplemente como:

$$(L) = nd = \frac{c}{v} d = ct$$

Si el medio es heterogéneo, la variación de índice es continua y entonces el camino óptico se debe calcular mediante una integral:

$$(L) = \int n(s) ds$$

donde n(s) indica la variación del índice con el punto.

2.- Demostrar que el camino óptico se puede expresar como una suma de tiempos invertidos en atravesar un conjunto de capas de materiales ópticos cuyos índices son n_i y espesores d_i multiplicados por la velocidad de la luz en el vacío.

Si disponemos de un conjunto k de capas de materiales de índices n_i y espesores d_i , el camino óptico total será:

$$(L) = n_1 d_1 + n_2 d_2 + \dots + n_i d_i + \dots + n_k d_k = \sum_{i=1}^k n_i d_i = \sum_{i=1}^k \frac{c}{v_i} d_i = c \sum_{i=1}^k t_i = ct$$

3.- Dado un medio cuyo índice varía de la forma $n = n_0 (1 + 1/x)$, ¿cuánto tiempo tardará un rayo de luz en ir desde el punto (1,0) hasta el punto (2,0) siguiendo una trayectoria en forma de línea recta?

Sabemos que:

$$t = \frac{(L)}{c}$$

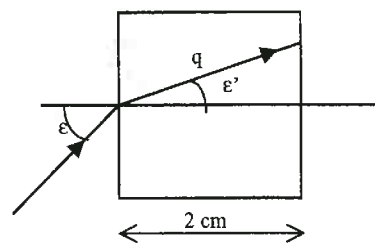
entonces, basta con calcular el camino óptico para poder saber el tiempo que tarda el rayo de luz en hacer el recorrido. Como se trata de un medio heterogéneo:

$$(L) = \int_1^2 n_0 (1 + 1/x) dx = n_0 [x]_1^2 + n_0 [\ln x]_1^2 = n_0 (1 + \ln 2)$$

y con esto, el tiempo empleado será:

$$t = \frac{n_0 (1 + \ln 2)}{c}$$

4.- Calcular el camino óptico recorrido dentro de un cubo de índice 1.6 rodeado de aire, por un rayo que incide en el centro de una cara con un ángulo de 45° . La arista del cubo mide 2 cm.



Si el ángulo de incidencia es de 45° , por la ley de refracción deducimos que:

$$\sin 45^\circ = 1.6 \sin \epsilon' \Rightarrow \epsilon' = 26.23^\circ$$

Por otra parte:

$$\cos \epsilon' = \frac{2}{q} \Rightarrow q = \frac{2}{\cos 26.23^\circ} = 2.23 \text{ cm}$$

con lo que el camino óptico recorrido por el rayo será:

$$(L) = n \times q = 1.6 \times 2.23 = 3.57 \text{ cm}$$

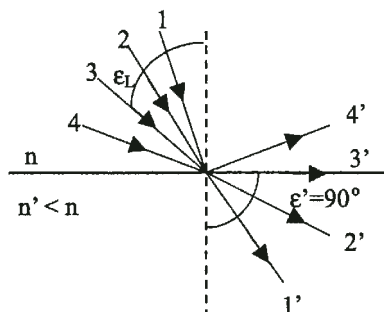
5.- Demostrar que la ley de Snell de refracción se puede expresar de la forma:
 $\cos^2 \epsilon = 1 - (n'/n)^2 (1 - \cos^2 \epsilon')$

Partiendo de la expresión general de la ley de refracción: $n \sin \epsilon = n' \sin \epsilon'$, teniendo en cuenta que $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ y operando en la expresión anterior obtenemos:

$$n^2 (1 - \cos^2 \epsilon) = n'^2 (1 - \cos^2 \epsilon') \Rightarrow n^2 - n'^2 + n'^2 \cos^2 \epsilon' = n^2 \cos^2 \epsilon$$

$$\cos^2 \epsilon = 1 - \left(\frac{n'}{n}\right)^2 + \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \cos^2 \epsilon' \Rightarrow \cos^2 \epsilon = 1 - \left(\frac{n'}{n}\right)^2 (1 - \cos^2 \epsilon')$$

6.- Discutir las condiciones en las que se produce reflexión total.



La reflexión total se produce en una superficie refractante que separa dos medios de índices n y n' distintos. Si $n > n'$, entonces por la ley de la refracción $\epsilon < \epsilon'$. Como se observa en la figura, llega un momento en que el valor de ϵ' es de 90° y el rayo emergente sale rasante a la superficie. Este valor del ángulo de incidencia es el ángulo límite.

Cuando se incide con un ángulo superior al límite existirá reflexión total. En el caso de que $n < n'$, entonces $\epsilon > \epsilon'$ y no obtendremos nunca este fenómeno puesto que los ángulos

de incidencia siempre podrán variar entre 0° y 90° y, en todos los casos obtendremos un ángulo de refracción $< 90^\circ$.

7.- ¿Qué es la reflexión total? Diferencias y analogías entre ésta y la reflexión especular.

La reflexión total es el fenómeno por el cual, en una superficie refractante (transparente), la luz no se refracta cambiando de medio sino que se refleja en dicha superficie que se comporta como si fuera un espejo. Este hecho es debido a que los rayos de luz llegan a la superficie con ángulos demasiado grandes (mayores que el ángulo límite, ángulo para el cual la refracción sería de 90° saliendo el rayo rasante a la superficie).

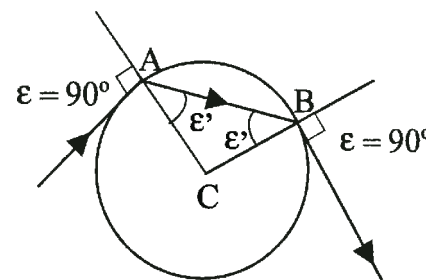
La principal diferencia entre la reflexión total y la reflexión especular está en que la primera sólo ocurre para ciertos ángulos (aquellos que son mayores que el ángulo límite) mientras que la segunda ocurre para todos los ángulos puesto que se trata de un espejo.

La analogía entre las dos reside en que ambas se rigen por la ley de la reflexión (el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión son iguales) y las imágenes formadas por reflexión total en una superficie refractante son las mismas que las que forma un espejo de las mismas características.

8.- Un rayo de luz que incide tangente a una gota de agua esférica, ¿entra en la misma? Si lo hace, indica el número de veces que este rayo se refleja dentro de la gota. Calcula asimismo la desviación del rayo emergente respecto al incidente.

Si el rayo de luz incide tangente a la gota, el ángulo de incidencia será de 90° , por lo que el ángulo ϵ' de refracción será:

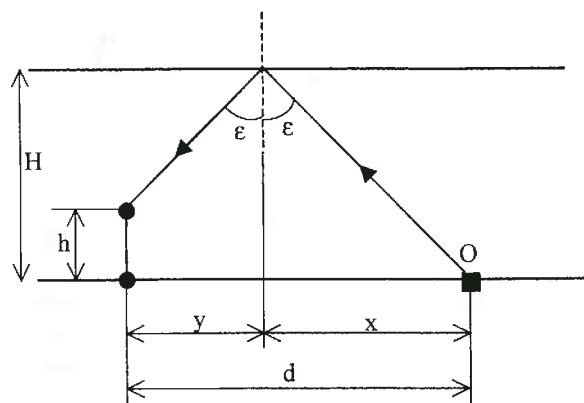
$$\sin 90^\circ = \frac{4}{3} \sin \epsilon' \Rightarrow \sin \epsilon' = \frac{3}{4} \Rightarrow \epsilon' = 48.6^\circ$$



Como el triángulo ABC es isósceles, dicho rayo llegará al punto B con un ángulo ϵ' igual al ángulo de refracción en A por lo que el rayo saldrá de la gota con un ángulo de 90° y no se habrá reflejado dentro de ella. En cuanto a la desviación producida por la gota de agua, en la primera refracción la desviación es de $(90 - \epsilon')$ y en la segunda refracción se produce la misma desviación por lo que:

$$\delta = 2(90 - \epsilon') = 2(90 - 48.6) = 82.8^\circ$$

9.- Un buzo de altura h se encuentra en el fondo de un lago de profundidad H . Calcular la distancia mínima desde el punto donde se encuentra el buzo hasta los puntos del fondo que el buzo puede ver reflejados en la superficie del agua.



Para que el buzo pueda ver el objeto O tiene que existir un rayo que salga de O y, por reflexión total en la superficie del agua, llegue al observador. Para ello, debe cumplirse que el ángulo ε con el que llega dicho rayo a la superficie del agua sea mayor que el ángulo límite ε_L , es decir:

$$\varepsilon > \varepsilon_L \Rightarrow \operatorname{tg} \varepsilon > \operatorname{tg} \varepsilon_L$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{x}{H} = \frac{y}{H-h} \Rightarrow \begin{cases} x = H \operatorname{tg} \varepsilon \\ y = (H-h) \operatorname{tg} \varepsilon \end{cases}$$

Como la distancia $d = x + y$, entonces:

$$d = \operatorname{tg} \varepsilon (2H - h) > (2H - h) \operatorname{tg} \varepsilon_L$$

En el agua $n = 4/3$, luego $\operatorname{sen} \varepsilon_L = 3/4$ y entonces $\varepsilon_L = 48.6^\circ$ y $\operatorname{tg} 48.6^\circ = 1.13$ con lo cual la distancia del objeto al buzo debe ser:

$$d > 1.13(2H - h)$$

Capítulo III

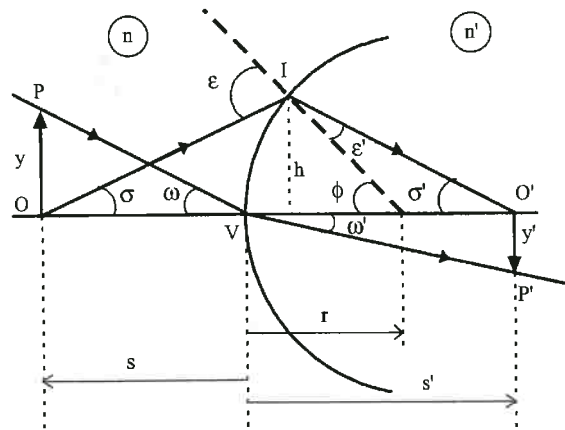
SUPERFICIES ÓPTICAS. LENTES DELGADAS

III.1.- NOTACIÓN. CONVENIO DE SIGNOS

Como paso previo al desarrollo de los temas que ahora se inician y para unificar toda la nomenclatura empleada vamos a concretar y fijar, tanto el sistema de coordenadas como el criterio de signos a utilizar. Para ello vamos a distinguir varios puntos:

- 1) Siempre consideraremos que la luz viaja de izquierda a derecha.
- 2) Los elementos que hacen referencia a la imagen se designan mediante las mismas letras que los que hacen referencia al objeto pero con primas. Los puntos se representan con letras mayúsculas, los segmentos con letras minúsculas y los ángulos con letras griegas.
- 3) Las distancias toman su origen en la superficie óptica. De este modo, para los puntos situados a su izquierda las distancias serán negativas y para los puntos situados a su derecha positivas. El criterio empleado para los radios de curvatura es el mismo, si el centro de curvatura de la superficie está a la derecha, el radio es positivo y si está a la izquierda negativo.
- 4) Los ángulos de incidencia y refracción/reflexión se consideran positivos si, al llevar por giro el rayo a coincidir con la normal por el camino angular más corto, se va en sentido horario y negativos en caso contrario.
- 5) Los ángulos formados con el eje se consideran positivos si, al llevar por giro el rayo a coincidir con el eje por el camino angular más corto, se va en sentido antihorario y negativos en caso contrario.
- 6) Las distancias perpendiculares al eje se consideran positivas hacia arriba y negativas hacia abajo.

En la figura 3.1 tenemos un ejemplo con una superficie esférica donde hemos puntualizado los signos de todas las magnitudes que intervienen.



$$\begin{aligned} r, s, h, y &> 0 \\ s, y' &< 0 \\ \sigma', \phi, \varepsilon, \varepsilon' &> 0 \\ \sigma &< 0 \\ \omega, \omega' &> 0 \text{ con el eje} \\ \omega, \omega' &< 0 \text{ refracción} \end{aligned}$$

FIGURA 3.1. Notación. Convenio de signos.

III.2.- SUPERFICIES ÓPTICAS

La mayoría de las superficies utilizadas en lentes oftálmicas, que van a ser objeto preferente de nuestro interés, son superficies de revolución, de ahí la necesidad de, en primer lugar, centrarnos en su estudio. Las superficies de revolución son superficies obtenidas mediante la rotación de una línea curva alrededor de un eje, pudiéndose dividir principalmente en:

Superficies esféricas. Se obtienen mediante la rotación de un círculo o de un arco alrededor de uno de sus diámetros. Las superficies planas pueden considerarse como un caso especial de superficies esféricas de radio infinito (Fig. 3.2).

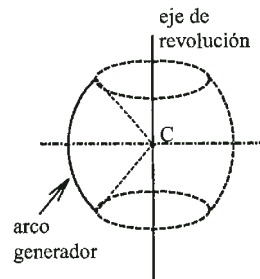


FIGURA 3.2. Generación de superficies ópticas esféricas.

Superficies cilíndricas. Se generan mediante la rotación de una línea alrededor de otra que le es paralela (Fig. 3.3).

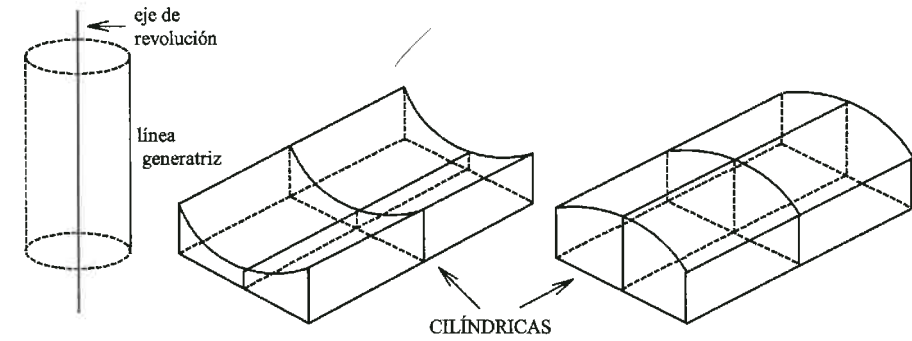


FIGURA 3.3. Generación y tipos de superficies ópticas cilíndricas.

Superficies tóricas. Se generan mediante la rotación de un círculo o de un arco alrededor de un eje que, si bien se encuentra en el mismo plano que el determinado por el arco y su centro de curvatura, no pasa por dicho centro (Fig. 3.4).

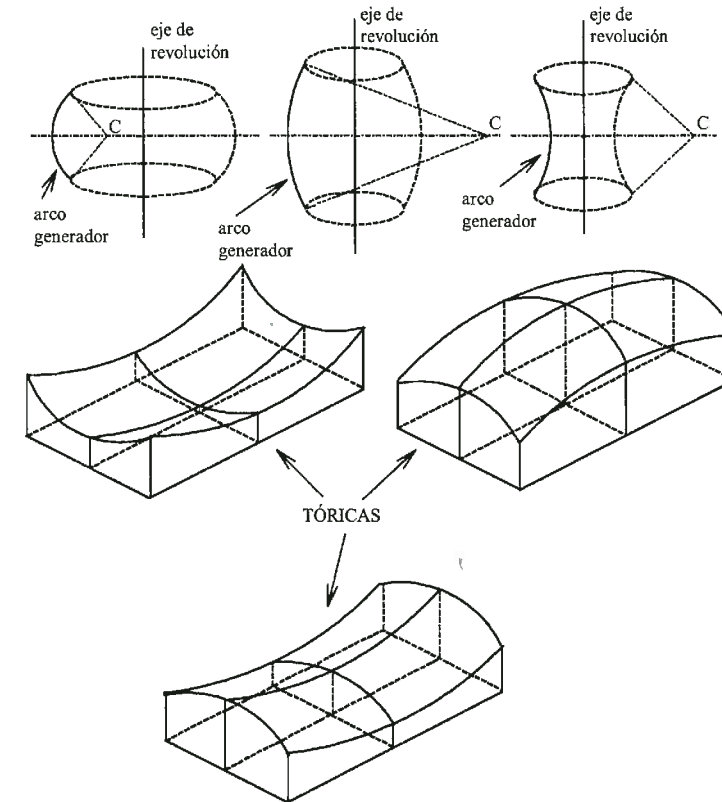


FIGURA 3.4. Generación y tipos de superficies ópticas.

III.3. CÁLCULO DE LA REFRACCIÓN EN UNA SUPERFICIE ESFÉRICA. PUNTOS DE YOUNG

En primer lugar, vamos a abordar el problema de las superficies esféricas. La esfera es la superficie de mayor interés en Óptica y la más utilizada, debido a su simetría, su sencillez de tallado y fácil manejo matemático, por lo que merece un estudio detenido.

En este estudio, nos vamos a restringir a lo que le sucede a un punto que está situado sobre el eje de revolución de la superficie esférica, eje que denominaremos eje óptico. Dicho punto emite rayos en todas direcciones que se refractan al alcanzar la superficie. Estamos, pues, interesados en encontrar una relación matemática, si la hay, que nos diga donde está localizada la imagen estigmática de dicho punto.

La figura 3.5 representa la sección de una superficie esférica de radio r , que separa dos medios de índices n y n' respectivamente. A esta superficie llega un rayo luminoso como el OI , que se refracta según la dirección IO' (suponemos $n < n'$ y así $\epsilon' < \epsilon$). Para la obtención del punto O' se considera otro rayo que incida en la dirección del eje óptico. Evidentemente no se desviaría, de modo que el punto O' se obtendría como intersección del rayo IO' con el eje óptico.

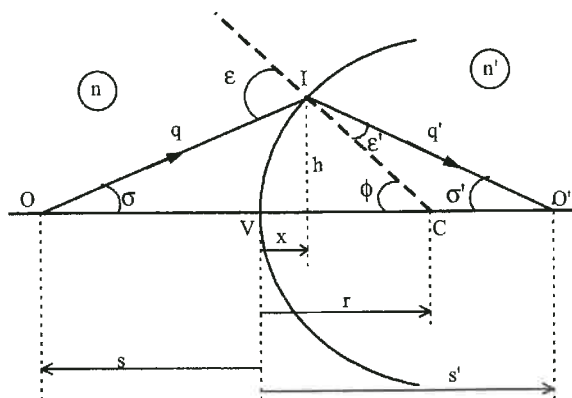


FIGURA 3.5. Refracción en una superficie esférica.

Si nos fijamos en los triángulos OIC e ICO' , haciendo $OI = q$, $IO' = q'$ y aplicando el teorema del coseno (fig. 3.6):

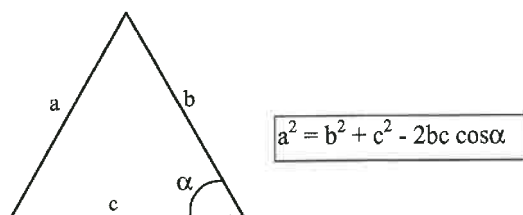


FIGURA 3.6. Teorema del coseno.

tenemos que las distancias q y q' recorridas por el rayo se pueden escribir como:

$$\left. \begin{aligned} q &= \sqrt{r^2 + (r-s)^2 - 2r(r-s)\cos\phi} \\ q' &= \sqrt{r^2 + (s'-r)^2 + 2r(s'-r)\cos\phi} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Dado que el camino óptico recorrido por este rayo es: $(L) = n \cdot q + n' \cdot q'$, y que, como hemos visto en el tema anterior, éste debe tener un valor estacionario, entonces su variación con respecto al parámetro que diferencia un camino de otro posible, debe ser cero. Puesto que para dos puntos fijos O y O' , los valores de q y q' varían con el punto de incidencia I sobre la superficie (lo cual implica una variación en el ángulo ϕ) entonces, tenemos que la condición de que el camino elegido sea un camino real de luz será:

$$\frac{d(L)}{d\phi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\phi} (n \cdot q + n' \cdot q') = 0 \Rightarrow n \frac{dq}{d\phi} + n' \frac{dq'}{d\phi} = 0 \quad (3.2)$$

Derivando en las expresiones de q y q' , obtenemos:

$$\begin{aligned} n \left\{ \frac{1}{2q} [2r(r-s)\sin\phi] \right\} + n' \left\{ \frac{1}{2q'} [-2r(s'-r)\sin\phi] \right\} &= 0 \\ r \sin\phi \left[\frac{n(r-s)}{q} - \frac{n'(s'-r)}{q'} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Puesto que ni r ni ϕ pueden ser cero, la única posibilidad que queda es hacer nula la expresión entre corchetes, y operando un poco, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{nr}{q} - \frac{ns}{q} - \frac{n's'}{q'} + \frac{n'r}{q'} &= 0 \\ \frac{n'}{q'} + \frac{n}{q} &= \frac{1}{r} \left(\frac{n's'}{q'} + \frac{ns}{q} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

También podemos llegar a esta misma expresión aplicando directamente la ley de Snell al rayo considerado teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} n \sin \epsilon &= n' \sin \epsilon' \\ -\sigma + \phi + \pi - \epsilon &= \pi \Rightarrow \epsilon = \phi - \sigma \\ \sigma' + \epsilon' + \pi - \phi &= \pi \Rightarrow \epsilon' = \phi - \sigma' \end{aligned} \quad (3.5)$$

Sustituyendo ϵ y ϵ' por su valor y desarrollando las expresiones de los senos, queda:

$$\begin{aligned} n \sin(\phi - \sigma) &= n' \sin(\phi - \sigma') \\ n \sin \phi \cos \sigma - n \cos \phi \sin \sigma &= n' \sin \phi \cos \sigma' - n' \cos \phi \sin \sigma' \\ \sin \phi (n \cos \sigma - n' \cos \sigma') &= \cos \phi (n \sin \sigma - n' \sin \sigma') \end{aligned} \quad (3.6)$$

De la figura 3.5, también podemos deducir las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } \phi &= h/r \quad \cos \phi = (r-x)/r \\ \text{sen } \sigma &= -h/q \quad \cos \sigma = (x-s)/q \\ \text{sen } \sigma' &= h/q' \quad \cos \sigma' = (s'-x)/q' \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Si sustituimos estas expresiones en la ecuación (3.6) y operamos:

$$\begin{aligned} \frac{h}{r} \left[n \frac{x-s}{q} - n' \frac{s'-x}{q'} \right] &= \frac{r-x}{r} \left[n \left(\frac{-h}{q} \right) - n' \frac{h}{q'} \right] \\ \frac{nx}{q} - \frac{ns}{q} - \frac{n's'}{q'} + \frac{n'x}{q'} &= \frac{-nr}{q} + \frac{nx}{q} - \frac{n'r}{q'} + \frac{n'x}{q'} \\ \frac{n}{q} + \frac{n'}{q'} &= \frac{1}{r} \left[\frac{ns}{q} + \frac{n's'}{q'} \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como era de esperar, hemos llegado a la misma expresión (3.4) que habíamos alcanzado al aplicar el principio de Fermat al camino óptico recorrido por el rayo.

Esta ecuación nos dice que la esfera no es una superficie estigmática, puesto que la situación de la imagen dependerá del rayo escogido para formarla. Para un objeto fijo (s constante), dependiendo del valor de q (y por tanto del rayo elegido) obtendremos un valor de q' (un rayo emergente diferente) y, en consecuencia un valor distinto de s' (una posición de la imagen distinta).

Sin embargo, existen algunas parejas de puntos conjugados, para los cuales la esfera sí que se comporta como una superficie estigmática, son los llamados **puntos de Young**. Vamos a calcular ahora dónde están situados esos puntos. Para ello, consideremos la figura 3.7 en la que, por simplicidad en este caso se ha considerado una superficie esférica cóncava que separa dos medios de índices n y n' . De un punto objeto O sale un rayo que se refracta en la superficie dando una imagen virtual en O' .

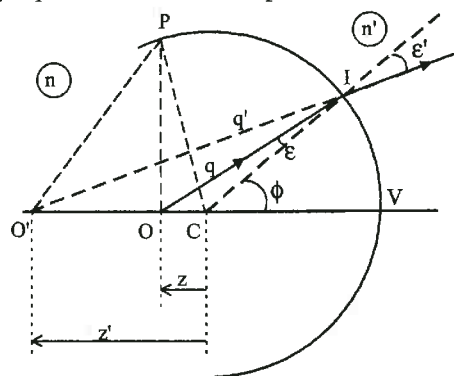


FIGURA 3.7. Puntos de Young. Estigmatismo riguroso en la superficie esférica.

Aplicando el teorema de los senos a los triángulos OIC y O'IC, obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{q}{\text{sen } \phi} &= \frac{-z}{\text{sen } \epsilon} \Rightarrow \text{sen } \epsilon = -\frac{z \text{ sen } \phi}{q} \\ \frac{q'}{\text{sen } \phi} &= \frac{-z'}{\text{sen } \epsilon'} \Rightarrow \text{sen } \epsilon' = -\frac{z' \text{ sen } \phi}{q'} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Aplicando la ley de Snell y operando, se obtiene:

$$\begin{aligned} -\frac{nz}{q} \text{ sen } \phi &= -\frac{n'z'}{q'} \text{ sen } \phi \\ \frac{nz}{q} &= \frac{n'z'}{q'} \Rightarrow \frac{q}{nz} = \frac{q'}{n'z'} \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde $q = OI$ y $q' = O'I$. Esta es la ecuación que deben de cumplir los puntos con un estigmatismo riguroso, es decir, toda pareja de puntos conjugados que verifiquen la ecuación anterior, serán estigmáticos o lo que es lo mismo, uno será la imagen perfecta del otro.

Una solución inmediata a esta ecuación es hacer $z = z' = 0$, o lo que es lo mismo $O = O' = C$, es decir, el objeto y la imagen están ambos en el centro de curvatura. Este resultado es evidente puesto que los rayos que pasan por C no se desvían.

Ahora bien, puesto que la ecuación general se debe cumplir para todos los rayos que salen del objeto, vamos a particularizarla a dos de ellos: el que pasa por el vértice y el que incide perpendicular al eje óptico (ver fig. 3.7). Para el rayo que pasa por el vértice V , se cumple que $q = OV$ y $q' = O'V$. Sustituyendo en la ecuación 3.10:

$$\begin{aligned} \frac{OV}{nz} &= \frac{O'V}{n'z'} \Rightarrow \frac{OC+CV}{nz} = \frac{O'C+CV}{n'z'} \\ \frac{-z-r}{nz} &= \frac{-z'-r}{n'z'} \Rightarrow \frac{z+r}{nz} = \frac{z'+r}{n'z'} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Si el rayo es perpendicular al eje óptico, entonces $I = P$ y sustituyendo:

$$\frac{OP}{nz} = \frac{O'P}{n'z'}$$

$$OP = \sqrt{r^2 - z^2}$$

$$O'P = \sqrt{OP^2 + OO'^2} = \sqrt{r^2 - z^2 + (z' - z)^2} = \sqrt{r^2 + z'^2 - 2zz'}$$

$$\frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{nz} = \frac{\sqrt{r^2 + z'^2 - 2zz'}}{n'z'}$$

$$\frac{r^2 - z^2}{n^2 z^2} = \frac{r^2 + z'^2 - 2zz'}{n'^2 z'^2} \quad (3.12)$$

Tenemos pues un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, z y z' (ecs. 3.11 y 3.12). Resolviendo este sistema se llega a una ecuación de segundo grado, que es la siguiente:

$$nz^2 + r(n - n')z - n'r^2 = 0$$

y que tiene dos soluciones que son:

$$z = z' = -r \quad \text{con lo cual} \quad z = (n'/n)r \quad z' = (n/n')r \quad (3.13)$$

La primera solución corresponde al vértice de la superficie esférica, es decir, $O = O' = V$, mientras que la segunda solución corresponde a los conocidos como puntos de Young o de Weierstrass que están a distancias z y z' del centro de curvatura de la superficie. Estas distancias, z y z' , siempre tienen el mismo signo que el radio de curvatura de la superficie considerada. De este modo, los puntos de Young están situados a una distancia de la superficie que es siempre mayor que el radio de la misma.

III.4.- LA REGIÓN PARAXIAL

Volviendo a la figura 3.5, siempre que consideremos que los ángulos son pequeños, podremos hacer la siguiente aproximación: $q' \sim s'$ y $q \sim -s$ (q y q' han sido definidas como distancias positivas mientras que s es una distancia negativa). Sustituyendo en la ecuación (3.8), obtenemos:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{1}{r}(n' - n)$$

que también se puede escribir como:

$$n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right) \quad (3.14)$$

A ambos lados de esta ecuación aparece una expresión de idéntica estructura a la que se le conoce con el nombre de **Invariante de Abbe**; es una cantidad que permanece invariable al atravesar una superficie óptica. Esta expresión nos indica que el sistema es estigmático puesto que para un punto objeto se obtiene un único punto imagen.

Al aproximar las distancias q y q' recorridas por el rayo a las distancias s y s' medidas sobre el eje, lo que estamos haciendo no es otra cosa que quedarnos con el primer término del desarrollo en serie del seno y del coseno. Por ello, a esta aproximación y a su ecuación correspondiente se le conoce con el nombre de **teoría de primer orden**.

La aproximación de primer orden es equivalente a suponer que la altura de incidencia, h , del rayo que viene del eje sobre la superficie, es pequeña, es decir, que todos los ángulos involucrados son pequeños. Al conjunto de rayos que verifican esta aproximación se les denomina rayos paraxiales y a la región donde es válida se le llama **región paraxial**. En esta región, como acabamos de comprobar la esfera sí es estigmática. Dado que fue Gauss, en 1841, quien aplicó esta aproximación, también se le conoce por el nombre de **Óptica gaussiana** o **aproximación de Gauss**. Lo que comúnmente se denomina ecuación de Gauss del dioptrio esférico no es más que otra forma de escribir la ecuación del invariante de Abbe:

$$-\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n' - n}{r} \quad (3.15)$$

Consideremos ahora la figura 3.8 y supongamos ahora un punto tal como F que tiene su imagen en el infinito. Todos los rayos que salen de él, después de haberse refractado en la superficie salen paralelos al eje. De la ecuación de Gauss, deducimos que:

$$s' = \infty \quad \Rightarrow \quad s = \frac{-nr}{n' - n} = f \quad (3.16)$$

A la distancia f se le conoce con el nombre de **distancia focal objeto**; el punto F es el **foco objeto** del sistema, y es un punto tal que su imagen está en el infinito.

Igualmente se define el **foco imagen**, F' , como el punto imagen del infinito, de tal manera que todos los rayos que lleguen paralelos al eje, después de refractarse en la superficie, irán a converger en él. Dicho punto F' está a una distancia f' de la superficie llamada **distancia focal imagen** cuyo valor también se puede deducir de la ecuación de Gauss:

$$s = \infty \quad \Rightarrow \quad s' = \frac{n'r}{n' - n} = f' \quad (3.17)$$

Con los valores deducidos de las dos distancias focales, podemos ver que la relación que hay entre ellas es la relación de índices cambiada de signo. Así mismo, definimos la potencia de la superficie, P , como el índice posterior partido por la focal imagen f' . La potencia se mide en dioptrías (D) cuando la focal se mide en metros.

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}$$

$$P = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} = \frac{n'-n}{r} \quad (3.18)$$

Hay que señalar que pueden existir configuraciones donde los focos objeto e imagen son focos virtuales. En cualquier caso, lo que siempre se cumple es que las focales son de signo contrario, es decir que los focos F y F' están situados uno a cada lado de la superficie, lo cual implica que, o los dos son reales o los dos son virtuales. En la fig. 3.8 se puede apreciar esto. Con la definición de distancias focales, la ecuación de Gauss del dioptrio esférico también se puede escribir como:

$$-\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'}{f'} \quad (3.19)$$

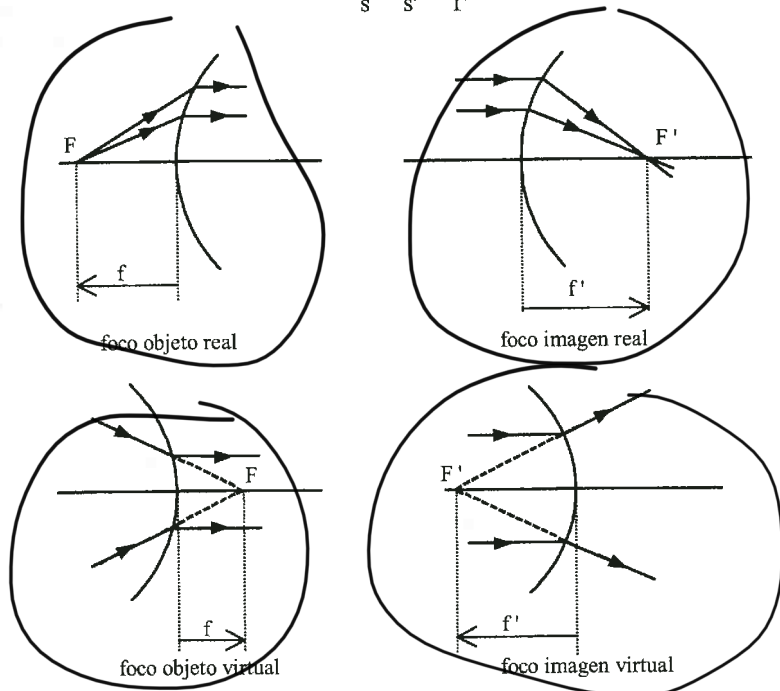


FIGURA 3.8. Focos objeto e imagen reales y virtuales.

III.5.- LA LENTE DELGADA

En el ámbito de la Óptica Geométrica, se denomina lente a todo sistema óptico formado por dos o más superficies refractantes, donde al menos una de ellas es una superficie curva.

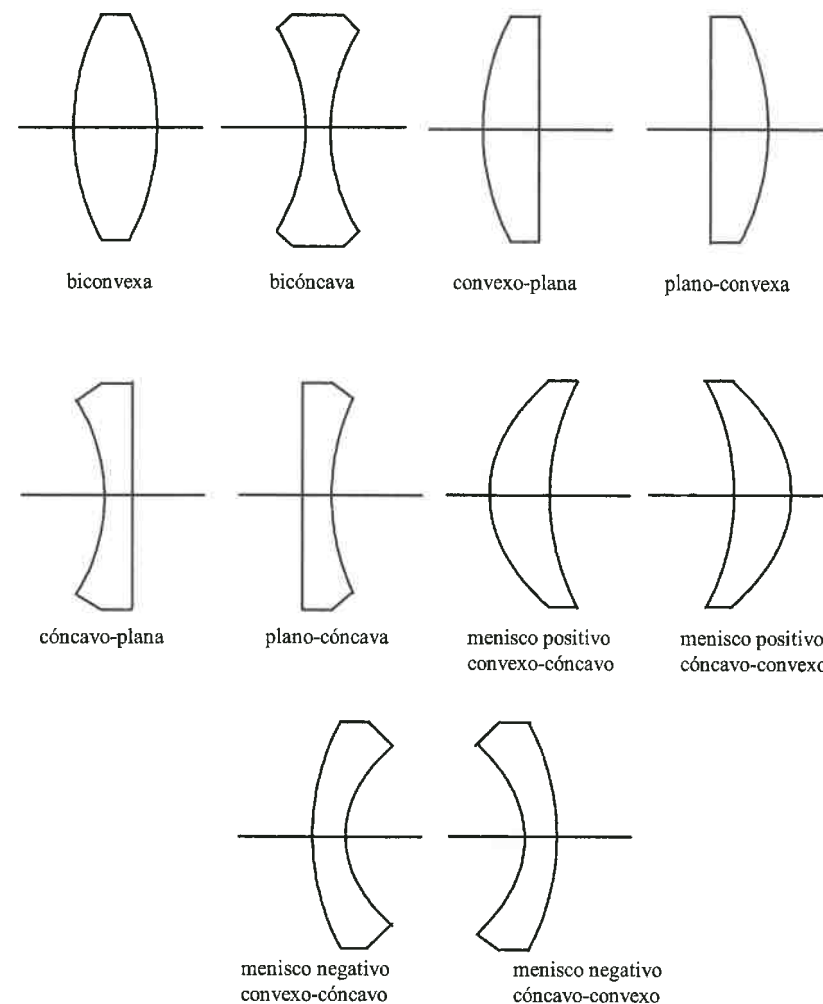


FIGURA 3.9. Denominación de las lentes simples.

Las lentes se pueden clasificar de muchas maneras; una primera clasificación, atendiendo al número de superficies involucradas, sería la distinción entre lentes **simples**, compuestas por sólo dos superficies refractantes, y lentes **compuestas** cuando el número de superficies es mayor. Del mismo modo atendiendo a su espesor se pueden dividir en **delgadas** y **gruesas**, dependiendo de que su espesor sea o no despreciable.

De momento, estudiaremos las lentes simples, delgadas, compuestas por superficies esféricas y planas, aunque más adelante, también en este tema, hablaremos de las lentes cilíndricas.

Además, en nuestro estudio las lentes serán sistemas centrados, es decir, las

superficies que lo componen son rotacionalmente simétricas alrededor de un eje común, que será “el eje óptico” del sistema. Este eje contiene a los centros de curvatura de todas las superficies implicadas.

Si las lentes son más gruesas en el centro que en el borde, se les denomina, tradicionalmente, con el nombre de **convexas, positivas o convergentes**. Cuando son más delgadas en el centro que en los bordes, se les denomina **cóncavas, negativas o divergentes**. No obstante, esta denominación hay que entenderla siempre desde un punto de vista general y suponiendo que la lente está en aire. Como veremos más adelante, la convergencia o divergencia de una lente viene determinada, no sólo por la forma de la lente, sino también por el medio (o medios) que la rodean. En este sentido, resulta “peligroso” hablar de lentes convergentes o divergentes y si se hace, debe entenderse siempre que la lente está en aire. Resulta mucho más riguroso nombrar a las lentes por la forma de las superficies que la componen. En la figura 3.9 se representan esquemáticamente todas las formas de lentes simples, así como sus nombres.

Además, dado que en la Óptica Geométrica, el sentido de la luz está estipulado (de izquierda a derecha), la forma de colocar la lente también es importante. Una lente plano-convexa (primera cara plana, segunda cara convexa) no presenta el mismo comportamiento que una lente convexo-plana (primera cara convexa, segunda cara plana) aunque la lente en sí sea la misma; en el primer caso la lente está colocada de forma que la luz incide por la cara plana y en el segundo caso la luz incide por la cara convexa.

III.5.1.- Ecuación de las lentes delgadas

Vamos a continuación a deducir la ley que rige el comportamiento de una lente delgada. Supongamos una lente de índice n_2 sumergida en un medio de índice n_1 y formada por dos superficies refractantes esféricas de radios r_1 y r_2 respectivamente, tal y como muestra la figura 3.10.

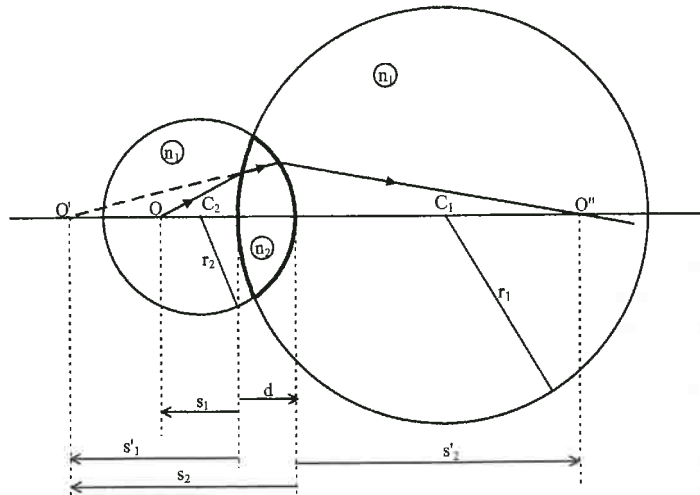


FIGURA 3.10. Parámetros de una lente esférica.

Recordemos que el comportamiento de una sola superficie está dado, en óptica paraxial, por la ecuación de Gauss (ec. 3.15):

$$-\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n' - n}{r}$$

La imagen del punto O a través de la primera superficie, viene determinada por:

$$-\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_1'} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} \quad (3.20)$$

La imagen O' dada por esta superficie será el objeto para la segunda, de forma que se cumplirá que:

$$-\frac{n_2}{s_2} + \frac{n_1}{s_2'} = \frac{n_1 - n_2}{r_2} \quad (3.21)$$

Sumando ambas ecuaciones miembro a miembro, y teniendo en cuenta que, según el criterio de signos establecido, $s_2 = s_1' - d$, obtenemos:

$$-\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_1'} - \frac{n_2}{s_2} + \frac{n_1}{s_2'} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$-\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_1}{s_2'} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + n_2 \left(\frac{1}{s_1' - d} - \frac{1}{s_1'} \right)$$

Si ahora suponemos que la lente es delgada y que por lo tanto su espesor es despreciable, entonces $d \sim 0$, y si prescindimos de los subíndices de las distancias frontales s_i , obtendríamos:

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1} \right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (3.22)$$

donde s es la distancia desde la lente hasta el objeto y s' la distancia desde la lente delgada hasta la imagen.

Esta ecuación, cuando la lente está en aire ($n_1 = 1$) se convierte en:

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (3.23)$$

donde n es ahora el índice de la lente. Esta expresión se conoce con el nombre de “fórmula del fabricante de lentes”.

III.5.2.- Focos, distancias focales y planos focales

Como hemos hecho anteriormente en el caso de las superficies, podemos también definir de forma análoga para las lentes, los focos y las distancias focales objeto e imagen. Sustituyendo en la ec. (3.22):

FOCAL OBJETO

$$s' = \infty \Rightarrow s = f$$

$$\frac{1}{f} = -\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad (3.24)$$

FOCAL IMAGEN

$$s = \infty \Rightarrow s' = f'$$

$$\frac{1}{f'} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad (3.25)$$

Como vemos, ambas focales son iguales y cambiadas de signo, esto sucede siempre que la lente esté sumergida en un medio cualquiera, es decir, cuando la lente tiene el mismo índice delante y detrás de ella. En este caso, la ecuación de Gauss de una lente sumergida queda:

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \quad (3.26)$$

Si el medio que rodea a la lente es el aire, entonces $n_1 = 1$ y las distancias focales valen:

$$-\frac{1}{f} = \frac{1}{f'} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad (3.27)$$

También definimos la potencia de la lente de la misma forma que lo hicimos para una superficie, es decir $P = n'/f'$ y el signo de la potencia (o de la focal imagen) determinan que la lente sea convergente o divergente; si $P(f') > 0$ entonces la lente es positiva o convergente, si $P(f') < 0$, entonces la lente es negativa o divergente. En el caso que nos ocupa, $P = n_1 / f'$, y si estamos en aire $P = 1/f'$.

Vamos a analizar con más detalle la expresión (ec. 3.25) de la focal de una lente delgada sumergida (fig. 3.11). En los tres primeros casos, se trata de una lente biconvexa, por lo que $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$ con lo cual el factor que depende de los radios en la expresión de la focal (ec. 3.25) será positivo. Cuando el medio que rodea a la lente tiene un índice más pequeño que el de la lente, $n_1 < n_2$ (casos a y b), obtenemos f' positiva y por tanto f negativa, es decir los focos son reales y la lente es convergente; sin embargo, en el caso c), en el que el índice del medio que rodea a la lente es mayor que el de la lente ($n_1 > n_2$) f' es negativa, la lente es divergente y los focos son virtuales. En los casos d), e) y f), la lente es bicóncava, $r_1 < 0$ y $r_2 > 0$. En este caso, si $n_1 < n_2$ entonces la focal imagen es negativa, la lente es divergente y los focos F y F' son virtuales, por el contrario, si $n_1 > n_2$, la lente es convergente puesto que f' es positiva y los focos son reales. Vemos pues, como una lente es positiva o negativa dependiendo no sólo de la forma que tiene sino también del

índice del medio en el que está sumergida. El siguiente cuadro resume lo que acabamos de describir:

a	$\left. \begin{array}{l} r_1 > 0 \\ r_2 < 0 \end{array} \right\} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) > 0$	$n_2 > n_1 \Rightarrow$	$f' > 0$ $f < 0$	F y F' reales
b				
c		$n_2 < n_1 \Rightarrow$	$f' < 0$ $f > 0$	F y F' virtuales
d	$\left. \begin{array}{l} r_1 < 0 \\ r_2 > 0 \end{array} \right\} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) < 0$	$n_2 < n_1 \Rightarrow$	$f' > 0$ $f < 0$	F y F' reales
e				
f		$n_2 > n_1 \Rightarrow$	$f' < 0$ $f > 0$	F y F' virtuales

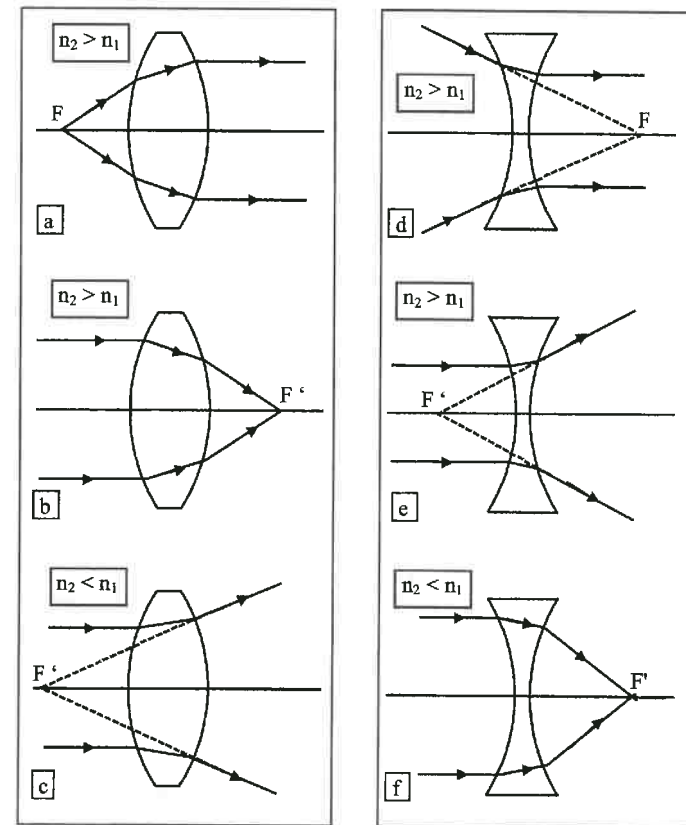


FIGURA 3.11. Focos y distancias focales para lentes convergentes y divergentes.

Por otra parte se definen los **planos focales objeto e imagen** como aquellos planos perpendiculares al eje óptico que pasan por los focos, de manera que el plano focal objeto es aquel que pasa por F y el plano focal imagen es el que pasa por F'. Si un haz de rayos paralelos incide sobre la lente (objeto en el infinito) su imagen será un punto del plano focal imagen; si el haz es paralelo al eje, su imagen será el foco F', si los rayos inciden con cierta inclinación respecto al eje, su imagen será un punto del plano focal imagen fuera del eje. Análogamente, si un haz de rayos incide en la lente partiendo del foco objeto, su imagen estará en el infinito y el haz que sale de la lente será un haz de rayos paralelos entre sí y paralelos al eje. Si el punto de donde proviene el haz no es el foco objeto sino un punto cualquiera del plano focal objeto, su imagen también estará en el infinito pero fuera del eje, por lo tanto, el haz que sale de la lente en este caso es un haz de rayos paralelo entre sí pero inclinado respecto al eje óptico. Hay que resaltar que para hablar de planos focales, es necesario estar en la zona paraxial (Fig. 3.12).

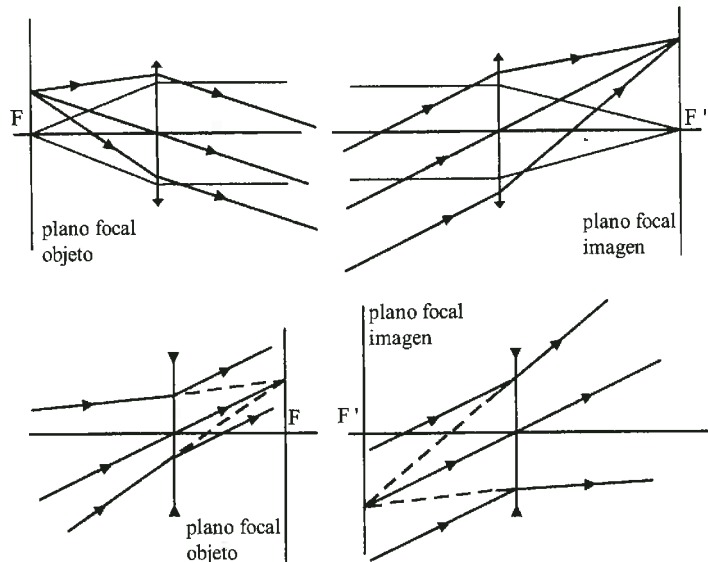


FIGURA 3.12. Planos focales objeto e imagen.

III.5.3.- Centro óptico

Supongamos ahora que un rayo incide en una lente de forma tal que sale sin desviarse, decimos entonces que el rayo ha pasado por un punto que denominamos **centro óptico** de la lente cuya localización vamos a calcular.

Para hallar, gráfica y analíticamente la posición del centro óptico, consideremos la figura 3.13 que representa una lente biconvexa. Tracemos por un punto cualquiera de la primera cara, como por ejemplo el punto A, una recta AC_1 normal a la primera

superficie. A continuación, desde el centro C_2 de la segunda cara, trazamos una línea paralela al radio AC_1 obteniendo así el punto B, de manera que AC_1 y BC_2 son paralelas. La recta que une los puntos A y B corta al eje óptico de la lente en el punto O. Este punto es el **centro óptico** (CO) de la lente, puesto que el rayo que incide en la lente en el punto A y se refracta en la primera cara pasando por O, como puede verse, sale de la lente por el punto B sin desviarse, únicamente se desplaza. Este método gráfico sólo es válido cuando la lente está sumergida en un medio.

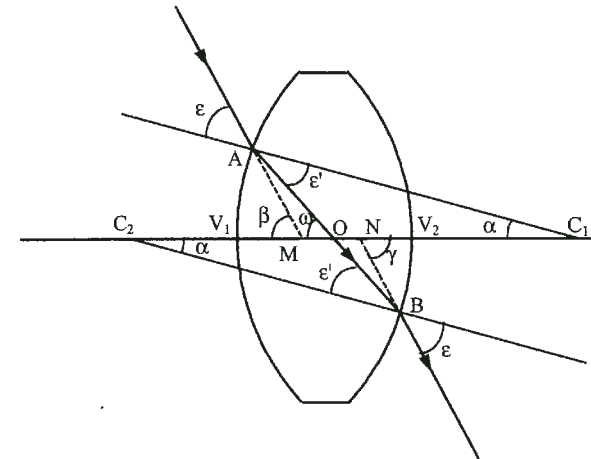
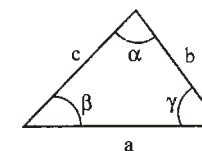


FIGURA 3.13. Cálculo gráfico del centro óptico de una lente.

Vamos a demostrar a continuación que, en efecto, este rayo no se desvía, y calcularemos asimismo la posición del punto O respecto al vértice de la primera cara de la lente. Dado que AC_1 y BC_2 son rectas paralelas, el ángulo que forman con el eje es el mismo, α . Si el rayo incide en la lente con un ángulo ϵ , el ángulo de refracción será ϵ' . Por la geometría de la figura, el ángulo de incidencia en el punto B será ϵ' y, en consecuencia, el de refracción será ϵ . Si el rayo entra y sale con el mismo ángulo, y además las dos normales son paralelas, entonces el rayo no se ha desviado y sigue en la misma dirección con la que entró. Esto se puede ver claramente en la figura ya que se cumple:

$$\begin{aligned} \text{triángulo } AMC_1 &\Rightarrow -\epsilon + \alpha + \pi - \beta = \pi \Rightarrow \beta = \alpha - \epsilon \\ \text{triángulo } NBC_2 &\Rightarrow -\epsilon' + \alpha + \pi - \gamma = \pi \Rightarrow \gamma = \alpha - \epsilon' \end{aligned} \quad \beta = \gamma \quad (3.28)$$

Calculemos ahora la posición del punto O. Aplicando el teorema de los senos y teniendo en cuenta los signos de los distintos ángulos y distancias:



Teorema de los senos

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b} = \frac{\text{sen } \gamma}{c}$$

$$\text{AOC}_1: \frac{-\text{sen } \epsilon'}{\text{OC}_1} = \frac{\text{sen } \omega}{r_1} \Rightarrow \frac{\text{OC}_1}{r_1} = \frac{-\text{sen } \epsilon'}{\text{sen } \omega}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{OC}_1}{r_1} = \frac{\text{OC}_2}{r_2} \quad (3.29)$$

$$\text{OBC}_2: \frac{-\text{sen } \epsilon'}{-\text{OC}_2} = \frac{\text{sen } \omega}{-r_2} \Rightarrow \frac{\text{OC}_2}{r_2} = \frac{-\text{sen } \epsilon'}{\text{sen } \omega}$$

Para medir la posición del centro óptico, O, a partir del vértice de la primera cara:

$$\text{OC}_1 = \text{OV}_1 + \text{V}_1\text{C}_1 = \text{OV}_1 + r_1 = -\text{V}_1\text{O} + r_1$$

$$\text{OC}_2 = \text{OV}_2 + \text{V}_2\text{C}_2 = \text{OV}_2 + r_2 = \text{OV}_1 + \text{V}_1\text{V}_2 + r_2 = -\text{V}_1\text{O} + d + r_2$$

y sustituyendo en la ec. (3.29):

$$\frac{-\text{V}_1\text{O} + r_1}{r_1} = \frac{-\text{V}_1\text{O} + d + r_2}{r_2} \Rightarrow \frac{-\text{V}_1\text{O}}{r_1} + 1 = \frac{-\text{V}_1\text{O}}{r_2} + \frac{d}{r_2} + 1$$

$$\text{V}_1\text{O} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{d}{r_2} \Rightarrow \text{V}_1\text{O} \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \right) = \frac{d}{r_2}$$

$$\text{V}_1\text{O} = \frac{dr_1}{r_1 - r_2} \quad (3.30)$$

III.6.- FORMACIÓN DE IMÁGENES FINITAS. AUMENTOS

A partir de ahora las lentes delgadas las representaremos de forma esquemática de la siguiente manera:



Ahora nos centraremos en la obtención, mediante un diagrama de rayos, de la imagen de un objeto plano a través de una lente delgada. Conociendo la localización de los planos focales, hay tres rayos que son especialmente fáciles de aplicar. Dos de ellos hacen uso del hecho de que un rayo que incide en la lente pasando por F, sale paralelo al eje óptico y viceversa, uno que entre paralelo al eje, sale pasando por F'. El tercer rayo es el que pasa por el centro óptico de la lente y que no se desvía. Para calcular la posición y el tamaño de la imagen formada por una lente delgada bastará con utilizar dos de estos rayos. En la figura 3.14 hemos representado diferentes casos

en cuanto a la posición del objeto. Como se puede apreciar, esta posición condiciona que la imagen sea real o virtual, derecha o invertida, mayor o menor.

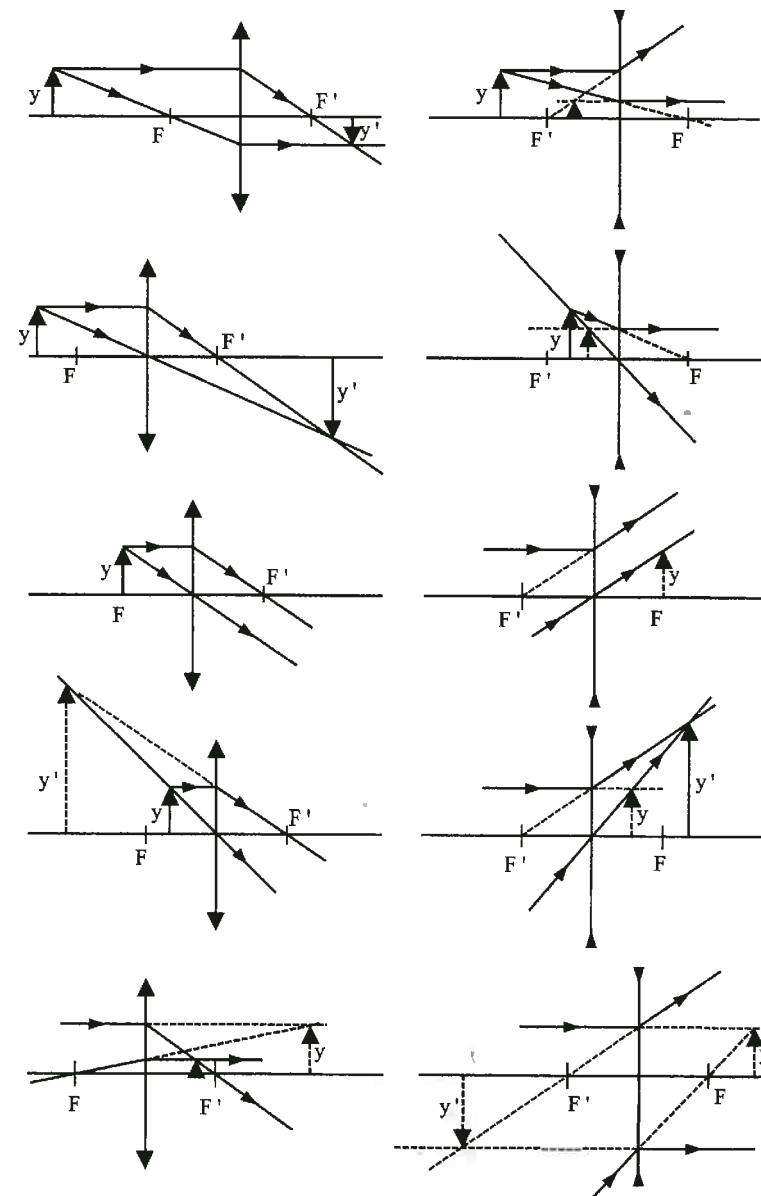


FIGURA 3.14. Formación de imágenes en una lente delgada.

Vamos a buscar ahora la relación de tamaños del objeto y la imagen proporcionada por una lente delgada. En la figura 3.15 se ha representado un caso general de

formación de imágenes. En este caso, $y > 0$ e $y' < 0$ con lo que tendremos una imagen invertida. Vamos a analizar con detalle esta figura.

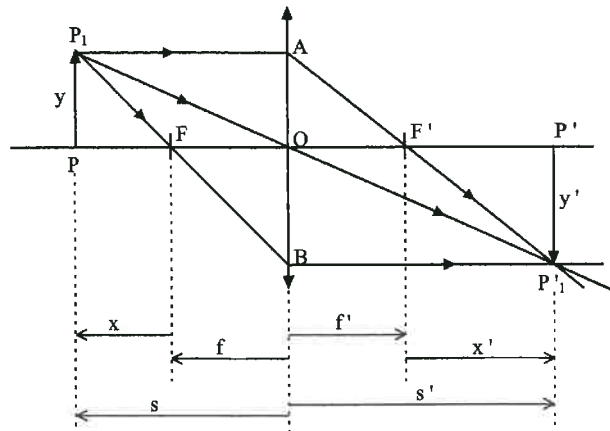


FIGURA 3.15. Cálculo de aumentos en una lente delgada.

De la figura 3.15. podemos extraer algunas relaciones de semejanza entre triángulos:

$$AOF \approx F'P'P_1 \Rightarrow \frac{y'}{x'} = \frac{y}{s'-f'} = \frac{-y}{f'} \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{x'}{f'} = \frac{f'-s'}{f'} \quad (3.31)$$

$$P_1PF \approx FOB \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{y}{s-f} = \frac{-y'}{f'} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{f}{f-s} = -\frac{f}{x} \quad (3.32)$$

$$P_1PO \approx OP'P'_1 \Rightarrow \frac{y}{s} = \frac{y'}{s'} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \quad (3.33)$$

Combinando las ecuaciones (3.31) y (3.33), obtenemos:

$$\frac{f'-s'}{f'} = \frac{s'}{s} \Rightarrow 1 - \frac{s'}{f'} = \frac{s'}{s} \Rightarrow -\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \quad (3.34)$$

que no es más que la ecuación de Gauss de la lente delgada.

Si comparamos ahora las ecuaciones (3.31) y (3.32):

$$-\frac{x'}{f'} = -\frac{f}{x} \Rightarrow xx' = ff' \quad (3.35)$$

Esta expresión se conoce con el nombre de **ecuación de Newton** y es una ecuación de formación de imágenes muy particular puesto que en ella los orígenes de las posiciones objeto e imagen son los focos. Como la lente está sumergida, entonces:

$$f = -f' \Rightarrow xx' = -f'^2$$

Vamos a definir ahora los aumentos. El **aumento lateral o transversal**, β' , se define como la relación entre el tamaño de la imagen y el tamaño del objeto, es decir:

$$\beta' = \frac{y'}{y} \quad (3.36)$$

De acuerdo con las relaciones deducidas anteriormente, el aumento lateral se puede escribir de diversas maneras:

$$\beta' = \frac{s'}{s} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'} = \frac{f}{f-s} = \frac{f'-s'}{f'} \quad (3.37)$$

donde la expresión s'/s sólo será válida cuando la lente esté sumergida; el resto de expresiones son válidas en cualquier caso. El signo de β' determina que la imagen sea derecha o invertida; β' positivo indica que la imagen es derecha, β' negativo indica que la imagen es invertida.

Por otra parte, hay que señalar que el término “aumento” no se utiliza en su sentido literal puesto que el módulo de β' puede ser menor que la unidad en cuyo caso la imagen será más pequeña que el objeto. Si, por el contrario, el módulo de β' es mayor que la unidad, la imagen será más grande que el objeto. El caso particular en que $\beta' = -1$ tiene lugar cuando la distancia entre el objeto y la imagen tiene el valor de $4f'$. De todas las configuraciones posibles ésta es en la que el objeto y la imagen están lo más próximos posibles.

También se puede definir el **aumento longitudinal o axial** como el aumento que un objeto puede sufrir a lo largo del eje óptico:

$$\alpha = \frac{dx'}{dx} \quad (3.38)$$

Si derivamos en la ecuación de Newton (ec. 3.35):

$$x dx' + x' dx = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{dx'}{dx} = -\frac{x'}{x} \quad (3.39)$$

pudiéndose calcular la relación entre el aumento lateral y el aumento axial de la siguiente manera:

$$\beta' = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'} \Rightarrow \beta'^2 = \frac{x'f}{xf'_1} = -\frac{f}{f'} \alpha \quad (3.40)$$

$$\text{en sistemas sumergidos } \alpha = \beta'^2$$

III.7.- LENTES CILÍNDRICAS

Como ya dijimos anteriormente, las superficies cilíndricas son generadas mediante la rotación de una línea alrededor de otra paralela. La curvatura del cilindro es cero en el plano que contiene al eje del cilindro (este plano se denomina normalmen-

te eje) y es máxima en el plano perpendicular al eje del cilindro (contraeje). Estos dos planos forman entre sí un ángulo de 90° y son conocidos como meridianos principales del cilindro.

Puesto que la potencia de una lente depende tanto del material del que está compuesta como de su curvatura, las lentes cilíndricas presentarán una potencia determinada en la dirección del meridiano de curvatura máxima (contraeje) y potencia cero en la dirección del meridiano de curvatura cero (eje). Es decir, una lente cilíndrica cuyo eje es perpendicular al eje óptico, se comporta como una lente delgada para los rayos que viajan en un plano que contiene al eje óptico y es perpendicular al eje del cilindro, mientras que se comporta como una lámina de caras plano paralelas de vidrio para los rayos que viajan en un plano que contiene al eje óptico y al eje del cilindro. Esto se puede ver en la figura 3.16 que presenta la marcha de rayos en los planos YZ y XZ. Cuando consideramos el plano YZ, para los rayos contenidos en este plano la primera lente actúa como una lente delgada esférica, mientras que la segunda no afecta en absoluto a su dirección. Para el haz de rayos contenido en el plano XZ, la única lente cilíndrica que actúa será la segunda que lo hará como si se tratara de una lente esférica. Evidentemente se pueden plantear situaciones mucho más complicadas.

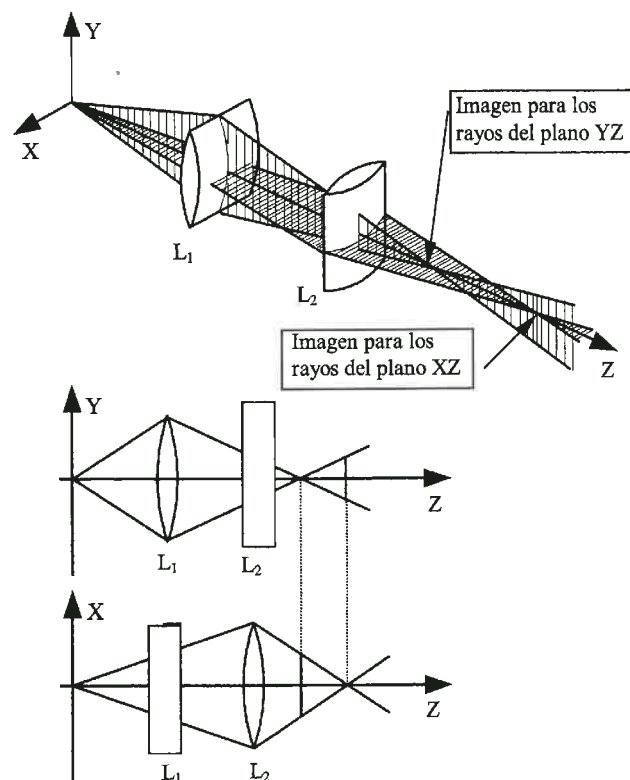


FIGURA 3.16. Diagramas de rayos en lentes cilíndricas perpendiculares.

III.8.-LENTE DELGADA RODEADA DE MEDIOS DISTINTOS

Supongamos una lente de índice n_2 que separa dos medios distintos de índices n y n' respectivamente (fig. 3.17). Aplicando la ley de Gauss a las dos superficies de la lente:

$$\frac{-n}{s_1} + \frac{n_2}{s'_1} = \frac{n_2 - n}{r_1} \quad \frac{-n_2}{s_2} + \frac{n'}{s'_2} = \frac{n' - n_2}{r_2}$$

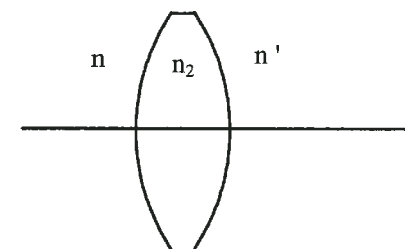


FIGURA 3.17. Lente delgada rodeada de medios distintos.

Sumando ambas ecuaciones y teniendo en cuenta que $s_2 = s'_1 - d$:

$$\frac{-n}{s_1} + \frac{n'}{s'_2} = \frac{n_2 - n}{r_1} + \frac{n' - n_2}{r_2} + n_2 \left(\frac{1}{s'_1 - d} - \frac{1}{s'_1} \right)$$

En una lente delgada el espesor es despreciable y si prescindimos de los subíndices correspondientes a las distancias objeto (respecto a la primera superficie) e imagen (respecto a la segunda) podemos escribir:

$$-\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n_2 - n}{r_1} + \frac{n' - n_2}{r_2} \quad (3.41)$$

con lo que las focales objeto e imagen de la lente delgada vendrían dadas por:

FOCAL OBJETO

$$s' = \infty \quad y \quad s = f \Rightarrow -\frac{n}{f} = \frac{n_2 - n}{r_1} + \frac{n' - n_2}{r_2} \quad (3.42)$$

FOCAL IMAGEN

$$s = \infty \quad y \quad s' = f' \Rightarrow \frac{n'}{f'} = \frac{n_2 - n}{r_1} + \frac{n' - n_2}{r_2} \quad (3.43)$$

Comparando ambas ecuaciones vemos que se cumple:

$$-\frac{n}{f} = \frac{n'}{f'} \Rightarrow \frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'} \quad (3.44)$$

y la ecuación de Gauss de la lente delgada no sumergida quedaría:

$$-\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'}{f'} \quad (3.45)$$

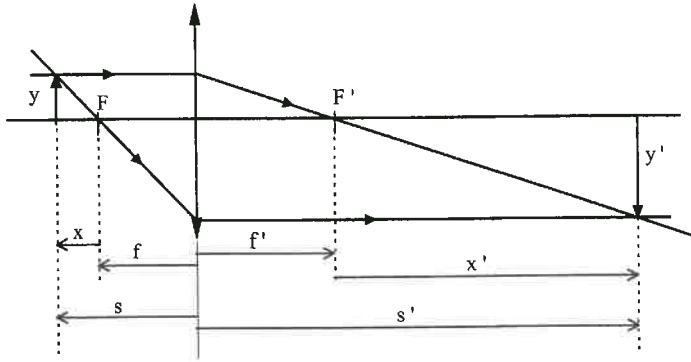


FIGURA 3.18. Cálculo de los aumentos en una lente delgada no sumergida.

En lo que se refiere a los aumentos, de la figura 3.18 se deduce que:

$$\frac{y}{s-f} = \frac{-y'}{f} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{f}{f-s} = -\frac{f}{x} \quad (3.46)$$

$$\frac{y}{f'} = \frac{-y'}{s'-f'} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{f'-s'}{f'} = 1 - \frac{s'}{f'} = -\frac{x'}{f'} \quad (3.47)$$

Igualando los dos últimos términos, obtenemos:

$$-\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'} \Rightarrow xx' = ff' \quad (3.48)$$

que sería nuevamente la ecuación de Newton y por otra parte:

$$-\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'}{f'}$$

$$-n \frac{s'}{s} + n' = n' \frac{s'}{f'} \Rightarrow -\frac{n}{n'} \frac{s'}{s} + 1 = \frac{s'}{f'}$$

$$1 - \frac{s'}{f'} = \frac{ns'}{n's}$$

por lo que las distintas expresiones para el aumento lateral son:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{ns'}{n's} = \frac{f}{f-s} = \frac{f'-s'}{f'} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'} \quad (3.49)$$

El aumento longitudinal, α , se puede deducir de la ecuación de Newton:

$$xx' + x'dx = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{dx'}{dx} = -\frac{x'}{x} \quad (3.50)$$

y la relación entre los dos aumentos viene dada por la siguiente expresión:

$$\beta'^2 = \frac{fx'}{xf'} = -\frac{f}{f'} \alpha \Rightarrow \beta'^2 = \frac{n}{n'} \alpha \quad (3.51)$$

Por último, el centro óptico de una lente delgada no sumergida, se puede calcular gráficamente tal y como muestra la figura 3.19. Se traza un rayo que saliendo desde un punto cualquiera del plano focal objeto entra en la lente paralelo al eje óptico (y que por tanto sale pasando por F') y otro que incide en la lente paralelo a la dirección de salida del anterior. Puesto que ambos provienen del mismo punto del plano focal objeto, saldrán paralelos entre sí. El segundo rayo pasa por el centro óptico puesto que no se ha desviado. La distancia desde la lente al centro óptico, LO, se puede calcular analíticamente según muestra la figura 3.19:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{y}{-f + LO} = \frac{y}{f'}$$

$$-f + LO = f' \Rightarrow LO = f' + f \quad (3.52)$$

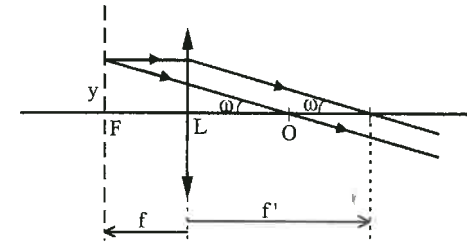
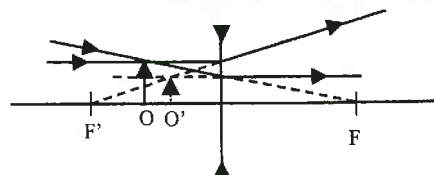


FIGURA 3.19. Cálculo del centro óptico en una lente delgada no sumergida.

CUESTIONES

1.- Encontrar gráficamente la posición de la imagen dada por una lente divergente cuando el objeto se encuentra entre el foco imagen F' y la lente.



Para hallar gráficamente la imagen, trazamos dos rayos: el primero incide en la lente paralelo al eje óptico y sale pasando por F' , el segundo incide en la lente pasando por F y sale paralelo al eje óptico. Los dos rayos que salen no se cortan pero sí lo hacen sus prolongaciones, luego la imagen es virtual, derecha y más pequeña que el objeto.

2.- Expresar la posición del objeto en función del aumento lateral y la focal objeto para una lente delgada en aire.

La ley de Gauss y el aumento lateral de una lente delgada en aire se escribe:

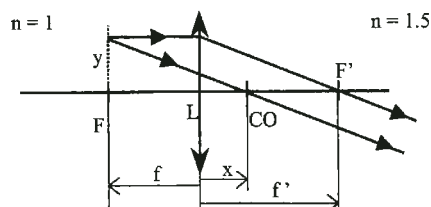
$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \quad \beta' = \frac{s'}{s}$$

Si despejamos de esta ecuación la posición del objeto y realizamos algunas operaciones, obtenemos:

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{s}{s} = \frac{s}{s'} - \frac{s}{f'} \Rightarrow 1 = \frac{s}{s'} - \frac{s}{f'}$$

$$\frac{s}{f'} = \frac{1}{\beta'} - 1 = \frac{1 - \beta'}{\beta'} \Rightarrow s = f' \left(\frac{1 - \beta'}{\beta'} \right) = -f' \left(\frac{\beta' - 1}{\beta'} \right) \Rightarrow s = f' \left(\frac{\beta' - 1}{\beta'} \right)$$

3.- Calcular gráfica y analíticamente el centro óptico de una lente delgada que separa el aire de un medio de índice 1.5 y cuya focal imagen es de 30 cm.



Si $f' = 30$ cm, teniendo en cuenta la relación de focales la distancia focal objeto de la lente será:

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'} \Rightarrow f = -\frac{1}{1.5} 30 = -20 \text{ cm}$$

Para calcular gráficamente el centro

óptico de la lente, desde un punto del plano focal objeto trazamos dos rayos: uno paralelo al eje óptico, que saldrá pasando por F' , y otro paralelo al anterior que saldrá en la misma dirección que el primero puesto que ambos vienen del mismo punto del plano focal objeto. Este segundo rayo no se ha desviado, luego ha pasado por el centro óptico (CO) de la lente. Analíticamente:

$$\frac{y}{x - f} = \frac{y}{f'} \Rightarrow x - f = f' \Rightarrow x = f + f' = -20 + 30 = 10 \text{ cm}$$

En este caso, el centro óptico está a 10 cm a la derecha de la lente.

4.- Deducir, a partir de la ecuación de Newton, la ecuación de Gauss para la lente delgada.

La ecuación de Newton es: $xx' = ff'$. Si designamos por O el objeto, O' la imagen y L la lente cuyos focos son F y F' , podemos escribir $x = FO = FL + LO = -f + s$ para la posición del objeto y $x' = F'O' = F'L + LO' = -f' + s'$. Sustituyendo en la ecuación de Newton y haciendo operaciones:

$$xx' = ff' \Rightarrow (s - f)(s' - f') = ff'$$

$$ss' - fs' - sf' = 0 \Rightarrow ss' = fs' + sf' \Rightarrow 1 = \frac{f}{s} + \frac{f'}{s'}$$

Si ahora tenemos en cuenta que la relación de focales es la relación de índices cambiada de signo, obtenemos la ecuación de Gauss en el caso más general:

$$1 = \frac{-(n/n')f'}{s} + \frac{f'}{s'} \Rightarrow \frac{1}{f'} = -\frac{n}{n's} + \frac{1}{s'} \Rightarrow -\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'}{f'}$$

5.- Encontrar la distancia entre el objeto y la imagen para una lente convergente sumergida en un medio de índice n que produce un aumento transversal de -4. El objeto es real.

La distancia entre el objeto y la imagen viene dada por $d = s' - s$ donde s y s' están relacionados por el aumento lateral:

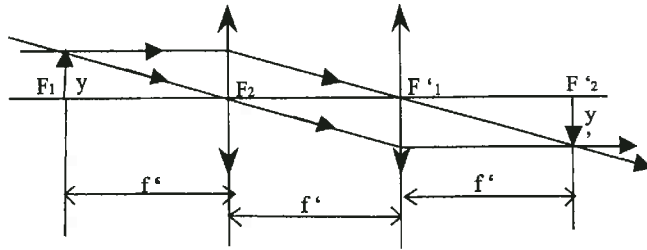
$$\beta' = \frac{s'}{s} = -4 \Rightarrow s' = -4s$$

Y si se sustituyen estos datos en la ecuación de Gauss:

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \Rightarrow -\frac{1}{s} + \frac{1}{-4s} = \frac{1}{f'} \Rightarrow -\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{4s}\right) = \frac{1}{f'} \Rightarrow s = -\frac{5}{4}f'$$

$$s' = -4s = -4\left(-\frac{5}{4}f'\right) = 5f' \quad \text{y por tanto} \quad d = s' - s = 5f' - \left(-\frac{5}{4}f'\right) = \frac{25}{4}f' = 6.25f'$$

6.- Dadas dos lentes convergentes de la misma focal y separadas por su distancia focal, hallar gráficamente la imagen de un objeto situado en el foco objeto de la primera lente. ¿Qué aumento tiene la imagen? Suponer el sistema en aire.



Un rayo que incide en la primera lente paralelo al eje óptico, saldrá de ella pasando por F'_1 . Como este punto coincide con el centro óptico de la segunda lente, pasará por ella sin desviarse. El segundo rayo incide en la primera lente pasando por su centro óptico, pasa sin desviarse y llega a la segunda lente pasando por F_2 , luego saldrá de ella paralelo al eje óptico. La imagen final se forma en el plano focal imagen de la segunda lente, es real, invertida y del mismo tamaño que el objeto, por lo que el aumento lateral será -1 . Analíticamente:

$$\beta' = \beta'_1 \beta'_2 = \frac{s'_1 s'_2}{s_1 s_2} = \frac{s'_1 s'_2}{s_1 s'_1 - e} = \frac{s'_2}{s_1 \left(1 - \frac{e}{s'_1}\right)} = \frac{f'}{-f' \left(1 - \frac{f'}{\infty}\right)} = -1$$

7.- Demostrar que en una lente delgada en aire, si $\beta' = -1$, la distancia objeto-imagen es $4f'$.

Si el aumento es -1 , por la definición de aumento lateral:

$$\beta' = -1 = \frac{s'}{s} \Rightarrow s' = -s$$

Y si sustituimos en la ecuación de Gauss:

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{-s} = \frac{1}{f'} \Rightarrow s = -2f' \text{ y } s' = 2f'$$

$$d = s' - s = 2f' - (-2f') = 4f'$$

8.- En una lente divergente que separa dos medios de índices n y n' distintos, calcular la posición de la imagen en función del aumento transversal y de la focal objeto.

Si los índices son distintos, la ecuación de Gauss, la relación entre distancias focales y el aumento lateral son, respectivamente:

$$-\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'}{f'} \quad \frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'} \quad \beta' = \frac{ns'}{n's}$$

Despejando s' de la ecuación de Gauss y sustituyendo los valores de f y β' , se obtiene:

$$-n \frac{s'}{s} + n' = n' \frac{s'}{f'} \Rightarrow -\frac{ns'}{n's} + 1 = \frac{s'}{f'} \Rightarrow (-\beta' + 1)f' = s'$$

$$s' = (1 - \beta') \left(-\frac{n'}{n} f' \right) = \frac{n'}{n} f' (\beta' - 1)$$

9.- Deducir la ecuación de Newton a partir del invariante de Abbe para un dioptrio esférico.

El invariante de Abbe del dioptrio esférico es:

$$n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) = n' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'} \right)$$

Las distancias objeto e imagen medidas desde los focos son: $x = s - f$ y $x' = s' - f'$. Sustituyendo en el invariante de Abbe, las distancias s y s' por su valor en función de x y x' y haciendo operaciones, obtenemos:

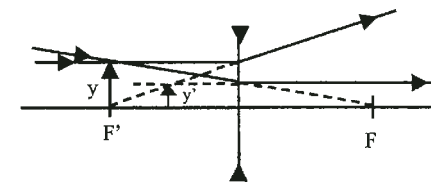
$$n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x+f} \right) = n' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x'+f'} \right) \Rightarrow \frac{n'}{x'+f'} - \frac{n}{x+f} = \frac{n'-n}{r} = \frac{n'}{f'}$$

$$(n'x + n'f - nx' - nf')f' = n'xx' + n'x'f + n'xf' + n'ff'$$

$$-nx'f' - nf'^2 = n'xx' + n'x'f \Rightarrow xx' + x'f = -\frac{n}{n'} x'f' - \frac{n}{n'} f'^2 = x'f + ff' \Rightarrow xx' = ff'$$

que es la ecuación de Newton que estábamos buscando.

10.- Obtener gráficamente la imagen dada por una lente divergente cuando el objeto se encuentra en el foco imagen. Definir la imagen.



Siguiendo el mismo procedimiento que en la cuestión 1, realizamos el trazado gráfico y obtenemos una imagen virtual, derecha y más pequeña que el objeto.

Capítulo IV

ESPEJOS

IV.1.- ESPEJOS PLANOS

En este tema nos vamos a centrar en el estudio de los espejos. Los espejos están formados por una superficie pulimentada donde los rayos se reflejan. Los que nosotros vamos a considerar, se denominan planos o esféricos dependiendo de que el tipo de superficie que los constituya sea plana o esférica. Nos centraremos en primer lugar en el estudio de los espejos planos.

Los espejos planos (y cualquier otro tipo de espejos) se pueden construir recubriendo o bien la superficie frontal o bien la superficie posterior, siendo este segundo tipo el que, normalmente, se encuentra en la vida diaria, ya que su uso es sencillo y cómodo ya que al estar la capa reflectora completamente protegida detrás del vidrio se pueden limpiar con facilidad. En cambio, la mayoría de los espejos diseñados para su uso en sistemas o montajes en los que se requiera una mayor precisión son de primera superficie.

En la figura 4.1 un punto objeto P está situado frente a un espejo plano. Un rayo cualquiera procedente del objeto, como por ejemplo el que incide en el punto A, cuando llega al espejo forma con la normal a la superficie un ángulo de incidencia i . Por la ley de reflexión, el ángulo con el que se refleje será el mismo. Por otro lado el rayo que incide normal al espejo se refleja en la misma dirección pero en sentido contrario. Las prolongaciones de estos dos rayos, tal y como se puede ver en la figura se cortan en el punto P'. De la geometría de la figura, se deduce que los triángulos PVA y P'VA son iguales por lo que el punto P' será equidistante del espejo con respecto al punto P, lo que implica que $s' = -s$. Esta situación se repite para todos y cada uno de los rayos que salen del punto objeto P, por lo que en el espejo plano, todos los rayos reflejados se cortan virtualmente en el punto P'. Esto quiere decir que el espejo plano es un sistema estigmático dentro y fuera de la zona paraxial. De hecho es el único sistema óptico perfecto para todo el espacio. Concluimos pues que

en un espejo plano, la imagen es simétrica del objeto con respecto al espejo y por lo tanto siempre virtual. Su aumento vendrá dado por:

$$\beta' = -s'/s = 1 \quad (4.1)$$

es decir, la imagen es siempre derecha y del mismo tamaño que el objeto.

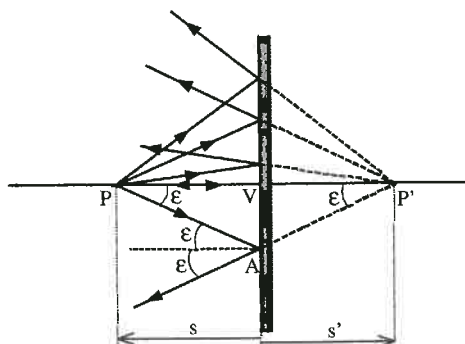


FIGURA 4.1. Reflexión en un espejo plano.

Además, en los espejos se produce un cambio en la orientación de la imagen lo que hace que por ejemplo la imagen de una mano izquierda sea una mano derecha. La imagen proporcionada por el espejo aún siendo del mismo tamaño que el objeto no es la misma que observaría otra persona frente a uno, ni la que nosotros mismos veríamos si mirásemos la palma de nuestra mano derecha. Esto se conoce matemáticamente con el nombre de inversión. Esta inversión derecha-izquierda que puede apreciarse en la fig. 4.2 es el resultado de una inversión en profundidad, es decir el espejo transforma un sistema coordenado a derechas en un sistema coordenado a izquierdas. Mediante la combinación de un número par o impar de espejos se puede cambiar o no la orientación de una imagen. Cuando hay un número impar de espejos, un objeto de orientación derecha (o-d) se convierte en una imagen de orientación

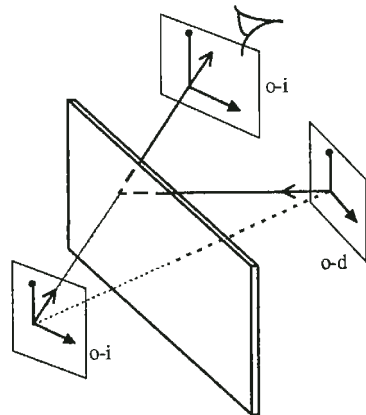


FIGURA 4.2. Inversión de la imagen por reflexión en un espejo plano.

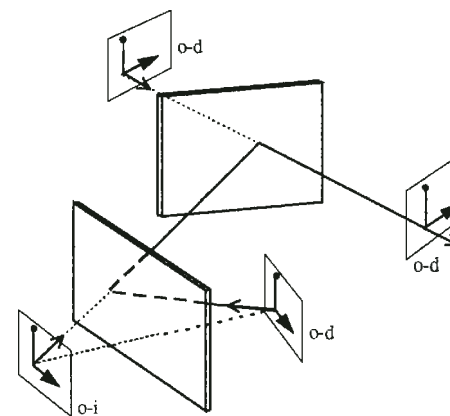


FIGURA 4.3. Inversiones sucesivas por reflexión.

izquierda (o-i). Si el número de espejos es par, no hay cambios en la orientación final de la imagen (fig. 4.3).

IV.2.- PROPIEDADES DE LOS ESPEJOS PLANOS. TRASLACIONES Y GIROS

Con la combinación de varios espejos además de anular la inversión de la imágenes como acabamos de ver, se puede conseguir, por ejemplo la obtención de imágenes múltiples mediante dos espejos planos que forman un ángulo cualquiera entre sí. El número de múltiples imágenes obtenidas dependerá del ángulo entre ellos y de la posición del objeto. En la figura 4.4 se ilustra esta formación de imágenes múltiples.

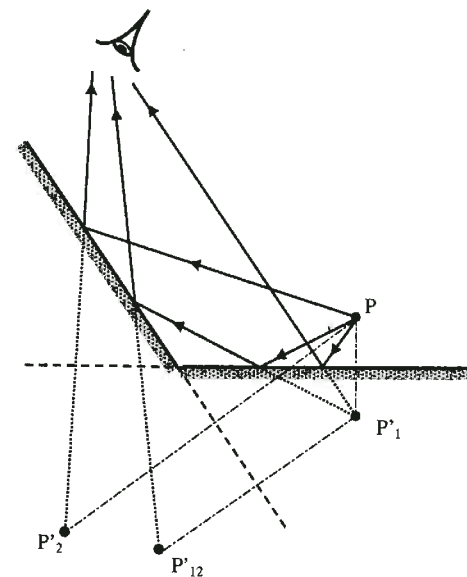


FIGURA 4.4. Formación de imágenes múltiples.

Además también se cumple que cuando dos espejos planos forman un ángulo α entre sí, el ángulo entre el rayo incidente y el rayo reflejado en los dos espejos sucesivamente es 2α , independientemente de cuál sea el ángulo de incidencia en el primer espejo (fig. 4.5). Si el ángulo de incidencia en el primer espejo es ε_1 y en el segundo es ε_2 , de la figura se deduce que:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha$$

Por otra parte, en el triángulo ABC, se cumple que:

$$2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 = \omega = 2\alpha \quad (4.2)$$

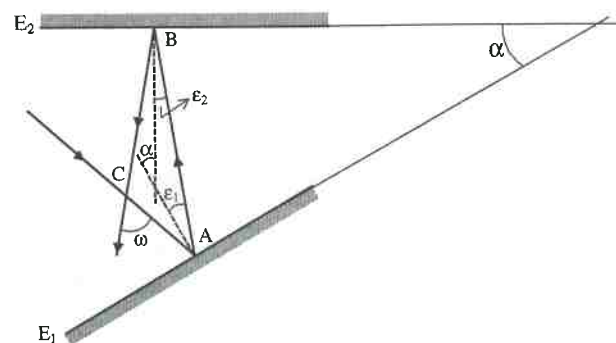


FIGURA 4.5. Combinación de espejos. Ángulo de desviación.

En el caso particular de que los dos espejos formen entre sí un ángulo de 90° el rayo incidente (independientemente del ángulo con el que incida saldrá en la misma dirección pero en sentido contrario (Fig. 4.6).

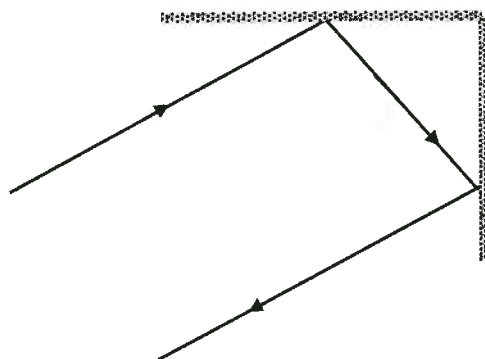


FIGURA 4.6. Incidencia cuando los espejos son perpendiculares entre sí.

Frecuentemente se suelen utilizar espejos planos para amplificar y medir rotaciones ligeras. Veamos cómo hacerlo. Si un espejo plano gira un ángulo α y el haz incidente se mantiene fijo, el haz reflejado gira un ángulo 2α en el mismo sentido que el espejo (fig. 4.7). En efecto, si observamos la figura 4.7, si el espejo gira un ángulo α pasando de la posición E_1 a la posición E_2 , la normal al espejo pasará de N_1 a N_2 girando el mismo ángulo y el rayo reflejado pasará de ser R_1 a ser R_2 . En la posición E_1 , los ángulos de incidencia y reflexión son iguales a ε , por lo que el ángulo entre el rayo incidente I y el reflejado R_1 es 2ε , mientras que en la posición 2, dichos ángulos valen $\varepsilon + \alpha$, por lo que el ángulo entre I y R_2 es $2(\varepsilon + \alpha)$. De aquí se deduce que el ángulo entre los dos rayos reflejados R_1 y R_2 es 2α .

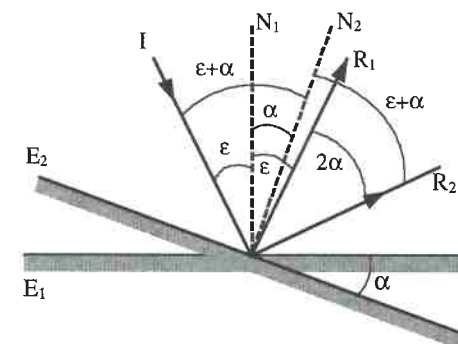


FIGURA 4.7. Giro de un espejo y rotación asociada del haz.

De manera similar, si lo que gira es el rayo incidente, manteniéndose fijo el espejo, el rayo reflejado girará también el mismo ángulo pero en sentido contrario. De la figura 4.8 se deduce que en la posición inicial los ángulos de incidencia y reflexión tienen un valor ε por lo que el ángulo entre I_1 y R_1 es 2ε . Al girar el rayo incidente, éste pasa a la posición 2 formando un ángulo de incidencia y reflexión de $\varepsilon - \alpha$, por lo que el ángulo entre I_2 y R_2 es ahora $2(\varepsilon - \alpha)$. De aquí deducimos que el ángulo entre los rayos reflejados en las dos posiciones es α .

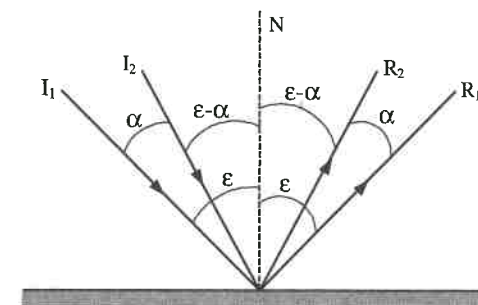


FIGURA 4.8. Giro del haz incidente y rotación asociada del haz reflejado.

Cuando en vez de un giro tiene lugar una traslación, es decir en el caso de que un espejo plano se traslade paralelamente a sí mismo una cierta distancia, la imagen de un objeto fijo se traslada en el mismo sentido que el espejo pero el doble de distancia. Esta situación se puede ver en la figura 4.8b donde el espejo se ha trasladado una distancia d provocando así que la imagen pase de O'_1 a O'_2 siendo la distancia entre ambas $2d$.

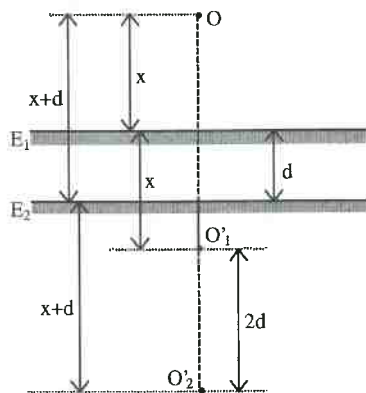


FIGURA 4.8b. Traslación de un espejo y traslación asociada de la imagen.

IV.3.- ESPEJOS ESFÉRICOS

A continuación procederemos al estudio de los espejos esféricos. El estudio de este tipo de espejos se debe a la sencillez de su cálculo unido a la facilidad de su fabricación. Los dividiremos en cóncavos y convexos dependiendo de que, según el criterio de signos que hemos adoptado, el radio de curvatura sea negativo o positivo respectivamente (Fig. 4.9).

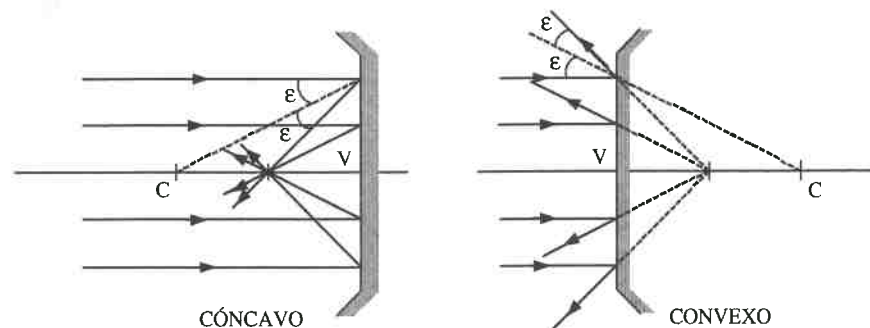


FIGURA 4.9. Espejos esféricos cóncavo y convexo.

El estudio de los espejos, tendrá lugar en la zona paraxial y, por tanto seguiremos teniendo en cuenta la aproximación de Gauss en las deducciones matemáticas. Así

pues, sólo utilizaremos una pequeña zona situada en el centro del espejo. En todas las figuras de este capítulo, se ha representado plana para mayor claridad en los diagramas de rayos correspondientes. El eje óptico del espejo es la línea que une el centro de curvatura con el vértice del mismo.

Consideremos ahora la figura 4.10 que representa a un espejo esférico cóncavo (en el caso de un espejo convexo el razonamiento sería similar) y sea O un punto objeto situado en el eje del espejo. Si consideramos el rayo que sale del objeto en la dirección del eje óptico, al incidir normalmente en el espejo, se reflejará volviendo en la misma dirección pero en sentido contrario. Otro rayo cualquiera, como por ejemplo el que llega al punto P del espejo, al reflejarse lo hará, según la ley de reflexión, de forma que el ángulo de incidencia, ϵ y el de reflexión, ϵ' son iguales en valor absoluto. De este modo, el punto O' , donde se cortan los dos rayos considerados será la imagen de O.

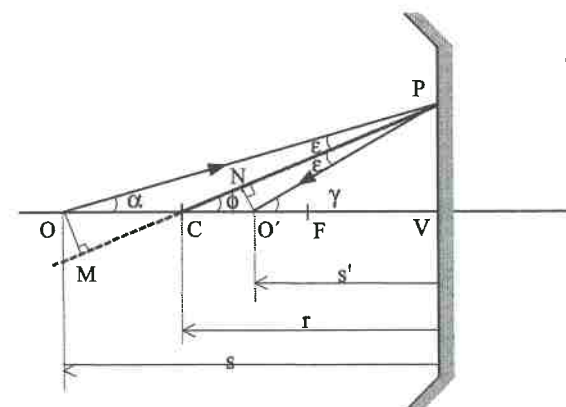


FIGURA 4.10. Formación de la imagen de un punto en un espejo esférico.

De la figura 4.10. se deduce que:

$$\phi = \alpha + \epsilon$$

$$\gamma = \alpha + 2\epsilon$$

Combinando ambas ecuaciones se llega a que:

$$2\epsilon = \gamma - \alpha = 2\phi - 2\alpha \quad (4.3)$$

o bien que:

$$2\phi = \alpha + \gamma \quad (4.4)$$

Teniendo en cuenta que estamos en la región paraxial y por tanto los ángulos considerados son pequeños se puede escribir que:

$$\alpha = \frac{PV}{s} \quad \phi = \frac{PV}{r} \quad \gamma = \frac{PV}{s'}$$

y sustituyendo en la ecuación 4.4. se obtiene:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \quad (4.5)$$

Esta expresión es la **ecuación de Gauss de los espejos** también conocida como **"fórmula de los espejos"** y proporciona, en óptica paraxial, la posición de la imagen en función de la posición del objeto y del radio de curvatura del espejo.

Siguiendo las mismas definiciones que las empleadas en el tema dedicado al estudio de las lentes se pueden definir los focos y las distancias focales de un espejo esférico:

FOCAL OBJETO:

$$s' = \infty \Rightarrow s = f = \frac{r}{2} \quad f = f' \quad (4.6)$$

FOCAL IMAGEN:

$$s = \infty \Rightarrow s' = f' = \frac{r}{2} \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}$$

Vemos pues que los focos F y F' de un espejo esférico coinciden en el punto medio del segmento que une el centro de curvatura del espejo con el vértice del mismo. Teniendo en cuenta que un punto será real siempre que esté situado del lado del espejo de donde venga la luz, en los espejos cóncavos los focos son reales y en los convexos virtuales.

IV.1.1.- Construcción de imágenes con espejos esféricos

En la obtención de imágenes formadas por espejos esféricos. se pueden presentar distintos casos. Algunos de ellos se han representado en la figura 4.11.

El primero de ellos, por ejemplo, es la obtención de la imagen producida por un espejo cóncavo de un objeto real situado a una distancia mayor que su radio. El punto B es el extremo del objeto, cuya imagen queremos hallar. Si trazamos un rayo que pasa por él e incide paralelo al eje, este se reflejará pasando por el foco del espejo. El otro rayo elegido es uno que incide en el espejo en la dirección de su centro de curvatura; dicho rayo no se desvía al reflejarse y vuelve en la misma dirección con la que entró pero en sentido contrario. La intersección de estos dos rayos emergentes proporciona el punto imagen buscado. La imagen obtenida es real, invertida y más pequeña. También se podía haber trazando un rayo que incidiera en el espejo pasando por F y que, por tanto, después de la reflexión, saliera paralelo al eje óptico.

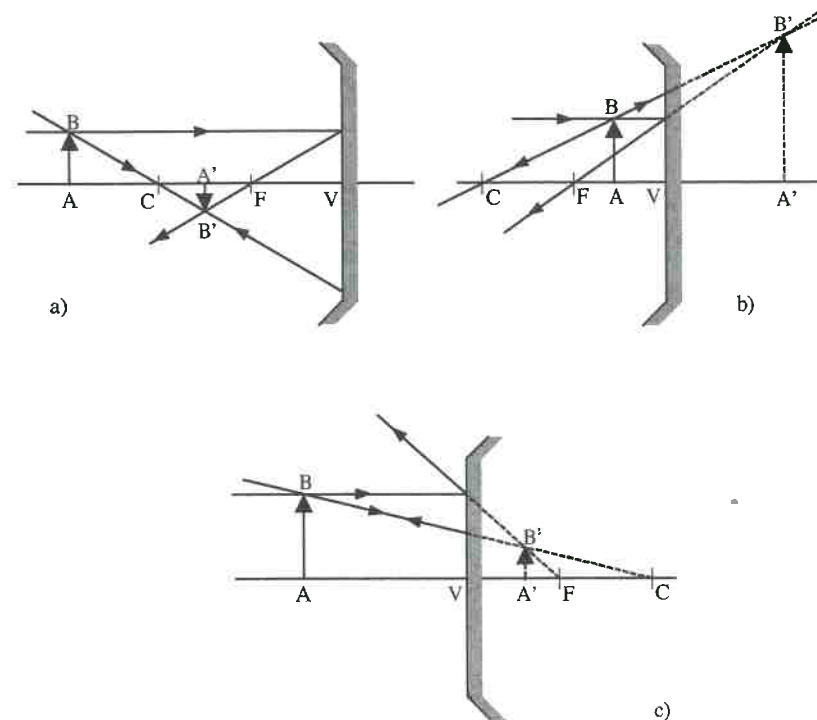


FIGURA 4.11. Formación de imágenes con espejos esféricos.

Al igual que ocurría con las lentes el aumento lateral, β' , relaciona los tamaños de la imagen y del objeto. De la figura 4.11 a) se deduce que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C} \Rightarrow \frac{y}{s-r} = \frac{y'}{s'-r}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'-r}{s-r}$$

y sustituyendo la ecuación (4.5) obtenemos:

$$\beta' = -\frac{s'}{s} \quad (4.8)$$

A continuación discutiremos la posición y naturaleza de la imagen según la posición del objeto, para ello partiendo de la ecuación de los espejos obtenemos otra forma de escribir el aumento lateral en función de la focal y de la distancia objeto:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \Rightarrow 1 + \frac{s}{s'} = \frac{s}{f'}$$

$$\frac{s}{s'} = \frac{s}{f'} - 1 = \frac{s-f}{f} \Rightarrow \beta' = -\frac{s'}{s} = \frac{f}{f-s} \quad (4.9)$$

En el caso de los espejos convexos, las imágenes de objetos reales son siempre virtuales, derechas y más pequeñas que el objeto. Para un espejo cóncavo, las distintas posibilidades se encuentran esquematizadas en la tabla IV.1.

ESPEJO CÓNCAVO				
OBJETO		IMAGEN		
Ubicación	Tipo	Ubicación	Orientación	Tamaño
$-\infty < s < 2f$	Real	$2f < s' < f$	Invertida	Menor
$s = 2f$	Real	$s' = 2f$	Invertida	Igual
$2f < s < f$	Real	$-\infty < s' < 2f$	Invertida	Mayor
$f < s$	Virtual	$s' > s $	Derecha	Mayor

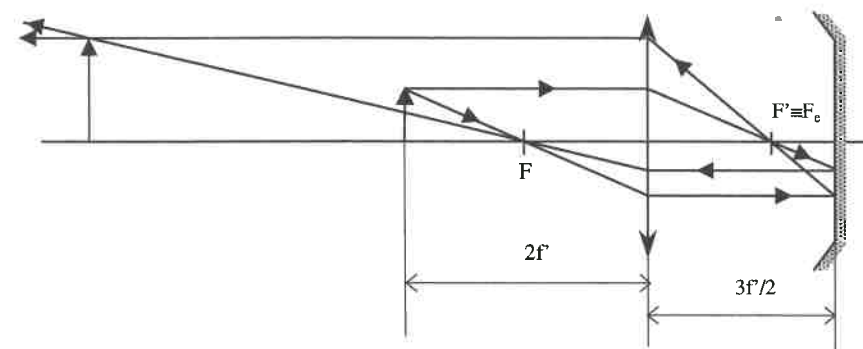
Tabla IV.1

CUESTIONES

1.- ¿Presentan los espejos dispersión cromática?, ¿y las lentes?

Los espejos no presentan dispersión cromática ya que se rigen por la ley de la reflexión, $\epsilon = \epsilon'$, ley en la que sólo interviene el ángulo de incidencia del rayo y no las características materiales del medio en el que éste se propaga. Sin embargo, en la ley de la refracción, $n \sin \epsilon = n' \sin \epsilon'$, sí que aparecen los índices de los medios que la luz atraviesa en su propagación, por lo que las lentes sí que presentan dispersión cromática debido a la variación del índice con la longitud de onda.

2.- Dada una lente convergente de focal f' y un espejo cóncavo de focal $f'/2$ situado a una distancia $3f'/2$ de la lente, obtener gráficamente la posición de la imagen de un objeto situado a una distancia $2f'$ delante de la lente.



Un rayo que incide en la lente paralelo al eje óptico, sale de ella pasando por F' . Puesto que F' coincide con el foco del espejo, dicho rayo llega al espejo pasando por su foco, y por tanto, sale del espejo paralelo al eje óptico. Por último, este rayo incide en la lente, de derecha a izquierda, paralelo al eje óptico y sale de ella pasando por F . El segundo rayo incide en la lente pasando por F , saldrá de la misma paralelo al eje óptico. Dicho rayo llega al espejo paralelo al eje óptico y sale de él pasando por el foco F_e . Como éste coincide con F' , el rayo incide en la lente de nuevo pasando por F' y sale paralelo al eje óptico. Con el corte de los dos rayos que salen, obtenemos una imagen real, derecha y más grande que el objeto.

3.- Se utiliza a veces como espejo retrovisor de un automóvil, un espejo esférico convexo. Demostrar que las imágenes formadas por este espejo de los objetos reales, son siempre virtuales, derechas y más pequeñas que el objeto.

Utilizando la ecuación de Gauss de los espejos deducimos que:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} - \frac{1}{s}$$

Si el objeto es real, entonces $s < 0$ por lo que $(-1/s) > 0$, y puesto que se trata de un espejo convexo, $r > 0$ con lo que se obtiene que $s' > 0$, es decir, se obtiene una imagen virtual. Si tenemos ahora en cuenta la expresión del aumento lateral:

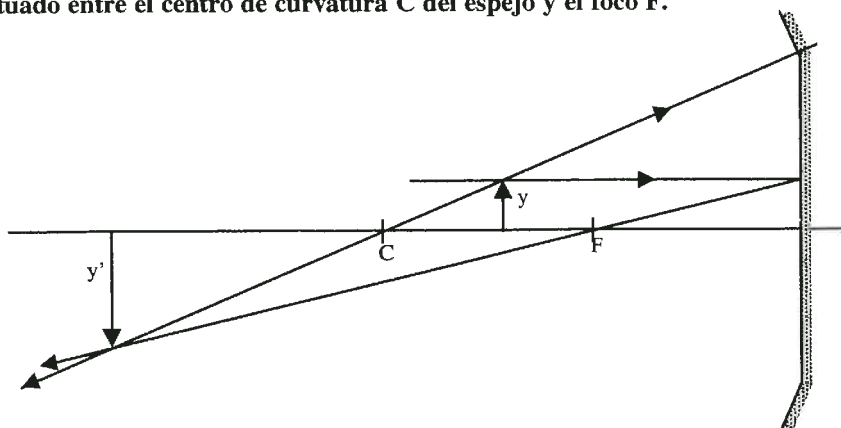
$$\beta' = -\frac{s'}{s} = -\frac{(>0)}{(<0)} > 0 \text{ con lo que la imagen es derecha}$$

Por último, el aumento lateral también se puede escribir como:

$$\beta' = \frac{f}{f-s} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f > 0 \\ s < 0 \end{array} \right\} f-s > 0 \text{ y } f-s > f \Rightarrow \beta' = \frac{f}{(>f)} < 1$$

y la imagen resulta ser más pequeña que el objeto.

4.- Dado un espejo esférico cóncavo, hallar gráficamente la imagen de un objeto situado entre el centro de curvatura C del espejo y el foco F.



Un rayo que incide en el espejo paralelo al eje óptico, sale pasando por el foco F y un rayo que incide pasando por el centro de curvatura del espejo no se desvía y sale en la misma dirección con la que entró. La imagen es real, invertida y más grande que el objeto.

5.- Con un espejo esférico cóncavo, ¿se pueden conseguir imágenes virtuales de objetos reales? Justificar analíticamente la respuesta.

Si el objeto es real, entonces $s < 0$ y como el espejo es cóncavo, $r < 0$. Si en la ecuación de Gauss de los espejos, despejamos la posición de la imagen s' , obtenemos:

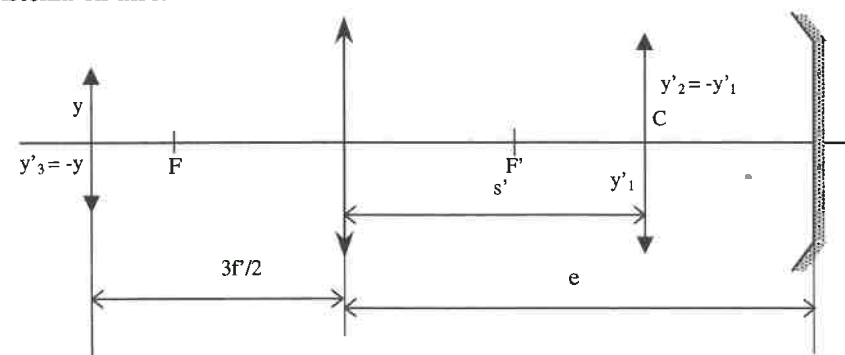
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} - \frac{1}{s} = \frac{2s-r}{rs} \Rightarrow s' = \frac{rs}{2s-r}$$

expresión en la que el numerador siempre es positivo, mientras que el signo del denominador dependerá de los valores de s y de r . Para que la imagen sea virtual, $s' > 0$ y para conseguirlo es necesario que el denominador, $2s - r > 0$:

$$2s - r > 0 \Rightarrow s > \frac{r}{2} \Rightarrow s > f$$

Pero, puesto que s y f son negativos, esta desigualdad ocurrirá cuando $|s| < |f|$, es decir, cuando el objeto esté situado entre el espejo y el foco del espejo.

6.- En un sistema formado por una lente de focal f' y un espejo de focal $\pm f'$ según sea cóncavo o convexo, calcular en ambos casos la distancia lente-espejo para que $\beta' = -1$ cuando el objeto está a $3f'/2$ delante de la lente. Suponer el sistema en aire.



En un espejo esférico, si el objeto está en el centro de curvatura, la imagen también está en el centro de curvatura, es invertida y del mismo tamaño que el objeto. Por ello, para que el sistema proporcione una imagen final con aumento -1 , debe ocurrir que la imagen dada por la lente y'_1 esté situada en el centro de curvatura del espejo. Así, el espejo dará una imagen y'_2 que será del mismo tamaño que y'_1 y en el mismo sitio, pero invertida. Por último, si la lente, de un objeto y da una imagen y'_1 , invertida y en una determinada posición, cuando la luz vuelve del espejo incidiendo en la lente de derecha a izquierda, de un objeto y'_2 situado en la misma posición que y'_1 y de su mismo tamaño, la lente proporcionará una imagen final y'_3 en la misma posición que el objeto original, de su mismo tamaño pero invertida, es decir, habremos conseguido un aumento total de -1 . Para que esto ocurra, si el objeto está a una distancia $3f'/2$ delante de la lente, la imagen estará a:

$$-\left(\frac{1}{3f'/2}\right) + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} - \frac{2}{3f'} = \frac{1}{3f'} \Rightarrow s' = 3f'$$

Si el espejo es cóncavo (como es el caso de la figura), la distancia lente-espejo debe ser:

$$s' - r = e = 3f' - (-2f') = 5f'$$

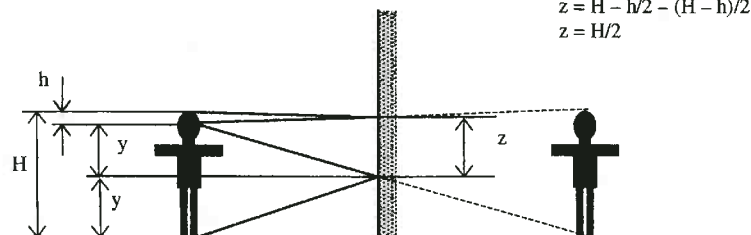
Y si el espejo es convexo:

$$e = s' - r = 3f' - 2f' = f'$$

donde hemos considerado que f es un número positivo puesto que la lente es convergente.

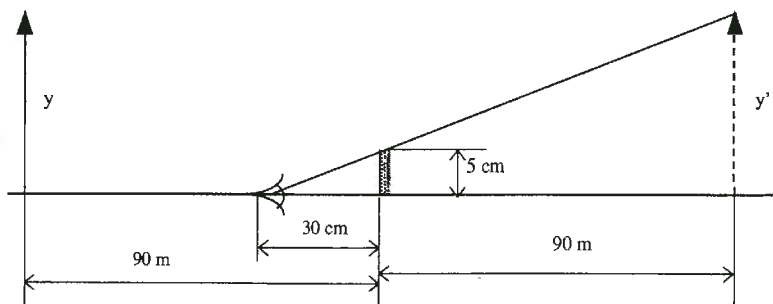
7.- ¿Cuál es la longitud del espejo plano vertical de menor tamaño en la que una persona puede verse de cuerpo entero y dónde debe estar situado?

$$2y = H - h$$



Para que esta persona se vea de cuerpo entero, es necesario que vea su pie y la parte superior de su cabeza. Para que pueda ver su pie, un rayo que sale del pie, debe llegar hasta su ojo y, análogamente, para poder ver la parte superior de la cabeza, un rayo que sale de esta parte, debe llegar hasta su ojo. Según se puede ver en la figura, el tamaño mínimo de espejo que se necesita es $z = H/2$, es decir, que el espejo debe ser de un tamaño igual a la mitad de la estatura de la persona. Como también se puede deducir de la figura, dicho espejo debe estar colocado a una altura sobre el suelo igual a $(H - h)/2$.

8.- Con un espejo plano de 5 cm de tamaño colocado a 30 cm del ojo se observa un árbol que dista 90 m del espejo. Si la imagen del árbol cubre totalmente el espejo, ¿cuál es la altura del árbol?



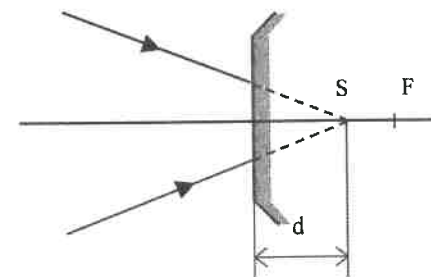
Según se puede ver en la figura, si el árbol tiene una altura y , su imagen tendrá una altura $y' = y$, estando situada a 90 m detrás del espejo. Si dicha imagen cubre totalmente el espejo, de la figura se deduce que:

$$\frac{5}{30} = \frac{y'}{9030} \Rightarrow y' = 15.05 \text{ m}$$

Y, puesto que el árbol tiene la misma altura que su imagen, medirá también 15.05 m.

9.- Un cono de rayos converge hacia un punto axial S situado a una distancia "d" detrás de un espejo convexo de focal $f > d$. Utilizar la ecuación de los espejos para describir la imagen resultante.

Para el espejo esférico, la distancia objeto $s = d > 0$. Si sustituimos en la ecuación de los espejos:



$$\frac{1}{d} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d}$$

$$\text{Como } f > d \Rightarrow \frac{1}{f} < \frac{1}{d}$$

$$s' < 0 \text{ y la imagen es real}$$

Para analizar el tamaño de la imagen, consideremos el aumento lateral:

$$\beta' = -\frac{s'}{s} = -\frac{(<0)}{(>0)} > 0 \text{ y la imagen es derecha}$$

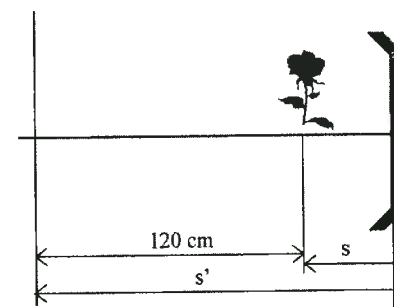
Por último, veamos el tamaño de la imagen:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{s'}{s} + 1 = \frac{s'}{f} \Rightarrow 1 - \frac{s'}{f} = -\frac{s'}{s} = \beta'$$

$$\text{Como } s' < 0 \Rightarrow \frac{s'}{f} < 0 \Rightarrow 1 - \frac{s'}{f} > 1$$

$\beta' > 1$ y la imagen es mayor que el objeto.

10.- Un espejo cóncavo forma la imagen de una flor en una pared distante 120 cm de ésta. Calcular el radio del espejo en función del aumento lateral que se desee conseguir.



De la figura se deduce que:

$$s - s' = 120 \Rightarrow s = 120 + s'$$

Por otra parte, el aumento es:

$$\beta' = -\frac{s'}{s} = -\frac{s'}{120 + s'}$$

Expresando las distancias s y s' en función del aumento:

$$\beta'(120 + s') = -s' \Rightarrow 120\beta' + s'\beta' = -s'$$

$$120\beta' = s'(-1 - \beta') \Rightarrow s' = \frac{-120\beta'}{\beta' + 1}$$

$$s = 120 + \frac{(-120\beta')}{\beta' + 1} = \frac{120}{\beta' + 1}$$

Sustituyendo las expresiones de s y s' en la ecuación de Gauss:

$$\frac{\beta' + 1}{120} + \frac{\beta' + 1}{(-120\beta')} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{(\beta' + 1)\beta' - (\beta' + 1)}{120\beta'} = \frac{2}{r} = \frac{(\beta' + 1)(\beta' - 1)}{120\beta'} = \frac{2}{r}$$

$$r = \frac{240\beta'}{\beta'^2 - 1}$$

Capítulo V

REFRACCIÓN EN SUPERFICIES PLANAS. LÁMINAS PLANO PARALELAS Y PRISMAS

V.1.- REFRACCIÓN EN UNA LÁMINA DE CARAS PLANO PARALELAS

Este tema se va a centrar en el estudio de sistemas ópticos refractantes con superficies planas. El más sencillo de todos ellos es la lámina de caras plano paralelas. Elementos comúnmente utilizados en óptica como pueden ser filtros, láminas separadoras y vidrios protectores pertenecen a este tipo de sistema óptico.

En el caso de las láminas plano-paralelas cualquier recta perpendicular a la lámina puede ser considerada como eje óptico. En la figura 5.1 está representada la trayectoria óptica seguida por un rayo de luz al atravesar una lámina de caras plano paralelas en los dos casos posibles: el caso general donde los índices de los tres medios implicados son distintos, y el caso particular donde la lámina está sumergida en un medio de índice n_1 .

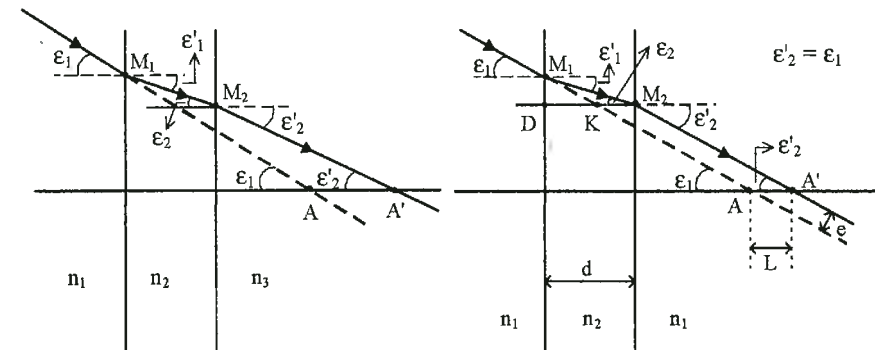


FIGURA 5.1. Trayectoria de un rayo dentro de una lámina plano paralela.

Aplicamos la ley de la refracción a las dos caras de la lámina:

$$\begin{aligned} n_1 \sin \epsilon_1 &= n_2 \sin \epsilon'_1 \\ n_2 \sin \epsilon_2 &= n_3 \sin \epsilon'_2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

En la figura se observa que los ángulos ϵ'_1 y ϵ_2 son iguales por lo tanto despejando $\sin \epsilon'_2$ de la ecuación (5.1), se obtiene:

$$\sin \epsilon'_2 = \frac{n_2}{n_3} \sin \epsilon_2 = \frac{n_2}{n_3} \sin \epsilon'_1 = \frac{n_1}{n_3} \sin \epsilon_1 \quad (5.2)$$

En el caso particular de que la lámina se halle rodeada de un medio homogéneo de índice n_1 , $n_1 = n_3$ y en este caso de la ecuación 5.2 es fácil deducir que el ángulo de emergencia ϵ'_2 y el de incidencia ϵ_1 son iguales y, por lo tanto, el rayo emergente es paralelo al incidente, y únicamente ha sufrido un desplazamiento. El rayo emergente corta al eje óptico en el punto A' y a la distancia AA' se le denomina **desplazamiento axial**, que denotaremos por L . El valor que tiene este desplazamiento se deduce fácilmente de la figura:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \epsilon_1 &= \frac{M_1 D}{DK} \Rightarrow DK = \frac{M_1 D}{\operatorname{tg} \epsilon_1} \\ \operatorname{tg} \epsilon'_1 &= \frac{M_1 D}{d} \Rightarrow M_1 D = d \operatorname{tg} \epsilon'_1 \\ L &= d - DK = d - \frac{M_1 D}{\operatorname{tg} \epsilon_1} \\ L &= d - \frac{d \operatorname{tg} \epsilon'_1}{\operatorname{tg} \epsilon_1} = d \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \epsilon'_1}{\operatorname{tg} \epsilon_1} \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Si ahora suponemos que los ángulos son pequeños, lo que equivale a quedarse en la zona paraxial, entonces:

$$\operatorname{tg} \epsilon_1 \approx \epsilon_1 \quad \operatorname{tg} \epsilon'_1 \approx \epsilon'_1 \quad n_1 \epsilon_1 = n_2 \epsilon'_1$$

con lo que el desplazamiento axial queda:

$$L = d \left(1 - \frac{\epsilon'_1}{\epsilon_1} \right) = d \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \right) \quad (5.4)$$

Si, además, suponemos que la lámina está en aire ($n_1 = n_3 = 1$, $n_2 = n$):

$$L = d \left(1 - \frac{1}{n} \right) \quad (5.5)$$

que es el desplazamiento axial para una lámina de índice n en aire. En este caso, el

desplazamiento axial no depende del ángulo de incidencia, lo que equivale a decir que, en zona paraxial, la lámina plano paralela presenta un comportamiento estigmático. Fuera de la región paraxial la expresión correcta de L es la expresión general dada por la ec. (5.3). En este caso, para cada ángulo de incidencia tendremos un desplazamiento distinto, es decir, una imagen distinta, por lo que, en estas condiciones, la lámina no es estigmática.

Para el caso de una lámina sumergida, también es posible calcular el desplazamiento lateral o transversal e que, cómo puede apreciarse en la fig. 5.1 representa la traslación que experimenta el rayo respecto a su dirección original. Dicho desplazamiento lateral se puede calcular, de la siguiente forma:

$$\sin \epsilon'_2 = \frac{e}{L}$$

$$\text{como } \sin \epsilon'_2 = \sin \epsilon_1 \Rightarrow e = L \sin \epsilon_1 = d \sin \epsilon_1 \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \epsilon'_1}{\operatorname{tg} \epsilon_1} \right) \quad (5.6)$$

Desarrollando las tangentes, y siempre considerando la lámina sumergida en aire:

$$\begin{aligned} e &= d \sin \epsilon_1 \left(1 - \frac{\cos \epsilon_1 \sin \epsilon'_1}{\sin \epsilon_1 \cos \epsilon'_1} \right) = d \sin \epsilon_1 \left(1 - \frac{\cos \epsilon_1}{n \cos \epsilon'_1} \right) = \\ &= d \sin \epsilon_1 \left(1 - \frac{\cos \epsilon_1}{\sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 \epsilon'_1}} \right) = d \sin \epsilon_1 \left(1 - \frac{\cos \epsilon_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \epsilon_1}} \right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Esta ecuación nos relaciona el ángulo de incidencia ϵ_1 , con el desplazamiento lateral de dicho rayo.

Cuando los ángulos son pequeños, de las ecs. (5.5) y (5.6) se obtiene:

$$e = L \epsilon_1 = d \epsilon_1 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \quad (5.8)$$

Vemos que, incluso en la región paraxial, el desplazamiento transversal, e , sí que depende del ángulo de incidencia, al contrario de lo que le ocurría al desplazamiento axial, L , que en estas condiciones sólo dependía de las características de la lámina.

V.1.1.- Espesor aparente de una lámina plano paralela

Veamos a continuación cómo al mirar una lámina plano paralela, nos parece que ésta tiene un espesor d_0 más pequeño que su espesor real. A este espesor se le denomina espesor aparente de la lámina. Si, en la figura 5.2, consideramos un punto objeto O situado en la primera cara de la lámina, cuando miramos a través de ella, nos parece que el punto objeto está en la posición O' , imagen de O a través de la

lámina. Como consecuencia, aparentemente, la lámina tiene un espesor d_0 cuando en realidad su espesor es $d > d_0$. Como se deduce de la figura la diferencia entre ambos espesores, el real y el aparente, es justamente el desplazamiento axial producido por la lámina. Si la lámina está en aire, el espesor aparente viene dado por:

$$d - d_0 = L \Rightarrow d_0 = d - L = d - d \left(1 - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow d_0 = \frac{d}{n} \quad (5.9)$$

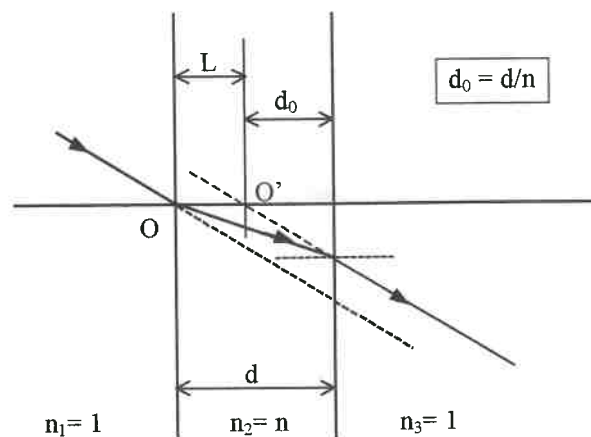


FIGURA 5.2. Espesor aparente de una lámina plano paralela.

Según la ecuación (5.9), midiendo el espesor real y el espesor aparente de una lámina plano paralela, se puede deducir fácilmente su índice de refracción, simplemente como el cociente entre ambos espesores.

V.2.- REFRACCIÓN EN UN PRISMA

Un prisma óptico es un medio transparente limitado por superficies planas que forman un ángulo diedro. Se denomina sección principal de un prisma a cualquier sección normal a la arista. Nosotros vamos a estudiar la refracción en una sección principal. En la mayoría de casos, utilizaremos prismas triangulares rectos tal y como se muestra en la figura 5.3, por lo que, en nuestros esquemas, los prismas se verán reducidos a un triángulo y denominaremos "base del prisma" a la base del triángulo de su sección principal, y α al ángulo de refringencia correspondiente.

Los prismas juegan papeles muy diversos en todo el ámbito de la óptica, actuando por ejemplo como divisores de haz, sistemas polarizadores e incluso como sistemas interferométricos. No obstante, la mayoría de estas aplicaciones sólo utiliza una de las dos propiedades fundamentales de los prismas. Una de ellas, su capacidad de actuar como sistema dispersor, ya que es capaz de separar, hasta cierto punto, las diferentes longitudes de onda que constituyen un haz policromático. Su segunda

propiedad interesante es su capacidad de producir un cambio en la orientación de la imagen o en la dirección de propagación de la luz.

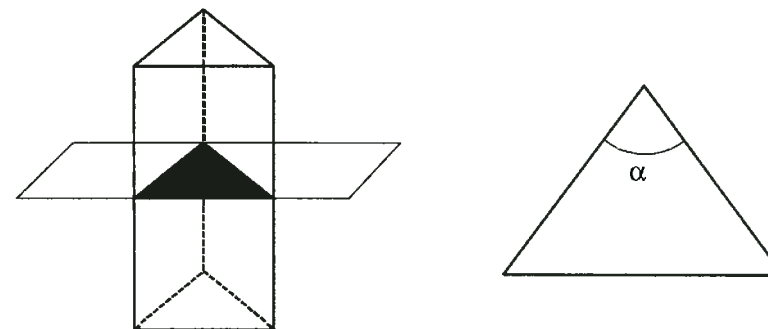


FIGURA 5.3. Prisma triangular recto y sección principal del mismo.

Vamos a estudiar a continuación la refracción en un prisma. Un rayo de luz que incide sobre un prisma con un ángulo ϵ_1 , sufre una desviación angular, δ , al atravesar el prisma. Si en la figura 5.4, que muestra la refracción de un rayo cualquiera en un prisma, consideramos todos los ángulos positivos, la desviación debida a la primera refracción es $\epsilon_1 - \epsilon'_1$, y la debida a la refracción en la segunda cara es $\epsilon'_2 - \epsilon_2$. Así pues, la desviación total producida será:

$$\delta = (\epsilon_1 - \epsilon'_1) + (\epsilon'_2 - \epsilon_2) \quad (5.10)$$

De la figura podemos deducir que el ángulo de refringencia del prisma vale:

$$\alpha = \epsilon'_1 + \epsilon_2 \quad (5.11)$$

con lo que la desviación en función de α será:

$$\delta = \epsilon_1 + \epsilon'_2 - \alpha \quad (5.12)$$

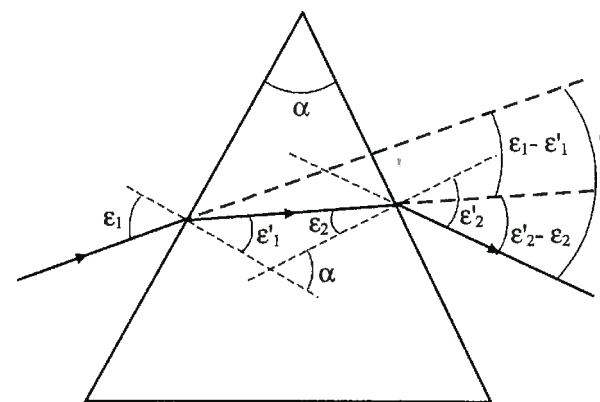


FIGURA 5.4. Refracción en un prisma.

Veamos ahora cómo varía la desviación con el índice de refracción. Para ello consideremos la expresión de la desviación (ec. 5.12) y las expresiones de la refracción en las dos caras del prisma, supuesto éste en aire:

$$\text{sen } \epsilon_1 = n \text{ sen } \epsilon'_1 \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_1 \text{ fijo} \\ \text{si } n \uparrow \epsilon'_1 \downarrow \end{cases}$$

$$\epsilon'_1 + \epsilon_2 = \alpha \Rightarrow \begin{cases} \alpha \text{ fijo} \\ \text{si } \epsilon'_1 \downarrow \epsilon_2 \uparrow \end{cases}$$

$$n \text{ sen } \epsilon_2 = \text{sen } \epsilon'_2 \Rightarrow \begin{cases} \text{si } n \uparrow \text{ y } \epsilon_2 \uparrow \text{ entonces } \epsilon'_2 \uparrow \end{cases}$$

$$\delta = \epsilon_1 + \epsilon'_2 - \alpha \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_1 \text{ y } \alpha \text{ fijos} \\ \text{si } \epsilon'_2 \uparrow \delta \uparrow \end{cases} \quad (5.13)$$

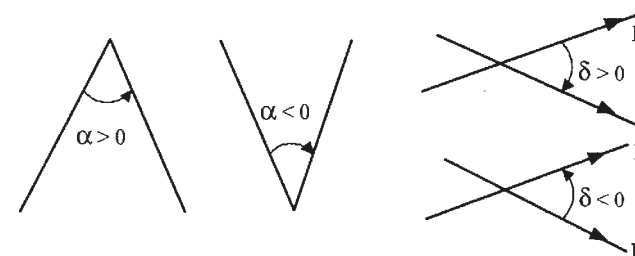
De estas expresiones se deduce que, para un ángulo de incidencia determinado, si n crece, entonces ϵ'_1 disminuye para que el producto $n \text{ sen } \epsilon'_1$ se mantenga constante (hay que tener en cuenta que los ángulos de incidencia y refracción varían entre 0 y 90° , rango en el cual la función seno es una función creciente). Como el ángulo de refringencia del prisma también es fijo, si ϵ'_1 disminuye, entonces ϵ_2 aumenta para que la suma de ambos ángulos se mantenga constante. Por último, si n crece y ϵ_2 también, al aplicar la ley de Snell a la segunda cara del prisma, vemos que el ángulo de salida ϵ'_2 también aumenta y con él la desviación producida por el prisma.

En definitiva, la desviación angular producida por un prisma que trabaja por refracción, aumenta con el índice del prisma. Dado que el índice es una función de la longitud de onda, podemos hablar también de una función $\delta(\lambda)$. Como ya vimos en un capítulo anterior, en la mayoría de los medios materiales dieléctricos el índice disminuye conforme aumenta la longitud de onda; entonces la desviación será mayor cuanto menor sea la longitud de onda, es decir, un prisma desvía más el azul que el rojo.

Las ecuaciones deducidas anteriormente han sido obtenidas, como ya hemos dicho, considerando todos los ángulos positivos, es decir, sin aplicar el criterio de signos. Si queremos utilizar dicho convenio, hay que tener en cuenta que, según se ve en la figura 5.4, los ángulos de la primera cara ϵ_1 y ϵ'_1 son positivos, mientras que los de la segunda cara ϵ_2 y ϵ'_2 son negativos.

Para el ángulo de refringencia del prisma se toma el siguiente criterio: se considera positivo si, al llevar por giro, con eje en la arista, la primera cara a coincidir con la segunda, se va en sentido antihorario, y negativo en caso contrario.

Por otra parte, la desviación se mide desde el rayo incidente hasta el emergente y es positiva en sentido horario y negativa en sentido contrario.



Con estas consideraciones si aplicamos el criterio de signos, el ángulo del prisma y la desviación vienen dados por las expresiones:

$$\begin{aligned} \delta &= (\epsilon_1 - \epsilon'_1) + (\epsilon_2 - \epsilon'_2) \\ \alpha &= \epsilon'_1 - \epsilon_2 \\ \delta &= \epsilon_1 - \epsilon'_2 - \alpha \end{aligned} \quad (5.14)$$

V.2.1.- Desviación mínima

Para un prisma dado, es decir para n y α fijos, la desviación, δ , producida es función del ángulo de incidencia, ϵ_1 . En la figura 5.5 se puede observar una gráfica de cómo varía δ en función de ϵ_1 .

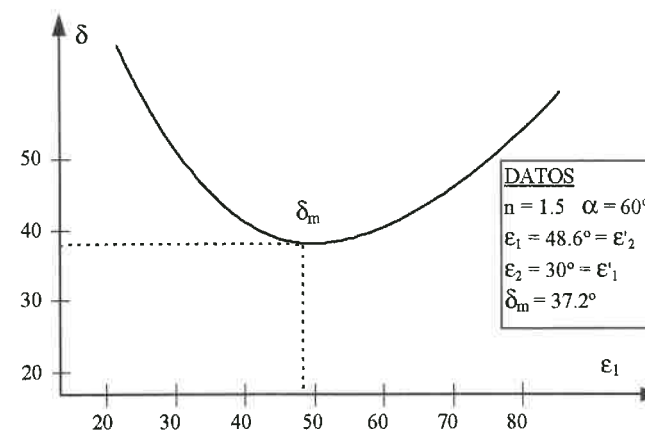


FIGURA 5.5. Representación gráfica de la desviación de un prisma $\delta(\epsilon_1)$.

Como se puede apreciar en la figura, existe un valor del ángulo de incidencia, para el cual la desviación es mínima. A este valor lo designaremos por δ_m y vamos a calcular su valor:

$$\frac{d\delta}{d\epsilon_1} = 1 + \frac{d\epsilon'_2}{d\epsilon_1} = 0 \Rightarrow \frac{d\epsilon'_2}{d\epsilon_1} = -1 \quad (5.15)$$

Por otra parte, derivando en las ecuaciones de refracción de ambas caras del prisma, se obtiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \varepsilon_1 &= n \operatorname{sen} \varepsilon'_1 \Rightarrow \cos \varepsilon_1 d\varepsilon_1 = n \cos \varepsilon'_1 d\varepsilon'_1 \\ n \operatorname{sen} \varepsilon_2 &= \operatorname{sen} \varepsilon'_2 \Rightarrow n \cos \varepsilon_2 d\varepsilon_2 = \cos \varepsilon'_2 d\varepsilon'_2 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Dividiendo estas expresiones una por la otra:

$$\frac{\cos \varepsilon_1 d\varepsilon_1}{\cos \varepsilon'_2 d\varepsilon'_2} = \frac{\cos \varepsilon'_1 d\varepsilon'_1}{\cos \varepsilon'_2 d\varepsilon'_2} \quad (5.17)$$

Además, puesto que $\alpha = \varepsilon'_1 + \varepsilon_2$, entonces $d\varepsilon'_1 + d\varepsilon_2 = 0$ por ser α constante; entonces podemos escribir:

$$\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos \varepsilon'_2} = \frac{\cos \varepsilon'_1}{\cos \varepsilon_2} \quad \text{ya que} \quad \begin{cases} \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon'_2} = -1 & \text{para } \delta_m \\ \frac{d\varepsilon'_1}{d\varepsilon_2} = -1 & \text{por ser } \alpha \text{ constante} \end{cases} \quad (5.18)$$

Sustituyendo los cosenos en función de los senos y aplicando la ley de Snell:

$$\frac{1 - \operatorname{sen}^2 \varepsilon_1}{1 - \operatorname{sen}^2 \varepsilon'_2} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \varepsilon'_1}{1 - \operatorname{sen}^2 \varepsilon_2}$$

$$\frac{1 - n^2 \operatorname{sen}^2 \varepsilon'_1}{1 - n^2 \operatorname{sen}^2 \varepsilon_2} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \varepsilon'_1}{1 - \operatorname{sen}^2 \varepsilon_2}$$

que tiene como solución:

$$\varepsilon'_1 = \varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon'_2 \quad (5.19)$$

Esta condición de mínimo implica que el rayo para el cual la desviación es mínima, atraviesa el prisma de forma simétrica, tal y como se ve en la figura 5.6, es decir, el rayo en el interior del prisma es perpendicular a la bisectriz del ángulo de refringencia. Si el prisma es isósceles, esto implica que el rayo en el interior del prisma viaja paralelo a su base.

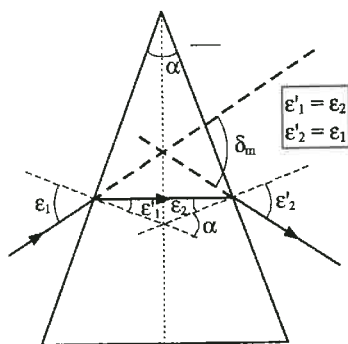


FIGURA 5.6. Trayectoria de un rayo con desviación mínima.

Si sustituimos estos datos en las ecuaciones (5.11) y (5.12), obtenemos:

$$\begin{aligned} \alpha &= \varepsilon'_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon'_1 \Rightarrow \varepsilon'_1 = \alpha/2 \\ \delta &= \varepsilon_1 + \varepsilon'_2 - \alpha \Rightarrow \delta_m = 2\varepsilon_1 - \alpha \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\delta_m + \alpha}{2} \end{aligned} \quad (5.20)$$

y aplicando la ley de Snell:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\delta_m + \alpha}{2}\right) = n \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \Rightarrow n = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\delta_m + \alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \quad (5.21)$$

Una de las técnicas experimentales más exactas para determinar el índice de refracción de una sustancia transparente está basada en esta ecuación. Se confecciona un prisma con el material que se desea analizar y conocido el ángulo α , se mide la desviación mínima δ_m para diferentes longitudes de onda y sustituyendo en la ec. (5.21) se calcula el índice de refracción $n(\lambda)$. Utilizando prismas huecos se puede emplear también esta técnica para la obtención del índice de refracción de líquidos y gases.

Para caracterizar la desviación angular de un prisma se suele utilizar la potencia prismática P_A , definida como:

$$P_A = 100 \operatorname{tg} \delta \quad (5.24)$$

siendo δ la desviación angular producida por el prisma. La potencia prismática se mide en dioptrías prismáticas (de símbolo Δ) de manera que una dioptría prismática equivale a una desviación de 1 cm por cada metro recorrido por el rayo después de refractarse.

V.2.2.- Prisma delgado

Un prisma se considera delgado cuando el ángulo de refringencia es muy pequeño. Si, en este tipo de prismas, se incide con ángulos pequeños, podemos aplicar la aproximación paraxial y la ley de la refracción en ambas caras del prisma se escribe:

$$\varepsilon_1 = n \varepsilon'_1 \quad n \varepsilon_2 = \varepsilon'_2 \quad (5.22)$$

y sustituyendo en el valor de la desviación:

$$\delta = n \varepsilon'_1 + n \varepsilon_2 - \alpha = n(\varepsilon'_1 + \varepsilon_2) - \alpha = n \alpha - \alpha \Rightarrow \delta = \alpha (n-1) \quad (5.23)$$

Esta ecuación nos dice que la desviación de un rayo en incidencia casi normal sobre un prisma delgado no depende de la inclinación del rayo (Fig. 5.7) y además es directamente proporcional al ángulo de refringencia. Conviene señalar que en Óptica Oftálmica es usual la utilización de prismas delgados en una posición determinada,

denominada posición de Prentice, en la cual el rayo incide perpendicular a la primera cara del prisma con lo que la desviación es producida únicamente por la segunda cara.

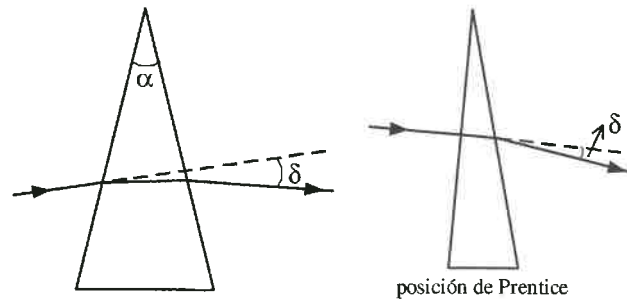


FIGURA 5.7. Desviación en un prisma delgado y posición de Prentice.

V.3.- DISPERSIÓN EN UN PRISMA

El índice de refracción de los medios materiales varía con la longitud de onda y a esta dependencia, como ya vimos en un tema anterior, se le denomina dispersión. Vamos a estudiar los prismas como sistemas dispersores, es decir, como sistemas capaces de separar, hasta cierto punto, las frecuencias constitutivas de un haz de luz policromático.

Como consecuencia del fenómeno de la dispersión cromática, cuando un rayo de luz compuesto por dos radiaciones de longitudes de onda λ y $\lambda + d\lambda$, incide en un prisma con un ángulo ϵ_1 , se generan, en la primera refracción, dos rayos que salen con un ángulo de refracción distinto. La refracción en la segunda cara del prisma producirá también ángulos distintos y, por tanto, para cada longitud de onda, existirá una desviación distinta como se observa en la figura 5.8. Además, y según hemos visto anteriormente, un prisma desvía más las cortas longitudes de onda (violetas y azules) mientras que las longitudes de onda más largas (naranjas y rojos) sufren una desviación menor, o dicho en otras palabras, la potencia prismática es distinta para las diferentes longitudes de onda.

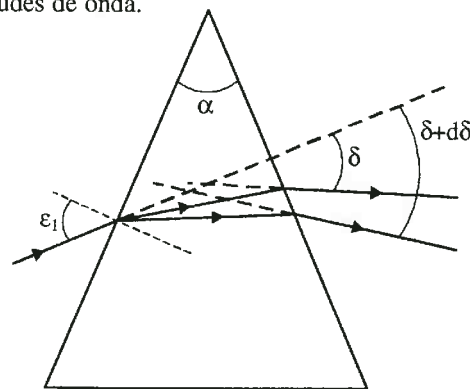


FIGURA 5.8. Dispersión en un prisma.

A la diferencia entre las desviaciones, $d\delta$, se le denomina dispersión angular del prisma y depende del ángulo α del prisma, del ángulo de incidencia ϵ_1 y de la dispersión cromática del medio $dn/d\lambda$.

Para calcular esta variación de la desviación, supongamos que un rayo incide sobre un prisma con un ángulo de incidencia determinado, es decir $\epsilon_1 = \text{constante}$. Considerando las ecuaciones de refracción en las dos caras del prisma y derivando en ellas, obtenemos:

$$\begin{aligned} n \sin \epsilon_1 &= n \sin \epsilon'_1 & \Rightarrow & 0 = n \cos \epsilon'_1 d\epsilon'_1 + \sin \epsilon'_1 dn \\ n \sin \epsilon_2 &= \sin \epsilon'_2 & \Rightarrow & n \cos \epsilon'_2 d\epsilon'_2 + \sin \epsilon'_2 dn = \cos \epsilon'_2 d\epsilon'_2 \end{aligned} \quad (5.26)$$

donde ahora varían tanto los ángulos (a excepción del ángulo de incidencia en la primera cara), como el índice.

Por otra parte, se cumple que:

$$\begin{aligned} \delta &= \epsilon_1 + \epsilon'_2 - \alpha \\ d\delta &= d\epsilon'_2 \quad \text{ya que } \epsilon_1 \text{ y } \alpha \text{ son fijos} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Despejando de la ec. (5.26) y operando, obtenemos:

$$\begin{aligned} d\delta &= d\epsilon'_2 = \frac{n \cos \epsilon'_2 d\epsilon'_2 + \sin \epsilon'_2 dn}{\cos \epsilon'_2} \\ \epsilon'_1 + \epsilon'_2 &= \alpha \quad \Rightarrow \quad d\epsilon'_1 = -d\epsilon'_2 \\ d\delta &= \frac{-n \cos \epsilon'_2 d\epsilon'_1 + \sin \epsilon'_2 dn}{\cos \epsilon'_2} = \frac{-n \cos \epsilon'_2 \frac{-\sin \epsilon'_1 dn}{n \cos \epsilon'_1} + \sin \epsilon'_2 dn}{\cos \epsilon'_2} = \\ &= \frac{\sin \epsilon'_1 \cos \epsilon'_2 + \cos \epsilon'_1 \sin \epsilon'_2}{\cos \epsilon'_1 \cos \epsilon'_2} dn \\ d\delta &= \frac{\sin(\epsilon'_1 + \epsilon'_2)}{\cos \epsilon'_1 \cos \epsilon'_2} dn = \frac{\sin \alpha}{\cos \epsilon'_1 \cos \epsilon'_2} dn \end{aligned} \quad (5.28)$$

Para su uso en diferentes sistemas ópticos de carácter instrumental, los prismas se suelen utilizar en condiciones de mínima desviación. Para esta situación se cumple que:

$$\begin{aligned} \delta_m &\rightarrow \epsilon'_1 = \epsilon'_2 = \alpha/2 \\ d\delta_m &= \frac{\sin(2\epsilon'_1)}{\cos \epsilon'_1 \cos \epsilon'_2} dn = \frac{2 \sin \epsilon'_1 \cos \epsilon'_1}{\cos \epsilon'_1 \cos \epsilon'_2} dn = \frac{2 \sin(\alpha/2)}{\cos \epsilon'_2} dn \end{aligned} \quad (5.29)$$

Además, también es usual su utilización con luz paralela procedente de un

colimador. En estas condiciones si iluminamos el prisma con un haz paralelo constituido por dos radiaciones de longitudes de onda λ_1 y λ_2 y a la salida del prisma, se sitúa una segunda lente L_2 , en su plano focal imagen se producirá una imagen de la fuente para cada longitud de onda. Al conjunto de imágenes así producidas se le denomina espectro. Un prisma trabajando bajo estas dos condiciones, de desviación mínima y con un haz colimado que llena completamente la cara de entrada del prisma como se puede ver en la Fig. 5.9, da lugar a una desviación que viene dada por la expresión (5.30) donde "b" es el tamaño de la base del prisma y "a" a la anchura del haz:

$$\cos \epsilon'_2 = \frac{a}{AC} \quad \text{y} \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{b/2}{AC}$$

$$d\delta_m = \frac{2b/2}{AC \cos \epsilon'_2} dn = \frac{b}{a} dn \quad (5.30)$$

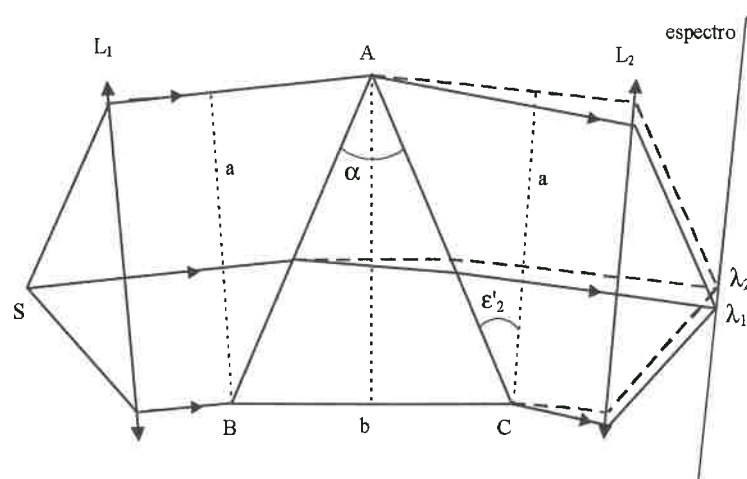


FIGURA 5.9. Dispersión con desviación mínima y haz colimado.

V.4.- REFLEXIÓN EN UN PRISMA

A continuación estudiaremos los prismas como sistemas reflectores. En este caso la dispersión ya no es deseada y se aprovecha la reflexión total que se puede producir en alguna de sus caras para variar la dirección de propagación de la luz o la orientación de la imagen e incluso a veces ambas a la vez (Fig. 5.10).

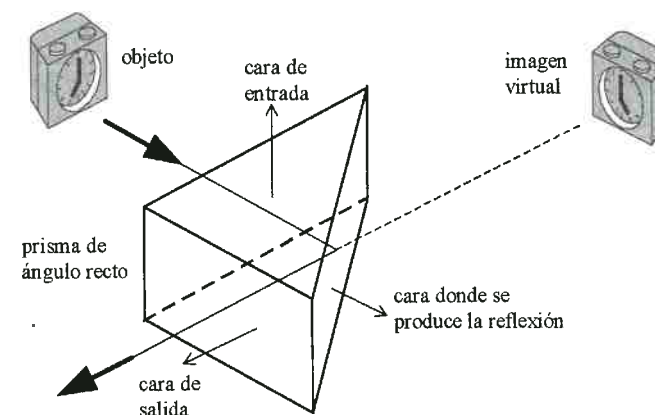


FIGURA 5.10. Cambio de orientación en un prisma.

Para ver cómo se produce la reflexión en un prisma, consideremos la figura 5.11 donde se ha trazado la sección principal de un prisma isósceles. El rayo refractado en la primera cara, incide sobre la base del prisma (cara FG) y se reflejará en ella cuando el ángulo de incidencia sobre esta cara sea mayor que el ángulo límite. Para evitar cualquier dificultad con ángulos más pequeños y poder trabajar con ángulos de incidencia menores que dicho ángulo límite, podemos suponer que la cara FG del prisma está especulada con lo que el rayo se reflejará igualmente en ella.

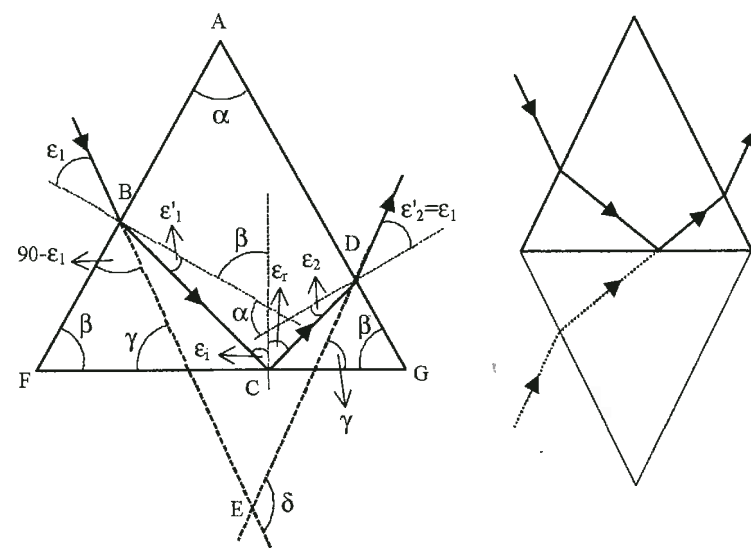


FIGURA 5.11. Reflexión en un prisma.

De la figura se deduce que:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon'_1 + \varepsilon_i = \beta \\ \varepsilon_2 + \varepsilon_r = \beta \end{array} \right\} \varepsilon_i = \varepsilon_r \Rightarrow \varepsilon'_1 = \varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon'_2 \quad (5.31)$$

es decir, que el ángulo de incidencia y el ángulo de emergencia del rayo son iguales. La desviación, en este caso, valdrá:

$$\delta = 2\gamma = 2\left[\pi - \beta - \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_1\right)\right] = 2\left(\frac{\pi}{2} - \beta + \varepsilon_1\right) = \pi - 2\beta + 2\varepsilon_1 = 2\varepsilon_1 + \alpha \quad (5.32)$$

es decir, que la desviación es independiente de n y, por lo tanto, de la longitud de onda, luego el prisma es acromático (no dispersivo) y la reflexión tendrá lugar sin ninguna preferencia de color.

Si ahora trazamos un prisma simétrico al anterior, como si estuviera reflejado en la cara FG (que es donde se produce la reflexión de la luz), vemos que para el rayo es como si el prisma fuera una lámina plano paralela de tal forma que el rayo emergente sale paralelo a la imagen del rayo incidente (Fig. 5.11). Esta lámina plano paralela ficticia se denomina lámina plano paralela equivalente al prisma y resulta fácil de calcular en la mayoría de los sistemas prismáticos que funcionan por reflexión. Además, el hecho de sustituir un prisma de reflexión por su lámina plano paralela equivalente simplifica el cálculo en este tipo de sistemas al obtener trayectorias rectilíneas no quebradas.

Las ventajas de utilizar un prisma como sistema reflector en lugar de espejos son en primer lugar que los prismas, al trabajar por reflexión total la luz incidente se refleja prácticamente el 100%, si la superficie está bien limpia y pulida, frente al 90% que se consigue con los espejos sin tratamientos especiales. Además la precisión obtenida en los ángulos entre las caras de un prisma es muy difícil de obtener con espejos, siendo los montajes mucho más sencillos al tener pocos problemas de alineamiento en comparación con los requeridos cuando se utilizan espejos. En cuanto a los principales inconvenientes son la absorción y dispersión que conlleva la utilización de prismas de gran tamaño.

Algunos sistemas prismáticos que actúan como sistemas reflectores tienen como función invertir la imagen. La orientación de una imagen la representaremos gráficamente por dos segmentos situados perpendicularmente al eje óptico. Uno de ellos, terminado en flecha, está orientado en la dirección vertical, y el otro, terminado en círculo, está dirigido en la dirección horizontal. Se dice que se ha producido una inversión parcial de la imagen cuando el objeto no se puede hacer coincidir con la imagen por giro en el plano que la contiene, es el caso de la imagen proporcionada por un espejo plano. Cuando si que se puede hacer coincidir el objeto con la imagen por giro se produce una inversión total. En este caso, la imagen está invertida de arriba a abajo y de izquierda a derecha.

A continuación describiremos algunos sistemas prismáticos con nombre propio viendo sus características principales y su lámina plano paralela equivalente. En la mayoría de ellos las ilustraciones bastan para explicar su funcionamiento por lo que haremos únicamente un breve comentario.

- El **prisma de ángulo recto** es un prisma triangular cuyas caras forman entre sí ángulos de 45° , 90° y 45° . Es el más utilizado ya sea sólo o en combinación con otros prismas. Desvía 90° los rayos que inciden perpendicularmente, dando lugar como puede verse en la fig. 5.12 a una inversión parcial de la imagen. Actúa por tanto como un espejo plano orientado a 45° . Como el ángulo de incidencia en la cara de reflexión es de 45° , siempre que el índice sea superior a $\sqrt{2}$ se producirá reflexión total no siendo necesario especular la cara del prisma. También se ha representado en la figura el comportamiento del prisma en un caso menos restringido, cuando el prisma se ilumina con un haz convergente. La trayectoria que seguiría la luz de no estar presente el prisma se ha representado punteada y como puede verse es simétrica a la real respecto al plano de reflexión. Es mucho más cómodo usar un eje óptico recto en lugar de trabajar con el eje óptico real. En este caso el prisma es sustituido por una lámina plano paralela, obtenida por reflexión del prisma en la cara reflectora, y según se puede apreciar en la figura, tiene un espesor igual al tamaño de los catetos del triángulo rectángulo. A este proceso se le denomina rectificación del prisma. El inconveniente que presenta es que se pierde la información acerca de la orientación de la imagen.

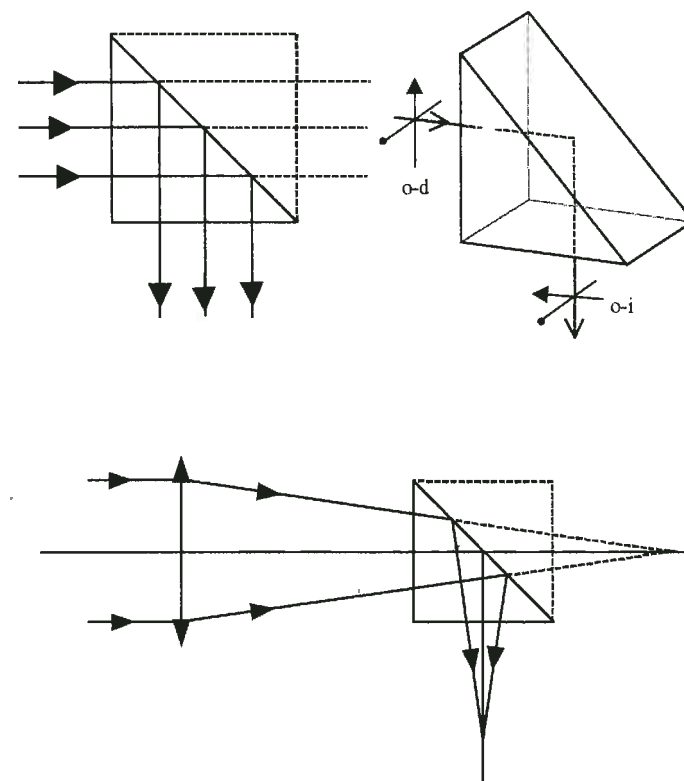


FIGURA 5.12. Prisma de ángulo recto.

- El **prisma de Porro simple** es físicamente el mismo que el anterior pero utilizado en diferente orientación como puede observarse en la fig. 5.13. Ahora está colocado de forma que la luz incide normalmente en la cara que forma la hipotenusa del triángulo. El haz después de sufrir dos reflexiones totales en las otras dos caras del prisma es desviado 180° . La lámina plano paralela equivalente, según se ve en la figura, se calcula fácilmente y tiene un espesor igual a la hipotenusa del triángulo. Este prisma equivale a dos espejos que forman entre sí 90° , luego cualquier rayo que se refleje en las dos caras sale desviado un ángulo de 180° , sea cual sea su ángulo de incidencia (como se demostró en el tema de espejos). Es pues un prisma de desviación constante.

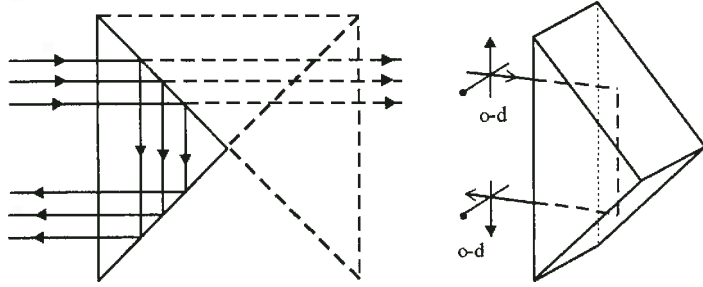


FIGURA 5.13. Prisma de Porro simple.

- El **prisma de Dove** sigue siendo un prisma de ángulo recto pero en una versión truncada tal y como se ve en la figura 5.14, en busca de reducir tamaño y peso. Se utiliza casi exclusivamente con luz colimada que entra por una de las caras en dirección paralela a la base, reflejándose en ella y sale con la misma dirección con la que entró. Su propiedad más interesante es que cuando el prisma gira en torno a un eje que tenga la misma dirección que el haz incidente, la imagen gira en el mismo sentido con velocidad doble. A los prismas que cumplen esta condición se les denomina rotadores. La lámina plano paralela equivalente tiene el mismo espesor que en el caso del prisma de ángulo recto pero la trayectoria del rayo dentro de esta lámina no es normal a la misma. Como se puede ver en la figura el prisma invierte parcialmente la imagen en la dirección perpendicular al plano en que se produce la reflexión.

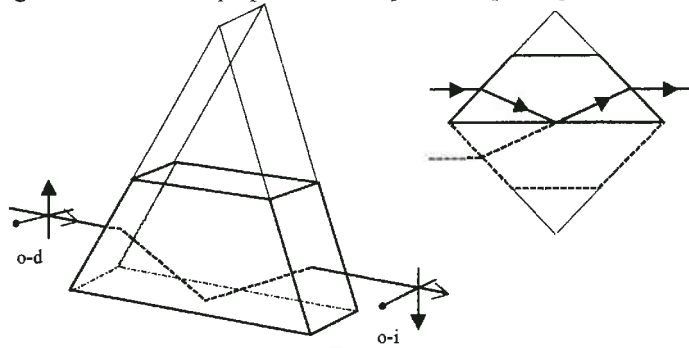


FIGURA 5.14. Prisma de Dove.

- El **prisma de Amici** es un prisma de ángulo recto truncado (similar por tanto al anterior) pero con una sección en forma de tejado en la cara donde se produce la reflexión (Fig. 5.15). Las dos caras del tejado forman un ángulo de 90° . La reflexión en el techo invierte la imagen de izquierda a derecha y la reflexión en la hipotenusa lo hace de arriba a abajo con lo que la imagen final presenta la misma orientación que el objeto.

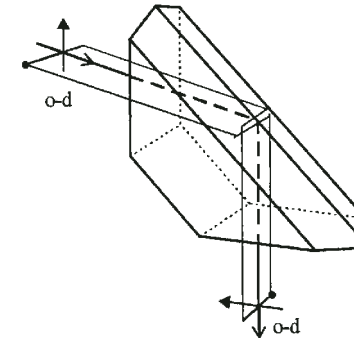


FIGURA 5.15. Prisma de Amici.

- El **Pentaprisma o escuadra óptica** es un prisma que produce una desviación de 90° y no afecta a la orientación de la imagen. Las caras reflectantes forman un ángulo de 45° entre sí y deben estar espejadas pues, generalmente, el rayo incide con un ángulo inferior al ángulo límite. En la figura 5.16 se puede ver la trayectoria del rayo dentro del pentaprisma, así como su equivalente en espejos.

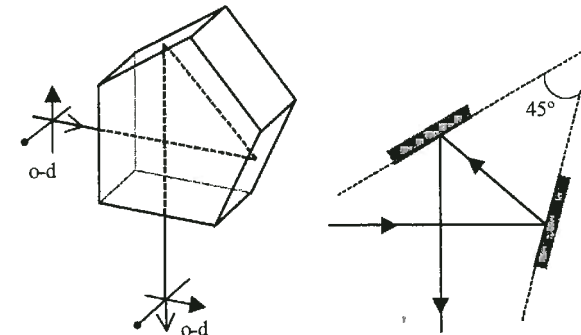


FIGURA 5.16. Pentaprisma.

- El prisma **Romboedro** equivale a dos espejos paralelos entre sí de tal manera que el rayo emergente sufre un desplazamiento respecto al incidente (Fig. 5.17) sin sufrir ninguna desviación angular ni producirse cambios en la orientación de la imagen. Los romboedros se utilizan en los oculares para desplazar el eje óptico y, en los binoculares, para ajustar la distancia interpupilar.

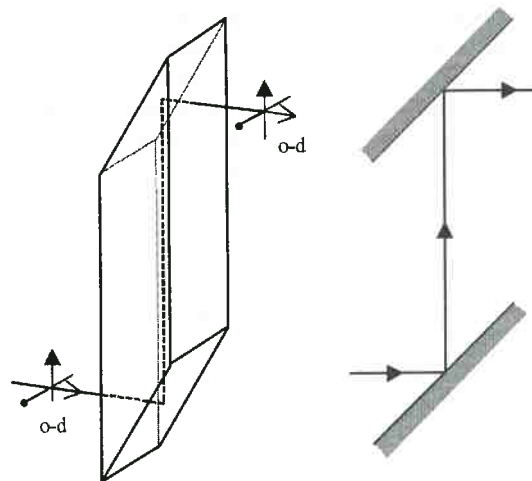


FIGURA 5.17. Romboedro.

- La inversión total de la imagen se puede conseguir también combinando varios prismas. Por ejemplo, la combinación de dos prismas de Porro, tal y como se ve en la figura 5.18, deja invariante la orientación de la imagen. A esta combinación se le denomina **Prisma de porro de primera especie**. La lámina plano paralela equivalente es la suma de las láminas plano paralelas equivalentes a cada uno de los prismas por separado.

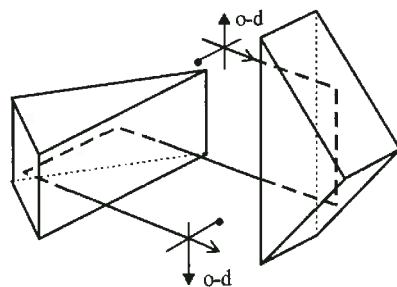


FIGURA 5.18. Prisma de Porro de primera especie.

- Prisma de porro de segunda especie** se le denomina a otra posible combinación de prismas, dos de ángulo recto y uno de Porro simple (Fig. 5.19) que también deja sin modificaciones la orientación de la imagen. Según se ve en la figura, la luz incide primero en un prisma de ángulo recto, luego en el prisma de Porro y, por último en un tercer prisma de ángulo recto.

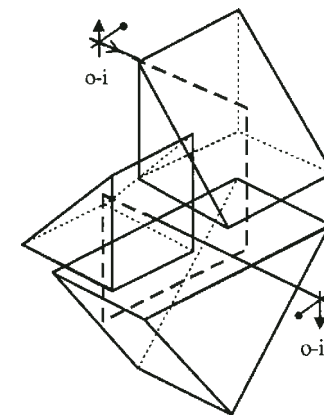


FIGURA 5.19. Prisma de Porro de segunda especie.

V.6.- COMBINACIONES DE PRISMAS

Cuando los prismas operan con luz monocromática, sólo producen desviación. En estas condiciones, si se dispone de una serie de prismas colocados de forma que la segunda cara de uno de ellos, está unida a la primera cara del siguiente (Fig. 5.20), la desviación total para un rayo de luz monocromática que incide sobre el primero de ellos será la suma algebraica de todas las desviaciones δ_i producidas en cada una de las caras. Teniendo en cuenta el convenio de signos, la desviación total será:

$$\begin{aligned}\delta &= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots = (\epsilon_1 - \epsilon'_1) + (\epsilon_2 - \epsilon'_2) + (\epsilon_3 - \epsilon'_3) + \dots \\ \alpha_1 &= \epsilon'_1 - \epsilon_2 \quad \alpha_2 = \epsilon'_2 - \epsilon_3 \\ \delta &= \epsilon_1 - \epsilon'_{k+1} - \sum_{i=1}^k \alpha_i\end{aligned}\quad (5.33)$$

donde cada ángulo α lleva incorporado su signo correspondiente. De esta expresión se deduce que el tren de prismas puede ser sustituido por un único prisma cuyo ángulo de refringencia sea $\sum \alpha_i$ y que produzca una desviación igual a δ .

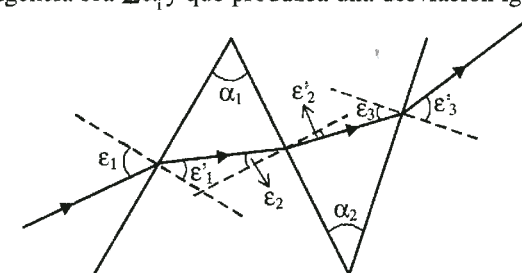


FIGURA 5.20. Combinación de prismas.

A continuación vamos a ver como la utilización de combinaciones de prismas permite que, trabajando con luz blanca, se produzca sólo desviación (los denominaremos en este caso prismas acromáticos) o únicamente dispersión (prismas de visión directa).

V.6.1.- Prismas delgados acromáticos

Dos prismas son acromáticos cuando, actuando con luz policromática, producen sólo desviación y no dispersión. Evidentemente, esta condición no es posible establecerla simultáneamente para todas las longitudes de onda del espectro visible por lo que dos prismas se denominan acromáticos cuando se cumple la condición citada anteriormente para las longitudes de onda F y C. Al exigir esto se elimina la dispersión para dichas longitudes de onda, debido a que, si los rayos salen paralelos, al observarlos directamente o recogerlos en una pantalla, situada en el plano focal de una lente, convergerán en un mismo punto y no se observará ningún desdoblamiento. Sean dos prismas delgados de ángulos α_1 y α_2 situados tal y como se indica en la figura 5.21.

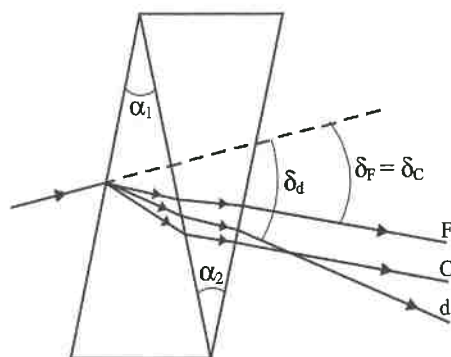


FIGURA 5.21. Prismas delgados acromáticos.

La condición de acromatismo de los colores C y F será que la suma de las desviaciones producidas por cada uno de los prismas para cada uno de los colores sea la misma, es decir:

$$\begin{aligned}\delta_C &= \delta_F \\ \delta_C &= \delta_{1C} + \delta_{2C} \\ \delta_F &= \delta_{1F} + \delta_{2F}\end{aligned}\quad (5.34)$$

Teniendo en cuenta que son prismas delgados y para incidencia quasi-normal, las desviaciones correspondientes a cada color vendrán dadas por:

$$\begin{aligned}\delta_C &= (n_{1C} - 1)\alpha_1 + (n_{2C} - 1)\alpha_2 \\ \delta_F &= (n_{1F} - 1)\alpha_1 + (n_{2F} - 1)\alpha_2\end{aligned}\quad (5.35)$$

Igualando ambas expresiones y simplificando, se obtiene:

$$\begin{aligned}(n_{1C} - 1)\alpha_1 + (n_{2C} - 1)\alpha_2 &= (n_{1F} - 1)\alpha_1 + (n_{2F} - 1)\alpha_2 \\ (n_{1C} - n_{1F})\alpha_1 &= (n_{2F} - n_{2C})\alpha_2 \\ \frac{(n_{1F} - n_{1C})}{(n_{2F} - n_{2C})} &= -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{v_2}{v_1} \frac{(n_{1d} - 1)}{(n_{2d} - 1)}\end{aligned}\quad (5.36)$$

De esta ecuación se deduce que, como los índices son siempre positivos, los ángulos de los prismas deben tener signos contrarios, es decir la situación relativa es la que habíamos supuesto en la fig. 5.21.

Cuando la desviación del prisma para el color d es también la misma que para los colores C y F, la combinación se denomina apocromática y en ella se verifica que $\delta_F = \delta_d = \delta_C$. Cuando la corrección es sólo para dos colores se llama acromática como ya hemos mencionado anteriormente.

V.6.2.- Prismas delgados de visión directa

En la combinación de prismas que vamos a ver a continuación que denominaremos prismas de visión directa se produce dispersión pero no desviación. La condición de no desviación se establece para un solo color que, por lo tanto debe salir paralelo a la dirección de entrada del rayo. Hay que suponer que la desviación es nula aún cuando se produzca una traslación.

El color correspondiente a la línea d es el que se suele considerar para la desviación nula. Evidentemente el resto de los colores sufrirán desviación respecto a él como se observa en la figura 5.22.

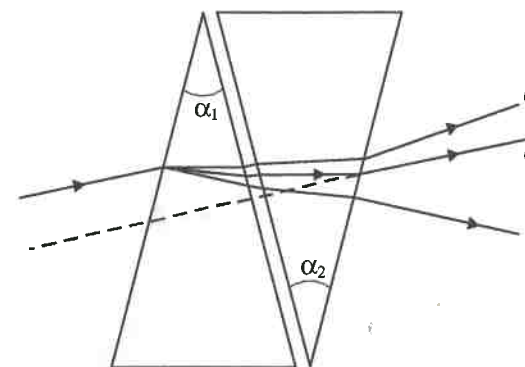


FIGURA 5.22. Prismas de visión directa.

Si no debe haber desviación para el color d, entonces $\delta_d = 0$ y, por tanto:

$$\begin{aligned}\delta_d &= (n_{1d} - 1)\alpha_1 + (n_{2d} - 1)\alpha_2 = 0 \\ \frac{(n_{1d} - 1)}{(n_{2d} - 1)} &= -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\end{aligned}\quad (5.37)$$

En estas condiciones, la dispersión para las líneas C y F será:

$$\begin{aligned}\delta_C - \delta_F &= (n_{1C} - 1)\alpha_1 + (n_{2C} - 1)\alpha_2 - (n_{1F} - 1)\alpha_1 - (n_{2F} - 1)\alpha_2 = \\ &= (n_{1C} - n_{1F})\alpha_1 + (n_{2C} - n_{2F})\alpha_2\end{aligned}$$

$$\delta_C - \delta_F = (n_{1C} - n_{1F})\alpha_1 + (n_{2C} - n_{2F})\left[-\frac{n_{1d} - 1}{n_{2d} - 1}\alpha_1\right]$$

$$\delta_C - \delta_F = (n_{1d} - 1)\alpha_1\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right) \quad (5.38)$$

V.6.3.- Prismas de desviación constante

Estas combinaciones de prismas, como su nombre indica, producen siempre la misma desviación y se utilizan comúnmente en espectroscopía. Entre ellos, podemos citar el de Pellin Broca y el de Abbe (Fig. 5.23).

El prisma de Pellin Broca consiste en dos prismas de 30°-60°-90° y uno de 45°-45°-90°. Supongamos, como se indica en la figura, que un rayo de longitud de onda λ_1 atraviesa el primer prisma simétricamente para ser reflejado a 45° sobre la cara AB. En esas condiciones, el rayo atravesará el último prisma perpendicularmente a la cara DB y habiendo experimentado una desviación de 90°. Todas las demás longitudes de onda presentes en el haz, emergerán con otros ángulos. Si el prisma gira ahora respecto de un eje normal a la figura, el haz tendrá un nuevo ángulo de incidencia. Una segunda longitud de onda λ_2 sufrirá ahora la desviación de 90°; por eso se llama de desviación constante. Así pues, con este sistema, la fuente de luz y el sistema de observación se pueden colocar a un ángulo fijo de 90° de forma que, con sólo girar el prisma, se observe una determinada longitud de onda. El sistema se calibra relacionando los ángulos de giro y las longitudes de onda correspondientes. El prisma de Abbe sigue el mismo principio de funcionamiento pero esta vez con una desviación constante de 60°.

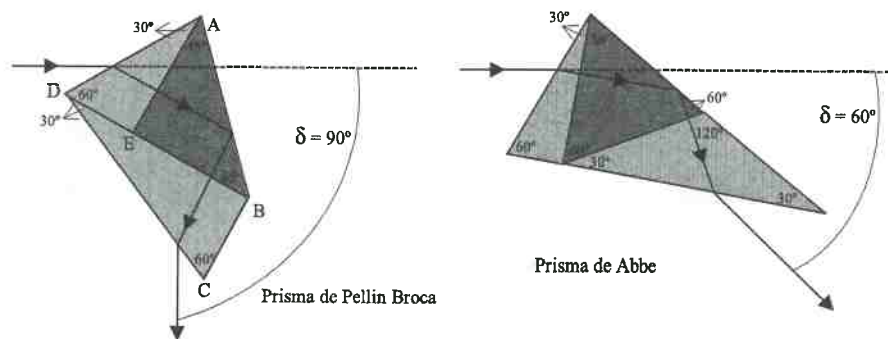


FIGURA 5.23. Prismas de desviación constante Pellin Broca y Abbe.

CUESTIONES

1.- Calcular cómo varía el desplazamiento axial de una lámina plano paralela sumergida en un medio de índice inferior al de la lámina cuando ésta gira. Considerar que se trabaja en la región paraxial.

En zona paraxial, el desplazamiento axial producido por una lámina plano paralela viene dado por la expresión:

$$L = d \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \right)$$

donde n_1 es el índice del medio exterior y n_2 es el índice de la lámina. Si la lámina gira, el ángulo de incidencia del rayo sobre ella cambiará, pero, siempre que ese giro mantenga a los ángulos dentro de la aproximación paraxial, el desplazamiento axial producido por la lámina no cambiará puesto que dicho desplazamiento no depende del ángulo de incidencia, sólo de las características de la lámina y del medio en el que está.

2.- Una lámina plano paralela, ¿cumple el principio de estigmatismo?, ¿Por qué?

Si consideramos el caso general, una lámina plano paralela no cumple el principio de estigmatismo porque el desplazamiento axial, L , que es el que da la posición de la imagen, depende del ángulo de incidencia en la lámina, es decir, que la imagen obtenida depende del rayo empleado para obtenerla. Ahora bien, si nos restringimos a la región paraxial, como hemos visto en la cuestión anterior, dicho desplazamiento es constante e independiente del rayo, por lo que en esta región, una lámina plano paralela sí que será capaz de dar una imagen estigmática.

3.- Dado un conjunto de 2 láminas plano paralelas de índices n_1 y n_2 y espesores d_1 y d_2 , colocadas en contacto y rodeadas de aire, calcular el desplazamiento transversal total debido a las 2 láminas considerando únicamente la zona paraxial.

Según se puede ver en la figura, el desplazamiento axial total producido por el conjunto de las dos láminas, es igual a la suma de los desplazamientos axiales producidos por cada una de ellas considerándolas aisladas y rodeadas de aire, es decir:

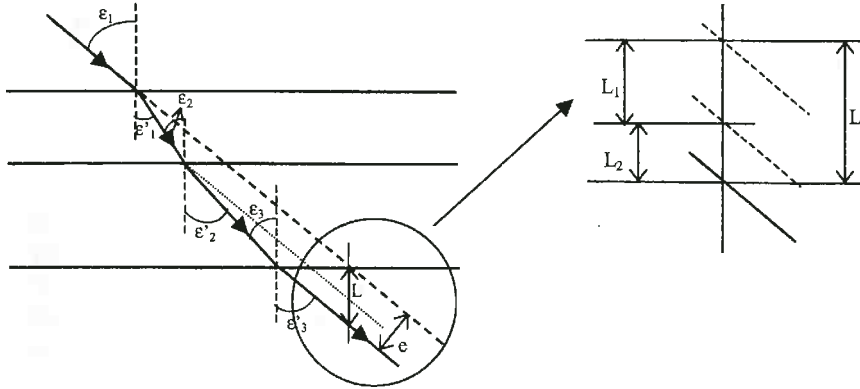
$$L = L_1 + L_2$$

Aplicando pues la expresión para el desplazamiento axial de una lámina plano paralela en aire:

$$L = d_1 \left(1 - \frac{1}{n_1} \right) + d_2 \left(1 - \frac{1}{n_2} \right)$$

También de la figura deducimos que el desplazamiento transversal total será:

$$e = L \operatorname{sen} \varepsilon_1 = \left[d_1 \left(1 - \frac{1}{n_1} \right) + d_2 \left(1 - \frac{1}{n_2} \right) \right] \operatorname{sen} \varepsilon_1 = \left[d_1 \left(1 - \frac{1}{n_1} \right) + d_2 \left(1 - \frac{1}{n_2} \right) \right] \varepsilon_1$$



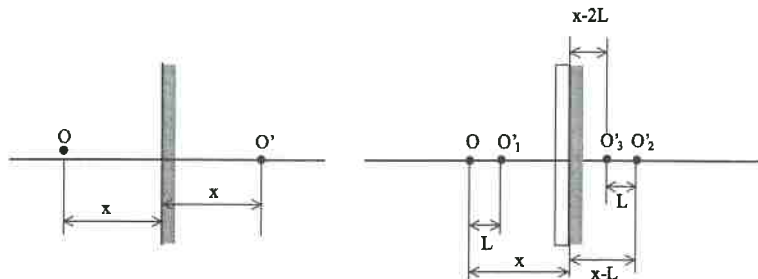
4.- Calcular el desplazamiento axial que producen 2 láminas plano paralelas de índice $n_1=1.5$, $n_2=1.7$, de espesores 3 y 5 mm, colocadas en contacto, sobre un objeto situado en las primera cara de la primera lámina.

Según lo deducido en la cuestión anterior, el desplazamiento axial producido por el conjunto de las dos láminas será:

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= 3 \left(1 - \frac{1}{1.5} \right) = 1 \text{ mm} \\ L_2 &= 5 \left(1 - \frac{1}{1.7} \right) = 2.06 \text{ mm} \end{aligned} \right\} L = 1 + 2.06 = 3.06 \text{ mm}$$

Este desplazamiento es independiente de la posición del objeto.

5.- Si una lámina plano paralela de espesor 5 mm e índice 1.52 se coloca delante de un espejo plano y pegada a él, ¿cuánto y en qué sentido se ha desplazado la imagen de un punto observado en el espejo?



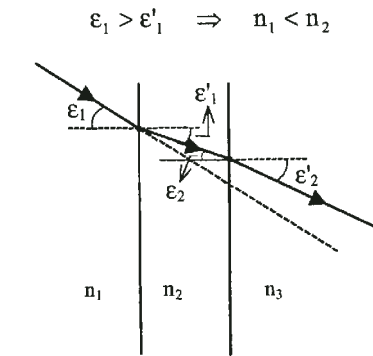
En el caso de tener un espejo simple, la imagen de un objeto O situado a una distancia x del espejo será un punto O' situado a distancia x detrás del espejo. Si ahora ponemos una lámina plano paralela delante del espejo, manteniendo el objeto O a distancia x del espejo, la lámina dará una primera imagen O'_1 desplazada de O una cantidad L (desplazamiento axial producido por la lámina). Esta imagen O'_1 será ahora el objeto del espejo, que dará una imagen O'_2 situada a una distancia x - L detrás del espejo. Por último, esta imagen será de nuevo el objeto para la lámina que dará una imagen final O'_3 desplazada una distancia L respecto de O'_2. Comparando ambas situaciones, la imagen de un objeto fijo, O, se ha desplazado una distancia 2L acercándose al espejo. Con las características de la lámina que nos dan:

$$L = d \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 5 \left(1 - \frac{1}{1.52} \right) = 1.71 \text{ mm}$$

Por lo tanto, la imagen se habrá desplazado $2L = 3.42 \text{ mm}$ acercándose al espejo.

6.- En una lámina plano paralela de índice n_2 rodeada por medios de índices n_1 y n_3 , ¿qué relación debe existir entre los índices y el ángulo de incidencia para que exista reflexión total en la segunda cara de la segunda lámina?

Para que no exista reflexión total en la primera cara de la lámina, debe verificarse que:



$$\varepsilon_1 > \varepsilon'_1 \Rightarrow n_1 < n_2$$

Y para que pueda existir reflexión total en la segunda cara de la lámina, debe cumplirse que:

$$\varepsilon'_2 > \varepsilon_2 \Rightarrow n_3 < n_2$$

Por otra parte, si debe existir reflexión total en la segunda cara:

$$\varepsilon_2 > \varepsilon_L \Rightarrow \operatorname{sen} \varepsilon_2 > \operatorname{sen} \varepsilon_L \Rightarrow \operatorname{sen} \varepsilon_2 > \frac{n_3}{n_2}$$

Si aplicamos la ley de Snell a las dos caras de la lámina y tenemos en cuenta que $\varepsilon'_1 = \varepsilon_2$:

$$n_1 \sin \epsilon_1 = n_2 \sin \epsilon'_1 = n_2 \sin \epsilon_2 = n_3 \sin \epsilon'_2$$

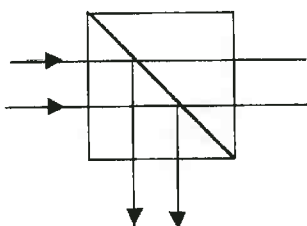
$$n_1 \sin \epsilon_1 = n_2 \sin \epsilon_2 \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} \sin \epsilon_1 = \sin \epsilon_2 > \frac{n_3}{n_2}$$

$$n_1 \sin \epsilon_1 > n_3 \Rightarrow \sin \epsilon_1 > \frac{n_3}{n_1} \Rightarrow n_3 < n_1$$

Luego las condiciones que deben de verificarse son:

$$\left. \begin{array}{l} n_1 \text{ y } n_3 < n_2 \\ n_3 < n_1 \end{array} \right\} \text{ y } \sin \epsilon_1 > \frac{n_3}{n_1}$$

7.- En un prisma de ángulo recto, colocado como tal, calcular el tiempo que tarda la luz en atravesarlo, sabiendo que la hipotenusa mide 10 cm y el índice es 1.52.



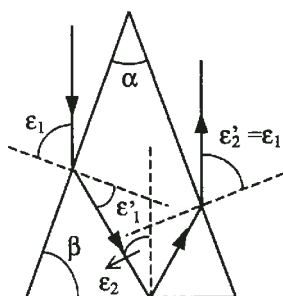
Según se ve en la figura, la lámina plano paralela equivalente al prisma tiene un espesor igual a la longitud de los catetos del triángulo, y este espesor es igual a la distancia recorrida por la luz dentro del prisma, es decir:

$$2c^2 = h^2 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{h^2}{2}} = \sqrt{\frac{10^2}{2}} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

El tiempo que tarda la luz en atravesarlo será:

$$t = \frac{(L)}{c} = \frac{nd}{c} = \frac{1.52 \times 5\sqrt{2}}{3 \times 10^{10}} = 3.58 \times 10^{-10} \text{ s}$$

8.- En un prisma isósceles de ángulo 40° que trabaja por reflexión en su base, calcular el ángulo de incidencia necesario para que la desviación sea de 180° y los valores de n que hacen posible este caso. El prisma está en aire.



Según hemos visto en teoría, la desviación producida por un prisma isósceles que trabaja con reflexión en la base, viene dada por:

$$\delta = 2\epsilon_1 + \alpha$$

si la desviación producida ha de ser de 180° , entonces, sustituyendo:

$$180^\circ = 2\epsilon_1 + 40^\circ \Rightarrow \epsilon_1 = 70^\circ$$

Por otra parte se cumple que:

$$\epsilon'_1 + \epsilon_2 = \beta = 70^\circ$$

Y para que haya reflexión total dentro del prisma debe verificarse:

$$\epsilon_2 > \epsilon_L \text{ siendo } \sin \epsilon_L = \frac{1}{n} \Rightarrow \sin \epsilon_2 > \frac{1}{n} \Rightarrow \sin(70^\circ - \epsilon'_1) > \frac{1}{n}$$

Desarrollando esta expresión y aplicando la ley de Snell a la primera cara del prisma:

$$(\sin 70^\circ \cos \epsilon'_1 - \cos 70^\circ \sin \epsilon'_1) > \frac{1}{n}$$

$$\sin 70^\circ = n \sin \epsilon'_1$$

$$\left(\sin 70^\circ \sqrt{1 - \frac{\sin^2 70^\circ}{n^2}} - \cos 70^\circ \frac{\sin 70^\circ}{n} \right) > \frac{1}{n}$$

$$(\sin 70^\circ \sqrt{n^2 - \sin^2 70^\circ} - \sin 70^\circ \cos 70^\circ) > 1$$

$$n^2 > \left(\frac{1 + \sin 70^\circ \cos 70^\circ}{\sin 70^\circ} \right)^2 + \sin^2 70^\circ \Rightarrow n > 1.69$$

9.- Sean dos prismas delgados, B16-64 y 583:320. Calcular la relación entre los dos ángulos de los dos prismas para que la combinación sea: a) acromática, b) de visión directa. En este segundo caso, calcular asimismo la dispersión angular en función de α_2 .

Los índices de refracción y números de Abbe de los dos prismas son:

$$\text{Prisma 1: } n = 1.516, v = 64$$

$$\text{Prisma 2: } n = 1.583, v = 32$$

a) Para que la combinación sea acromática, según la ecuación (5.36) debe cumplirse que:

$$\delta_C = \delta_F \Rightarrow \frac{(n_{1F} - n_{1C})}{(n_{2F} - n_{2C})} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{v_2}{v_1} \frac{(n_{1d} - 1)}{(n_{2d} - 1)}$$

Y sustituyendo los valores numéricos:

$$-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{32(1.516-1)}{64(1.583-1)} = 0.44$$

b) Para que la combinación sea de visión directa, según la ecuación (5.37):

$$\delta_d = 0 \Rightarrow \frac{(n_{1d}-1)}{(n_{2d}-1)} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{1.516-1}{1.583-1} = 0.89$$

En este caso, la dispersión angular viene dada por la ecuación (5.38) que en función de α_2 quedaría:

$$\delta_C - \delta_F = (n_{1d}-1)\alpha_1 \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right) = (n_{1d}-1) \left(-\alpha_2 \frac{n_{2d}-1}{n_{1d}-1} \right) \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right)$$

$$\delta_C - \delta_F = -(n_{2d}-1)\alpha_2 \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right) = -0.009 \alpha_2$$

10.- ¿Qué ángulo de refringencia tiene un prisma de 3Δ cuyos índices son $n_C=1.5204$ y $n_F=1.5293$ con $v = 58.76$? Considérese el prisma delgado.

Teniendo en cuenta la definición del número de Abbe, en un prisma delgado la potencia prismática viene dada por:

$$P_A = 100\alpha(n-1) = 100\alpha(n_F - n_C)v \Rightarrow 3\Delta = 100\alpha(1.5293 - 1.5204)58.76$$

$$\alpha = 0.0574 \text{rd} = 3.3^\circ$$

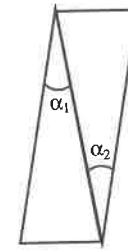
11.- Dado un prisma delgado de vidrio 673:322 y $\alpha = 1^\circ$, calcular su potencia prismática.

El vidrio 673:322 corresponde a un vidrio de índice $n = 1.673$ y número de Abbe, $v = 32.2$, con lo que la potencia prismática, considerado delgado y en zona paraxial, será:

$$P_A = 100\alpha(n-1) = 100 \times \frac{\pi}{180} \times (1.673-1) = 1.17\Delta$$

12.- Dados los prismas delgados 655/330 y 532/453 con $\alpha = 1^\circ$ en ambos, calcular la potencia prismática de la combinación cuando están colocados en oposición y en contacto.

Al estar colocados en oposición y en contacto las características de cada prisma serán:



$$n_1 = 1.655, v_1 = 33, \alpha_1 = 1^\circ$$

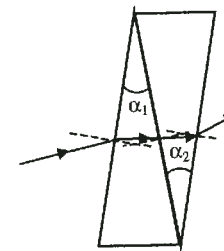
$$n_2 = 1.532, v_2 = 45.3, \alpha_2 = -1^\circ$$

La potencia prismática de la combinación será:

$$P_A = 100\delta = 100(\delta_1 + \delta_2) = 100[\alpha_1(n_1-1) + \alpha_2(n_2-1)]$$

$$P_A = 100[1^\circ(1.655-1) - 1^\circ(1.532-1)] \frac{\pi}{180} = 0.21\Delta$$

13.- Calcular cuánto vale la desviación para dos prismas delgados unidos, en incidencia casi normal. Comparar dicho resultado con el obtenido si entre ambos hubiese una capa de aire.



En el caso de que los prismas estén unidos, la desviación total será la suma algebraica de las desviaciones producidas en cada una de las superficies, cada una de ellas con su signo:

$$\delta = (\epsilon_1 - \epsilon'_1) + (\epsilon_2 - \epsilon'_2) + (\epsilon_3 - \epsilon'_3)$$

Por otra parte, si aplicamos la ley de Snell en Óptica paraxial:

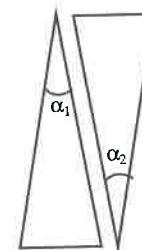
$$\epsilon_1 = n_1 \epsilon'_1 \quad n_1 \epsilon_2 = n_2 \epsilon'_2 \quad n_2 \epsilon_3 = \epsilon'_3$$

Sustituyendo en la expresión anterior y sumando y restando el término $n_1 \epsilon_2 = n_2 \epsilon'_2$:

$$\delta = n_1 \epsilon'_1 - \epsilon'_1 + \epsilon_2 - \epsilon'_2 - n_1 \epsilon_2 + n_2 \epsilon'_2 + \epsilon_3 - n_2 \epsilon_3$$

$$\delta = (n_1 - 1) \epsilon'_1 - \epsilon'_2 (n_1 - 1) + \epsilon'_2 (n_2 - 1) - \epsilon_3 (n_2 - 1)$$

$$\delta = (n_1 - 1) (\epsilon'_1 - \epsilon'_2) + (n_2 - 1) (\epsilon'_2 - \epsilon_3) = (n_1 - 1) \alpha_1 + (n_2 - 1) \alpha_2$$



En el caso de que los prismas estén separados por una capa de aire, la desviación total será la suma algebraica de las desviaciones producidas por cada uno de ellos, es decir:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = (n_1 - 1) \alpha_1 + (n_2 - 1) \alpha_2$$

que es la misma que en el caso anterior.

14.- Calcular la relación que existe entre los ángulos de refringencia de dos prismas delgados para formar una construcción acromática sabiendo que el número de Abbe del primero es el doble que el del segundo y que sus índices para la línea d son iguales. Interpretar el resultado.

Si la combinación es acromática, debe cumplirse la siguiente relación:

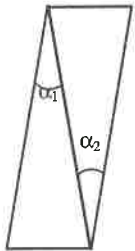
$$\delta_C = \delta_F \Rightarrow \frac{(n_{1F} - n_{1C})}{(n_{2F} - n_{2C})} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{v_2}{v_1} \frac{(n_{1d} - 1)}{(n_{2d} - 1)}$$

Si $v_1 = 2v_2$ y además $n_{1d} = n_{2d}$, entonces:

$$-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{v_2}{2v_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_1 = -2\alpha_2$$

El ángulo del primer prisma debe ser el doble que el del segundo y ambos deben tener signos contrarios, es decir, deben estar colocados en oposición.

15.- Se tiene un sistema de dos prismas pegados, colocados en oposición y en contacto, cuyos ángulos son respectivamente 10° y 12° . La relación de índices es $n_1/n_2 = 1.07$. Calcular dichos índices para que el conjunto tenga 0Δ . ¿De qué combinación se trata?



Si el conjunto debe tener 0Δ , la desviación total debe ser cero y se trata de prismas de visión directa:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 0$$

$$\alpha_1(n_1 - 1) + \alpha_2(n_2 - 1) = 0$$

$$\alpha_1(1.07n_2 - 1) + \alpha_2(n_2 - 1) = 0$$

$$10^\circ(1.07n_2 - 1) - 12^\circ(n_2 - 1) = 0$$

$$n_2 = 1.54 \quad \text{y} \quad n_1 = 1.65$$

Capítulo VI

TEORÍA GENERAL DE LOS SISTEMAS ÓPTICOS

En los capítulos anteriores, hemos hecho un análisis de los elementos ópticos fundamentales como son la superficie esférica, la lente delgada, y el espejo simple tratando en cada caso la formación de imágenes siempre dentro de la aproximación paraxial. Sin embargo, como los sistemas ópticos, en general, no están formados por un solo elemento sino por varios, se hace necesario un tratamiento del sistema en conjunto sin necesidad de analizar lo que sucede con cada uno de sus elementos. Eso es lo que se pretende en este capítulo: dar una teoría general para la formación de imágenes en los sistemas ópticos que se pueda aplicar a todos ellos independientemente del número y tipo de elementos que lo formen siguiendo, eso sí, con la aproximación paraxial, es decir, considerando que los ángulos implicados en el proceso son pequeños.

Para hacer este análisis, empezaremos definiendo lo que entendemos por sistema óptico: denominaremos como tal a un conjunto de superficies que separan medios de distinto índice. En nuestro caso, los sistemas serán de revolución, más concretamente, formados por superficies esféricas o planas, y sistemas centrados, es decir, los centros de curvatura de las distintas superficies estarán contenidos, todos ellos, en una misma línea, el eje óptico. Representaremos un sistema óptico como en la figura 6.1, por sus superficies extremas entendiendo que, entre estas superficies pueden existir otras muchas. Cuando en un sistema óptico, los rayos que salgan de un punto emisor, O, después de refractarse o reflejarse en las distintas superficies del sistema, se reúnan, ya sea real o virtualmente, en otro punto O', diremos que O' es la imagen de O.

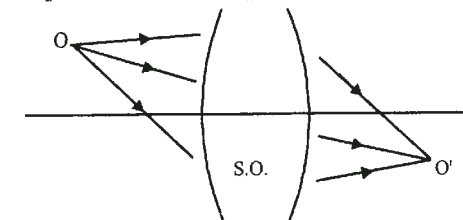


FIGURA 6.1. Representación de un sistema óptico.

VI.1.- INVARIANTE DE LAGRANGE - HELMHOLTZ

Consideremos el sistema más sencillo, el constituido por una sola superficie que separa dos medios de distinto índice (fig. 6.2) y apliquemos la ley de la refracción a los ángulos ω y ω' , en su aproximación paraxial:

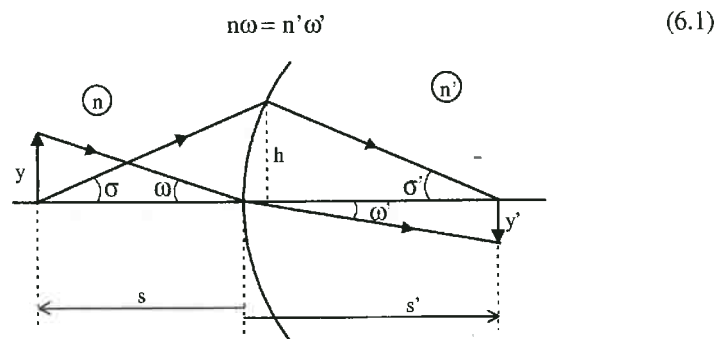


FIGURA 6.2. Refracción paraxial en una superficie.

De la figura se deduce que:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{y}{s} & \omega' &= \frac{y'}{s'} \\ \sigma &= \frac{h}{s} & \sigma' &= \frac{h}{s'} \end{aligned} \quad (6.2)$$

y sustituyendo en (6.1) obtenemos:

$$n \frac{y}{s} = n' \frac{y'}{s'} \Rightarrow n y \frac{\sigma}{h} = n' y' \frac{\sigma'}{h} \Rightarrow n y \sigma = n' y' \sigma' \quad (6.3)$$

que es la ecuación de **Lagrange-Helmholtz** (ecuación **L-H**) para una sola superficie. Esta ecuación, cómo se puede observar, relaciona el índice anterior al sistema, el tamaño del objeto y el ángulo correspondiente a un rayo que parte del pie del objeto, con las mismas magnitudes en la imagen.

Si se tratase de un sistema óptico complejo, de k superficies, podríamos aplicar esta ecuación a cada una de las superficies que lo componen, obteniendo:

$$\begin{aligned} n_1 y_1 \sigma_1 &= n'_1 y'_1 \sigma'_1 \\ n_2 y_2 \sigma_2 &= n'_2 y'_2 \sigma'_2 \\ &\vdots \\ n_k y_k \sigma_k &= n'_k y'_k \sigma'_k \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que, según se ve en la figura 6.3, la imagen dada por una superficie es el objeto para la siguiente, el segundo miembro de cada una de estas

ecuaciones es igual al primer miembro de la siguiente con lo que se obtiene finalmente:

$$n_1 y_1 \sigma_1 = n'_k y'_k \sigma'_k \quad (6.4)$$

que es la ecuación L-H para un sistema óptico cualquiera. De esta ecuación se deduce que el producto $ny\sigma$ permanece invariante al atravesar cualquier superficie de un sistema óptico por lo que se le denomina invariante L-H. La ecuación (6.4) tiene gran importancia porque relaciona directamente los datos del objeto con los de la imagen independientemente del número de superficies que contenga el sistema óptico.

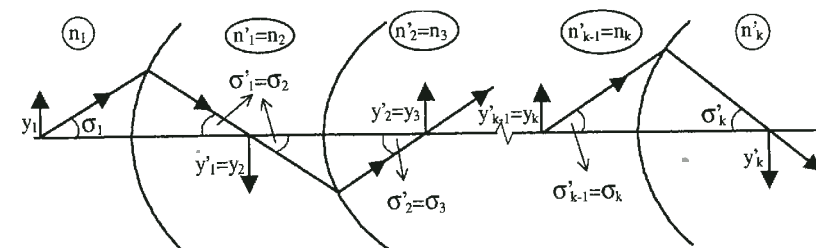


FIGURA 6.3. Ecuación L-H para un sistema óptico de k superficies.

VI.2.- ELEMENTOS CARDINALES: PLANOS FOCALES, PRINCIPALES Y NODALES

En todo sistema óptico, existen tres parejas de puntos y tres parejas de planos que tienen especial importancia: los focos y planos focales, los puntos y planos principales y los puntos y planos nodales. Estos elementos se denominan elementos cardinales del sistema y se caracterizan porque en ellos los aumentos toman valores particulares. Además, conocidos los elementos cardinales de un sistema óptico, éste queda perfectamente definido.

VI.2.1.- Focos y planos focales

Los focos son dos puntos del eje cuya definición ya la hicimos al hablar de la superficie esférica, la lente delgada o el espejo. Así, el foco objeto, F , es un punto del eje de manera que los rayos que salen de él, después de atravesar el sistema, son paralelos entre sí y paralelos al eje óptico. El plano perpendicular al eje que pasa por F se llama plano focal objeto y si los rayos que llegan al sistema provienen de un punto del plano focal objeto que no es F , saldrán paralelos entre sí aunque no paralelos al eje. Análogamente, el foco imagen, F' , es un punto del eje de manera que si los rayos llegan al sistema paralelos al eje óptico, cuando salen de dicho sistema pasan por F' . El plano perpendicular al eje que pasa por F' se llama plano focal imagen y si los rayos que llegan al sistema son paralelos entre sí pero no

paralelos al eje, cuando salen del sistema se reunirán real o virtualmente en un punto del plano focal imagen que no es F' (fig. 6.4).

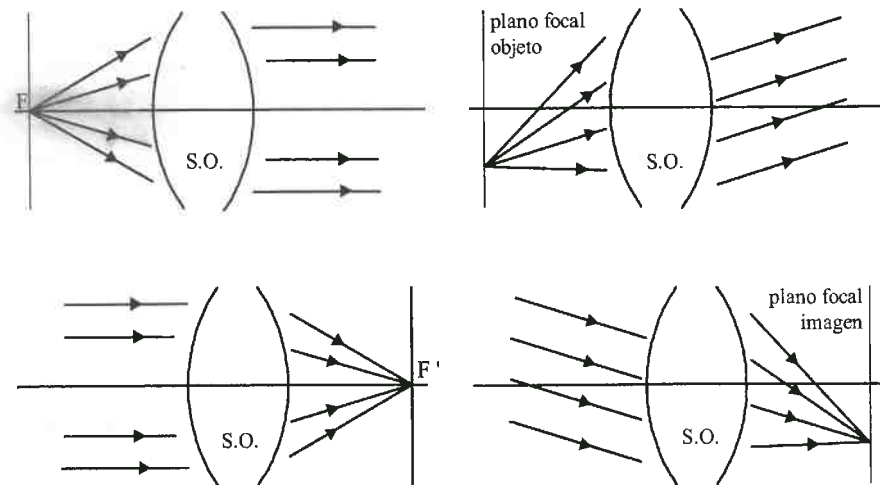


FIGURA 6.4. Focos y planos focales de un sistema óptico.

De la definición se deduce que el plano focal objeto tiene su imagen en el plano del infinito y que la imagen del plano del infinito es el plano focal imagen.

VI.2.2.- Puntos y planos principales

Se denominan planos principales de un sistema óptico y se representan por H y H' , a dos planos conjugados normales al eje cuyo aumento lateral $\beta' = +1$. La intersección de dichos planos con el eje determina dos puntos que son los llamados puntos principales. Los planos principales, al igual que ocurre con los focales, pueden ser reales o virtuales.

De la definición se deduce que todo haz que, partiendo de un punto P del plano principal objeto H , incida en el sistema, saldrá del mismo pasando real o virtualmente por un punto P' del plano principal imagen H' de forma que P' está situado a la misma distancia del eje que lo estaba P (fig. 6.5).

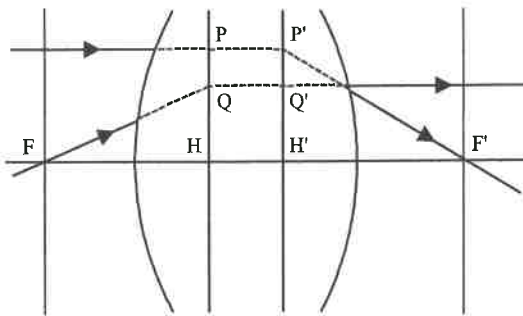


FIGURA 6.5. Planos principales de un sistema óptico.

La obtención de estos planos por el método gráfico es sencilla si se conoce el sistema. Para hallar el plano principal imagen H' basta trazar un rayo que incida en el sistema paralelo al eje y que después de atravesar dicho sistema saldrá pasando por el foco imagen F' . La prolongación de los rayos incidente y emergente nos dará la posición de H' . Análogamente, para hallar la posición del plano principal objeto, H , se traza un rayo que incida en el sistema pasando por el foco objeto, F . Dicho rayo saldrá del sistema paralelo al eje óptico; la intersección del rayo incidente y el emergente nos proporcionará la posición del plano principal objeto, H . En la figura 6.6 está representada la obtención de los planos H y H' en el caso de una lente gruesa.

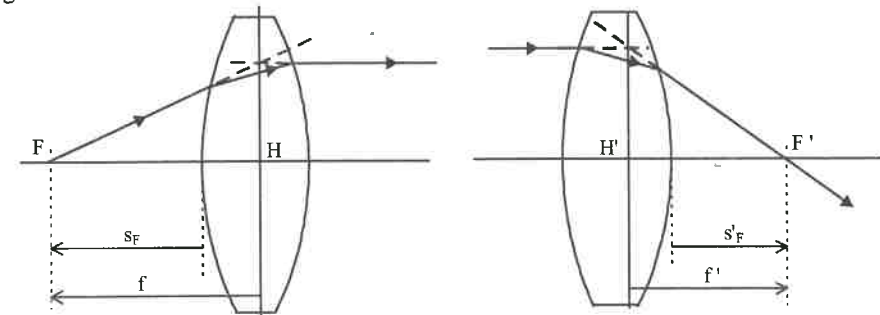


FIGURA 6.6. Obtención gráfica de los planos principales en una lente gruesa.

Hay que insistir en que los planos principales así como los focales no tienen existencia más que como entes paraxiales y que todos ellos pueden ser reales o virtuales.

Según la definición, los planos principales de una superficie refractante (esférica o plana), de un espejo (esférico o plano) y de una lente delgada están situados en la misma superficie.

El conocimiento de los planos principales y focales de un sistema óptico permite resolver todos los problemas relacionados con la formación de imágenes, trazado de rayos, aumentos,..., es decir, que el sistema óptico está perfectamente definido si se conocen estos elementos. Por otra parte, también podemos definir los planos anti-principales como aquella pareja de planos conjugados con aumento lateral $\beta' = -1$.

VI.2.3.- Focales y potencia de un sistema óptico

La distancia f' entre el plano principal imagen y el foco imagen se denomina focal imagen del sistema, $f' = H'F'$. De la misma forma, la distancia entre el plano principal objeto y el foco objeto se denomina focal objeto, $f = HF$.

También se pueden definir los segmentos focales; la distancia entre la primera superficie del sistema y el foco objeto se denomina segmento focal anterior o segmento focal objeto, s_F , mientras que la distancia de la última superficie del sistema al foco imagen se denomina segmento focal posterior o segmento focal imagen, $s'_{F'}$.

Todas estas distancias, que se pueden ver esquematizadas en la figura 6.6 para una lente gruesa, son positivas cuando van en el sentido de la luz, es decir, de izquierda a derecha, y negativas en caso contrario. Un sistema con s'_F positiva se denomina convergente y si s'_F es negativa el sistema es divergente. Análogamente a como se ha hecho en el caso de los elementos ópticos fundamentales, la potencia del sistema viene definida como el cociente entre el índice posterior al sistema y la focal imagen del mismo.

$$P = \frac{n'}{f'} \quad (6.5)$$

Para ver la relación que existe entre las distancias focales de un sistema óptico, consideremos la figura 6.7 donde se tiene un sistema representado por sus planos principales y focales. El índice anterior al sistema es n y el posterior es n' . Tomemos un punto Q del plano focal objeto y tracemos desde él un rayo paralelo al eje. Dicho rayo incide en el punto P del plano principal objeto H , luego saldrá del sistema pasando por el punto P' (homólogo de P) del plano principal imagen y por el foco imagen F' . Por otra parte, el rayo que saliendo de Q incide en el punto principal H , saldrá por el punto principal imagen H' y paralelo al anterior puesto que ambos vienen de un punto del plano focal objeto. Si aplicamos la ecuación L-H (ec. 6.4) a los puntos H y H' por donde pasan los rayos que forman ángulos σ_H y σ'_H obtenemos:

$$ny_H\sigma_H = n'y'_H\sigma'_H \quad (6.6)$$

De la figura 6.7 se deduce que:

$$\sigma_H = -\frac{y_H}{f} \quad \sigma'_H = \frac{y'_H}{f'}$$

$$y_H = y'_H$$

y sustituyendo en (6.6) queda:

$$-\frac{n}{f} = \frac{n'}{f'} \Rightarrow \frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'} \quad (6.7)$$

De nuevo la relación de focales es la relación de índices extremos cambiada de signo. Si el sistema está sumergido, entonces $n = n'$ con lo que $f = -f'$, las focales son iguales en valor absoluto.

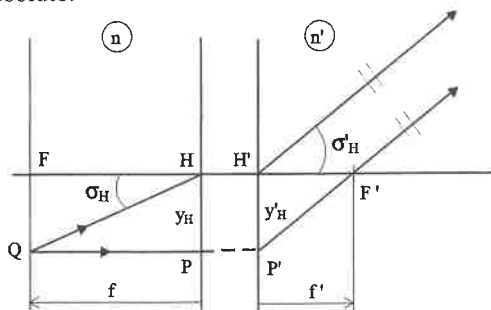


FIGURA 6.7. Relación entre las distancias focales de un sistema óptico cualquiera.

VI.2.4.- Puntos nodales. Centro óptico

Se define el aumento angular γ de un sistema óptico como el cociente entre la tangente del ángulo que forma con el eje un rayo que llega al pie de la imagen (σ'), y la tangente del ángulo que forma con el eje un rayo que parte del pie del objeto (σ). Si consideramos el sistema de la figura 6.8, sistema definido por sus planos principales y focales, el aumento angular, en la aproximación paraxial, se define como:

$$\gamma = \frac{\tan \sigma'}{\tan \sigma} \quad \text{en zona paraxial} \quad \gamma = \frac{\sigma'}{\sigma} \quad (6.8)$$

Teniendo en cuenta, el invariante de Lagrange-Helmholtz (ec. 6.4), se obtiene:

$$\gamma = \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{ny}{n'y'} = \frac{n}{n'} \frac{1}{\beta'} \quad (6.9)$$

y teniendo en cuenta la ecuación (6.7):

$$\gamma = -\frac{f}{f'} \frac{1}{\beta'} \quad (6.10)$$

Para un sistema óptico sumergido, los índices extremos son iguales y entonces el aumento angular es simplemente la inversa del aumento lateral.

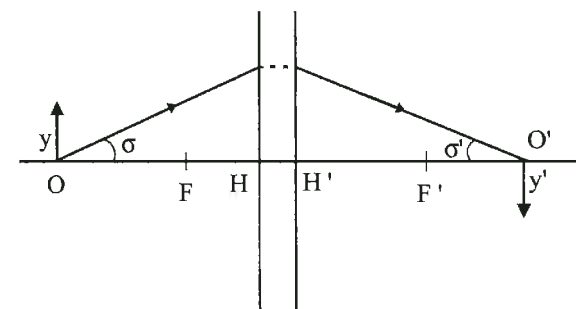


FIGURA 6.8. Definición del aumento angular.

Los puntos conjugados situados sobre el eje óptico para los cuales el aumento angular $\gamma = +1$ se llaman puntos nodales N y N' y los planos perpendiculares al eje óptico que pasan por los puntos nodales se denominan planos nodales. De la ec. (6.9) que relaciona el aumento angular y el aumento lateral se deduce que, en un sistema sumergido, para los puntos nodales $\beta' = 1/\gamma = +1$, es decir que los planos nodales coinciden con los planos principales. Si el sistema no está sumergido, los planos nodales y principales no coinciden.

Por otra parte, si para los puntos nodales $\gamma = +1$, entonces $\sigma' = \sigma$, es decir que el rayo que entra al sistema por el punto nodal objeto sale por el punto nodal imagen en la misma dirección sin desviarse. Cuando definimos, en un tema anterior, el centro óptico de una lente vimos que el rayo que pasa por dicho centro óptico no se desvía, parece lógico pensar que existe alguna relación entre este centro óptico y los puntos

nodales. En efecto si observamos la figura 6.9 en la que se ha representado una lente gruesa y la trayectoria de un rayo que pasa por su centro óptico, vemos que dicho rayo también pasa por N y N' de forma que cuando incide en la lente, pasa por N, se refracta en la primera cara pasando por el centro óptico, y cuando sale de la lente pasa por N'. Por lo tanto, para localizar la posición de los puntos nodales basta trazar las prolongaciones de los rayos incidente y emergente hasta cortar al eje óptico.

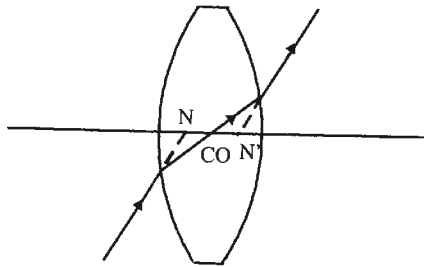


FIGURA 6.9. Centro óptico y puntos nodales en una lente gruesa.

El trazado gráfico de rayos a través de los puntos nodales se puede ver en la figura 6.10 que contempla los dos casos posibles: cuando el sistema está sumergido y los planos nodales coinciden con los principales y cuando el sistema no lo está y, por tanto, dichos planos no coinciden.

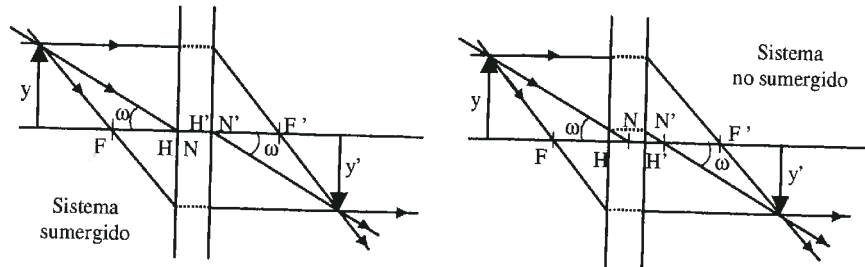


FIGURA 6.10. Trazado de rayos a través de los puntos nodales.

También se pueden definir los planos antinodales como aquella pareja de planos conjugados con aumento angular $\gamma = -1$.

VI.3.- ECUACIONES PARAXIALES DE CORRESPONDENCIA

En muchas ocasiones puede resultar interesante o incluso necesario conocer la posición de un punto objeto y su correspondiente punto imagen respecto a un par de planos conjugados cualesquiera. En este apartado, obtendremos esta posición respecto a dos planos conjugados concretos bien conocidos como son los planos focales, y posteriormente los planos principales, para terminar en el caso más genérico de dos planos conjugados cualesquiera.

Supongamos un sistema óptico definido por sus focos y sus planos principales tal y como se muestra en la figura 6.11. La formación de la imagen del objeto "y" se realiza gráficamente a partir de dos rayos: el que entra paralelo al eje, sale por F' y el que entra por F sale paralelo al eje.

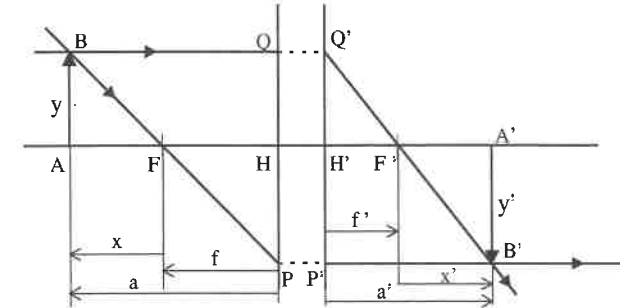


FIGURA 6.11. Formación de imágenes en un sistema óptico.

De la semejanza de triángulos ABF y FHP, se deduce que:

$$\frac{y}{x} = -\frac{y'}{f} \Rightarrow \beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{x} \quad (6.11)$$

y de la semejanza de triángulos H'Q'F' y F'A'B' deducimos:

$$\frac{y}{f'} = -\frac{y'}{x'} \Rightarrow \beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{x}{f'} \quad (6.12)$$

VI.3.1.- Origen en los focos

Iguando las ecuaciones (6.11) y (6.12) obtenemos:

$$-\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'} \Rightarrow xx' = ff' \quad (6.13)$$

que es la **ecuación de Newton**. Para sistemas sumergidos, con índices extremos iguales $f = -f'$ y entonces la ecuación (6.13) queda:

$$xx' = -f^2 \quad (6.14)$$

La ecuación de Newton permite conocer la posición de la imagen, x' , en función de la posición del objeto, x y de la focal del sistema. En esta ecuación de formación de imágenes, las distancias objeto e imagen están medidas desde los focos.

VI.3.2.- Origen en los planos principales

De la figura 6.11 se deduce que las distancias a y a' medidas desde los planos principales se pueden escribir en función de x y x' como:

$$a = f + x \quad y \quad a' = f' + x'$$

y sustituyendo en la ec. (6.13) se obtiene:

$$\begin{aligned} (a - f)(a' - f') &= ff' \\ ff' &= aa' - fa' - f'a + ff' \\ aa' &= fa' + f'a \\ \frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} &= 1 \end{aligned} \quad (6.15)$$

y puesto que la relación de focales es la relación de índices cambiada de signo (ec. 6.7), entonces la ec. (6.15) se transforma en:

$$-\frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{n'}{f'} \quad (6.16)$$

Y si el sistema está sumergido, la ec. (6.16) queda:

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'} \quad (6.17)$$

Las expresiones (6.16) y (6.17) son expresiones de la **ecuación de Gauss**, que nos permiten calcular la posición de la imagen, a' , en función de la posición del objeto, a , y de la focal del sistema. En este caso, las distancias objeto e imagen están medidas desde los planos principales. Esta expresión de la ley de Gauss es la misma que obtuvimos en el caso de la lente delgada o el dioptrio esférico puesto que, en ese caso, los planos principales H y H' están confundidos en la lente o la superficie.

VI.3.3.- Origen en dos planos conjugados cualesquiera

Si el origen de distancias lo tomamos en una pareja de planos conjugados cualesquiera, P y P' , también podremos encontrar una ecuación de formación de imágenes en la que aparezcan las distancias objeto e imagen medidas desde esa pareja de planos (fig. 6.12).

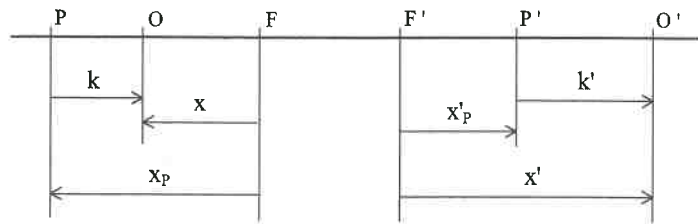


FIGURA 6.12. Origen en una pareja de planos conjugados cualesquiera.

En el esquema de la figura 6.12, llamaremos:

$$\begin{aligned} x_p &= FP & x &= FO & k &= PO \\ x'_p &= F'P' & x' &= F'O' & k' &= P'O' \end{aligned}$$

y la relación entre ellas puede escribirse como:

$$\begin{aligned} x &= x_p + k \\ x' &= x'_p + k' \end{aligned} \quad (6.18)$$

donde x , x' , x_p y x'_p están medidas desde los focos. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de Newton:

$$\begin{aligned} xx' &= ff' \\ (x_p + k)(x'_p + k') &= ff' \end{aligned} \quad (6.19)$$

y teniendo en cuenta que P y P' son planos conjugados y, por tanto, cumplen la ecuación de Newton, $x_p x'_p = ff'$, se obtiene:

$$\frac{x_p}{k} + \frac{x'_p}{k'} + 1 = 0 \quad (6.20)$$

que es una ecuación de formación de imágenes que nos permite calcular la distancia imagen, k' , en función de la posición del objeto, k , medidas desde una pareja de planos conjugados P y P' cualesquiera. Dichos planos conjugados, tomados en este caso como origen de distancias están relacionados entre sí por la ecuación de Newton.

Si ahora llamamos $g' = 1/\beta'$ a la inversa del aumento lateral existente entre los dos planos conjugados P y P' tomados como orígenes y teniendo en cuenta las expresiones del aumento lateral dadas en la expresión (6.12), podemos escribir:

$$g' = \frac{1}{\beta'} = -\frac{x_p}{f} = -\frac{f'}{x'_p}$$

y sustituyendo en (6.20):

$$-\frac{fg'}{k} - \frac{f'}{g'k'} + 1 = 0$$

$$\frac{nf'g'}{n'k} - \frac{f'}{g'k'} + 1 = 0$$

$$g'^2 \frac{n}{k} - \frac{n'}{k'} + g'P = 0 \quad (6.21)$$

Esta ecuación es la **ecuación de Gauss generalizada** a una pareja de orígenes cualesquiera. En Óptica Oftálmica, es usual tomar como orígenes de distancias imagen el vértice posterior de la lente. En ese caso, al producto $g'P$ se le conoce como potencia frontal.

VI.4.- RELACIÓN ENTRE LOS DISTINTOS AUMENTOS

En un sistema óptico existen tres aumentos que ya hemos definido con anterioridad. El aumento lateral, β' definido como la relación de tamaños entre la imagen y el

objeto (ambos perpendiculares al eje), el aumento angular γ definido como la relación entre ángulos imagen y objeto y el aumento axial α definido como la relación de tamaños entre la imagen y el objeto (considerados ahora en la dirección del eje).

$$\beta' = \frac{y'}{y} \quad \gamma = \frac{\sigma'}{\sigma} \quad \alpha = \frac{dx'}{dx} \quad (6.22)$$

Veamos ahora las distintas expresiones que hay para cada uno de ellos y la relación existente entre los mismos.

Para el aumento lateral, de las ecuaciones (6.11) y (6.12), y teniendo en cuenta la figura 6.11, podemos escribir:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{x'}{f'} = -\frac{f}{x} = \frac{f'-a'}{f'} = \frac{f}{f-a} \quad (6.23)$$

Por otra parte, si tenemos en cuenta la ecuación de Gauss (ec. 6.16):

$$-\frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{n'}{f'} \Rightarrow -\frac{na'}{n'a} + 1 = \frac{a'}{f'} \Rightarrow \beta' = 1 - \frac{a'}{f'} = \frac{na'}{n'a} \quad (6.24)$$

Para el aumento axial, podemos deducir su expresión de la ecuación de Newton (ec. 6.13):

$$\alpha = \frac{dx'}{dx} = -\frac{x'}{x} \quad (6.25)$$

La relación entre el aumento lateral y el aumento angular está dada por la ec. (6.9) $\gamma = (n/n')(1/\beta')$. La relación existente entre el aumento lateral y el aumento axial la podemos deducir fácilmente de las expresiones dadas en la ec. (6.23) y la ecuación de Newton (ec. 6.13):

$$\beta'^2 = \left(-\frac{f}{x}\right) \left(-\frac{x'}{f'}\right) = \left(-\frac{x'}{x}\right) \left(-\frac{f}{f'}\right) = \frac{n}{n'} \alpha \quad (6.26)$$

Por último, de las ecs. (6.9) y (6.26) se puede deducir la relación existente entre los tres aumentos:

$$\alpha\gamma = \frac{n'}{n} \beta'^2 \frac{n}{n'} \frac{1}{\beta'} \Rightarrow \alpha\gamma = \beta' \quad (6.27)$$

Si el sistema se encuentra sumergido en un medio homogéneo, entonces $n = n'$ y las relaciones entre los distintos aumentos son:

$$\gamma = \frac{1}{\beta'}, \quad \alpha = \beta'^2, \quad \alpha\gamma = \beta' \quad (6.28)$$

VI.4.1.- Localización de los planos nodales en un sistema no sumergido

Como ya hemos dicho anteriormente, si el sistema no está sumergido en un medio homogéneo, los índices extremos no son iguales y los planos nodales no

coinciden con los planos principales. En este caso, dichos planos nodales estarán situados a distancias x_N y x'_N de los focos, estando estas distancias relacionadas por la ecuación de Newton (fig. 6.13):

$$x_N x'_N = ff' \quad (6.29)$$

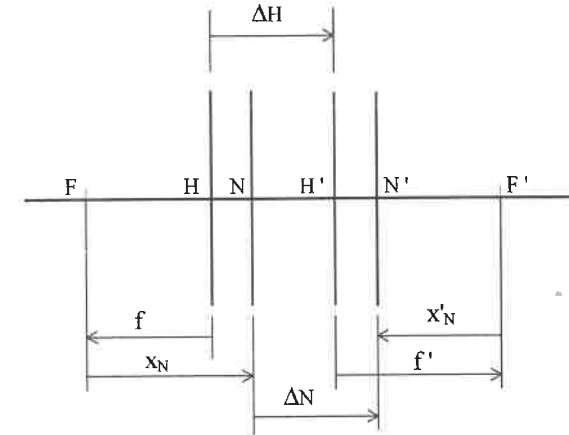


FIGURA 6.13. Localización de los planos nodales en un sistema no sumergido.

Según la ecuación (6.10):

$$\gamma = -\frac{f}{f'} \frac{1}{\beta'}$$

Para los planos nodales, $\gamma = +1$, por lo que para dichos planos el aumento lateral será:

$$1 = -\frac{f}{f'} \frac{1}{\beta'} \Rightarrow \beta' = -\frac{f}{f'} \quad (6.30)$$

Además, de las distintas expresiones de la ec. (6.23), deducimos que:

$$\beta' = -\frac{x'_N}{f'} = -\frac{f}{x_N} \Rightarrow \begin{cases} x'_N = -\beta' f' = \frac{f}{f'} f' \Rightarrow x'_N = f \\ x_N = -\frac{f}{\beta'} = -\frac{f}{(-f/f')} \Rightarrow x_N = f' \end{cases} \quad (6.31)$$

De la figura 6.13 se deduce que la distancia entre el foco objeto y el foco imagen del sistema se puede expresar de dos maneras distintas ($\Delta N = NN'$):

$$\left. \begin{aligned} FF' &= FH + HH' + H'F' = -f + \Delta H + f' \\ FF' &= FN + NN' + N'F' = x_N + \Delta N - x'_N = f' + \Delta N - f \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

al igualar las dos expresiones se obtiene que $\Delta H = \Delta N$, es decir, que la distancia entre planos nodales es la misma que entre planos principales. Por último, la dis-

tancia entre el plano principal y el plano nodal correspondiente (objeto o imagen) viene dada por:

$$\left. \begin{aligned} HN &= HF + FN = f + f' \\ H'N' &= H'F' + F'N' = f' + f \end{aligned} \right\} HN = H'N' = f' + f \quad (6.33)$$

En el caso de un sistema sumergido, como ya hemos comentado antes, al se $f = -f'$ los puntos nodales objeto e imagen coinciden respectivamente con los puntos objeto e imagen principales.

VI.5.- LA LENTE GRUESA

Analicemos a continuación el caso de una lente gruesa, es decir una lente en la que el espesor no se puede considerar como despreciable. Sea una lente formada por dos superficies esféricas de radios de curvatura r_1 y r_2 , espesor d e índice n_2 situada entre dos medios de índices n_1 y n_3 . Llamaremos F_1 y F'_1 a los focos objeto e imagen de la primera cara de la lente situados a distancias f_1 y f'_1 de ella, y F_2 y F'_2 a los focos objeto e imagen de la segunda cara situados a distancias f_2 y f'_2 de dicha superficie. Esta lente estará caracterizada por sus focos F y F' y sus planos principales H y H' . La posición de estos planos principales respecto a los vértices de la lente vendrá dada por los segmentos s_H , s'_H y la posición de los focos por los segmentos s_F , s'_F (fig. 6.14).

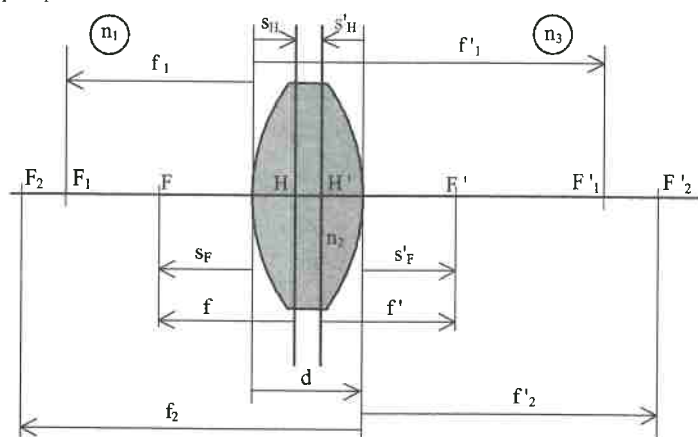


FIGURA 6.14. Parámetros de una lente gruesa.

En primer lugar vamos a calcular la distancia focal imagen de la lente, f' , y la posición de H' y F' . Para ello consideramos un rayo que incide en la primera cara de la lente paralelo al eje óptico (fig. 6.15). Por la definición de foco imagen, dicho rayo, después de atravesar la lente debe pasar por el foco imagen F' . La prolongación del rayo emergente con el incidente nos dará la posición del plano principal imagen H' tal y como vimos anteriormente. La trayectoria del rayo dentro de la lente la

determina el hecho de que, después de refractarse en la primera cara de la lente, debe pasar por F'_1 puesto que ha incidido en esta cara paralelo al eje óptico.

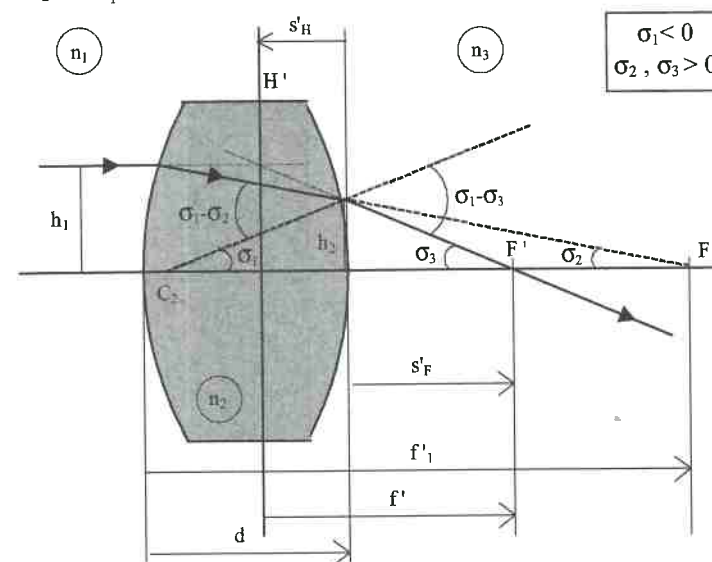


FIGURA 6.15. Localización de H' en una lente gruesa.

De la figura deducimos, teniendo en cuenta el signo de los ángulos, y siempre considerando que estamos trabajando con rayos paraxiales, que:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_3 &= \frac{h_2}{s'_F} = \frac{h_1}{f'} \\ \sigma_2 &= \frac{h_1}{f'_1} = \frac{h_1 - h_2}{d} \Rightarrow h_2 = h_1 \left(1 - \frac{d}{f'_1} \right) \\ \sigma_1 &= \frac{h_2}{r_2} \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

y si aplicamos la ley de Snell a la segunda cara de la lente, obtenemos:

$$\begin{aligned} n_2(\sigma_2 - \sigma_1) &= n_3(\sigma_3 - \sigma_1) \\ n_3\sigma_3 &= n_2\sigma_2 + (n_3 - n_2)\sigma_1 \end{aligned} \quad (6.35)$$

Sustituyendo los valores de los ángulos de la ec. (6.34), obtenemos:

$$n_3 \frac{h_1}{f'} = n_2 \frac{h_1}{f'_1} + (n_3 - n_2) \frac{h_1}{r_2} \left(1 - \frac{d}{f'_1}\right)$$

$$\frac{n_3}{f'} = \frac{n_2}{f'_1} + \frac{n_3}{f'_2} \left(1 - \frac{d}{f'_1}\right)$$

$$\frac{n_3}{f'} = \frac{n_2}{f'_1} + \frac{n_3}{f'_2} - d \frac{n_3}{f'_1 f'_2} \Rightarrow P = P_1 + P_2 - d \frac{P_1 P_2}{n_2} \quad (6.36)$$

Para obtener la posición del foco F' utilizaremos el segmento focal s'_F que también aparece en la ec. (6.34):

$$s'_F = H'_2 F' = \frac{h_2}{\sigma_3} = \frac{h_2}{h_1} f' = \left(1 - \frac{d}{f'_1}\right) f' \quad (6.37)$$

Y, por último, la posición del plano principal imagen, H' , también se puede deducir de la figura:

$$s'_H = H'_2 H' = H'_2 F' + F' H'$$

$$s'_H = \left(1 - \frac{d}{f'_1}\right) f' - f' = -\frac{df'}{f'_1} \quad (6.38)$$

De manera similar para obtener la focal objeto, la posición del foco F y del plano principal objeto H se procede de forma análoga utilizando ahora un rayo que incide en la lente pasando por F y que, en consecuencia saldrá de la lente paralelo al eje (fig. 6.16). Dicho rayo, en el interior de la lente debe tener una dirección tal que pase por F_2 puesto que sale de la segunda cara de la lente paralelo al eje.

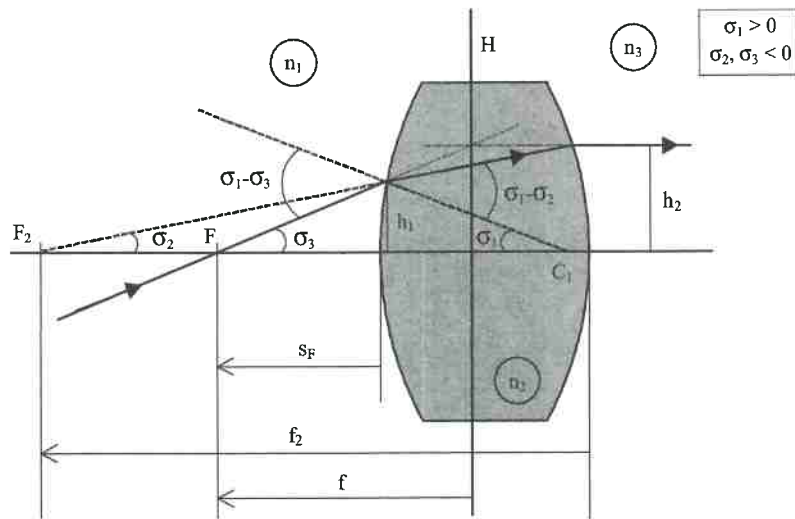


FIGURA 6.16. Localización de H en una lente gruesa.

De la figura 6.16 se deduce que:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{h_1}{r_1} \\ \sigma_2 &= \frac{h_2}{f_2} = \frac{h_1 - h_2}{d} \Rightarrow h_1 = h_2 \left(\frac{d}{f_2} + 1 \right) \\ \sigma_3 &= \frac{h_1}{s_F} = \frac{h_2}{f} \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

y si aplicamos la ley de Snell a la primera cara de la lente, obtenemos:

$$\begin{aligned} n_1(\sigma_1 - \sigma_3) &= n_2(\sigma_1 - \sigma_2) \\ -n_1\sigma_3 &= (n_2 - n_1)\sigma_1 - n_2\sigma_2 \end{aligned} \quad (6.40)$$

Sustituyendo los valores de los ángulos de la ec. (6.39), obtenemos:

$$\begin{aligned} -n_1 \frac{h_2}{f} &= (n_2 - n_1) \frac{h_1}{r_1} - n_2 \frac{h_2}{f_2} = \frac{(n_2 - n_1)}{r_1} h_2 \left(\frac{d}{f_2} + 1 \right) - n_2 \frac{h_2}{f_2} \\ -\frac{n_1}{f} &= -\frac{n_1}{f_1} \left(1 + \frac{d}{f_2} \right) - \frac{n_2}{f_2} \\ -\frac{n_1}{f} &= -\frac{n_1}{f_1} - \frac{n_2}{f_2} - d \frac{n_1}{f_1 f_2} \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} -\frac{n_1}{f} &= \frac{n_2}{f'_1} + \frac{n_3}{f'_2} - d \left(-\frac{n_2}{f'_1} \right) \left(-\frac{n_3}{n_2 f'_2} \right) \\ -\frac{n_1}{f} &= P_1 + P_2 - d \frac{P_1 P_2}{n_2} = P \end{aligned} \quad (6.42)$$

Igualando las ecs. (6.36) y (6.42), vemos que la potencia se puede escribir como:

$$P = -\frac{n_1}{f} = \frac{n_3}{f'} \Rightarrow \frac{f}{f'} = -\frac{n_1}{n_3} \quad (6.43)$$

con lo que la relación de focales sigue siendo (como ya hemos visto en otros casos) la relación de índices extremos cambiada de signo.

El foco objeto F queda localizado a partir del segmento focal anterior, s_F , cuyo valor se puede deducir de la ec. (6.39):

$$s_F = H_1 F = \frac{h_1}{h_2} f = \left(1 + \frac{d}{f_2}\right) f \quad (6.44)$$

y el plano principal objeto H queda determinado a partir del segmento s_H que representa la distancia desde el vértice anterior de la lente hasta H , y cuyo valor viene dado por:

$$\begin{aligned} s_H &= H_1 H = H_1 F + FH \\ s_H &= H_1 H = \left(1 + \frac{d}{f_2}\right) f - f = \frac{df}{f_2} \end{aligned} \quad (6.45)$$

La distancia entre planos principales, $\Delta H = HH'$, también se puede deducir fácilmente de la fig. 6.14:

$$\Delta H = HH' = d + s'_H - s_H \quad (6.46)$$

y sustituyendo las expresiones de s'_H y de s_H dadas en las ecs. (6.38) y (6.45) respectivamente, obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta H &= d - \frac{df'}{f_1} - \frac{df}{f_2} \\ \Delta H &= d + d \frac{n_1 - n_2}{n_2 r_1} f' - d \frac{n_2 - n_3}{n_2 r_2} f \\ \Delta H &= d \left[1 + \frac{n_1 - n_2}{n_2 r_1} f' + \frac{n_2 - n_3}{n_2 r_2} \frac{n_1}{n_3} f' \right] \\ \Delta H &= d \left[1 - \frac{f'}{n_2} \left(\frac{n_2 - n_1}{r_1} - \frac{n_2 - n_3}{r_2} \frac{n_1}{n_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.47)$$

En el caso particular de tener una lente en aire, entonces $n_1 = n_3 = 1$, $n_2 = n$ y las distintas expresiones deducidas anteriormente se pueden escribir como:

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n-1)^2}{n} \frac{d}{r_1 r_2} \\ \frac{1}{f} &= (1-n) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \frac{(n-1)^2}{n} \frac{d}{r_1 r_2} \end{aligned} \right\} f = -f'$$

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} = P_1 + P_2 - \frac{d}{n} P_1 P_2 \\ s'_F &= H'_2 F' = \left(1 - d \frac{n-1}{nr_1} \right) f' & s_F &= H_1 F = \left(1 + d \frac{n-1}{nr_2} \right) f \\ s'_H &= H'_2 H' = d \frac{1-n}{nr_1} f' & s_H &= H_1 H = d \frac{n-1}{nr_2} f \end{aligned} \right\} \quad (6.48)$$

$$\Delta H = HH' = d \left[1 - \frac{f'}{n} (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right]$$

En la figura 6.17 se ha representado la localización usual de los planos principales y focales en los distintos tipos de lentes supuestas éstas en aire.

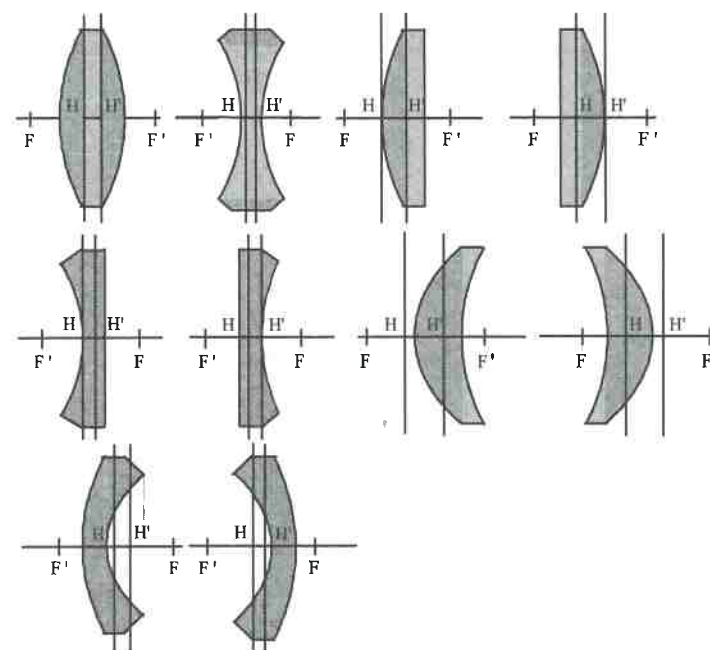


FIGURA 6.17. Localización usual de los planos principales y focales en los distintos tipos de lentes en aire.

VL.6.- EL ESPEJO GRUESO

Un sistema de superficies, en el que el número de superficies reflectantes sea un número impar se denomina espejo grueso. En la figura 6.18 se han representado tres sistemas ópticos que pueden servir de ejemplo de espejos gruesos, una lente gruesa con la segunda cara espejada, una lente delgada con un espejo simple detrás y una lente delgada con una lente gruesa espejada en su segunda cara.

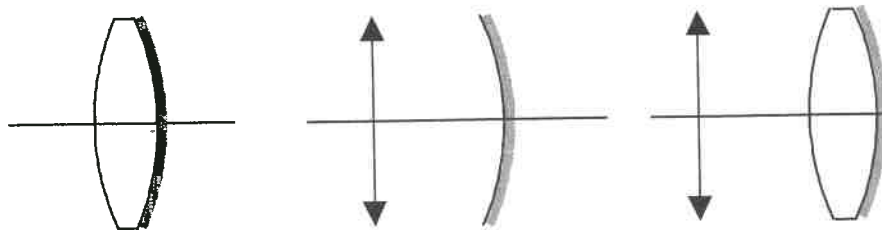


FIGURA 6.18. Distintos tipos de espejos gruesos.

La principal característica de los espejos gruesos es que, por complicado que sea, siempre puede reducirse a un sistema refractivo representado por sus planos principales y focales, más un espejo. Este esquema general del espejo grueso se puede ver en la figura 6.19. En este sistema, sean C' y V' dos puntos tales que sus imágenes a través del sistema sean respectivamente el centro C y el vértice V del espejo. Si estos puntos cumplen esta condición, evidentemente cualquier rayo que incida en el sistema pasando por V' , después de atravesar el sistema dióptrico, pasará por V y, al reflejarse en el espejo, volverá en sentido inverso siguiendo una trayectoria simétrica respecto del eje óptico tal y como indica la figura 6.19. Asimismo, todo rayo que incida en el sistema pasando por C' , después de atravesar el sistema dióptrico pasará por C y al reflejarse lo hará volviendo exactamente con la misma trayectoria en sentido inverso. Es decir, todo sucede como si en V' tuviéramos un espejo de centro C' ; este espejo ficticio es el **espejo equivalente** del sistema total.

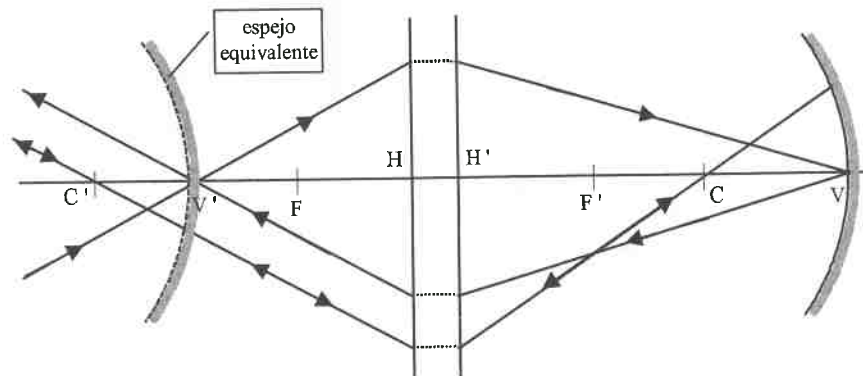


FIGURA 6.19. Espejo equivalente a un espejo grueso.

En el caso particular en el que el centro C del espejo está en el foco imagen del sistema dióptrico, entonces C' está en el infinito y el espejo equivalente es un espejo plano situado en V' . La utilización del espejo equivalente en lugar del espejo grueso simplifica los cálculos y el trazado gráfico correspondiente.

VL.7.- TRAZADO DE RAYOS EN SISTEMA ÓPTICOS

Hemos visto que cualquier sistema óptico, por muy complicado que sea queda perfectamente definido si se conocen sus elementos cardinales, es decir, sus planos principales, focales y nodales. Con la ayuda de estos elementos, vamos a ver ahora cómo podemos conocer la dirección de emergencia de cualquier rayo que incida en dicho sistema. Para ello utilizaremos los denominados rayos auxiliares (fig. 6.20).

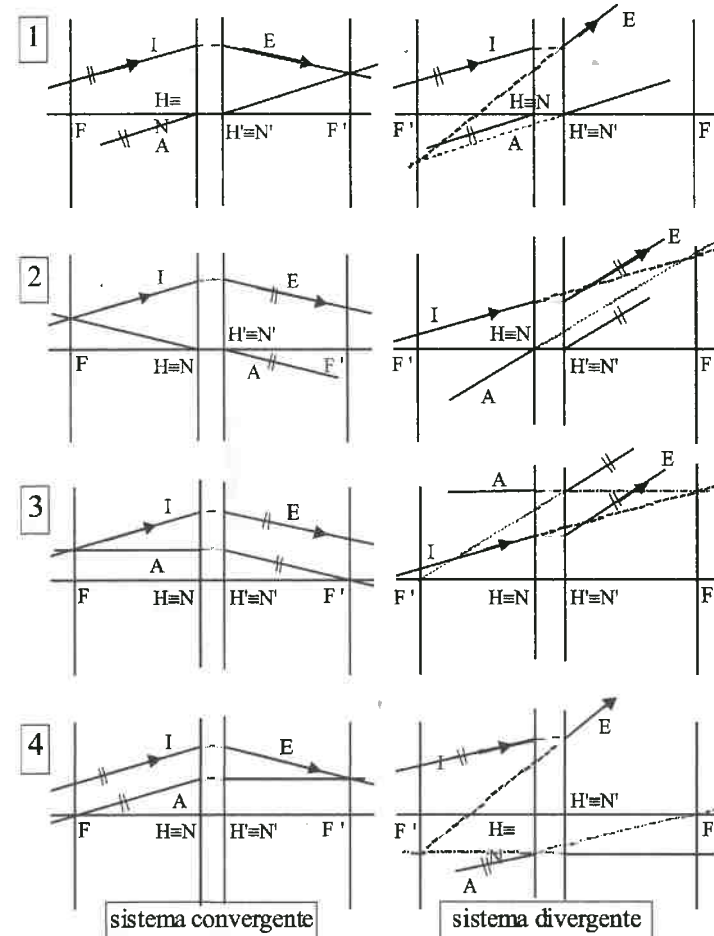


FIGURA 6.20. Trazado de rayos auxiliares.

Supongamos que en un sistema óptico cualquiera (convergente o divergente) trazamos un rayo incidente, I, con dirección arbitraria y queremos conocer la dirección que este rayo tendrá a la salida del sistema, E.

- 1) Trazamos el rayo auxiliar A, que sea paralelo al incidente y que pase por los puntos nodales. Dicho rayo auxiliar no se desvía puesto que pasa por la pareja N, N'. Como el incidente y el auxiliar inciden paralelos entre sí, a la salida convergerán en el mismo punto del plano focal imagen. Dicho punto de convergencia vendrá determinado por el corte del rayo auxiliar con el plano focal F'.
- 2) Trazamos el rayo auxiliar de forma que provenga del mismo punto del plano focal objeto que el rayo incidente y, además, pase por los puntos nodales. Dicho rayo auxiliar no se desvía por pasar por los puntos nodales. Como el incidente y el auxiliar vienen del mismo punto del plano focal objeto, dichos rayos saldrán del sistema paralelos entre sí.
- 3) En este caso, el rayo auxiliar es paralelo al eje óptico y viene del mismo punto del plano focal objeto que el rayo incidente. El rayo auxiliar sale pasando por F' puesto que ha entrado paralelo al eje y el rayo emergente sale paralelo a él puesto que ambos vienen del mismo punto del plano focal objeto.
- 4) Trazamos un rayo auxiliar que sea paralelo al incidente y que pase por el foco objeto, F. Dicho rayo sale paralelo al eje óptico y, puesto que ambos inciden en el sistema paralelos entre sí, saldrán pasando por el mismo punto del plano focal imagen. Este punto vendrá determinado por el corte entre el rayo auxiliar y el plano focal imagen.

En el caso de que el sistema no esté sumergido, los planos nodales y principales no coinciden. En el caso de la lente delgada hay que tener en cuenta que los planos principales y nodales coinciden ($H \equiv H'$, $N \equiv N'$) estando los primeros situados en la propia lente.

VI.8.- SISTEMAS COMPUESTOS

Vamos a ver en este último apartado cómo se pueden acoplar dos sistemas ópticos cualesquiera, definidos por sus planos principales y focales, para obtener un sistema equivalente al conjunto. Nos centraremos en la búsqueda de los elementos cardinales H, H', F y F' del conjunto. Para ello consideremos dos sistemas, S_1 y S_2 , de los cuales conocemos los planos principales H_1 , H'_1 , H_2 , H'_2 y los planos focales F_1 , F'_1 , F_2 y F'_2 . Ambos sistemas están separados por la distancia $e = H'_1 H_2$ que llamaremos distancia de acoplamiento, siendo $t = F'_1 F_2$ la separación entre sus focos (fig. 6.21).

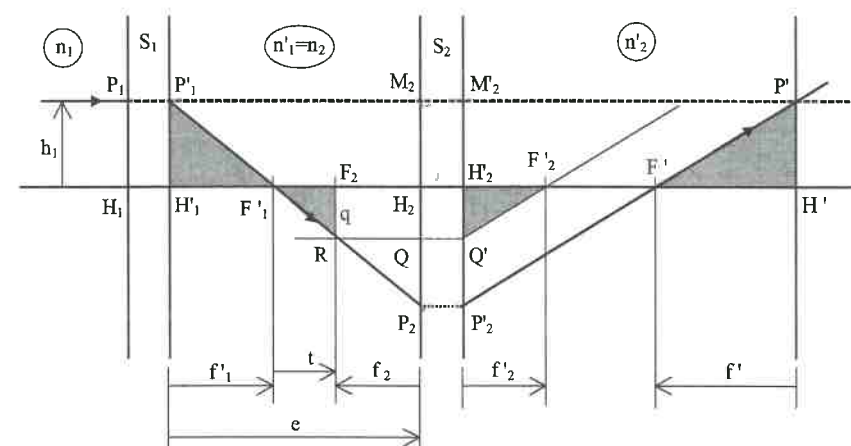


FIGURA 6.21. Combinación de sistemas. Cálculo de H' y F'.

Sea un que rayo que incide en el primer sistema paralelo al eje óptico a una altura h_1 cualquiera y que por tanto deberá salir del sistema compuesto por el punto F'. Analicemos paso a paso su trayectoria. Sale del primer sistema pasando por el foco imagen F'_1 y cortará al plano focal objeto del segundo sistema en el punto R y al plano principal H_2 en el punto P_2 . Para saber la dirección de este rayo después de atravesar el segundo sistema, se utiliza un rayo auxiliar que parte del punto R y es paralelo al eje óptico. Este rayo auxiliar saldrá pasando por F'_2 y será paralelo al rayo emergente puesto que ambos vienen del mismo punto R del plano focal objeto de S_2 . El rayo emergente cortará al eje en un punto que será el foco imagen del conjunto, F'. La prolongación del rayo incidente y el emergente nos proporcionará, como ya vimos anteriormente, la posición del plano principal imagen, H'.

De la figura 6.21, podemos deducir algunas relaciones entre los diferentes parámetros, a saber:

$$\frac{h_1}{f'_1} = -\frac{q}{t} = \frac{P_2 M_2}{e} \quad (6.49)$$

$$\frac{q}{f'_2} = \frac{h_1}{f'} = -\frac{P_2 M_2}{H'_2 H'} \quad (6.50)$$

Combinando ambas ecuaciones se obtiene:

$$\frac{h_1}{q} = -\frac{f'_1}{t} = \frac{f'}{f'_2} \Rightarrow f' = -\frac{f'_1 f'_2}{t} \Rightarrow f' = -\frac{f'_1 f'_2}{e - f'_1 + f'_2} \quad (6.51)$$

$$\frac{P_2 M_2}{h_1} = \frac{e}{f'_1} = -\frac{H'_2 H'}{f'} \Rightarrow H'_2 H' = -\frac{e f'}{f'_1} \Rightarrow H'_2 H' = \frac{e f'_2}{e - f'_1 + f'_2} \quad (6.52)$$

ecuaciones que nos proporcionan la focal imagen del sistema compuesto y la posición del plano principal imagen.

El cálculo del foco objeto F y el plano principal objeto H lo haremos de manera

similar. Para ello consideraremos la figura 6.22. En ella, se ha trazado un rayo que sale del segundo sistema S_2 paralelo al eje óptico a una altura h_1 cualquiera y por lo tanto deberá haber entrado al sistema compuesto por el foco objeto del mismo. Si reconstruimos la trayectoria del rayo hacia atrás, al entrar en S_2 debe hacerlo pasando por F_2 . El rayo corta al plano focal imagen F'_1 en el punto R y al plano principal imagen H'_1 en el punto P'_1 . Para saber la dirección de incidencia de este rayo en el primer sistema trazamos un rayo auxiliar que entra pasando por el foco F_1 , sale de S_1 paralelo al eje óptico cortando al plano focal imagen F'_1 en el punto R. Puesto que el rayo auxiliar y el que nos interesa salen del sistema S_1 por el mismo punto R del plano focal imagen, habrán entrado en él paralelos entre sí. El corte del rayo incidente con el eje nos proporciona la posición del foco objeto del conjunto, F, y la prolongación del rayo incidente y el emergente nos da la posición del plano principal objeto, H.

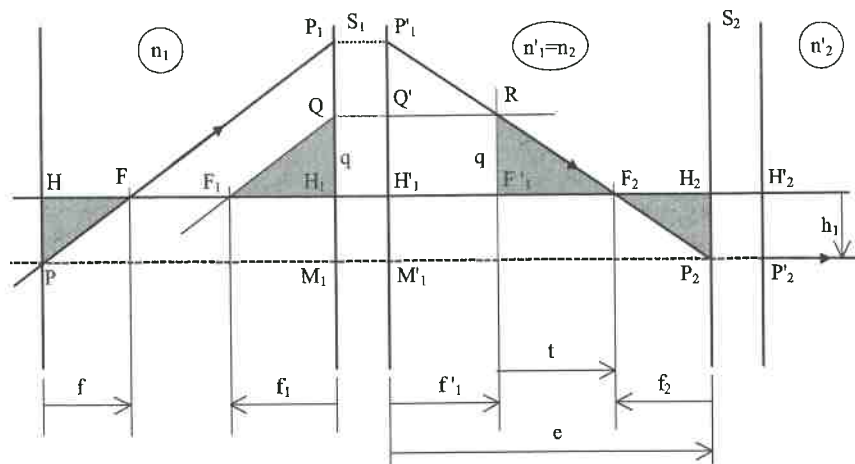


FIGURA 6.22. Combinación de sistemas. Cálculo de H y F.

De la figura 6.22 se deducen las siguientes relaciones de semejanza:

$$\frac{h_1}{f} = \frac{q}{f_1} = \frac{M_1 P_1}{H_1 H} \quad (6.53)$$

$$\frac{q}{t} = \frac{h_1}{f_2} = \frac{M_1 P_1}{e} \quad (6.54)$$

Combinando las ecs. (6.53) y (6.54) obtenemos:

$$\frac{h_1}{q} = \frac{f}{f_1} = \frac{f_2}{t} \Rightarrow f = \frac{f_1 f_2}{t} \Rightarrow f = \frac{f_1 f_2}{e - f'_1 + f_2} \quad (6.55)$$

$$\frac{M_1 P_1}{h_1} = \frac{H_1 H}{f} = \frac{e}{f_2} \Rightarrow H_1 H = \frac{ef}{f_2} \Rightarrow H_1 H = \frac{ef_1}{e - f'_1 + f_2} \quad (6.56)$$

que proporcionan el valor de la focal objeto del sistema compuesto y la posición del plano principal objeto.

Puesto que la potencia se define como el índice posterior partido por la distancia focal imagen, la potencia del sistema compuesto vendría dada por:

$$P = \frac{n_3}{f'} = n_3 \left(\frac{e - f'_1 + f_2}{-f'_1 f'_2} \right) = -\frac{n_3 e}{f'_1 f'_2} + \frac{n_3}{f'_2} - \frac{n_3 f_2}{f'_1 f'_2} = \frac{n_3}{f'_2} + \frac{n_3 n_2}{f'_1 n'_2} - \frac{n_3 n_2 e}{f'_1 f'_2 n_2}$$

$$P = P_1 + P_2 - \frac{e}{n_2} P_1 P_2 \quad (6.57)$$

Se puede comprobar que todas estas expresiones coinciden con las obtenidas en el caso de la lente gruesa si consideramos a ésta como la asociación de dos superficies.

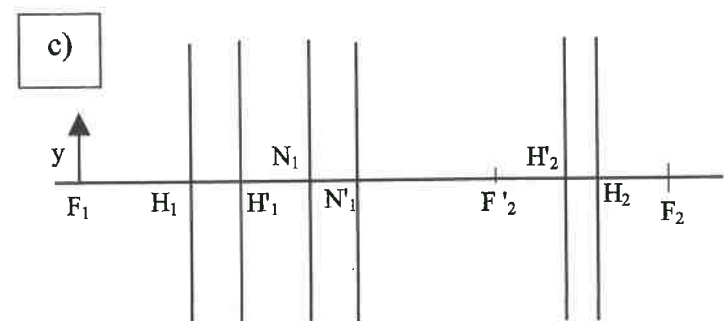
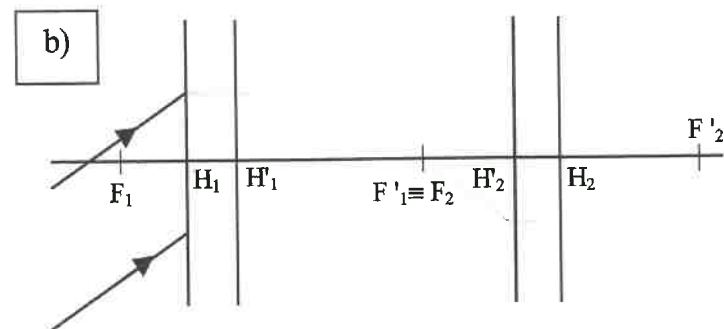
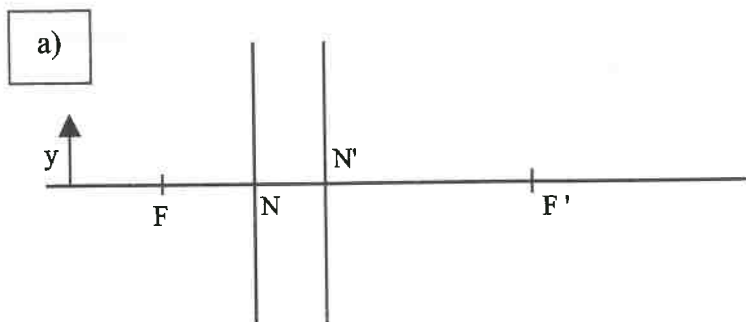
Si los sistemas S_1 y S_2 se encuentran sumergidos en un mismo medio, entonces $n_1 = n_2 = n_3 = n$, $f'_1 = -f_1$ y $f'_2 = -f_2$ con lo que las expresiones para las focales y posiciones de los planos principales (6.51), (6.52), (6.55), (6.56) y (6.57) del sistema compuesto quedarían:

$$\left. \begin{aligned} f' &= \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2 - e} & f &= -\frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2 - e} \Rightarrow f = -f' \\ H'_2 H' &= \frac{-ef'_2}{f'_1 + f'_2 - e} & H_1 H &= \frac{ef'_1}{f'_1 + f'_2 - e} \end{aligned} \right\} \quad (6.58)$$

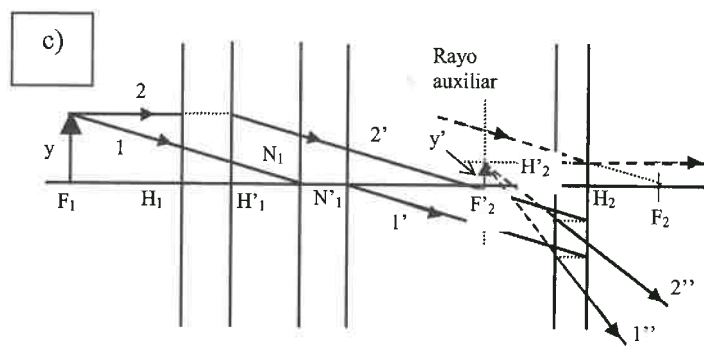
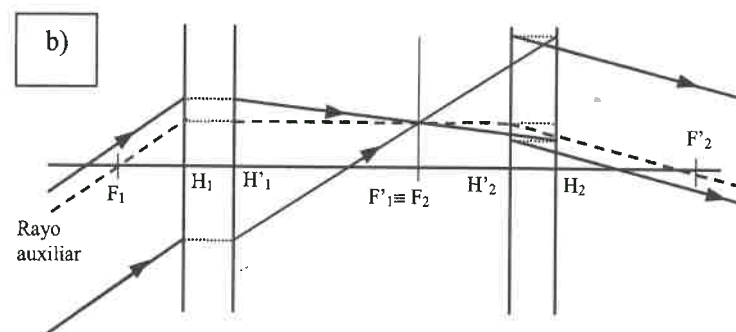
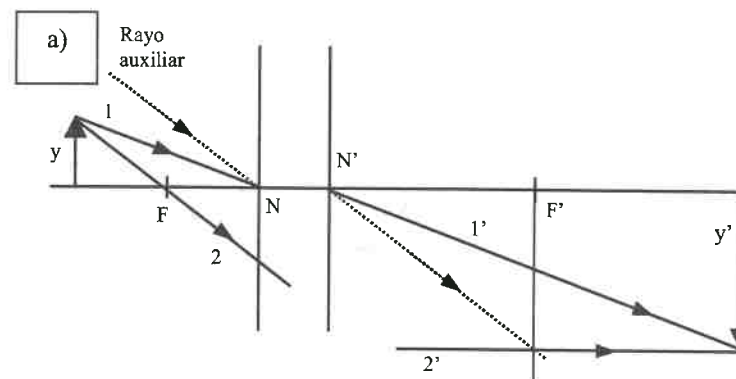
$$P = P_1 + P_2 - \frac{e}{n} P_1 P_2 \quad \text{y si es aire } n = 1 \quad P = P_1 + P_2 - e P_1 P_2$$

CUESTIONES

1.- En los siguientes sistemas, hallar gráficamente la imagen del objeto utilizando rayos auxiliares si es necesario:



- a) Rayo 1: entra por N, sale por N' sin desviarse.
 Rayo 2: entra por F, sale paralelo al eje. Para saber la altura de salida utilizamos el rayo auxiliar.
 Rayo auxiliar: entra por N paralelo al rayo 2, sale por N' sin desviarse.
 El rayo auxiliar y el rayo 2 se cortan en un punto de F'.



- b) Rayo auxiliar: es paralelo al haz que llega y pasa por F_1 , sale del primer sistema paralelo al eje óptico y del segundo sistema pasando por F'_2 . Los rayos que llegan al sistema se cortan con el rayo auxiliar después del primer sistema en un punto del plano focal F'_1 . Como éste también es el plano focal objeto del segundo sistema, a la salida los tres rayos deben ser paralelos entre sí.

c) Rayo 1: entra por N_1 , sale por N'_1 sin desviarse.

Rayo 2: entra paralelo al eje, sale paralelo al anterior puesto que ambos vienen del mismo punto del plano focal objeto F_1 .

Rayo auxiliar: paralelo a los anteriores, entra en el segundo sistema pasando por F_2 , sale paralelo al eje.

Después del segundo sistema los tres rayos (los dos que viene del objeto y el auxiliar) se cortan en un punto del plano focal imagen F'_2 puesto que los tres han incidido en el segundo sistema siendo paralelos entre si.

2.- Los planos nodales tiene un aumento lateral de +1. Discutir esta afirmación

La definición de planos nodales es la siguiente: son dos planos conjugados con aumento angular +1. En el caso particular de un sistema sumergido, según la ecuación (6.28), la relación existente entre el aumento angular y el aumento lateral es $\gamma = 1/\beta'$, y en ese caso, si $\gamma = +1$, entonces $\beta' = +1$ y los planos nodales coinciden con los principales, luego, sólo en este caso, el aumento lateral entre planos nodales será +1.

3.- Especifica la diferencia entre distancia focal y segmento focal

La distancia focal imagen es la distancia entre el plano principal imagen H' y el foco imagen F' , $f' = H'F'$, mientras que el segmento focal posterior es la distancia entre la última superficie del sistema y el foco imagen. Análogamente, la distancia focal objeto es la distancia entre el plano principal objeto H y el foco objeto F , $f = HF$, mientras que el segmento focal anterior es la distancia entre la primera superficie del sistema y el foco objeto. En el caso particular de una lente delgada, ambas distancias coinciden.

4.- Demostrar, a partir de su definición, que la relación entre el aumento axial, α , el aumento lateral, β' y el aumento angular, γ es: $\alpha\gamma = \beta'$

Las definiciones de cada uno de los aumentos son, según hemos visto:

$$\alpha = \frac{dx'}{dx} = -\frac{x'}{x} \quad \beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'} \quad \gamma = \frac{\sigma'}{\sigma}$$

De estas expresiones y del invariante de Lagrange, deducimos que:

$$\beta'^2 = \left(-\frac{f}{x}\right)\left(-\frac{x'}{f'}\right) = \left(-\frac{f}{f'}\right)\alpha = \frac{n}{n'}\alpha$$

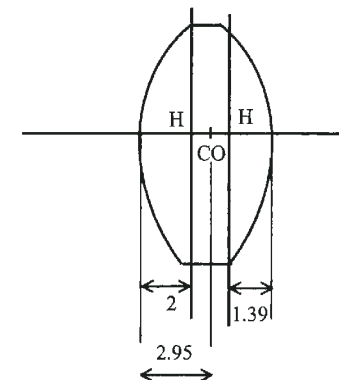
$$n\gamma\sigma = n'\gamma'\sigma' \Rightarrow \beta' = \frac{y'}{y} = \frac{n}{n'}\frac{1}{\gamma}$$

Y combinando estas ecuaciones, la relación entre los tres aumentos es:

$$\alpha\gamma = \frac{n'}{n}\beta'^2 \times \frac{n}{n'}\frac{1}{\beta'} \Rightarrow \alpha\gamma = \beta'$$

5. Se tiene una lente gruesa en aire, de radios de curvatura 60 y -40 mm respectivamente, índice 1.5 y espesor 5 mm. Sabiendo que el plano principal objeto H está a una distancia de +2 mm de la primera cara de la lente, calcular analíticamente la posición del centro óptico y de los puntos nodales de la lente.

Puesto que la lente está en aire, se trata de un sistema sumergido, luego los planos nodales coinciden con los planos principales. Entonces $N \equiv H$ está a +2 mm de la primera cara de la lente. Por otra parte, la imagen de N a través de la primera cara de la lente nos dará la posición del centro óptico de la misma:



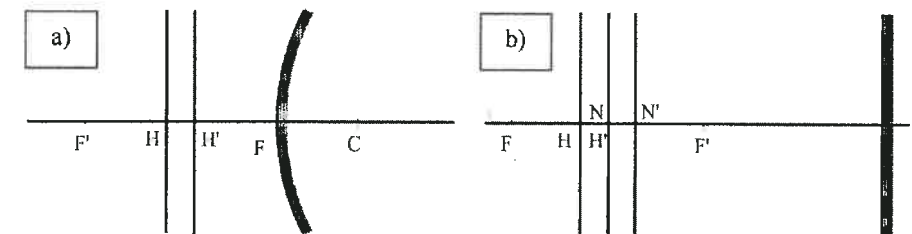
$$\frac{-1}{+2} + \frac{1.5}{a'} = \frac{1.5-1}{60} \Rightarrow a' = +2.95 \text{ mm}$$

El centro óptico estará a 2.95 mm por detrás de la primera cara de la lente. Finalmente, el punto N' es la imagen del centro óptico a través de la segunda cara de la lente:

$$-\frac{1.5}{2.95-5} + \frac{1}{a'} = \frac{1-1.5}{-40} \Rightarrow a' = -1.39 \text{ mm}$$

Luego el punto nodal imagen que coincidirá con el punto principal imagen, H' , estará a 1.39 mm por delante de la segunda cara de la lente.

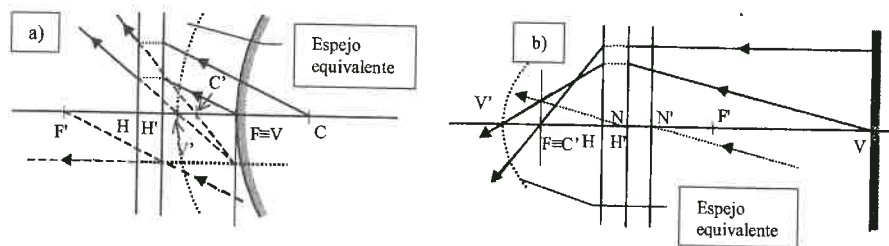
6.- Calcular gráficamente los espejos equivalentes a los siguientes sistemas:



a) Se trazan dos rayos, uno que sale de C y otro que sale de V paralelos entre sí con una determinada dirección (luz de derecha a izquierda). A continuación se traza un auxiliar paralelo a los anteriores que pasa por F' . Dicho rayo auxiliar sale paralelo al eje óptico y los dos rayos anteriores cortan al auxi-

liar en un punto del plano focal objeto, F. El rayo que sale de C determina el centro C' del espejo equivalente y el rayo que sale de V determina el vértice V' del espejo equivalente. En este caso, dicho espejo equivalente es convexo y de radio $V'C'$.

- b) Se traza un rayo que sale de V con una determinada dirección y un auxiliar paralelo a él que pasa por los puntos nodales y, por lo tanto, no se desvía. Estos dos rayos (el auxiliar y el que viene de V) se cortarán en un punto del plano focal objeto, F. La intersección del rayo que viene de V con el eje óptico nos da la posición del vértice, V' , del espejo equivalente. Para calcular el centro C' del espejo equivalente bastará con trazar un rayo que viene del centro C del espejo (como el espejo es plano, C está en el infinito y el rayo que debemos trazar es paralelo al eje óptico). Dicho rayo saldrá pasando por el foco objeto F que coincidirá con el centro C' del espejo equivalente. El resultado es un espejo equivalente convexo cuyo centro C' coincide con el foco objeto del sistema dióptrico.



Capítulo VII

FORMULACIÓN MATRICIAL DE LA ÓPTICA GAUSSIANA

VII.1.- INTRODUCCIÓN

Recapitulando la problemática de la Óptica gaussiana desarrollada sobre el supuesto ideal de sistema óptico perfecto, vemos que, en esencia, un sistema óptico no es más que un operador que transforma el espacio objeto en el espacio imagen. Desde el punto de vista geométrico, la transformación producida por un sistema óptico es una transformación lineal que, en el caso más general del espacio tridimensional, puede representarse por una matriz 3×3 y que, en nuestro caso particular será una matriz 2×2 , ya que siempre consideramos únicamente dos dimensiones.

Consideremos un rayo luminoso que se propaga en dirección coplanaria al eje óptico de un sistema centrado. Este rayo atraviesa los distintos medios homogéneos separados por los distintos dioptrios o limitados por los espejos y en cada uno de esos medios el rayo se propaga en línea recta. Sea M un punto de ese rayo y H la proyección de ese punto sobre el eje (figura 7.1). En el plano de la figura el rayo está perfectamente determinado por la pareja (h, σ) donde h es la altura del punto M sobre el eje óptico y σ es el ángulo orientado rayo-eje. Escrito en forma matricial, un rayo estará representado por un vector (matriz 2×1) del tipo:

$$\begin{pmatrix} h \\ \sigma \end{pmatrix}$$

Cuando un rayo de luz se propaga en un medio homogéneo, la trayectoria es una línea recta, por lo que σ permanece constante mientras que la altura h varía según el punto considerado. Por el contrario, en la superficie de un dioptrio o de un espejo, el rayo cambia de dirección (σ cambia) mientras que la altura h permanece constante.

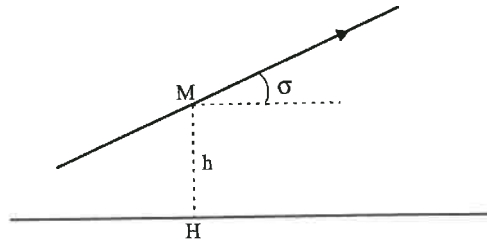


FIGURA 7.1. Representación de un rayo.

VII.2.- MATRICES DE TRASLACIÓN, REFRACCIÓN Y REFLEXIÓN

Vamos a deducir ahora las matrices representativas de las distintas operaciones que se pueden llevar a cabo en un sistema óptico, es decir, la traslación, la refracción y la reflexión.

VII.2.1.- Matriz traslación

Consideremos (figura 7.2) un rayo luminoso propagándose en un medio homogéneo, su propagación es rectilínea y, de la figura, podemos deducir que:

$$h_2 = h_1 - \sigma_1 d \quad (7.1)$$

$$\sigma_2 = \sigma_1$$

siendo d la distancia de traslación.

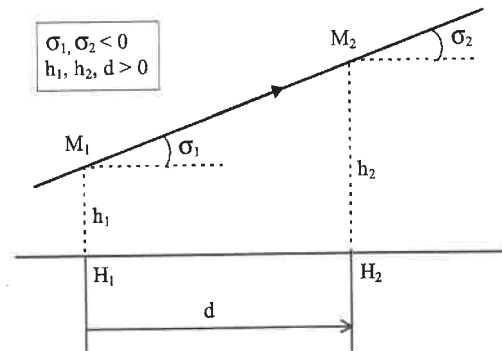


FIGURA 7.2. Dedución de la matriz traslación.

Estas dos ecuaciones lineales las podemos escribir de forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

La matriz 2×2 así determinada se denomina matriz de traslación y su determinante es la unidad.

$$(T) = \begin{pmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Delta = 1 \quad (7.3)$$

VII.2.2.- Matriz refracción

Consideremos ahora (figura 7.3) un rayo luminoso que incide sobre un dioptrio esférico que separa dos medios de índices n y n' . En el punto de incidencia sobre el dioptrio se cumple que $h_2 = h_1$ y además, según se deduce de la figura:

$$-\sigma_1 - i + \pi + \phi = \pi \Rightarrow i = \phi - \sigma_1 \quad (7.4)$$

$$-\sigma_2 - i' + \pi + \phi = \pi \Rightarrow i' = \phi - \sigma_2$$

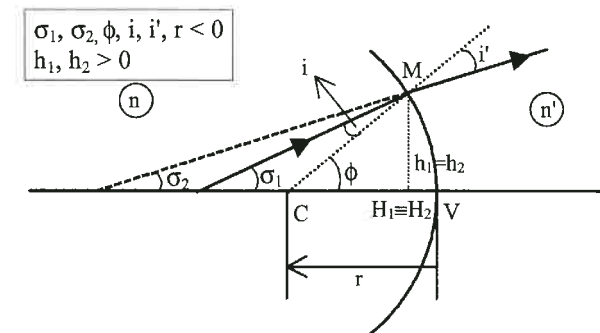


FIGURA 7.3. Dedución de la matriz refracción.

Teniendo en cuenta que estamos en la región paraxial:

$$\phi \approx \tan \phi = \frac{h_1}{r}$$

$$ni = n'i' \Rightarrow n(\phi - \sigma_1) = n'(\phi - \sigma_2)$$

Desarrollando esta expresión y sustituyendo el valor de ϕ , resulta:

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{n}{n'} \sigma_1 - \left(\frac{n}{n'} - 1 \right) \phi \\ \sigma_2 &= \frac{n}{n'} \sigma_1 - h_1 \left(\frac{n - n'}{n'r} \right) \end{aligned} \quad (7.5)$$

que escrito en forma matricial quedaría:

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n'-n} & 0 \\ \frac{n}{n'r} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

Si recordamos la expresión de la focal de un dioptrio esférico, entonces la ecuación (7.6) quedaría como:

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f'} & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

La matriz así deducida se denomina matriz de refracción de un dioptrio esférico y su determinante es igual al cociente entre los índices de los dos medios separados por el dioptrio.

$$(R) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n'-n} & 0 \\ \frac{n}{n'r} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f'} & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \quad \Delta = \frac{n}{n'} \quad (7.8)$$

En el caso en que el dioptrio sea plano, entonces $r = \infty$, $f' = \infty$ y la matriz de refracción quedaría:

$$(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

VII.2.3.- Matriz reflexión

La figura 7.4 representa un espejo esférico de centro C y vértice V. De dicha figura deducimos que:

$$\begin{aligned} -\sigma_1 - i + \pi + \phi &= \pi \Rightarrow i = \phi - \sigma_1 \\ \sigma_2 + i' + \pi - \phi &= \pi \Rightarrow i' = \phi - \sigma_2 \end{aligned} \quad (7.10)$$

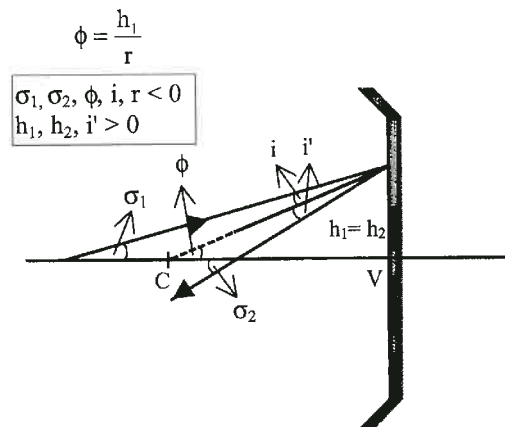


FIGURA 7.4. Dedución de la matriz reflexión.

Por la ley de reflexión, teniendo en cuenta los signos $i = -i'$. Si, en estas condiciones escribimos h_2 y σ_2 en función de h_1 y σ_1 , entonces:

$$\begin{aligned} i &= -i' \\ \phi - \sigma_1 &= -\phi + \sigma_2 \Rightarrow \sigma_2 = 2\phi - \sigma_1 = 2\frac{h_1}{r} - \sigma_1 \\ h_2 &= h_1 \end{aligned} \quad (7.11)$$

ecuaciones que en forma matricial se escriben:

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{2}{r} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

Teniendo en cuenta que la focal de un espejo es $f' = r/2$ la matriz reflexión, cuyo determinante es -1 , quedaría:

$$(R_f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{f'} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{2}{r} & -1 \end{pmatrix} \quad \Delta = -1 \quad (7.13)$$

VII.2.4.- Matriz traslación y refracción con luz en sentido inverso

Las matrices deducidas anteriormente consideran el sentido de la luz de izquierda a derecha, establecido por el criterio de signos utilizado en todos los temas anteriores. Hay que tener en cuenta, sin embargo, que si en un sistema óptico existe un espejo en combinación con otras superficies refractantes, la luz al llegar al espejo se refleja y vuelve a atravesar el sistema en sentido inverso. En este camino de vuelta, la luz se traslada y se refracta en las mismas superficies que lo había hecho anteriormente, pero viajando en sentido inverso.

Para deducir la matriz de traslación en este caso, consideremos la figura 7.5 en la que un rayo se propaga de derecha a izquierda partiendo de una altura h_2 y llegando a una altura h_1 .

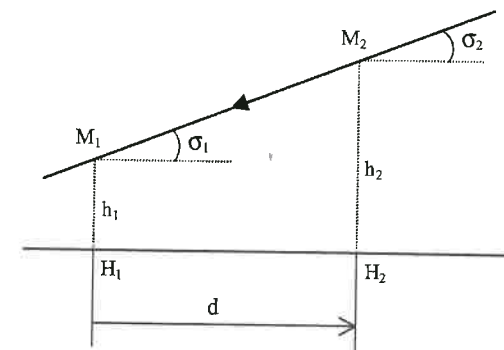


FIGURA 7.5. Dedución de la matriz traslación en sentido inverso.

En este caso se verificará que:

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \leftarrow \\ \mathbf{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

Y despejando de la ec. (7.1):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_2 \\ h_1 &= h_2 + \sigma_2 d = h_2 + \sigma_1 d \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

con lo que la matriz traslación cuando la luz viaja de derecha a izquierda será:

$$\begin{pmatrix} \leftarrow \\ \mathbf{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Delta = 1 \quad (7.16)$$

No hay que olvidar que la distancia d está definida tal y como indica la figura 7.5, es decir $d = H_1 H_2$ en ambos casos.

En el caso de la refracción cuando la luz viaja de derecha a izquierda (fig. 7.6), el rayo antes de refractarse viene definido por los parámetros h_2 y σ_2 mientras que después de la refracción, viene definido por h_1 y σ_1 . La relación entre ambos será:

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \leftarrow \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

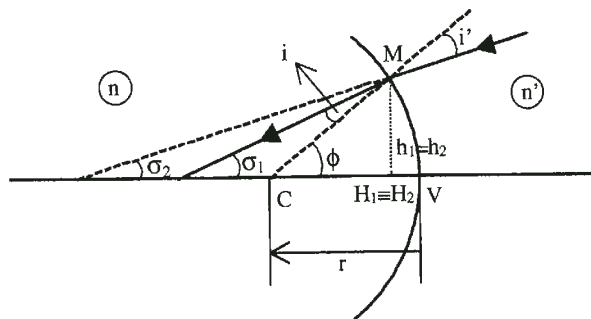


FIGURA 7.6. Deducción de la matriz refracción en sentido inverso.

Si despejamos de la ec. (7.5) el valor de σ_1 y, puesto que las alturas son iguales antes y después de la refracción:

$$\sigma_1 = \frac{n'}{n} \sigma_2 - \frac{n'}{nf} h_2 = \frac{n'}{n} \sigma_2 + \frac{1}{f} h_2$$

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & \frac{n'}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

con lo que la matriz refracción cuando la luz viaja de derecha a izquierda se escribe:

$$\begin{pmatrix} \leftarrow \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & \frac{n'}{n} \end{pmatrix} \quad \Delta = \frac{n'}{n} \quad (7.19)$$

donde aparece la focal objeto de la superficie (en lugar de la focal imagen que aparecía originalmente) y los índices aparecen también en orden inverso.

VII.3.- MARCHA DE RAYOS A TRAVÉS DE UN DIOPTRIO

Consideremos en primer lugar el caso más sencillo: el de un dioptrio de centro C y vértice V que separa dos medios de índices n y n' y apliquemos el formulismo matricial que acabamos de describir. La trayectoria de un rayo luminoso, que atraviesa este dioptrio puede deducirse mediante un producto de tres matrices, una de traslación desde el plano origen o plano de entrada (P) hasta el dioptrio, otra de refracción en el dioptrio y una tercera también de traslación desde el dioptrio hasta el plano de salida (P') considerado (fig. 7.7).

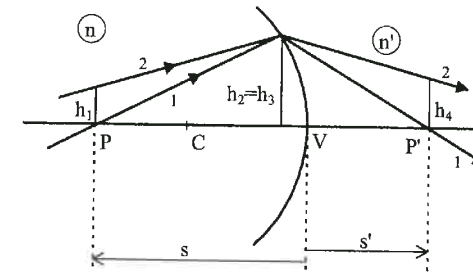


FIGURA 7.7. Marcha de un rayo a través de un dioptrio.

De la figura 7.7 se deduce que:

$$\begin{pmatrix} h_4 \\ \sigma_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -s' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_3 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \leftarrow \\ \mathbf{T}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_3 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} h_3 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f'} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \leftarrow \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \leftarrow \\ \mathbf{T}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix}$$

siendo $s' = VP' > 0$ y $s = VP < 0$. Sustituyendo:

$$\begin{pmatrix} h_4 \\ \sigma_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \leftarrow \\ \mathbf{T}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \leftarrow \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \leftarrow \\ \mathbf{T}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

Si efectuamos el producto de matrices, obtendremos la matriz del dioptrio esférico entre los planos P y P'.

$$(S) = (T_2)(R)(T_1) = \begin{pmatrix} 1 & -s' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f'} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(S) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{s'}{f'} & s - s' \left(\frac{s}{f'} + \frac{n}{n'} \right) \\ \frac{1}{f'} & \frac{s}{f'} + \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \quad (7.21)$$

En el caso particular de que P y P' sean planos conjugados, resulta que si $h_1 = 0$, entonces $h_4 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{s'}{f'} & s - s' \left(\frac{s}{f'} + \frac{n}{n'} \right) \\ \frac{1}{f'} & \frac{s}{f'} + \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_1 \end{pmatrix}$$

$$0 = \left[s - s' \left(\frac{s}{f'} + \frac{n}{n'} \right) \right] \sigma_1$$

y como esto debe cumplirse independientemente de los valores de σ_1 y σ_4 , el término que aparece entre corchetes debe anularse.

$$s - s' \left(\frac{s}{f'} + \frac{n}{n'} \right) = 0$$

$$s = \frac{ss'}{f'} + \frac{ns'}{n'} \Rightarrow -\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'}{f'} \quad (7.22)$$

que no es más que la ecuación de Gauss del dioptrio esférico.

VII.4.- MATRIZ DE TRANSFERENCIA DE UN SISTEMA CENTRADO

Cualquier sistema centrado se puede considerar compuesto por un conjunto de medios homogéneos, de dioptrios y de espejos, de modo que es posible conocer la trayectoria de un rayo que atraviesa el sistema efectuando el producto de las matrices correspondientes a cada uno de los distintos elementos. La trayectoria de un rayo que va desde un plano P hasta un plano P' siempre podremos caracterizarla (trabajando en aproximación paraxial) por una relación del tipo:

$$\begin{pmatrix} h' \\ \sigma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \sigma \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

La matriz (S) formada por los elementos a, b, c y d se denomina matriz de

transferencia del sistema relativa a los planos P y P'. El conocimiento de la matriz de transferencia de un sistema centrado cualquiera permite obtener las relaciones de conjugación, aumentos, situación de elementos cardinales, etc. referidos a dicho sistema.

Los coeficientes de la matriz son función, en principio, del sistema en sí mismo y de los planos P y P' considerados. Existe una relación entre estos coeficientes. Puesto que la matriz de transferencia no es más que un producto ordenado de matrices traslación, refracción y reflexión, el determinante de dicha matriz de transferencia será el producto de los determinantes de cada una de las matrices elementales consideradas. Así, en un sistema en el que no haya espejos, teniendo en cuenta que el determinante de la matriz traslación vale 1, y el de un dioptrio que separa dos medios de índices n y n', n/n' , el determinante de la matriz de transferencia será:

$$\Delta = ad - bc = \frac{n_1}{n'_1} \frac{n_2}{n'_2} \dots \frac{n_k}{n'_k} (1)^j = \frac{n}{n'} \quad (7.24)$$

siendo j = número de traslaciones y k = número de dioptrios

Si el sistema tiene un espejo, entonces el sistema equivalente es un espejo con lo que el determinante de la matriz de transferencia será el de la matriz asociada al espejo equivalente, es decir $\Delta = -1$. Si el número de espejos que tiene el sistema es k, entonces se pueden dar dos casos:

$$\left. \begin{array}{ll} k \text{ impar} & \Rightarrow \Delta = -1 \\ k \text{ par} & \Rightarrow \Delta = \frac{n}{n'} \end{array} \right\} \quad (7.25)$$

En cualquier caso, de los cuatro elementos de la matriz de transferencia no hay más que tres coeficientes independientes, el cuarto está ligado con los tres anteriores por el determinante. Vamos a ver ahora el significado de los diferentes elementos de la matriz de transferencia (S) con ayuda de la ec. (7.23).

1) Coeficiente b

La primera línea de la ecuación (7.23) se escribe:

$$h' = ah + b\sigma \quad (7.26)$$

$$h = 0 \Rightarrow h' = b\sigma$$

En esta ecuación, si $b = 0$, entonces $h' = 0$ para cualquier valor de σ , de lo que se deduce que cuando $b = 0$ los dos planos considerados son conjugados. En otras palabras, siempre que en la matriz de un sistema centrado tengamos $b = 0$, sabremos que se trata de la matriz entre dos planos conjugados (Fig. 7.8, rayo 1).

2) Coeficiente a

Partimos de que $b = 0$, es decir, consideremos la matriz de un sistema entre dos planos conjugados; en ese caso, la ec. (7.26) se reduce a:

$$h' = ah \Rightarrow a = \frac{h'}{h} = \beta' \quad (7.27)$$

Esta situación rige el comportamiento del rayo 2 de la figura 7.8. Vemos pues entonces que, si $b = 0$ (planos conjugados), a representa el aumento lateral entre esos planos. Por ejemplo, en el caso particular de que los planos P y P' fueran los planos principales del sistema, obtendríamos $a = 1$ y $b = 0$.

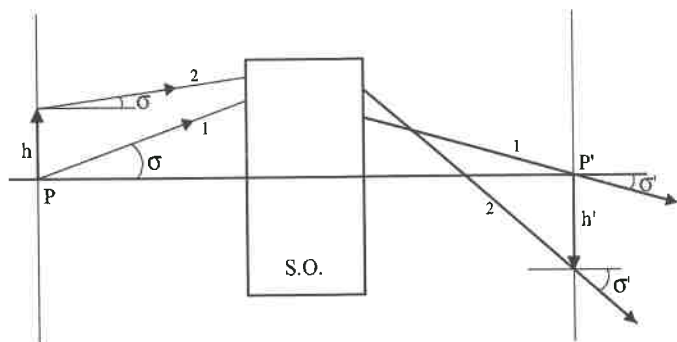


FIGURA 7.8. Matriz de transferencia. Significado de los elementos de la matriz a y b.

3) Coeficiente d

Consideremos de nuevo dos planos conjugados ($b = 0$) y el rayo 1 de la figura 7.8 donde $h = h' = 0$. La segunda línea de la ecuación (7.23) se escribe:

$$\sigma' = ch + d\sigma = d\sigma \Rightarrow d = \frac{\sigma'}{\sigma} = \gamma \quad (7.28)$$

con lo que el elemento d de la matriz de transferencia representa en ese caso el aumento angular entre los planos P y P'.

De manera general, ya hemos visto que, en un sistema dióptrico, el determinante de la matriz de transferencia vale n/n' . Si consideramos planos conjugados ($b = 0$), operando se obtiene:

$$\Delta = ad - bc = ad = \frac{n}{n'}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = \beta' \\ d = \gamma \end{array} \right\} \Delta = \beta' \gamma = \frac{n}{n'}$$

$$\left(\frac{h'}{h} \right) \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right) = \frac{n}{n'} \Rightarrow nh\sigma = n'h'\sigma' \quad (7.29)$$

que no es más que el invariante de Lagrange-Helmholtz.

4) Coeficiente c

En la expresión general de la matriz de transferencia dada por la ecuación (7.23), si consideramos un haz incidente paralelo al eje, es decir $\sigma = 0$ (fig. 7.9) la segunda línea de la matriz se escribiría:

$$\begin{aligned} \sigma' &= ch + d\sigma \\ \text{a) } c &= 0 \Rightarrow \sigma' = 0 \\ \text{b) } c &\neq 0 \Rightarrow \sigma' = \frac{h}{f'} \Rightarrow c = \frac{1}{f'} \end{aligned} \quad (7.30)$$

Como vemos se pueden distinguir dos casos. Si $c = 0$, entonces $\sigma' = 0$, los rayos salen paralelos al eje y el sistema es afocal. Si $c \neq 0$, el haz converge en F' por definición. La intersección del rayo incidente y el rayo emergente nos da la posición del plano principal H' según se ve en la figura 7.9 y entonces $c = 1/f'$. Esto significa que el coeficiente c no depende de los planos P y P' escogidos sino solamente del sistema en sí mismo y, si éste está en aire, c es la potencia del sistema.

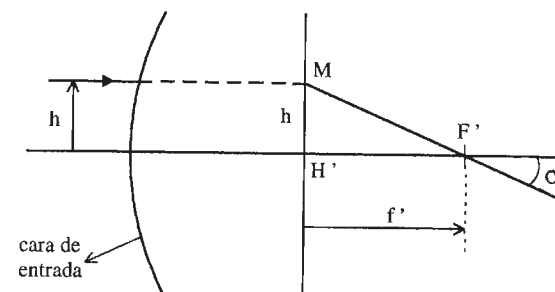


FIGURA 7.9. Matriz de transferencia. Significado del elemento c de la matriz.

VII.5.- CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS CARDINALES DE UN SISTEMA

Para caracterizar un sistema centrado, dentro de la formulación matricial, bastará con hallar su matriz de transferencia para un plano de entrada y otro de salida escogidos de manera que coincidan con sus superficies extremas (primera y última). A esta, matriz la designaremos por (S):

$$(S) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Supondremos también, para más comodidad, que el sistema no contiene espejos y, por lo tanto, el determinante de (S) es n/n' .

Ahora determinaremos la matriz de transferencia de este sistema (M) cuando los planos de entrada y salida son dos planos cualesquiera P y P' distintos de las superficies extremas. La posición de estos planos estará definida por las distancias z y z' siendo:

$$z = V_1 K_1 \quad y \quad z' = V_2 K_2$$

donde K_1 y K_2 son, como siempre, los puntos donde esos planos cortan al eje óptico, V_1 y V_2 son los vértices de las caras extremas del sistema. (fig. 7.10).

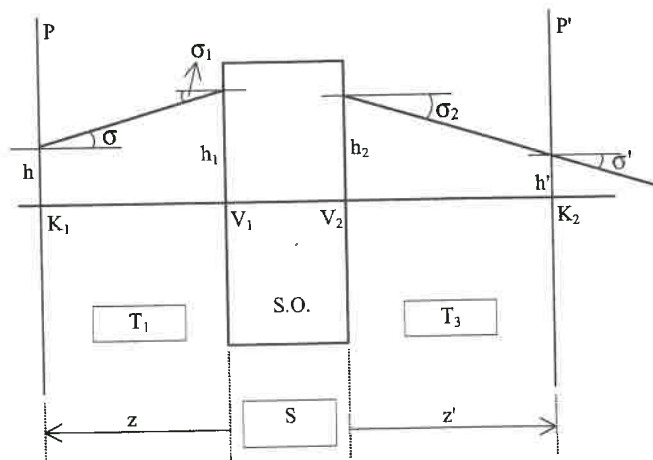


FIGURA 7.10. Matriz de transferencia de un sistema centrado entre dos planos cualesquiera.

En la región 2, caracterizada por la matriz (S) la relación de entrada - salida se escribe:

$$\begin{aligned} h_2 &= ah_1 + b\sigma_1 \\ \sigma_2 &= ch_1 + d\sigma_1 \end{aligned}$$

Por otra parte, según el esquema de la figura 7.10 el sistema, desde el punto de vista matricial puede representarse mediante tres matrices:

- una primera que caracteriza la traslación desde el plano P hasta la cara de entrada del sistema. La distancia correspondiente es $-z$ (ya que según lo hemos definido $z < 0$),
- la segunda sería la matriz (S) definida anteriormente, correspondiente a la marcha de rayos a través de los diferentes dioptrios que constituyen el sistema
- y por último la tercera correspondería a la traslación de una distancia z' ($z' > 0$) desde la cara de salida del sistema hasta el plano P' .

Según esto, la matriz de transferencia del sistema centrado entre los planos P y P' puede expresarse como:

$$(M) = (T_3)(S)(T_1)$$

con lo que la matriz (M) será:

$$(M) = \begin{pmatrix} 1 & -z' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - cz' & az + b - z'(cz + d) \\ c & cz + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

y la relación entre los planos P y P' la podemos escribir de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} h' \\ \sigma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \sigma \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

VII.5.1.- Relación de conjugación

La condición para que P y P' sean conjugados es que para $h = 0$, h' debe ser igualmente 0, cualquiera que sea el valor de σ y σ' , con lo cual, de la ecuación (7.32) obtenemos:

$$M_2 = 0$$

$$az + b - cz' - dz' = 0 \quad (7.33)$$

Esta condición de conjugación resulta un tanto irreconocible debido a que los orígenes de z y z' están tomados en los vértices V_1 y V_2 . Por otra parte, si P y P' son dos planos conjugados, se cumple:

$$\begin{pmatrix} h' \\ \sigma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \sigma \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} h' &= M_1 h \Rightarrow M_1 = \beta' \\ \sigma' &= a - cz' \end{aligned} \quad (7.34)$$

VII.5.2.- Planos principales

Si los planos P y P' son los planos principales, entonces $\beta' = 1$ ($M_1 = 1$):

$$a - cz' = 1 \Rightarrow z'_{H'} = \frac{a-1}{c} \quad (7.35)$$

ecuación que nos da la posición del plano principal imagen H' en función de los coeficientes de la matriz. Sustituyendo ahora en la ecuación (7.33), obtendremos la posición del plano principal objeto H referido a V_1 . También podemos hallar esta posición a partir del determinante de la matriz.

$$\Delta = M_1 M_4 = \frac{n}{n'} \Rightarrow M_4 = \frac{1}{M_1} \frac{n}{n'} = \frac{n}{n'}$$

$$cz + d = \frac{n}{n'} \Rightarrow z_H = \frac{(n/n') - d}{c} \quad (7.36)$$

Si el sistema está sumergido, entonces $n = n'$ y el determinante es 1 con lo que:

$$M_4 = 1 \Rightarrow z_H = \frac{1-d}{c} \quad (7.37)$$

VII.5.3.- Planos focales

La posición de los focos del sistema también pueden hallarse fácilmente. Si aplicamos la matriz (M) a un rayo que incide paralelo al eje óptico obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = M_1 h \Rightarrow M_1 = 0$$

$$a - cz' = 0 \Rightarrow z'_F = \frac{a}{c} \quad (7.38)$$

que nos da la posición del foco imagen a partir del vértice V_2 .

Por otra parte, si aplicamos la matriz (M) a un rayo que viene del foco objeto y que, en consecuencia, sale paralelo al eje:

$$\begin{pmatrix} h' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix}$$

$$0 = M_4 \sigma \Rightarrow M_4 = 0$$

$$cz + d = 0 \Rightarrow z_F = -\frac{d}{c} \quad (7.39)$$

con lo que obtenemos la posición del foco objeto a partir del vértice V_1 .

VII.5.4.- Distancias focales

Las distancias focales del sistema son $H'F'$ y HF . $H'F'$ se puede descomponer de la siguiente manera:

$$H'F' = H'V_2 + V_2F' = -z'_H + z'_F \quad (7.40)$$

y al sustituir en esta expresión las ecuaciones (7.35) y (7.38):

$$H'F' = f' = -\frac{a-1}{c} + \frac{a}{c} = \frac{1}{c} \Rightarrow c = \frac{1}{f'} \quad (7.41)$$

Y, puesto que $M_3 = c$, vemos que, de una forma general, el coeficiente M_3 ó c de cualquier matriz de cualquier sistema es simplemente la inversa de la focal de dicho sistema, independientemente de los planos de entrada - salida considerados.

Para la focal objeto de manera similar, podemos escribir:

$$HF = HV_1 + V_1F = -z_H + z_F = -\frac{(n/n')-d}{c} - \frac{d}{c} = -\frac{n/n'}{c} = f \quad (7.42)$$

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}$$

y si el sistema está sumergido, entonces:

$$f = -\frac{1-d}{c} - \frac{d}{c} = -\frac{1}{c} \Rightarrow f = -f' \quad (7.43)$$

VII.5.5.- Planos nodales

Si los planos P y P' considerados son los planos nodales, el aumento angular será 1 por definición. La posición de estos planos se obtendrá aplicando la matriz de transferencia a un rayo con $h = 0$ y ángulo σ cualquiera que debe salir con $h' = 0$, puesto que N y N' son conjugados, y con la misma dirección con la que entró puesto que el rayo que pasa por los puntos nodales no se desvía.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix}$$

$$\sigma = M_4 \sigma \Rightarrow M_4 = 1$$

$$cz + d = 1 \Rightarrow z_N = \frac{1-d}{c} \quad (7.44)$$

Conocida la posición de N, con ayuda del determinante de la matriz podemos calcular la posición de N'. En el caso general obtenemos:

$$\Delta = \frac{n}{n'} = M_1 M_4 = M_1$$

$$a - cz' = \frac{n}{n'} \Rightarrow z'_{N'} = \frac{a - (n/n')}{c} \quad (7.45)$$

Y si el sistema está sumergido:

$$\Delta = 1 = M_1 \Rightarrow a - cz' = 1 \Rightarrow z'_{N'} = \frac{a-1}{c} \quad (7.46)$$

El siguiente cuadro resume los principales resultados obtenidos.

RESUMEN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Matriz entre caras extremas : $(S) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Matriz entre dos planos P y P' : $(M) = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$

PLANOS PRINCIPALES:

$$M_2 = 0 \quad M_4 = n/n' = \gamma$$

$$M_1 = 1 \quad M_3 = 1/f'$$

$$(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/f' & n/n' \end{pmatrix}$$

$$z'_{H'} = \frac{a-1}{c} \quad z_H = \frac{(n/n')-d}{c}$$

PLANOS NODALES:

$$M_2 = 0 \quad M_4 = 1 = \gamma$$

$$M_1 = n/n' \quad M_3 = 1/f'$$

$$(M) = \begin{pmatrix} n/n' & 0 \\ 1/f' & 1 \end{pmatrix}$$

$$z'_{N'} = \frac{a-(n/n')}{c} \quad z_N = \frac{1-d}{c}$$

PLANOS FOCALES:

$$M_1 = 0 \Rightarrow P' = F' \quad z'_{F'} = \frac{a}{c}$$

$$M_4 = 0 \Rightarrow P = F \quad z_F = -\frac{d}{c}$$

$$\Delta = -M_2 M_3 = -\frac{M_2}{f'} = \frac{n}{n'} \Rightarrow M_2 = f$$

DISTANCIAS FOCALES:

$$c = 1/f' \quad f = -\frac{n}{n'} \frac{1}{c}$$

$$\Delta = M_1 M_4 - M_2 M_3 = n/n'$$

VII.6.-MÉTODOS DE CÁLCULO DE UNA MATRIZ DE TRANSFERENCIA

Para el cálculo de la matriz de transferencia de un sistema centrado, como ya hemos visto, se descompone éste en un conjunto de dioptrios y espejos que separan distintos medios homogéneos para después multiplicar de forma ordenada las matrices correspondientes a los distintos elementos. Con este método hay que tener mucho cuidado en el orden del producto de las matrices pero presenta la ventaja de que es muy general y que, actualmente las calculadoras pueden efectuar fácilmente el producto de numerosas matrices. Si el producto se efectúa de forma manual, el método resulta demasiado laborioso.

Otro método alternativo consiste en aplicar algunos conocimientos básicos de Óptica Geométrica trazando algunos rayos particulares. Se obtienen entonces los coeficientes de la matriz por simple identificación. Como ejemplo calcularemos la matriz de una lente delgada de índice n sumergida en aire (Fig. 7.11).

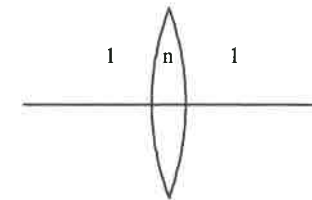


FIGURA 7.11. Lente delgada en aire.

Con el primer método tendremos que multiplicar las matrices correspondientes a la refracción en las dos caras de la lente y la matriz de traslación entre las dos caras que, en este caso, por ser la lente delgada, será la matriz unidad.

$$(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{r_2} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{r_1} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f'} & 1 \end{pmatrix} \quad (7.47)$$

En esta matriz que hemos obtenido, el hecho de que $b = 0$ y $a = 1$ se interpreta fácilmente puesto que los planos principales de la lente delgada están confundidos en los vértices. Al hallar la matriz entre las dos caras de la lente, hemos hallado igualmente la matriz entre sus planos principales.

El segundo método está sintetizado en la figura 7.12. Siendo la lente delgada, antes y después de atravesar la lente el rayo no cambia de altura, es decir $h' = h$, con lo que se obtiene:

$$\begin{pmatrix} h' \\ \sigma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \sigma \end{pmatrix}$$

$$h' = ah + b\sigma \Rightarrow \begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 0 \end{aligned} \quad (7.48)$$

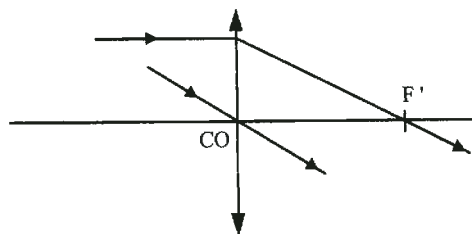


FIGURA 7.12. Cálculo de la matriz de una lente delgada en aire.

Por otra parte, el rayo que pasa por el centro óptico ($h = h' = 0$), no se desvía ($\sigma' = \sigma$) con lo cual:

$$\sigma' = ch + d\sigma \Rightarrow d = 1 \quad (7.49)$$

Como además, de una forma general, $c = 1/f'$ la matriz de la lente delgada en aire se escribe:

$$(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f'} & 1 \end{pmatrix} \quad (7.50)$$

CUESTIONES

1.- En un sistema en aire de focal $f' = 10$ cm se coloca un objeto a 20 cm por delante de H. Deducir los elementos de la matriz correspondiente al sistema entre el plano objeto y el plano imagen. Razonar la deducción de cada uno de estos elementos.

Si el objeto está a 20 cm por delante de H, eso quiere decir que $a = 2f' = -20$ cm, entonces $a' = 2f' = 20$ cm y el aumento lateral $\beta' = -1$. Puesto que el sistema está en aire, el determinante de la matriz será $n/n' = 1$. Con esto, los elementos de la matriz del sistema entre el plano objeto y el plano imagen serán:

$$(M) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0.1 & -1 \end{pmatrix} \begin{cases} a = \beta' = -1 \\ b = 0 \text{ por ser planos conjugados} \\ c = 1/f' = 0.1 \text{ cm}^{-1} \\ d = -1 \text{ ya que } \Delta = ad = 1 \end{cases}$$

2.- Los elementos de la matriz de transferencia de un sistema son:

$$(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que la primera superficie está en contacto con el aire, dar las características del sistema analizando cada uno de los elementos de la matriz. ¿Entre qué planos está delimitado el sistema representado por esta matriz?

El sistema representado por esta matriz está delimitado por dos planos conjugados puesto que el segundo elemento de la matriz es cero. Dichos planos conjugados son los planos principales pues el primer elemento de la matriz es 1. Además se trata de un sistema afocal ya que el tercer elemento de la matriz, $c = 1/f' = 0$. No se trata de un sistema sumergido puesto que el determinante de la matriz es $3/4$; si la primera cara está en contacto con el aire ($n = 1$), la última superficie del sistema está en contacto con el agua ($n' = 4/3$), así:

$$\Delta = ad = \frac{n}{n'} \Rightarrow 1 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{n'} \Rightarrow n' = \frac{4}{3}$$

3.- ¿Qué unidades tiene el determinante de la matriz de una lente delgada?

El determinante no tiene unidades puesto que, en cualquier caso, es el cociente entre dos índices de refracción.

4.- La matriz unidad, ¿puede representar a un sistema óptico? En caso afirmativo razonar a cual o a cuales, en caso negativo ¿por qué?

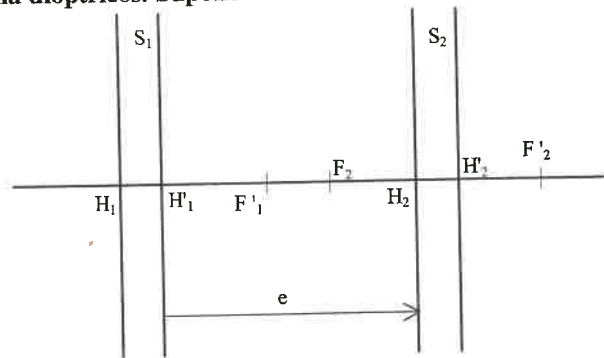
Si identificamos la matriz de un sistema óptico cualquiera con la matriz unidad encontramos que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $b = 0$, es decir, se trataría de una matriz entre planos conjugados.
- $a = 1$, se trataría pues de los planos principales.
- $c = 0$, se trataría de un sistema afocal.
- $d = 1$, los planos nodales coincidirían con los planos principales y estaríamos ante un sistema sumergido.

A la vista de esto, sí que podría representar a un sistema óptico que fuera afocal (telescopios), sumergido en un medio de índice cualquiera y la matriz representaría a ese sistema entre sus planos principales.

5.- Deducir matricialmente la potencia de un sistema formado por la asociación de dos sistemas dióptricos. Suponer los sistemas en aire.



Si tenemos el sistema de la figura, formado por la asociación de dos sistemas dióptricos separados una cierta distancia $e = H'_1 H_2$, y queremos obtener el sistema equivalente, podemos descomponer el trayecto en:

- desde H_1 hasta H'_1 (matriz entre planos principales del sistema S_1),
- desde H'_1 hasta H_2 (matriz translación de distancia e),
- desde H_2 hasta H'_2 (matriz entre planos principales del sistema S_2),

con lo que la matriz global del sistema entre H_1 y H'_2 será:

$$(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-eP_1 & -e \\ P_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(M) = \begin{pmatrix} 1-eP_1 & -e \\ P_2-eP_1P_2+P_1 & 1-eP_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Identificando el tercer elemento de la matriz que, como sabemos es el inverso de la focal y, por lo tanto la potencia del sistema equivalente:

$$c = \frac{1}{f'} = P = P_1 + P_2 - eP_1P_2$$

expresión para la potencia del sistema global que ya conocíamos del acoplamiento de dos sistemas.

6.- Conocida la matriz de un sistema óptico centrado entre sus caras extremas (S) y la matriz de dicho sistema entre dos planos P y P' arbitrarios, (M), calcular la posición de los planos antiprincipales y antinodales medidos a partir de las caras extremas.

Según la ecuación (7.31), la matriz de un sistema entre dos planos P y P' es:

$$\begin{pmatrix} S \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} M \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-cz' & az+b-z'(cz+d) \\ c & cz+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$$

si P y P' deben ser los planos antiprincipales o los antinodales, en los dos casos ambos son conjugados, entonces debe cumplirse la condición $M_2 = 0$, es decir:

$$az + b - z'(cz + d) = 0$$

En esas condiciones, el primer elemento de la matriz representa el aumento lateral y el cuarto elemento de la matriz representa el aumento angular, de donde deducimos que:

- Planos antiprincipales: $M_1 = -1 = a - cz'$
- Planos antinodales: $M_4 = -1 = cz + d$

Entonces los planos antiprincipales estarán a distancias z y z' de las caras extremas:

$$z' = \frac{a+1}{c} \quad z = \frac{-\Delta-d}{c}$$

Y los planos antinodales estarán a distancias z y z' de las caras extremas:

$$z = \frac{-d-1}{c} \quad z' = \frac{a+\Delta}{c}$$

Capítulo VIII

LIMITACIÓN DE LOS HACES DE RAYOS. DIAFRAGMAS

VIII.1.- INTRODUCCIÓN

En todos los capítulos que hemos visto hasta ahora, el tamaño de los haces que atraviesan los sistemas ópticos no ha sufrido ninguna limitación. Cuando ha sido necesario, hemos considerado las lentes y espejos suficientemente grandes para que los rayos pudieran atravesar el sistema. La única limitación empleada ha sido la utilización de la aproximación gaussiana. Este límite es bastante impreciso y depende del grado de precisión requerido.

En este capítulo consideraremos el tamaño finito de las lentes, espejos y demás elementos de un sistema óptico que determina que dichos elementos sólo sean capaces de transmitir una determinada fracción de la energía radiante que les llega. Por ejemplo, en el caso más simple de una fuente puntual, que emite luz en todas direcciones, una lente sólo es capaz de recoger la luz que viaja dentro del cono formado por la lente y la fuente (figura 8.1). En este caso, la montura de la lente determina si los rayos entrarán o no en el sistema óptico para formar la imagen. De esta limitación efectiva de los haces depende, en gran parte, la calidad de la imagen dada por un sistema óptico. En otras palabras, el tamaño de los distintos elementos de un sistema óptico determinará la cantidad de luz que va a parar a la imagen así como su distribución dentro de ella.

Aparte de la limitación inevitable, que conlleva el diámetro útil (que es función de los radios de curvatura de sus caras y de su espesor) de las lentes, en los sistemas ópticos se suelen colocar unos elementos llamados diafragmas que no son más que chapas opacas con orificios, en general circulares, cuya misión es eliminar luces parásitas, o recortar de una determinada forma el haz luminoso para corregir aberra-

ciones o defectos en la imagen, o actuar directamente sobre su distribución de luz. Si el diafragma tiene un diámetro variable, entonces se le denomina diafragma iris (por ejemplo el que llevan las cámaras fotográficas). Como las monturas de las lentes también recortan el tamaño del haz, desde este punto de vista, se define como **diafragma** todo elemento de un sistema óptico que no permite el paso de luz, ya sea la montura de una lente o un diafragma propiamente dicho.

De todos los elementos de un sistema óptico, hay dos que tienen nombre propio y que ejercen funciones específicas dentro del sistema: el **diafragma de apertura** y el **diafragma de campo**.

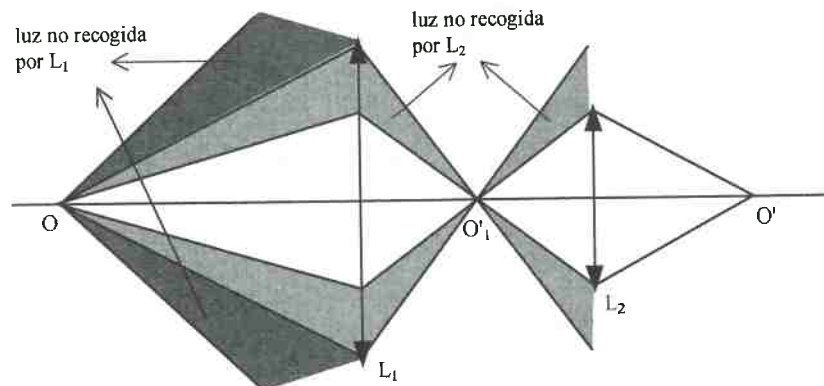


FIGURA 8.1. Limitación del haz luminoso por los distintos elementos.

VIII.2.- DIAFRAGMA DE APERTURA

Recibe el nombre de Diafragma de Apertura (DA) en un sistema óptico, aquel elemento real del sistema que limita la extensión del haz que atraviesa el sistema procedente de un punto objeto situado en el eje óptico. En otras palabras, es el elemento del sistema que determina la cantidad de luz que pasa a través del mismo y que, por lo tanto, va a llegar a la imagen.

Sobre esta definición conviene resaltar varias cosas. En primer lugar, el DA es un elemento real del sistema, ya sea lente o diafragma. En segundo lugar, se define en función del objeto, luego un mismo sistema óptico puede presentar distintos DA si cambia la posición del objeto. Por último, el DA se define para puntos del eje, luego, en principio, no importa el tamaño del objeto sino solamente su posición.

En el sistema representado en la fig. 8.1 el elemento real que limita más el haz es la segunda lente, por lo que en este caso esta lente (L_2) será el DA. Para otra posición del objeto, como la representada en la figura 8.2, aunque el sistema sigue siendo el mismo, el elemento real que limita más el haz sería ahora la primera lente (L_1) que por tanto actuaría en este caso como DA. Para esta segunda posición del objeto, la lente L_2 sería capaz de dejar pasar más cantidad de luz de la que realmente le llega y la imagen resultante será mucho más brillante.

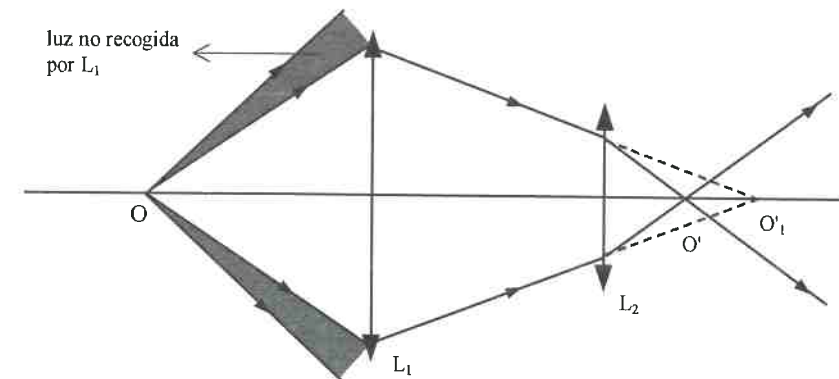


FIGURA 8.2. Limitación del haz luminoso para otra posición del objeto.

Veremos ahora algunos ejemplos de sistemas ópticos con la determinación en cada caso del DA.

a) En la figura 8.3 se tiene un sistema que consiste en una única lente delgada. En este sistema simple, el haz que llega procedente del punto objeto del eje no sufre otra limitación más que la que efectúa la propia montura de la lente. Por lo tanto, en este caso, la lente será DA.

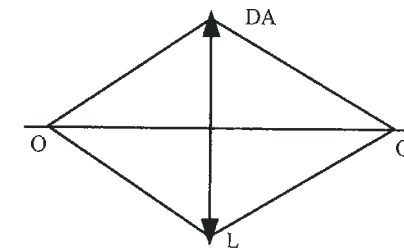


FIGURA 8.3. DA en un sistema de una sola lente.

b) En la figura 8.4 tenemos un sistema formado por una lente delgada y dos diafragmas situados detrás de ella. El sistema trabaja en este caso con objeto en el infinito, luego el haz que llega al sistema procedente del punto objeto del eje es un haz colimado paralelo al eje óptico. La primera limitación del haz lo efectúa la propia lente, sin embargo, como se puede ver en la figura, no toda la luz que pasa por la lente, pasa después por los diafragmas que existen a continuación. D_1 es el elemento que más recorta el haz. En este caso, sólo la luz que pasa por D_1 lo hace también por los otros elementos y llega a la imagen, por lo que D_1 es aquí DA.

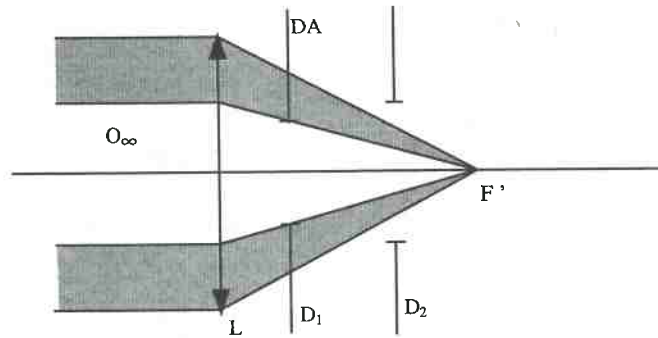


FIGURA 8.4. Determinación del DA en un sistema con una lente y dos diafragmas.

c) La figura 8.5 representa un telescopio construido con un objetivo L_1 , un ocular L_2 , dos diafragmas D_1 y D_2 y el ojo observando detrás del ocular con un diafragma propio D_3 que no es más que el iris del ojo. En este sistema, que también trabaja con objeto en infinito, el objetivo L_1 provoca una primera limitación del haz. De estos rayos que atraviesan L_1 , los más externos son recortados por el diafragma D_1 por lo que estos rayos no llegarían al ocular. El diafragma D_2 no recorta en absoluto el haz que le llega ya que está en una posición en la que toda la luz está concentrada en un punto, la lente L_2 tampoco recorta nada de la luz que le llega. El iris del ojo, D_3 , es el que produce una mayor limitación de forma que únicamente los rayos de la zona central que atraviesan D_3 también pasan por el resto de elementos del sistema, por lo que, en este caso es D_3 el DA.

Como ya hemos dicho anteriormente, el DA de un sistema óptico no es único, sino que depende de la posición del objeto. Para hacer hincapié en este hecho, consideremos la figura 8.6 que representa un sistema óptico compuesto por una lente y dos diafragmas y el objeto en tres posiciones distintas. Según se deduce de la figura, dependiendo de la posición del objeto, el DA es distinto también.

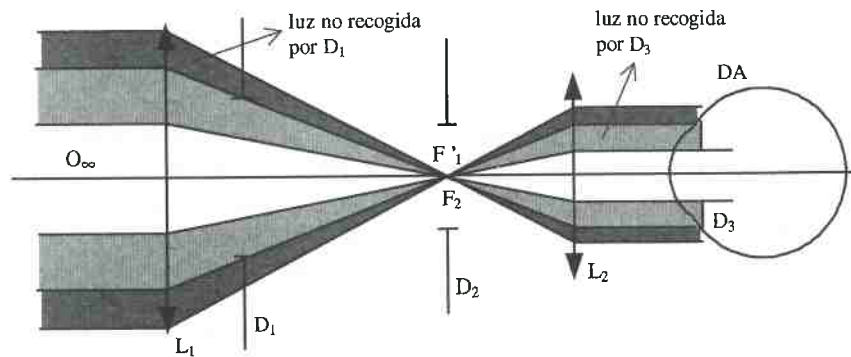


FIGURA 8.5. DA en un sistema telescópico con observador.

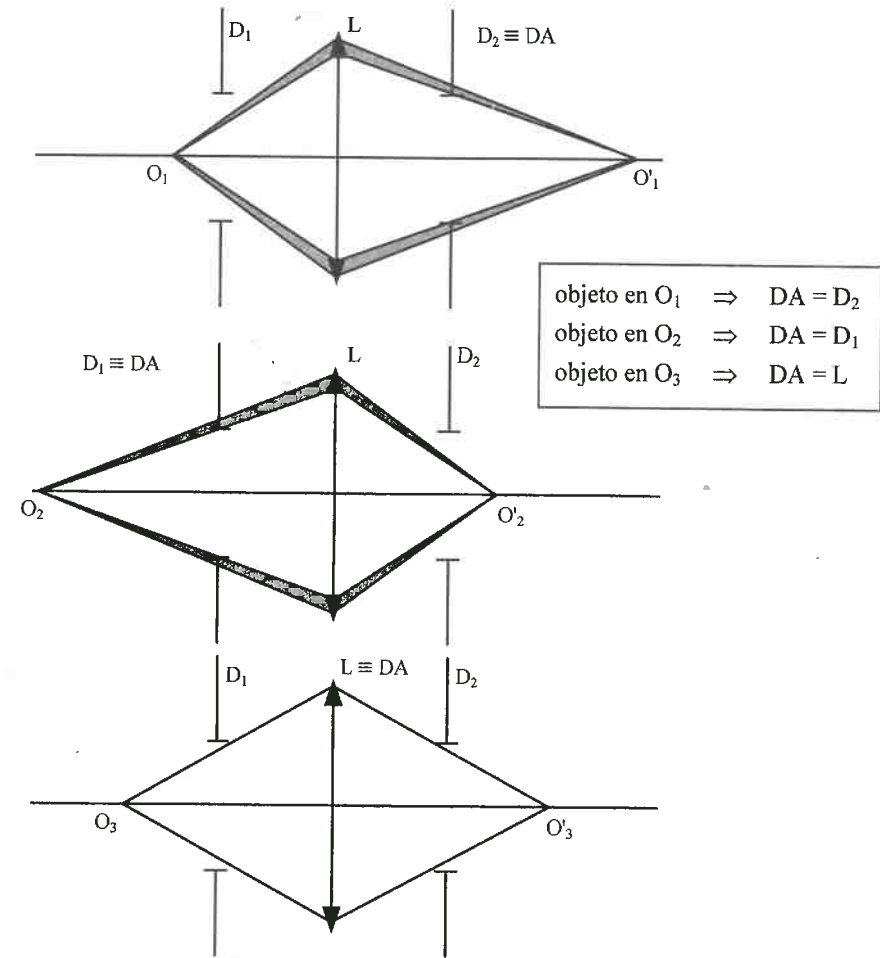


FIGURA 8.6. Variación del DA con la posición del objeto.

VIII.2.1.- Pupilas de entrada y de salida

La imagen del DA en el espacio objeto se denomina pupila de entrada (PE). Se obtiene hallando la imagen del DA a través de los elementos que tiene delante es decir, hallando la antiimagen del DA a través de los elementos que le preceden. La pupila de entrada de un sistema es la imagen del diafragma de apertura como se ve desde el punto axial del objeto a través de aquellos elementos que lo preceden.

Análogamente, se denomina pupila de salida (PS) a la imagen del DA en el espacio imagen. Se obtiene hallando la imagen del DA a través de los elementos que tiene detrás. La pupila de salida es la imagen del diafragma de apertura tal y como se ve mirando el sistema desde un punto axial en el plano imagen.

De las definiciones de pupila de entrada y de salida se deduce que mientras que la pupila de entrada siempre estará en el espacio objeto, la pupila de salida siempre lo estará en el imagen, pudiendo el DA estar en cualquier sitio. También se deduce que mientras que el DA siempre es un elemento real del sistema, las pupilas pueden ser reales o ficticias. Si son reales (alguna de ellas o las dos) es porque, necesariamente, coinciden con el DA. Por su propia definición, entre la pupila de entrada y de salida hay una relación de conjugación a través de todo el sistema óptico; es decir la pupila de salida es la imagen de la pupila de entrada a través de todo el sistema óptico. Por su parte, entre las pupilas y el DA hay una relación de conjugación que puede ser total (a través de todo el sistema) o parcial (a través de una parte del mismo). El tamaño del haz efectivo que entra en el sistema queda pues determinado por la P.E., mientras que la P.S. determina el tamaño del haz que emerge del sistema. El conocimiento de estos dos elementos simplifica enormemente el estudio de la limitación de haces en sistemas complicados.

Veamos ahora cual sería la pupila de entrada y de salida en los distintos ejemplos que hemos tratado anteriormente. En el primer caso (sistema de una sola lente, fig. 8.3), la propia lente es el DA y también pupila de entrada y de salida puesto que no existe ningún elemento más en el sistema. En el caso de la figura 8.4 donde el primer diafragma es el DA, dicho diafragma será también pupila de salida puesto que no hay ningún elemento por detrás de él que forme imágenes. La pupila de entrada sería la antiimagen de dicho diafragma a través de la lente que tiene delante. Por último, en el sistema telescópico (fig. 8.5), donde el iris del ojo actúa como DA, también sería pupila de salida puesto que no hay ningún elemento formador de imágenes detrás. En este caso, la pupila de entrada sería la antiimagen de D_3 a través de las dos lentes que tiene delante.

VIII.2.2.- Norma práctica para el cálculo de las pupilas

Para calcular en un sistema óptico el diafragma de apertura y las pupilas se pueden seguir dos procedimientos. El primero de ellos consiste en trazar el haz de rayos que viene del punto objeto del eje y ver cual de todos los elementos recorta más el haz que pasa (esto es lo que se ha hecho en los ejemplos anteriores). Dicho elemento será el DA y a partir de él se calculan las pupilas de entrada y de salida hallando las imágenes correspondientes. Este método puede resultar a veces complicado si se tienen sistemas ópticos muy complejos.

El segundo procedimiento consiste en calcular primero la pupila de entrada (o de salida). Para ello han de seguirse los siguientes pasos. Primero se pasan todos los elementos al espacio objeto (todas las lentes y diafragmas). Después, de todos los elementos que están en el espacio objeto (ya sean reales o ficticios) se determina cual es el que subtiende el ángulo más pequeño desde el pie del objeto, dicho elemento será la pupila de entrada. Una vez determinada la pupila de entrada, el elemento real del sistema que corresponde a la pupila de entrada será el DA y a partir de él se calcula la pupila de salida. Si se desea trabajar en el espacio imagen, todos

los elementos del sistema se pasan al espacio imagen y, desde el pie de la imagen, se observa cual de ellos subtiende el ángulo más pequeño, dicho elemento será la pupila de salida, el elemento real del sistema que corresponde a la pupila de salida será el DA y a partir de él se calcula la pupila de entrada. Si el sistema tiene dos o más lentes, también se puede hacer el mismo razonamiento en cualquiera de los espacios intermedios en cuyo caso se deberá trabajar, de manera similar, pero desde la imagen intermedia correspondiente.

En la figura 8.7 tenemos un ejemplo. Se trata de un sistema con 5 elementos, dos lentes y tres diafragmas y un punto objeto O . Para trabajar en el espacio objeto (fig. 8.7a), el primer paso consiste en pasar todos los elementos a dicho espacio, dos de ellos ya lo están, L_1 y D_1 . La imagen de D_2 en el espacio objeto (antiimagen de D_2 a través de L_1) es D'_2 , la imagen de L_2 en el espacio objeto es L'_2 y la imagen de D_3 en el espacio objeto (antiimagen de D_3 a través de L_1 y L_2) es D'_3 . Ahora, de todos los elementos que están en el espacio objeto (D_1 , L_1 , D'_2 , L'_2 y D'_3) se selecciona el que subtiende el ángulo más pequeño desde el objeto O . En este caso es D'_2 , luego este elemento es la pupila de entrada. Una vez determinada la pupila de entrada, el elemento real del sistema que corresponde a la pupila de entrada será el DA. Como D'_2 es la imagen de D_2 , D_2 será el DA y la pupila de salida será la imagen del DA en el espacio imagen, es decir, será la imagen de D_2 a través de L_2 . La fig. 8.7b corresponde al caso de trabajar en el espacio imagen donde se determina directamente la pupila de salida.

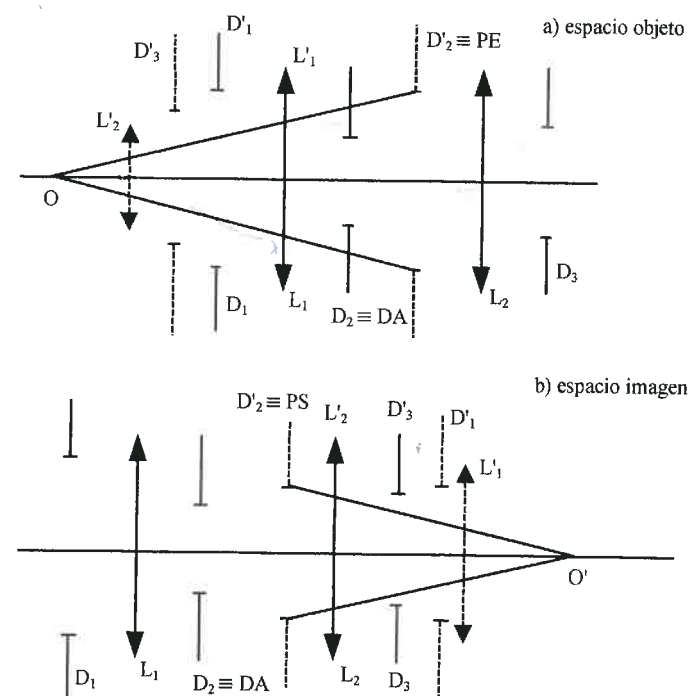


FIGURA 8.7. Determinación práctica de la pupila de entrada o de salida.

A continuación vamos a definir algunas magnitudes que se utilizan en un sistema óptico relacionadas con la apertura.

- Apertura relativa.

Se define como el cociente entre el diámetro de la pupila de entrada y la focal imagen del sistema, cuando el objeto está en el infinito:

$$AR = \Phi_{PE} / f'$$

- Apertura numérica.

Es una magnitud que se define para objetos a distancia finita y se usa casi exclusivamente en objetivos de microscopio. Es el producto del índice de refracción del medio anterior al sistema por el seno del ángulo que forma con el eje un rayo que parte del pie del objeto y pasa por el borde la pupila de entrada:

$$AN = n \sin \sigma$$

- Número de diafragma o número f.

Se emplea a veces en lugar de la A.R. y es el inverso de la misma.

$$N = 1/AR = f' / \Phi_{PE}$$

Este número se emplea en instrumentos fotográficos con notaciones diversas: N, 1:N, f/N. Así por ejemplo, una lente de 25 mm de apertura (diámetro de la pupila) y 50 mm de focal tiene un número f de 2 y se designa generalmente por f/2 ó 1:2. De la definición de número f se deduce que cuanto más pequeño es, más grande es el diámetro de la pupila, lo cual quiere decir que llega más luz al plano imagen. En algunos instrumentos de precisión donde es necesario tener en cuenta las pérdidas de luz por reflexión o absorción en la lente, se emplea el número T que no es más que un número f modificado y que es el valor que debería tener una lente para transmitir una cantidad de luz correspondiente a un valor concreto de número f. En otras palabras, que la lente tiene un valor concreto de número f, $N = f' / \Phi$ pero hay pérdidas que hacen que se comporte realmente con f' / Φ' , siendo $\Phi' < \Phi$. El número T es f' / Φ' .

- Pupila espacial.

Cuando en un sistema óptico se presentan dos posibilidades de DA, es decir cuando existen dos elementos que subtienden el mismo ángulo desde el pie del objeto y además ese ángulo es el más pequeño, se dice entonces que el sistema presenta pupila espacial. En este caso, cualquiera de los dos elementos puede ser considerado como DA ya que ambos limitan de la misma forma el haz transmitido por el sistema. Es una situación que es conveniente evitar en el caso de sistemas ópticos reales puesto que, como veremos más tarde

conllevaría la obtención de un campo de iluminación plena nulo y por tanto imágenes con muy escasa iluminación.

- Emergencia pupilar.

Se llama emergencia de la pupila de entrada a la distancia entre la primera superficie del sistema y la pupila de entrada. Análogamente, se denomina emergencia de la pupila de salida a la distancia que existe entre la última superficie del sistema y la pupila de salida. Estas distancias son importantes a la hora de acoplar distintos sistemas ópticos por lo que deben ser controladas a la hora de diseñar el instrumento en cuestión. Esto es debido a que el acoplamiento entre dos sistemas se efectúa correctamente cuando la pupila de salida del primero coincide con la pupila de entrada del segundo. En los instrumentos de visión directa, donde el segundo sistema es el ojo del observador, esta operación se realiza instintivamente de forma que si este acoplamiento no es bueno la observación resulta incómoda. En este sentido, a la hora de diseñar un instrumento hay que tener siempre en cuenta el uso que se le va a dar. La pupila del ojo tiene un diámetro que puede oscilar entre 2 y 8 mm dependiendo del nivel de iluminación. Si el instrumento está diseñado para su empleo nocturno debe tener una pupila de salida de al menos 8 mm para que al observador le llegue suficiente luz. Un ejemplo de estos instrumentos son los anteojos de visión nocturna. Por el contrario, unos prismáticos para uso diurno, basta con que tengan una pupila de salida de 3 ó 4 mm, ya que si fuera más grande, el observador no podría aprovechar toda la luz que sale del instrumento. Un instrumento en el cual es particularmente difícil realizar el acoplamiento con el ojo es una mira telescópica de fusil. Su pupila de salida está muy alejada de la última superficie (tiene gran emergencia pupilar) para evitar que el ojo sufra algún daño durante el retroceso.

VIII.3.- DIAFRAGMA DE CAMPO

Se llama Diafragma de Campo (DC) aquel elemento real del sistema que limita el tamaño del objeto que se puede ver, o cuya imagen se puede formar, con un sistema óptico.

Es importante señalar que el DA y el DC no pueden coincidir en un mismo elemento, es decir, que si un elemento del sistema es DA no será DC y viceversa. También es importante señalar que el DC no sólo afecta al tamaño del objeto que se puede ver sino también a la distribución de luz dentro de esa imagen. La figura 8.8 ilustra este punto.

El sistema está constituido por un diafragma y una lente, pudiéndose apreciar en la figura los planos objeto e imagen. El diafragma actúa como DA y la lente por tanto como DC. En el caso (a) los rayos procedentes del punto axial O que son recogidos por el DA van a parar al punto imagen O'. Lo mismo ocurre para los rayos procedentes del punto T situado fuera de eje. En ningún caso la lente intercepta el

cono de rayos y por tanto, en el plano imagen $O'T'$ aparecerá uniformemente iluminado. Sin embargo conforme nos alejamos del eje la situación varía como se puede observar en la fig. 8.8 b. La luz procedente del punto U ya no llega en su totalidad al punto imagen correspondiente y por lo tanto la iluminación dejará de ser uniforme. A esta disminución en el tamaño de los haces se le denomina **viñeteado**. Finalmente el sistema es incapaz de formar la imagen del punto V.

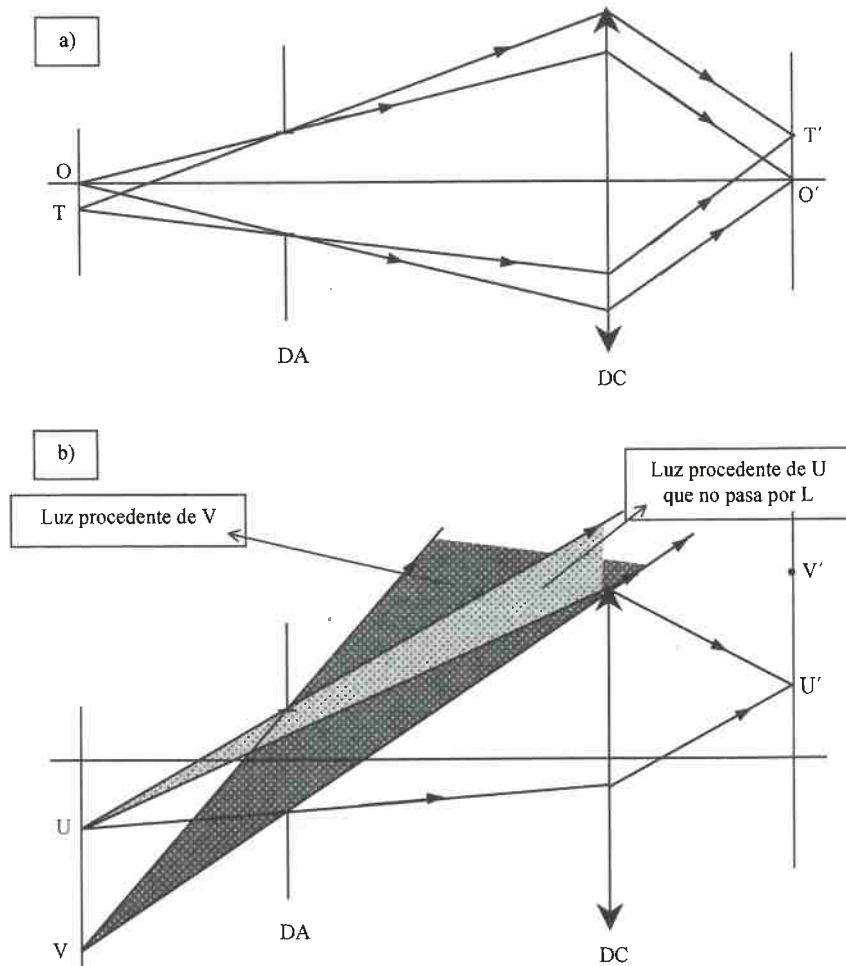


FIGURA 8.8. DA y DC en un sistema compuesto por un diafragma y una lente.

VIII.3.1.- Lucarnas de entrada y de salida

Análogamente a como se han definido las pupilas de entrada y de salida para el DA, se definen ahora las lucarnas de entrada y de salida en relación al DC. Así, se llama **lucarna de entrada (LE)** a la imagen del DC en el espacio objeto. Se obtiene

hallando la antiimagen del DC a través de los elementos que tiene delante. Igualmente se denomina **lucarna de salida (LS)** a la imagen del DC en el espacio imagen y se obtiene hallando la imagen del DC a través de los elementos que tiene detrás.

En el caso de un sistema óptico formado por sólo dos elementos, evidentemente el DC será el que no actúe como DA. Veamos ahora cómo determinar el DC en un sistema más complicado y cómo éste limita el tamaño del objeto que se puede ver y la iluminación del mismo. Supongamos que tenemos un sistema óptico donde D'_1 , D'_2 y D'_3 son las imágenes de los diferentes elementos en el espacio objeto, y que están distribuidas tal y como se muestra en la fig. 8.9. Si el objeto está situado en el punto O, de la figura se deduce que D'_1 es la PE puesto que es el que limita más el haz que proviene del punto objeto del eje.

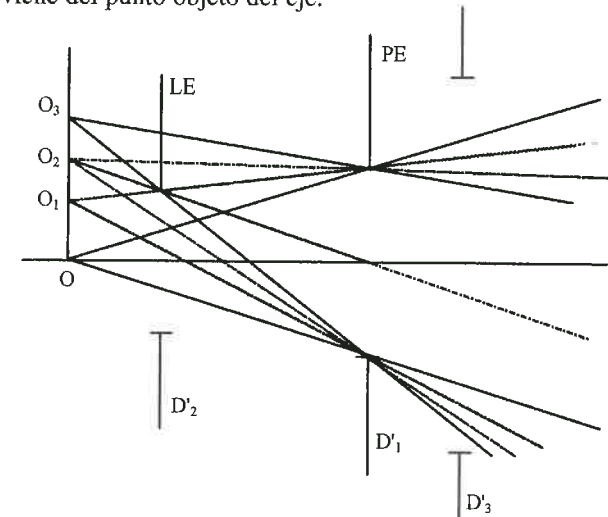


FIGURA 8.9. Determinación del Diafragma de Campo.

Si ahora nos salimos del eje y nos desplazamos a lo largo del plano objeto, encontramos un punto O_1 tal que en el intervalo entre O y O_1 todos los haces delimitados por la PE (y por tanto por el DA), pasan íntegramente a través del sistema y llegan a la imagen. A partir de O_1 los haces delimitados por la PE vienen recortados (o viñeteados) por D'_2 (o lo que es lo mismo, por su imagen D_2), de forma que a partir de O_1 este elemento recorta cada vez un poco más de luz; así para el punto O_2 solamente la mitad del haz que pasaría por la PE pasa también por D'_2 y para el punto O_3 sólo hay un rayo que atraviese el sistema. A partir de O_3 no pasa ningún rayo luego con este sistema óptico no se pueden formar imágenes de objetos más grandes que OO_3 y además, la imagen de este objeto máximo tendrá una distribución de luz no uniforme, es decir, que en la imagen aparecerá, a partir del punto imagen de O_1 , una disminución de luz. Este elemento D'_2 que determina qué tamaño de objeto se puede tratar con ese sistema es la LE y elemento real correspondiente el DC.

VIII.3.2.- Efecto de las lucarnas

Si se proyecta desde cada uno de los puntos del objeto, la PE sobre la LE podemos ver nuevamente el efecto de las lucarnas y el viñeteado del haz debido al DC (figuras 8.10 y 8.11).

Cuando se hace esta proyección, vemos que, para todos los puntos situados entre O y O_1 , la pupila de entrada se llena de luz que va a parar a la imagen. Para los puntos situados entre O_1 y O_3 el sistema no actúa con pupila circular ya que el área común entre la LE y la proyección de la pupila ya no es circular (elíptica si se tiene en cuenta el factor de oblicuidad), se dice entonces que el sistema actúa con pupila de ojo de gato. Para el punto O_3 la pupila y la lucarna aparecen como tangentes exteriores y sólo pasa el rayo correspondiente al punto de contacto.

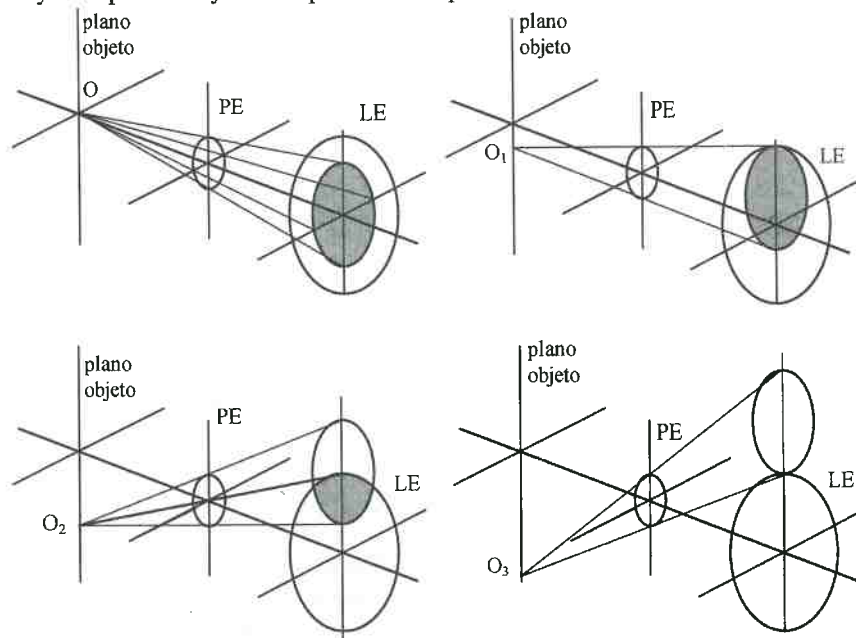


FIGURA 8.10. Proyección de la pupila de entrada sobre la lucarna de entrada.

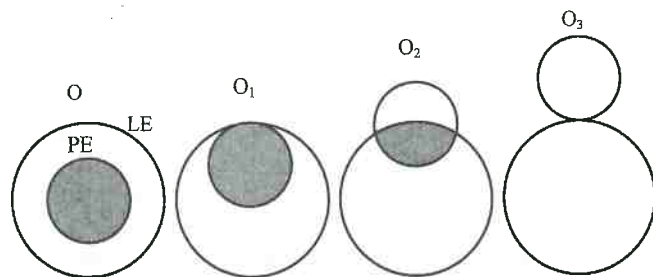


FIGURA 8.11. Proyección de la PE sobre la LE. Vista frontal.

Es evidente que en este sistema la luz que llega a la imagen no está uniformemente distribuida y que a partir del punto O_1 la iluminación de la imagen va disminuyendo hasta llegar al punto O_3 que determina el tamaño máximo. Con estas condiciones, si en el plano imagen colocásemos una placa fotográfica, la energía que recibiría dicha placa tendría una distribución como la mostrada en la figura 8.12 con lo que la fotografía presentaría una disminución de densidad en los bordes. Si en vez de una placa fotográfica pusiéramos el ojo veríamos una imagen cuya luminosidad decrece hacia los bordes.

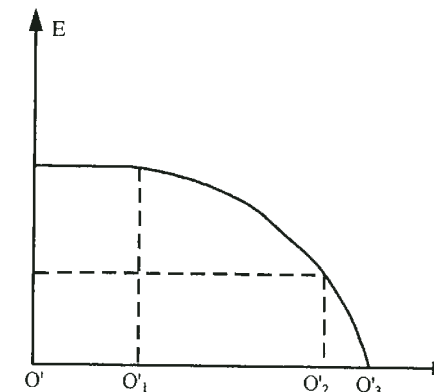


FIGURA 8.12. Distribución de energía en la imagen debido al viñeteado.

VIII.3.3.- Clasificación de los campos

Podemos dividir el campo objeto en tres zonas atendiendo a lo que hemos comentado anteriormente, OO_1 denominado campo de iluminación plena ya que los haces que parten de puntos situados en esta zona del objeto transportan todos el mismo flujo luminoso (salvo el factor de inclinación de la pupila). Dado que para el punto O_2 pasa sólo la mitad del haz al OO_2 se le denomina campo de iluminación media. Por último, el campo de iluminación límite será OO_3 .

Para determinar el campo de iluminación plena se traza la recta que une el borde de la PE con el borde del mismo lado de la LE y se prolonga hasta cortar al plano objeto; el campo de iluminación media se determina trazando la recta que une el borde de la LE con el centro de la PE y, por último, el campo límite se determina uniendo el borde de la PE con el borde opuesto de la LE (Fig. 8.13).

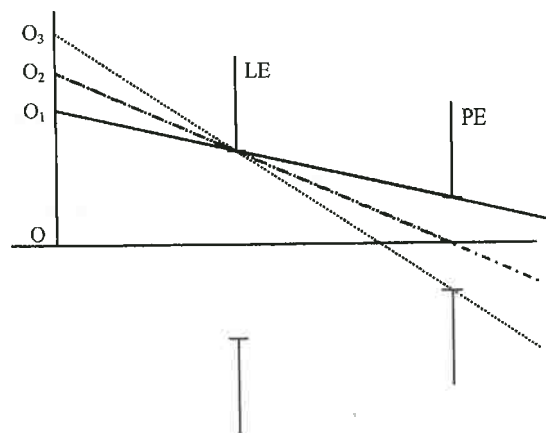


FIGURA 8.13. Determinación práctica de los campos.

Esta norma práctica para determinar los campos es válida en la mayoría de los casos. Sin embargo, cuando el objeto está situado entre la PE y la LE, al unir los bordes del mismo lado de la PE y la LE se obtiene el campo límite y al unir los bordes opuestos de dichos elementos se obtiene el campo de iluminación plena. En cualquier caso lo que siempre debe ocurrir es que $OO_1 < OO_2 < OO_3$. Esta misma definición de campos se puede hacer en la imagen, así tendremos un campo de iluminación plena imagen $O'O'_1$, un campo medio $O'O'_2$ y un campo límite $O'O'_3$ donde O'_1 , O'_2 y O'_3 son las imágenes de O_1 , O_2 y O_3 respectivamente. Los campos objeto e imagen están relacionados mediante el aumento lateral del sistema para esa pareja de planos conjugados:

$$\text{campos imagen} = \text{campos objeto} \times \beta'$$

Cuando el objeto está en el infinito se utiliza el campo angular definido como el doble del ángulo que forman cada una de las rectas citadas anteriormente con el eje óptico. Si los campos objeto e imagen son ambos angulares (como por ejemplo en anteojos, telescopios,...) el campo objeto se denomina campo real mientras que el campo imagen se denomina campo aparente.

Si en un sistema existen varios elementos que pueden ser DC, en principio actúa como tal aquel que proporciona un campo de iluminación plena más pequeño. Sin embargo, es posible que este elemento no proporcione el campo medio o límite más pequeño, por lo que habrá que considerar cada caso de manera particular.

VIII.4.- LIMITACIÓN CORRECTA DEL CAMPO EN LOS INSTRUMENTOS

De todo lo que acabamos de ver se deduce que sea primordial la limitación correcta del campo en un instrumento, buscando conseguir que todo él sea de

iluminación plena para que la imagen esté uniformemente iluminada. Para ello, es necesario que la lucarna de entrada esté situada sobre el objeto (y, por tanto, la lucarna de salida en la imagen) por lo que el diafragma de campo debe estar situado en el objeto, en la imagen final como se hace en las cámaras fotográficas, o en cualquiera de las imágenes intermedias que se formen a través del sistema como se hace en microscopios y telescopios. Como ejemplo, la figura 8.14 muestra el esquema de un anteojo astronómico que tiene la pupila de entrada en el objetivo (lente L_1) y el diafragma de campo colocado en la imagen intermedia.

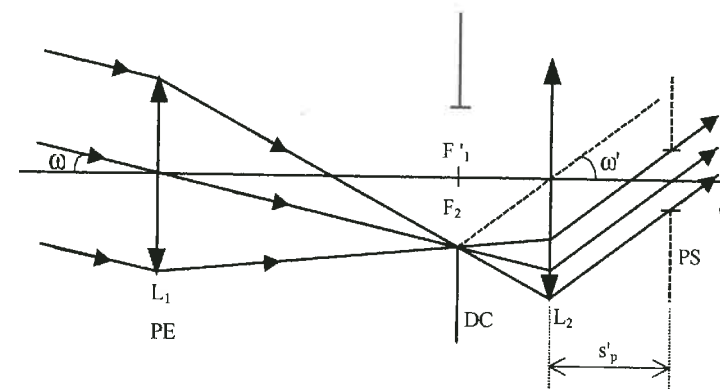


FIGURA 8.14. Limitación de los rayos a través de un anteojo astronómico.

En este sistema, por la PE pueden pasar haces con todas las inclinaciones posibles. Estos haces focalizarán en el plano focal imagen del objetivo y en él se coloca el DC con lo que la LE estará en el infinito, sobre el objeto, y la LS estará también en el infinito, sobre la imagen. La PS es la imagen de la PE a través del ocular (lente L_2) de forma que todos los haces que entren por la PE saldrán por la PS. Los campos son angulares, siendo 2ω el campo real y $2\omega'$ el campo aparente. La emergencia de la PS es s'_p y si ponemos el ojo justo en la PS veríamos todo el campo de una vez. Si por el contrario, situamos el ojo en un punto como Q, habría que desplazarlo normalmente al eje y se verían sombras debido a que en él no penetran los haces completos.

Otro sistema pero trabajando con el objeto a distancia finita se muestra en la figura 8.15. El DA en este caso también es la primera lente que será asimismo PE. El DC es el diafragma situado en la posición de la imagen intermedia, por lo que la LE está en el plano objeto y la LS está en el plano imagen. La PS es la imagen del DA a través de la segunda lente y también está representada. La figura muestra cómo el haz procedente de un punto del objeto atraviesa el sistema y llega hasta la imagen final, ilustrando el efecto de pupilas y lucarnas en el mismo.

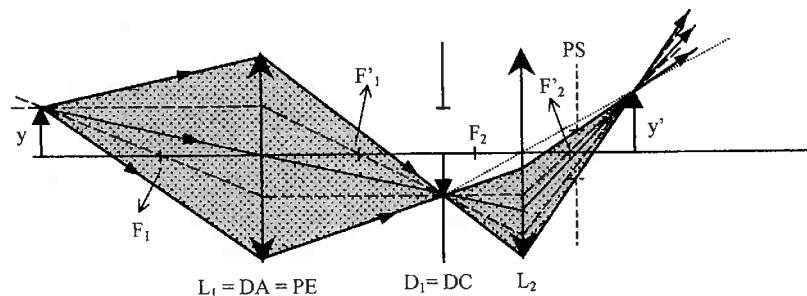


FIGURA 8.15. Limitación de los haces en un sistema determinado.

El estudio efectuado en este tema es completamente general ya que no se han hecho aproximaciones y por tanto las definiciones dadas son válidas en cualquier sistema. Sin embargo el cálculo de la posición y tamaño de las pupilas y lucarnas se hace mediante la Óptica paraxial. Si las calculamos teniendo en cuenta que el sistema no es perfecto, obtendremos las pupilas y lucarnas con la misma precisión que tengamos en los cálculos. Otro problema que no se ha tenido en cuenta es el de la difracción. Los bordes de los diafragmas van a actuar sobre la calidad de la imagen ya que introducen efectos difractivos, que serán más importante conforme el tamaño de las aberturas sea menor.

CUESTIONES

1.- En un sistema óptico, ¿es posible situar el DA en el plano imagen?

No, porque en ese caso, el diafragma de apertura sería también la pupila de salida que estaría sobre la imagen, el ángulo subtendido desde el pie de la imagen por la pupila de salida sería de 90° y todos los demás elementos del espacio imagen subtenderían un ángulo menor, lo cual entra en contradicción con la propia definición de diafragma de apertura.

2.- En un sistema afocal formado por dos lentes convergentes, ¿cuando es conveniente situar el DC en el foco imagen de la primera lente? ¿Por qué?

Es conveniente situar el diafragma de campo en el foco imagen de la primera lente (que por ser el sistema afocal coincidirá con el foco objeto de la segunda lente) cuando el objeto esté situado en el infinito. Así, en ese caso, la imagen intermedia estará sobre el diafragma de campo y se evitará el viñeteado de los haces.

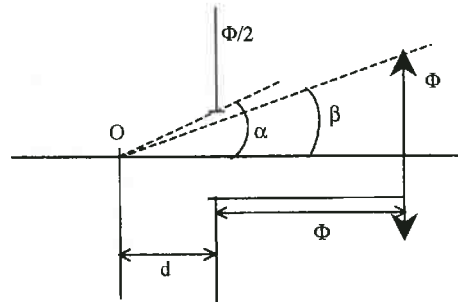
3.- En un sistema óptico, ¿cómo se puede conseguir que el campo visual esté siempre totalmente iluminado?, ¿y que no lo esté nunca?

Para conseguir que el campo visual esté siempre totalmente iluminado, hay que evitar el viñeteado y esto se consigue haciendo que la lucarna de entrada esté situada sobre el objeto. Para ello, el diafragma de campo debe estar en el objeto, en alguna de las imágenes intermedias o en la imagen final. Para que el campo visual nunca esté totalmente iluminado hay que conseguir que el campo de plena iluminación sea nulo. Esto se consigue haciendo que el sistema presente pupila espacial, es decir, que haya dos o más elementos del sistema que puedan actuar como diafragmas de apertura. En esas condiciones sólo existe un punto del campo (el situado en el eje óptico) para el cual pasan todos los rayos a través del sistema óptico, cualquier otro punto presentará una disminución de luz en la imagen.

4.- La cantidad de luz en la imagen, ¿está condicionada por el DA o por el DC?

La cantidad de luz en la imagen está condicionada por el diafragma de apertura que es el que determina la máxima cantidad de luz que puede llegar a un punto imagen. El diafragma de campo condiciona la distribución de luz dentro de la imagen.

5.- Tenemos un sistema óptico constituido por un diafragma de diámetro $\Phi/2$ situado delante de una lente de diámetro Φ . La separación entre ambos elementos es Φ y el sistema opera con objetos reales situados delante del diafragma. ¿Cuándo se puede afirmar que la lente es el DA?



Según se ve en la figura, si el objeto O está a una distancia "d" del diafragma, los ángulos subtendidos por el diafragma y la lente desde el pie del objeto serán, respectivamente α y β cuyos valores son:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Phi/4}{d} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\Phi/2}{d + \Phi}$$

Para que la lente sea el diafragma de apertura $\beta < \alpha$, es decir:

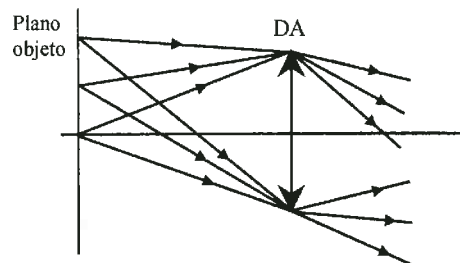
$$\frac{\Phi/2}{d + \Phi} < \frac{\Phi/4}{d} \Rightarrow \frac{\Phi}{2(d + \Phi)} < \frac{\Phi}{4d} \Rightarrow 4d < 2(d + \Phi)$$

$$d < \Phi$$

Es decir, que la distancia desde el objeto al diafragma debe ser menor que la distancia entre el diafragma y la lente o, en otras palabras, la distancia del objeto a la lente debe ser menor que dos veces el diámetro de la lente. En esas condiciones, la lente actuará como diafragma de apertura.

6.- En un sistema formado por una sola lente, ¿cual es el DA?, ¿y el DC?

En un sistema formado por una sola lente, el diafragma de apertura es la propia lente y no existe diafragma de campo ya que no hay ningún elemento que limite el campo en la formación de imágenes.



Como se puede ver en el esquema, para el punto objeto del eje, el elemento que limita la cantidad de luz que pasa a través del sistema es la propia lente ya que no

existe ningún otro elemento, luego la lente actúa como diafragma de apertura. Para puntos fuera del eje no hay ningún elemento que recorte el haz que pasa a través del diafragma de apertura, luego en este caso no hay diafragma de campo.

7.- ¿Cuál es la relación existente entre el campo de iluminación plena objeto e imagen?

El aumento lateral del sistema para esa pareja de planos conjugados. En efecto el aumento lateral es:

$$\beta' = \frac{\text{tamaño imagen}}{\text{tamaño objeto}}$$

El campo de iluminación plena objeto no es más que un objeto de tamaño determinado y el campo de iluminación plena imagen no es más que una imagen de tamaño determinado, luego la relación entre ambos será:

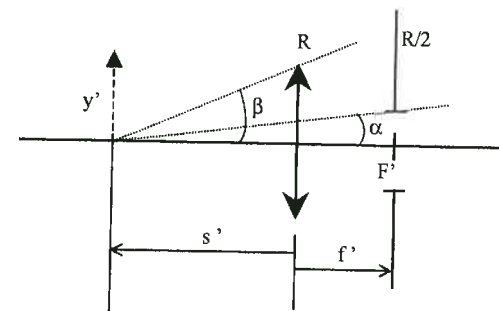
$$\beta' = \frac{\text{campo imagen}}{\text{campo objeto}}$$

Esta relación se cumple también para los campos de iluminación media y límite.

8.- ¿Por qué en una cámara fotográfica, la película no puede ser el DA?

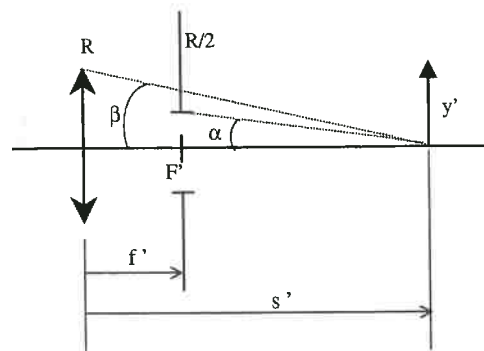
Como hemos dicho en la cuestión número 1, el diafragma de apertura no puede estar situado en el plano imagen de un sistema óptico. En el caso de la cámara fotográfica, la película es donde se forma la imagen del sistema (el objetivo fotográfico), por lo tanto, la película no puede ser el diafragma de apertura.

9.- Dado un sistema óptico formado por una lente convergente de radio R y focal f' y un diafragma de radio $R/2$ situado en F' , razonar para qué posiciones del objeto (real) L es DA y para qué posiciones D es DA.



En una lente convergente que trabaja con objetos reales se pueden dar dos casos: que la imagen sea real (cuando el objeto está entre el infinito y el foco objeto, la imagen está entre el foco imagen y el infinito) o que la imagen sea virtual (cuando el objeto está entre el foco objeto y la lente, la imagen es virtual).

En el caso de que la imagen sea virtual, como se puede observar en la figura el diafragma siem-



pre actúa como diafragma de apertura, porque es más pequeño que la lente y, además está más alejado de la imagen que ella.

En el caso de que la imagen sea real, los ángulos subtendidos por la lente y el diafragma desde el pie de la imagen serán:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R/2}{s' - f'} = \frac{R}{2(s' - f')}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{R}{s'}$$

El diafragma será diafragma de apertura cuando $\alpha < \beta$, es decir, cuando:

$$\frac{R}{2(s' - f')} < \frac{R}{s'} \Rightarrow 2(s' - f') > s' \Rightarrow s' > 2f'$$

Y para que se cumpla esta condición, es necesario que el objeto esté situado entre el foco objeto y una distancia de la lente igual a $2f$.

Resumiendo ambos casos, deducimos que el diafragma será diafragma de apertura cuando el objeto esté situado a una distancia de la lente entre 0 y $2f$ (siempre por delante de ella puesto que el objeto es real).

Capítulo IX

ABERRACIONES MONOCROMÁTICAS

IX.1.- INTRODUCCIÓN

En los capítulos precedentes hemos estudiado sistemas ópticos con simetría de revolución que cumplían condiciones especiales. Los sistemas centrados estudiados producen una representación óptica perfecta para infinitos pares de puntos pero con restricciones tan fuertes de apertura y de campo (sólo siempre que sea aplicable la aproximación paraxial) que en la práctica no son utilizables, salvo en determinadas ocasiones.

Lo ideal sería que, cuando a un sistema calculado por los sencillos métodos de la óptica paraxial se le aumentaran los campos y aperturas, siguiera comportándose como sistema perfecto, pero esto no ocurre, sino que la imagen, a medida que se abren diafragmas, comienza a presentar defectos. Lo que debían ser planos imagen se convierten en superficies curvas, la semejanza entre el objeto y la imagen no se conserva, la nitidez de los detalles se pierde apareciendo imágenes borrosas y la luz blanca del objeto aparece en la imagen, dispersa en sus colores. Todos estos defectos se agrupan bajo la denominación de “**aberraciones**”.

Las aberraciones se pueden clasificar, de acuerdo a la naturaleza de la luz, en aberraciones monocromáticas y aberraciones cromáticas. En este capítulo nos vamos a ocupar de las primeras que, a su vez, se clasifican en cinco tipos denominadas “**aberraciones de Seidel**”:

- aberración esférica,
- coma
- astigmatismo,
- curvatura de campo,
- distorsión.

De las cinco aberraciones monocromáticas, las tres primeras (esférica, coma, astigmatismo) se refieren a la calidad de la imagen de un punto, es decir, en un

sistema afectado por cualquiera de ellas, la imagen de un punto no será un punto, son por ello denominadas aberraciones de punto. Las otras dos restantes (curvatura y distorsión) se denominan aberraciones de campo puesto que afectan a la posición del punto dentro del campo imagen, es decir, en un sistema con curvatura o distorsión, la imagen de un punto es un punto pero su situación en la imagen no es la correcta.

Para simplificar en lo posible el estudio de las distintas aberraciones, supondremos que éstas no son simultáneas, lo cual no deja de ser otra aproximación más ya que en un sistema real estarán varias (o todas ellas) presentes. Analizaremos, pues, cada una de ellas por separado viendo en cada caso su influencia en la imagen final. El estudio cuantitativo que se realizará en este capítulo obedece a la teoría de tercer orden que equivale a reemplazar las funciones seno y coseno por los tres primeros términos de su desarrollo en serie (recordemos que la óptica paraxial o teoría de primer orden resulta de sustituir los senos y cosenos por el primer término de su desarrollo en serie) por lo que tampoco representa exactamente la situación real pero está mucho más próximo a ella.

Evidentemente, existen otros términos en el desarrollo en serie cuya contribución es más pequeña y que, a medida que se cogen más términos del desarrollo, los resultados que se obtiene son más parecidos a los de un trazado exacto de rayos por lo que también se puede hablar de aberraciones de quinto orden, de séptimo orden, etc.

En la actualidad existen programas informáticos muy elaborados que analizan las aberraciones de forma automática. Dicho análisis se lleva a cabo mediante una función de mérito y con un proceso iterativo que modifica el sistema óptico de partida repetidas veces hasta conseguir que dicho sistema presente unas cantidades de cada una de las aberraciones que coincidan con las tolerancias introducidas en la función de mérito. La función de mérito o dicho de otra forma, las cantidades de cada una de las aberraciones que se está dispuesto a tolerar, dependerán del sistema óptico en cuestión y del uso que se le vaya a dar. Así, en Óptica Oftálmica, es mucho más importante reducir el astigmatismo y la curvatura de campo que la aberración esférica o el coma. En otro tipo de sistemas como los fotográficos es muy importante corregir las aberraciones cromáticas sobre todo para el uso de películas en color, etc.

IX.2.- ABERRACIÓN ESFÉRICA

La aberración esférica puede definirse como la variación del foco (o más generalmente de la posición de la imagen) con la apertura y siempre está referida a rayos procedentes del eje óptico. Si nos fijamos en la figura 9.1 vemos que la imagen paraxial de un punto objeto, O, es un punto O'; sin embargo si consideramos un rayo incidente de ángulo σ , el rayo refractado ahora cortará al eje en un punto O'' distinto de O'. Existe pues una cierta distancia entre la imagen obtenida en la zona paraxial y la imagen obtenida con rayos más abiertos. A esta distancia se le denomi-

na “**aberración esférica longitudinal (AEL)**” y puede calcularse como:

$$AEL = \Delta s' = s'_p - s'_h \quad (9.1)$$

Todos los rayos que subtienden el mismo ángulo σ , tendrán la misma aberración esférica y pasarán por O'' y todos ellos cortarán al plano imagen paraxial en un círculo de radio ρ siendo:

$$\rho = \Delta s' \tan \sigma' \quad (9.2)$$

que es la denominada “**aberración esférica transversal (AET)**”.

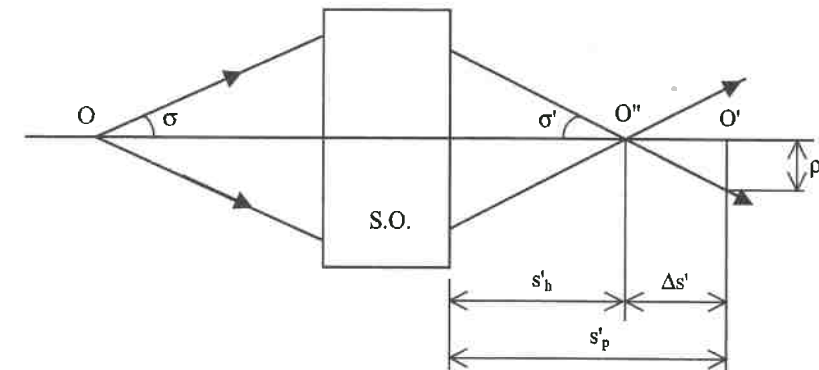


FIGURA 9.1. Aberración esférica longitudinal y transversal.

Cuando un sistema tiene aberración esférica, no existe ningún plano normal al eje óptico en el cual la imagen de O sea un punto O' sino que en los diferentes planos tendremos siempre una mancha de luz circular. En la figura 9.2, se observa un conjunto de rayos que emergen de la última superficie de un sistema óptico que presenta aberración esférica. Al situar el plano imagen en distintas posiciones obtendremos un disco de luz difusa (posición 1), un disco de luz difusa con un punto central brillante (posición 2), una mancha circular con el borde y el centro brillantes (posición 3) o un círculo con el borde brillante (posición 4). En la posición 3 es donde la sección del haz emergente es mínima y se le denomina “**círculo de mínima confusión**” y, generalmente, es el mejor lugar para observar la imagen.

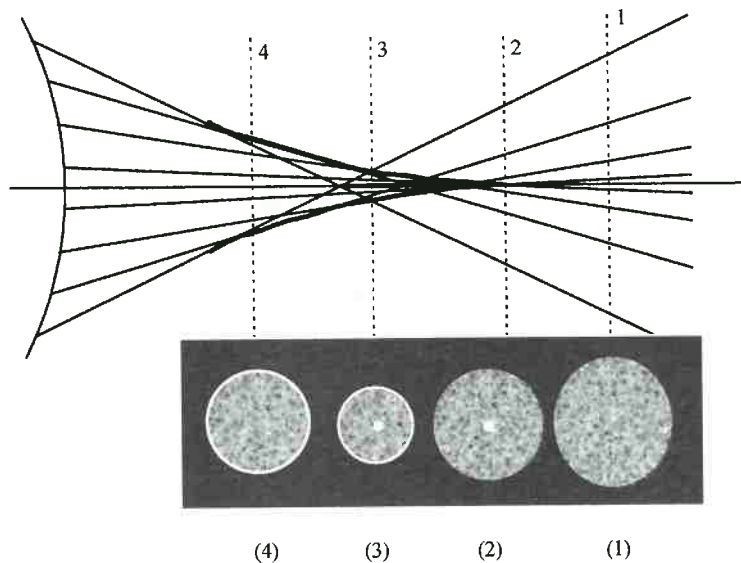


FIGURA 9.2. Diferentes aspectos que presenta la imagen de un punto en un sistema con aberración esférica según la localización del plano imagen.

La aberración esférica se suele representar en un sistema cartesiano. En ordenadas se representa la altura de incidencia (si los rayos incidentes son paralelos al eje óptico) o el ángulo que forman con el eje (si no lo son) y, en abscisas la aberración esférica longitudinal. Para hacer este tipo de representación cartesiana, en ocasiones basta con coger tres rayos: uno que pase por el borde de la pupila de entrada (rayo marginal) y otros dos intermedios con el eje, uno de los cuales se suele coger a una altura $h_m/\sqrt{2}$ siendo h_m la altura del rayo marginal. El hecho de coger precisamente ese rayo y no otro es debido a que, cuando el rayo marginal no tiene aberración esférica, según se demuestra en la teoría de tercer orden, es a esta altura precisamente, donde aparece la aberración máxima lo que se denomina “**aberración esférica zonal**”. En la figura 9.3 se ha representado la aberración esférica para distintos sistemas ópticos, en (a) el rayo marginal está desprovisto de aberración esférica y la máxima aberración se presenta a una altura $h_m/\sqrt{2}$, en (b) el sistema no está corregido de aberración esférica y dicha aberración crece con la altura de incidencia, en (c) la aberración esférica está corregida para el rayo marginal y para una altura intermedia cambiando de signo entre la parte superior y la parte inferior del sistema óptico.

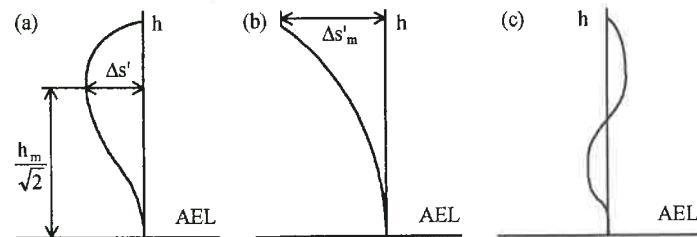


FIGURA 9.3. Representación cartesiana de la AEL en distintos sistemas ópticos.

La consecuencia de que un sistema tenga aberración esférica es la de difuminar los puntos y contornos en la imagen, perdiéndose así nitidez y contraste. Esto que resulta desastroso para los sistemas de uso científico, en ocasiones puede resultar incluso beneficioso como por ejemplo en el caso de los objetivos fotográficos donde una cierta cantidad de aberración esférica da a las fotografías un aspecto suave y apacible.

Una manera de reducir la aberración esférica de un sistema óptico es limitando la apertura, aunque evidentemente, con ello también se reduce la cantidad de luz que entra en el sistema. En el caso de que el sistema sea una lente única, para una apertura y una potencia determinada, la aberración esférica depende tanto de la posición del objeto como de la forma de la lente. Así, para un objeto en el infinito una lente plano convexa tiene mucha más cantidad de aberración esférica que una convexo plana (fig. 9.4), es decir, se consigue reducir notablemente la aberración simplemente girando la lente. Cuando el objeto y la imagen tienen el mismo tamaño, es decir, cuando el objeto está a una distancia $2f$ de la lente, la forma que da un mínimo de aberración esférica es la equiconvexa. Por último, puesto que la aberración esférica puede ser positiva o negativa, se pueden combinar lentes convergentes y divergentes para corregir o minimizar esta aberración.

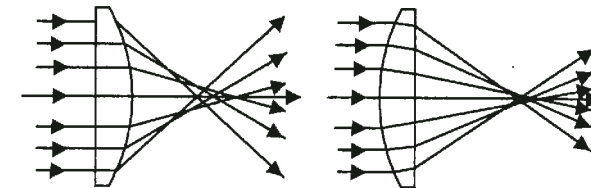


FIGURA 9.4. Aberración esférica en una lente plano convexa y convexo plana.

Veamos a continuación los valores que toma la aberración esférica en unos casos particulares. En primer lugar analizaremos la aberración esférica en un dioptrio.

Consideremos la figura 9.5 y sea O un punto axial situado a una distancia s de una superficie esférica. Los rayos que inciden sobre el eje óptico a una determinada altura h convergen en un punto axial O'' más cercano a la superficie que el punto O' donde convergen los rayos paraxiales. La distancia entre estos dos puntos será la aberración esférica longitudinal.

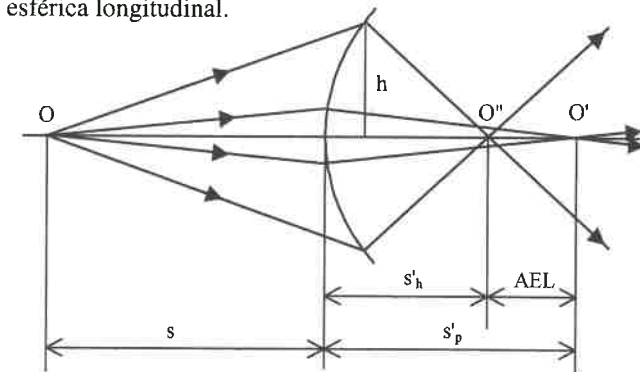


FIGURA 9.5. Distancia imagen en una superficie esférica.

Según la teoría de tercer orden, la distancia s'_h se puede calcular mediante la expresión:

$$\frac{n'}{s'_h} - \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{r} + \left[\left(\frac{h^2 n^2 r}{2f' n'} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right)^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{n'+n}{ns} \right) \right] \quad (9.3)$$

La parte de la ecuación (9.3) encerrada entre corchetes indica lo que se aparta la distancia s'_h del valor previsto por la teoría de primer orden o teoría paraxial. Como se deduce de esta ecuación, para un punto objeto cualquiera, esta desviación es proporcional a h^2 , que es la altura de la superficie atravesada por los rayos. Si el punto objeto está en el infinito, es decir, si los rayos llegan paralelos al eje óptico, la ecuación (9.3) se transforma en:

$$\frac{n'}{s'_h} = \frac{n'-n}{r} + \frac{h^2 n^2}{2f' r^2 n'} \quad (9.4)$$

El hecho de que un dioptrio presente aberración esférica pone en evidencia que un sistema constituido por la combinación de varios de ellos también lo tendrá. Veamos por ejemplo el caso de una lente, que vamos a considerar delgada para simplificar los cálculos en lo posible. En la figura 9.6 está representada la aberración esférica de una lente delgada que, como en el caso anterior, viene definida por la diferencia entre la distancia imagen paraxial s'_p y la distancia imagen para los rayos que inciden a una altura h , s'_h . Si el objeto está en el infinito la distancia imagen paraxial es simplemente la distancia focal de la lente, f' .

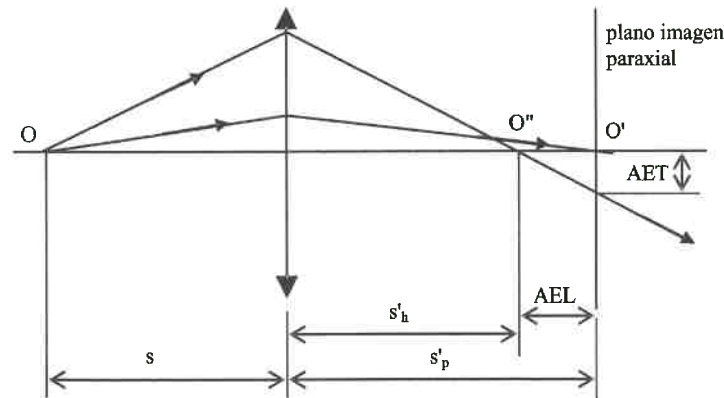


FIGURA 9.6. Aberración esférica de una lente delgada.

En la figura 9.7 se representa gráficamente la variación de la focal con la altura de incidencia del rayo cuando el objeto está situado en el infinito (iluminación plana) para una lente biconvexa y para una biconcava. En la figura 9.7 a) para valores pequeños de h la curva se asemeja a una parábola, y dado que los rayos marginales intersectan el eje a la izquierda del foco paraxial la aberración esférica se denominará *positiva*. En la figura 9.7 b) muestra una curva muy similar correspondiente a una lente biconcava de dimensiones análogas. Esta lente presenta aberración esférica *negativa*.

Como ya hemos dicho anteriormente, la aberración esférica de una lente depende tanto de la posición del objeto como de la forma de la lente. Estos dos parámetros vienen cuantificados respectivamente por el factor de posición, p , y el factor de forma de la lente, q definidos como:

$$p = \frac{s'+s}{s'-s} \quad q = \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1} \quad (9.5)$$

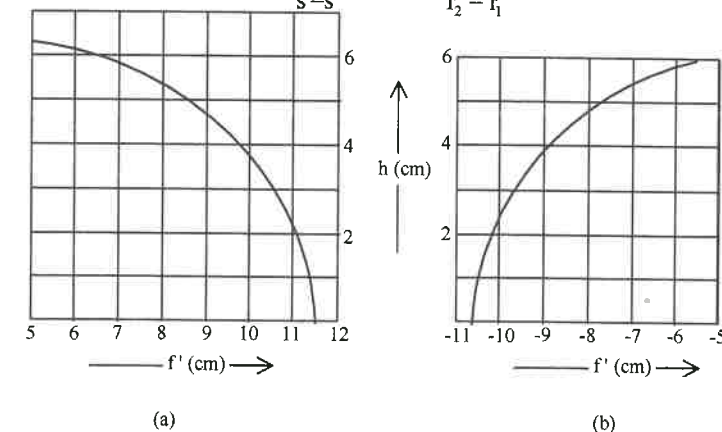


FIGURA 9.7. Variación de la distancia focal de dos lentes delgadas en aire (a) biconvexa y (b) biconcava con la altura de incidencia.

Un ejemplo de cómo varía la aberración esférica de una lente con su forma se puede ver en la figura 9.8 en la que, para un objeto en el infinito, y una altura máxima de incidencia de 2.5 cm se ha representado la aberración esférica en función de la altura del punto de incidencia para lentes de la misma potencia pero distinta forma (distintos factores de forma q). Como se puede ver en la figura, el valor de aberración esférica es mínimo para un factor de forma situado entre +0.5 y +1 que corresponde a una lente biconvexa con la segunda cara mucho más plana que la primera.

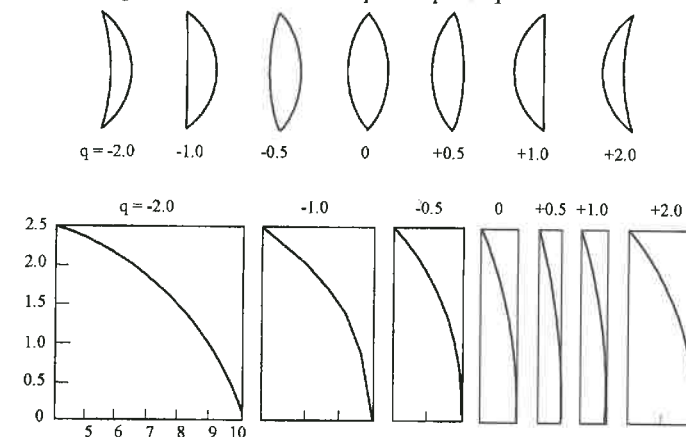


FIGURA 9.8. Variación de la focal de una lente con la altura de incidencia para distintos factores de forma de la lente.

Si ahora representamos en un sistema cartesiano la aberración esférica longitudinal frente al factor de forma de la lente para una altura de 1 cm obtenemos una curva como la representada en la figura 9.9 en la que se observa que desde un factor de forma desde + 0.4 hasta +1 la aberración esférica varía poco por estar cerca del mínimo pero en ningún caso se llega a anular. Es decir, eligiendo adecuadamente la forma de la lente, la aberración esférica se puede llegar a minimizar (siempre para un objeto determinado).

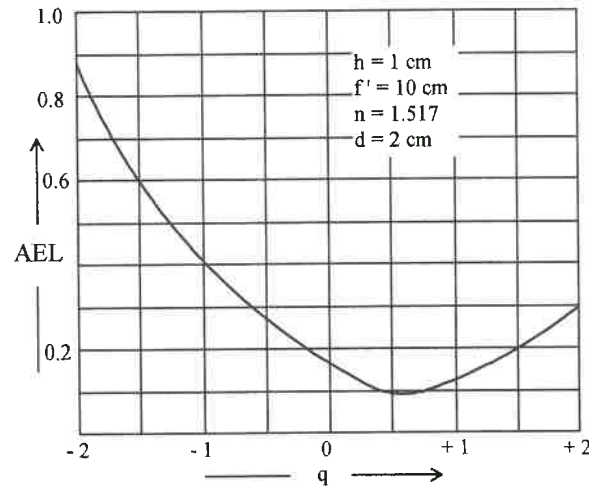


FIGURA 9.9. Aberración esférica longitudinal en función del factor de forma de la lente.

La aberración esférica se produce porque los rayos marginales se desvían con ángulos demasiado grandes; por ello, cualquier disminución en la desviación mejorará la nitidez de la imagen. Si recordamos la condición de mínima desviación en un prisma, ésta se producía cuando las dos caras del prisma desviaban por igual los rayos incidentes de manera que la desviación total se repartía por igual entre las dos caras del prisma. Aquí también la desviación de los rayos marginales será mínima cuando las dos caras de la lente los desvíen por igual; la repartición de la desviación entre las dos caras de la lente lleva consigo una aberración esférica mínima.

Según la teoría de tercer orden la aberración esférica de una lente delgada en aire se puede calcular con la expresión:

$$L_s = \frac{h^2}{8f'^3} \frac{1}{n(n-1)} \left[\frac{n+2}{n-1} q^2 + 4(n+1)pq + (3n+2)(n-1)p^2 + \frac{n^3}{n-1} \right] \quad (9.6)$$

donde p es el factor de posición, q el factor de forma (definidos ambos en la ec.(9.5)), n es el índice de refracción de la lente, f' su distancia focal, h la altura de incidencia y donde la cantidad L_s viene definida por:

$$L_s = \frac{1}{s'_h} - \frac{1}{s'_p} \quad (9.7)$$

En esta ecuación, s'_h es la distancia imagen para los rayos incidentes a una altura h y s'_p la distancia imagen para los rayos paraxiales, por lo que la cantidad L_s es una medida de la aberración esférica en dioptrías.

Recordando las expresiones para la AEL y AET dadas respectivamente por las ecuaciones (9.1) y (9.2) y teniendo en cuenta (9.7), podemos escribir:

$$\left. \begin{aligned} AEL &= s'_p s'_h L_s \\ AET &= AEL \operatorname{tg} \sigma' = AEL \frac{h}{s'_h} = s'_p h L_s \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

Despejando de (9.7) la distancia imagen s'_h , obtenemos:

$$s'_h = \frac{s'_p}{1 + s'_p L_s} \quad (9.9)$$

Por otra parte, con la expresión del factor de posición, p (ec. (9.5)) y la expresión de la ley de Gauss para una lente delgada en aire:

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}$$

podemos expresar las distancias s y s' en función de p y f' :

$$s = -\frac{2f'}{1+p} \quad s' = \frac{2f'}{1-p} \quad (9.10)$$

de donde se deduce que:

$$\beta' = \frac{s'}{s} = -\frac{1+p}{1-p} \quad (9.11)$$

Análogamente, con la expresión del factor de forma q dado en la ec. (9.5) y la expresión de la focal de una lente delgada en aire:

$$\frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

se pueden deducir fácilmente las expresiones para los radios de curvatura de la lente:

$$r_1 = \frac{2f'(n-1)}{q+1} \quad r_2 = \frac{2f'(n-1)}{q-1} \quad (9.12)$$

y, por tanto:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{q-1}{q+1} \quad (9.13)$$

Las expresiones dadas en las ecuaciones (9.10) y (9.12) se denominan relaciones de Coddington.

A partir de la expresión de L_s dada en la ec. (9.6), si, para un objeto determinado, queremos saber la forma de lente que nos dará una aberración esférica mínima,

tendremos que igualar a cero la primera derivada de L_s haciendo variar el factor de forma de la lente, es decir:

$$\frac{\partial L_s}{\partial q} = 0 \Rightarrow \frac{h^2}{8f'^3} \frac{1}{n(n-1)} \left(2q \frac{n+2}{n-1} + 4p(n+1) \right) = 0$$

$$2q \frac{n+2}{n-1} + 4p(n+1) = 0 \Rightarrow q = -\frac{2p(n^2-1)}{n+2} \quad (9.14)$$

La ecuación (9.14) nos da el factor de forma que debe tener la lente para lograr una aberración esférica mínima para ese objeto determinado.

Por otra parte, si teniendo una lente de forma prefijada de antemano, queremos saber dónde debemos colocar el objeto para obtener una aberración esférica mínima, entonces:

$$\frac{\partial L_s}{\partial p} = 0 \Rightarrow \frac{h^2}{8f'^3} \frac{1}{n(n-1)} [4(n+1)q + 2(3n+2)(n-1)p] = 0$$

$$4(n+1)q + 2(3n+2)(n-1)p = 0 \Rightarrow p = -\frac{2(n+1)q}{(3n+2)(n-1)} \quad (9.15)$$

La expresión (9.15) nos proporciona el factor de posición del objeto que tendrá una aberración esférica mínima en la imagen dada por esa lente determinada.

Por último, un conjunto de dos o más lentes puede neutralizar la aberración esférica siempre y cuando sus potencias sean de signos contrarios. Esta compensación es posible debido a que la aberración esférica varía con el cubo de la distancia focal y, por tanto, cambia de signo al cambiar el signo de f' . Dado que la aberración esférica es una aberración para puntos del eje cuando se trabaja con grandes aperturas, en el caso de la Óptica Oftálmica, no es una aberración muy importante dado que el tamaño pupilar es pequeño comparado con el tamaño de la lente oftálmica en cuestión. Evidentemente, esto no es aplicable al caso de las lentes de contacto o de las lentes intraoculares.

IX.3.- COMA

El coma es otra aberración de punto, es decir, es una aberración por la cual la imagen de un punto no es un punto sino una mancha en forma de cometa, de ahí su nombre. A diferencia de la aberración esférica, esta aberración se define para puntos fuera de eje (o haces inclinados, en el caso de objeto lejano), necesita de una gran apertura para producirse y es debida a una falta de constancia en el aumento lateral, β' , para los distintos rayos que atraviesan la lente, de forma que, según la zona de la lente por donde pase el rayo se obtendrá un aumento u otro. Esto está originado por el hecho de que los planos principales pueden ser tratados como planos únicamente en la región paraxial, siendo realmente superficies curvas principales.

En la figura 9.10 se han dibujado varios rayos oblicuos a partir de un punto objeto situado fuera del eje para ilustrar, de manera esquemática la formación de la imagen comática de un punto. Se puede observar que cada cono circular de rayos cuyos puntos terminales (1-2-3-4-1-2-3-4) forman un anillo sobre la lente, tendrá una imagen denominada círculo comático. El conjunto de todos ellos forma la imagen final afectada de coma. Los distintos anillos correspondientes a distintas zonas de la lente no son del mismo tamaño y sus centros se desplazan sobre una línea recta. Si el coma es positivo cuanto mayor sea el anillo sobre la lente el círculo comático correspondiente estará más alejado del eje, si el coma es negativo ocurriría justo al revés. La envolvente de todas estas circunferencias que aparecen en la imagen, son dos rectas que forman entre sí un ángulo de 60° , tal y como se puede apreciar también en la figura.

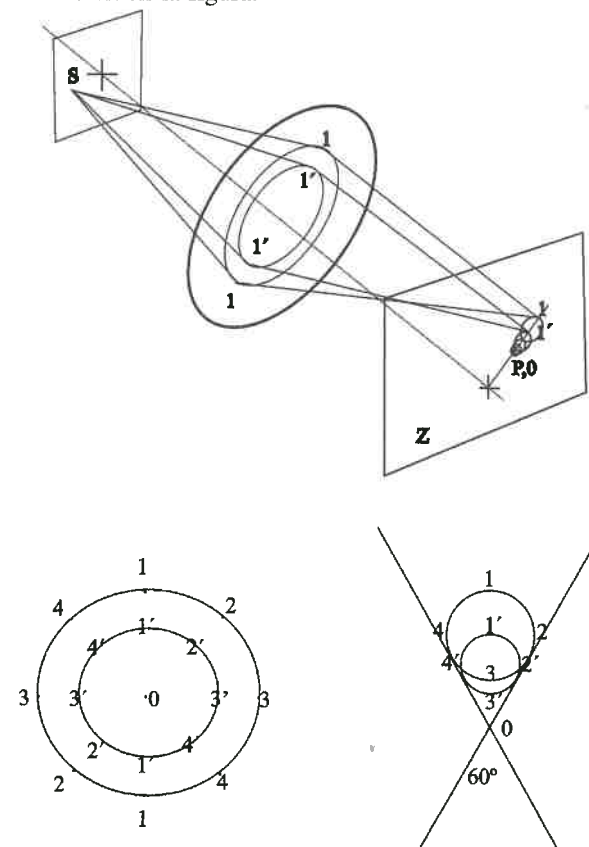


FIGURA 9.10. Imagen geométrica con coma para un punto.

Cuando el anillo más externo corresponde a los rayos marginales la distancia de 0 a 1 en la imagen se denomina coma tangencial mientras que la longitud de 0 a 3 es

llamada coma sagital. La mayoría de la energía está localizada aproximadamente en la región triangular comprendida entre 0 y 3.

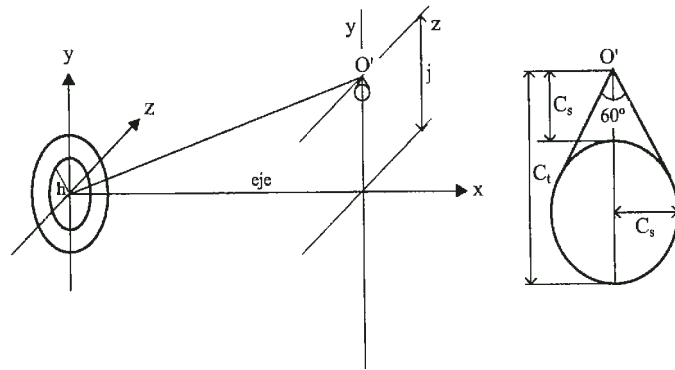


FIGURA 9.11. Formación del coma según la teoría de tercer orden.

Según la teoría de tercer orden, el radio del círculo comático, también llamado coma sagital, viene dado por la expresión:

$$C_s = \frac{j h^2}{f'^2} (Gp + Wq) \quad (9.16)$$

donde p y q son los factores de posición y forma, definidos en (9.5), j y h son las alturas indicadas explícitamente en la figura 9.11, f' es la distancia focal de la lente y G y W son dos factores que dependen del índice de refracción de la lente y que vienen dados por:

$$G = \frac{3(2n+1)}{4n} \quad W = \frac{3(n+1)}{4n(n-1)} \quad (9.17)$$

Además la altura de la figura comática, coma tangencial, viene dada por:

$$C_t = 3C_s \quad (9.18)$$

Para estudiar la variación del coma en función del factor de forma de la lente, en la figura 9.12 se ha representado C_t en función de q . Dicha representación corresponde a un haz paralelo que incide con un ángulo de 11° con el eje. Al mismo tiempo, en dicha figura se ha representado la aberración esférica de las mismas lentes imponiendo que el haz en este caso sea paralelo al eje óptico y que la zona atravesada por este haz sea la misma en ambos casos. Como se puede observar en esta figura, la recta obtenida para el coma corta al cero en un punto, es decir que, para este objeto, existe una lente con una forma determinada que anula el coma. El factor de forma correspondiente a esta lente de coma nulo se puede hallar fácilmente sin más que hacer:

$$C_s = 0 \Rightarrow Gp + Wq = 0 \Rightarrow q = -\frac{G}{W} p \quad (9.19)$$

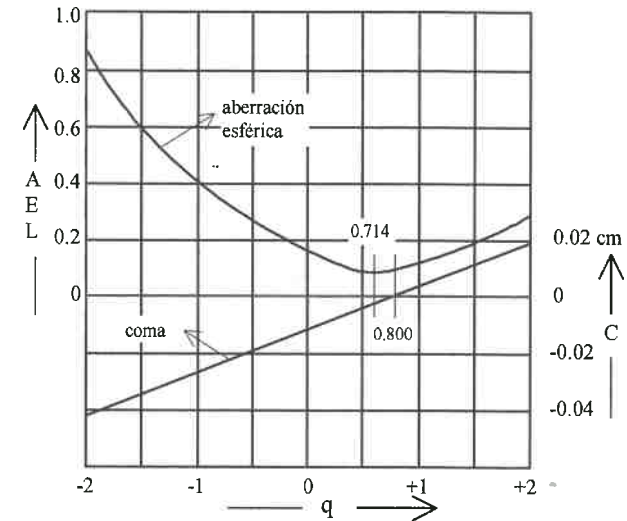


FIGURA 9.12. Representación cartesiana del coma y la aberración esférica para un objeto en el infinito en función del factor de forma de la lente.

Si observamos la figura 9.12 vemos que las lentes con $q = 0.8$ anulan el coma y este valor de q está muy próximo a $q = 0.714$, valor que hace mínima la aberración esférica de la lente. Es decir, que una lente sencilla, pensada para anular el coma, tendrá prácticamente la aberración esférica minimizada.

Para finalizar con el estudio de esta aberración, hay que decir que la imagen comática tiene la mayoría de la luz concentrada en una parte de la figura (la que correspondería a la "cabeza" del cometa) provocando así un efecto nefasto e intolerable en la formación de imágenes por lo que dicha aberración está considerada como la más nociva de toda debido, principalmente a su estructura asimétrica. Sin embargo, en Óptica oftálmica no es una aberración de peso debido, como ocurría en el caso de la aberración esférica, al pequeño tamaño pupilar ya que, como hemos dicho anteriormente, el coma se produce con grandes aperturas.

IX.4.- ASTIGMATISMO

Cuando un punto objeto está situado a una distancia apreciable fuera de eje óptico, el cono de rayos incidentes sobre la lente es asimétrico, originando con ello la tercera aberración de punto, conocida como astigmatismo. Para facilitar su descripción, consideremos el plano meridional o "tangencial", conteniendo tanto al rayo principal (el que pasa por el centro de la pupila de entrada) y el eje óptico, y el plano "sagital" definido como el plano que contiene al rayo principal y es perpendicular al tangencial (ver fig. 9.13).

El plano tangencial es el mismo de principio a fin para un sistema dado, por muy complicado que éste sea, mientras que el plano sagital cambia de pendiente conforme el rayo principal es desviado por los distintos elementos. En consecuencia, para

ser precisos, debemos decir que existen varios planos sagitales, uno para cada región del sistema óptico. Sin embargo, todos los rayos oblicuos que parten del objeto y están contenidos en los diferentes planos sagitales se denominan rayos sagitales, y a los rayos contenidos en el plano tangencial se les denomina rayos tangenciales.

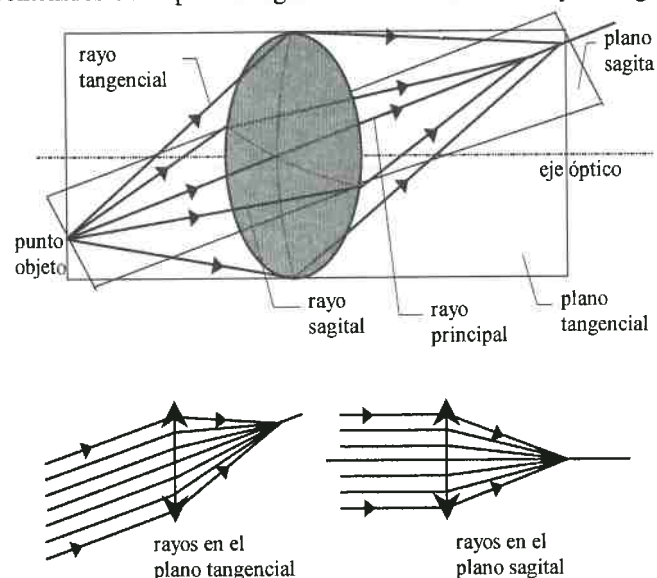


FIGURA 9.13. Plano tangencial y plano sagital en una lente. Marcha de rayos en cada uno de estos dos planos.

En el caso de un punto objeto axial, el cono de rayos es simétrico respecto a las superficies esféricas de una lente. Pero para un punto fuera de eje, la configuración de un haz oblicuo de rayos será distinta en los planos tangencial y sagital (fig. 9.13). Como resultado, las distancias focales en esos planos también serán diferentes. Puede demostrarse, siguiendo el principio de Fermat que la diferencia de focales depende de la potencia de las lentes y de la inclinación del haz. Esta diferencia astigmática, como es frecuentemente llamada, aumenta rápidamente conforme los rayos se hacen más oblicuos, es decir, a medida que el punto objeto se aleja del eje, y es, por supuesto, nula sobre el eje.

Para analizar el problema consideremos la figura 9.14. En ella, un punto objeto O_1 está situado fuera del eje óptico de un sistema ante el cual situamos una pupila de entrada circular de pequeño tamaño para que solamente deje pasar un haz infinitesimal en torno al rayo principal.

Sea Σ' , el elemento de superficie de onda emergente en torno al rayo principal refractado $R'P'$. En el caso más general, esta superficie de onda no será de revolución y tendrá en el punto Q dos centros de curvatura C_1 y C_2 que serán las dos imágenes de O_1 respecto al rayo principal. C_1 y C_2 se llaman imágenes astigmáticas y a la longitud C_1C_2 se le llama astigmatismo del pincel infinitesimal.

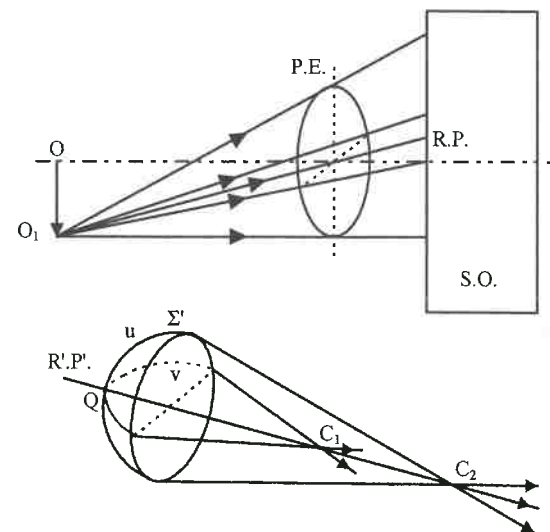


FIGURA 9.14. Imágenes astigmáticas para un punto objeto O_1 .

Consideremos ahora la figura 9.15 en el que se han representado un conjunto de rayos que provienen del punto objeto. Estos rayos se pueden clasificar en dos grupos: los tangenciales que se cortan en T y los sagitales que se cortan en S. En estos dos planos se forman dos líneas imagen T y S (dos líneas focales en el caso de que el objeto esté en el infinito) que son perpendiculares a los planos tangencial y sagital respectivamente. En estos dos planos, la imagen de un punto objeto es un segmento de recta, en los demás la imagen es una elipse (alargada o achatada, según donde esté situado el plano) salvo en un plano intermedio entre T y S donde la sección del haz es circular y, por lo tanto, donde la imagen del punto es un círculo. Este círculo se denomina "círculo de menor confusión", también llamado círculo de máxima nitidez y es el plano que se toma como "mejor imagen" en un sistema astigmático.

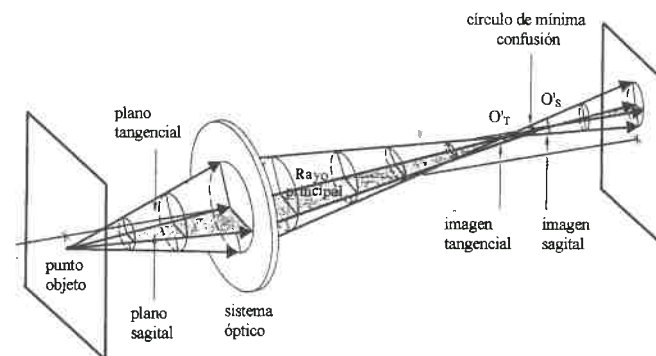


FIGURA 9.15. Estructura de un pincel de luz astigmático (Hecht, Zajac, 1977).

Los lugares geométricos de las imágenes T y S de un conjunto de puntos objeto, son paraboloides cuyas secciones se pueden ver en la figura 9.16. Para un pincel cualquiera de rayos, la magnitud del astigmatismo viene dada por la distancia en dioptrías entre estas dos superficies medidas a lo largo del rayo principal. En el eje, donde coinciden ambas superficies la diferencia astigmática es nula y fuera de él aumenta aproximadamente, como el cuadrado de la altura de la imagen. El astigmatismo es positivo cuando T está a la izquierda de S y negativo en caso contrario.

Para analizar con un poco más de detalle la formación de las dos imágenes astigmáticas, consideremos la figura 9.17 que representa de forma esquemática un frente de ondas refractado en torno al rayo principal $R'P'$. Sean u y v las dos líneas de curvatura en el punto Q con centros en C_2 y C_1 respectivamente, y siendo u la contenida en plano tangencial y v la contenida en el plano sagital. Si se corta al pincel emergente por plano perpendiculares al rayo principal $R'P'$, las secciones (siendo Σ' de contorno circular) son elipses salvo para los planos que pasan por C_1 y C_2 en donde las secciones son dos segmentos de recta. Cuando el objeto está en el infinito, a estos dos segmentos se les llama focales de Sturm.

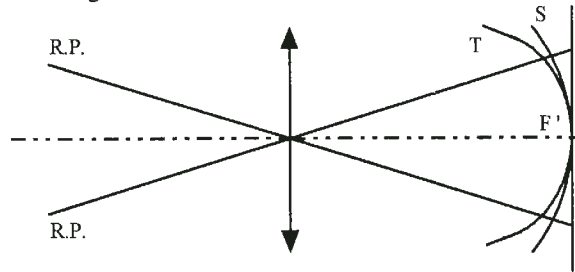


FIGURA 9.16. Situación de las imágenes T y S en una lente delgada.

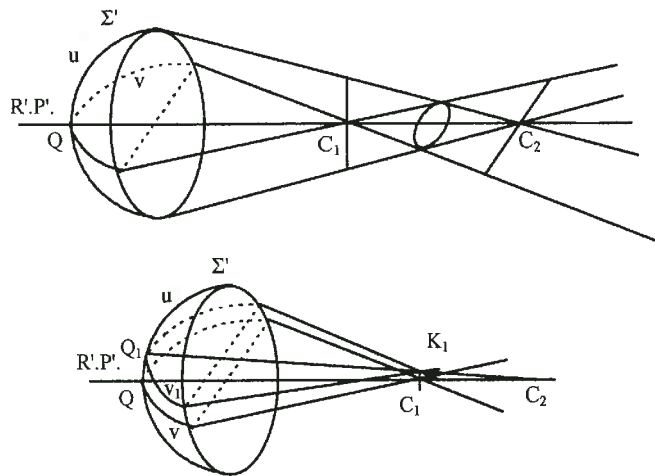


FIGURA 9.17. Formación de las dos líneas imagen.

Para entender mejor la formación de las dos líneas imagen, consideremos la línea de curvatura v_1 de la familia de las v . El rayo que pasa por el punto Q_1 convergerá en C_2 y los que pasan por los extremos cortarán al segmento Q_1C_2 en un punto K_1 muy próximo a C_1 . Como el segmento Q_1C_2 está en el plano tangencial, también estará en ese plano el segmento K_1C_1 . Por lo tanto, la imagen sagital está en el plano tangencial y viceversa, la imagen tangencial está en el plano sagital, lo que implica que las dos imágenes son perpendiculares entre sí.

IX.4.2.- Representación gráfica del astigmatismo

Supongamos un objeto cualquiera y tomemos en él tres puntos O_1 , O_2 y O_3 situados a distintas distancias del eje (fig. 9.18). Si desde estos puntos trazamos los rayos principales y calculamos para cada punto las imágenes astigmáticas, uniendo después todas las imágenes sagitales por una parte y todas las imágenes tangenciales por otra, obtenemos dos curvas $O'S$ y $O'T$ que son los lugares geométricos ocupados por dichas imágenes.

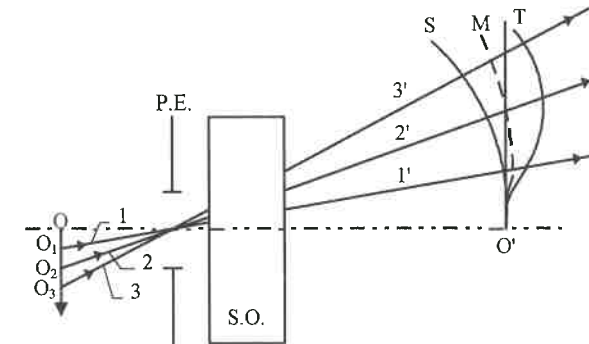


FIGURA 9.18. Obtención de las imágenes astigmáticas para distintos puntos objeto.

Haciendo un giro en torno al eje del sistema, al plano objeto O le correspondería como imagen tangencial una superficie que tiene como meridiano $O'T$ y como imagen sagital, una superficie que tiene como meridiano $O'S$. La curva $O'M$, lugar de los puntos medios en dioptrías entre S y T se llama imagen media, suele tomarse como mejor imagen y es donde están situados los círculos de menor confusión.

La representación gráfica del astigmatismo suele hacerse en un sistema cartesiano tomando en ordenadas o bien la altura de incidencia del rayo principal sobre el sistema óptico, o bien los ángulos bajo los cuales se ven los distintos puntos objeto desde el centro de la pupila de entrada, y en abscisas las distancias de las imágenes sagitales y tangenciales respecto a O' que es la imagen para los rayos paraxiales.

En la figura 9.19. existen distintos ejemplos de representaciones del astigmatismo para distintos sistemas ópticos. En (a) vemos un sistema denominado "anastigmático", aunque, en realidad, sólo tiene corregido el astigmatismo para una altura determinada, la que corresponde al corte entre las curvas S y T . En (b) vemos un

sistema astigmático clásico donde las curvas S y T se alejan del plano paraxial (F') a medida que la altura aumenta. En (c) tenemos un sistema corregido de astigmatismo ya que las dos curvas S y T coinciden aunque ambas presentan una curvatura considerable con respecto al plano paraxial. En (d) la imagen tangencial coincide con el plano imagen ideal pero, a cambio la sagital no, con lo que el sistema presenta astigmatismo. Por último, en (e) las dos superficies astigmáticas bisectan al plano imagen ideal, por lo que, en este último caso, los círculos de menor confusión estarán muy próximos a dicho plano.

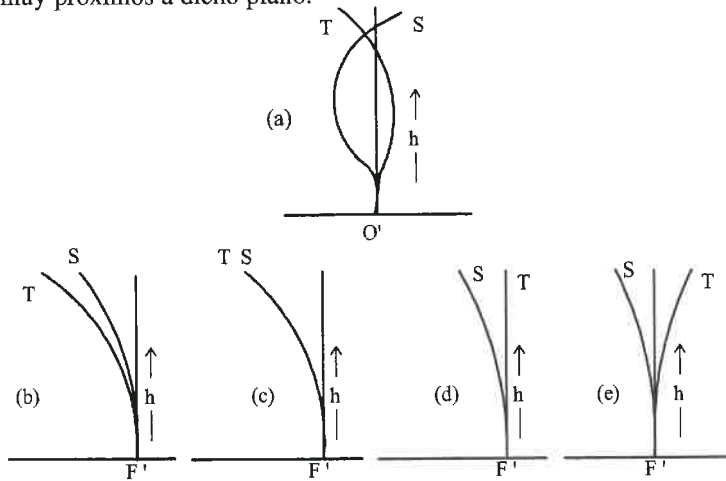


FIGURA 9.19. Representaciones gráficas del astigmatismo para distintos casos.

IX.4.3.- Cálculo del astigmatismo según la teoría de tercer orden

Por su importancia en la Óptica Oftálmica, deduciremos aquí las expresiones que permiten calcular las imágenes sagital y tangencial en una superficie esférica que separa dos medios de índices n y n' según la teoría de tercer orden. Empezaremos con la imagen tangencial considerando para ello los rayos contenidos en el plano tangencial (fig. 9.20).

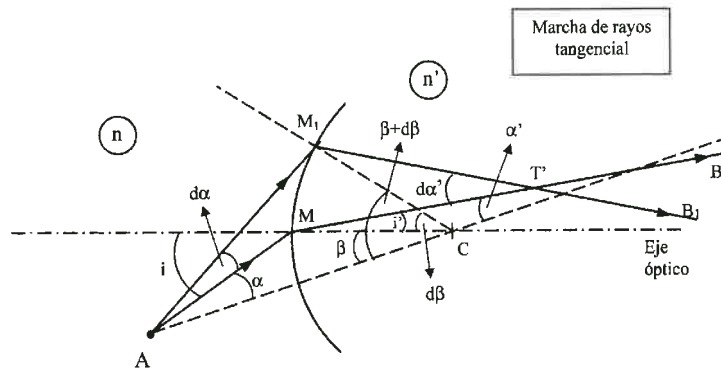


FIGURA 9.20. Determinación de la imagen tangencial en un dioptrio esférico.

Teniendo en cuenta que, según el criterio de signos i , i' , son ángulos positivos y β es negativo, y considerando α y α' como ángulos positivos de la figura deducimos que:

$$\begin{aligned} i &= \alpha - \beta & i' + \alpha' &= -\beta \\ di &= d\alpha - d\beta & di' &= -d\beta - d\alpha' \end{aligned}$$

Por otra parte, si consideramos la ley de Snell, derivamos y sustituimos di y di' por su valor, obtenemos:

$$\begin{aligned} n \sin i &= n' \sin i' \\ n \cos i di &= n' \cos i' di' \\ n \cos i (d\alpha - d\beta) &= n' \cos i' (-d\beta - d\alpha') \end{aligned} \quad (9.20)$$

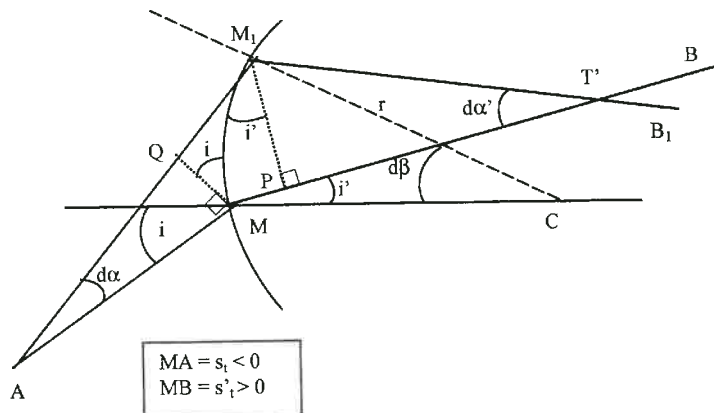
Los rayos muy próximos a los MB y M_1B_1 se cortan en el punto T' que es el punto imagen tangencial de A. Llamando $MA = s_t$, $MB = s'_t$ y proyectando el arco MM_1 sobre las normales a AM y MB (ver figura 9.21), se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} -s_t d\alpha &= \overline{MQ} = \overline{MM_1} \cos i = -r d\beta \cos i \Rightarrow d\alpha = \frac{r \times d\beta \times \cos i}{s_t} \\ s'_t d\alpha' &= \overline{M_1P} = \overline{MM_1} \cos i' = -r d\beta \cos i' \Rightarrow d\alpha' = \frac{-r \times d\beta \times \cos i'}{s'_t} \end{aligned} \right\} \quad (9.21)$$

Sustituyendo las expresiones de la ecuación (9.21) en la ec. (9.20):

$$\begin{aligned} n \cos i \left(\frac{r \times d\beta \times \cos i}{s_t} - d\beta \right) &= n' \cos i' \left(-d\beta - \frac{-r \times d\beta \times \cos i'}{s'_t} \right) \\ \frac{n \cos^2 i}{s_t} r - n \cos i &= -n' \cos i' + \frac{n' \cos^2 i'}{s'_t} r \\ \frac{n' \cos^2 i'}{s'_t} - \frac{n \cos^2 i}{s_t} &= \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r} \end{aligned} \quad (9.22)$$

que es la expresión que nos permite calcular la imagen tangencial dada por una superficie esférica para un punto situado fuera del eje óptico.

FIGURA 9.21. Construcción gráfica para el cálculo de s'_t .

Para determinar la posición de la imagen sagital, consideremos la figura 9.22 donde $MA = s_s$ y $MS' = s'_s$.

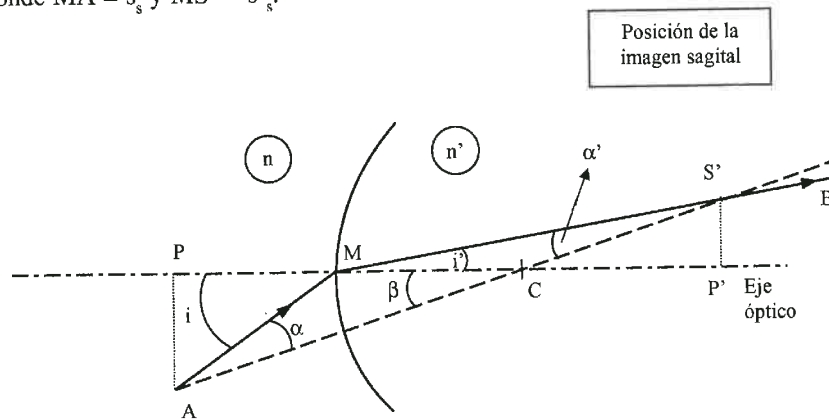


FIGURA 9.22. Determinación de la imagen sagital.

Puesto que los triángulos APC y CP'S' son semejantes, deducimos que:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} &= \frac{\overline{P'S'}}{\overline{CP'}} \Rightarrow \frac{\overline{P'S'}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{CP'}}{\overline{PC}} \\ \frac{\overline{CP'}}{\overline{PC}} &= \frac{\overline{MP'} - r}{\overline{PM} + r} = \frac{s'_s \cos i' - r}{-s_s \cos i + r} \\ \frac{\overline{P'S'}}{\overline{AP}} &= \frac{s'_s \sin i'}{-s_s \sin i} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{s'_s \cos i' - r}{-s_s \cos i + r} &= \frac{s'_s \sin i'}{-s_s \sin i} = \frac{ns'_s}{-n's_s} \\ \frac{s'_s \cos i' - r}{-s_s \cos i + r} &= \frac{-n}{s_s} + \frac{n'}{s'_s} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r} \end{aligned} \right. \quad (9.23)$$

La ecuación (9.23) nos da la posición de la imagen sagital S' . La similitud de las expresiones (9.22) y (9.23) con la expresión de la imagen paraxial es notable. Cuando el punto objeto se acerca al eje, los ángulos i e i' se hacen pequeños y sus cosenos se aproximan a la unidad con lo que, en ambos casos, nos quedaría la ley de Gauss del dioptrio esférico.

Para el caso de una lente delgada en aire con una pequeña apertura situada en la misma lente, las imágenes sagital y tangencial vienen dadas (siempre en tercer orden) por las expresiones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{s'_s} - \frac{1}{s} &= \cos i \left[\frac{n \cos i'}{\cos i} - 1 \right] \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] \text{ para la imagen sagital} \\ \frac{1}{s'_t} - \frac{1}{s} &= \frac{1}{\cos i} \left[\frac{n \cos i'}{\cos i} - 1 \right] \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] \text{ para la imagen tangencial} \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$

Las ecuaciones (9.22), (9.23) y (9.24) constituyen las relaciones de Coddington para el astigmatismo, bien de una sola superficie, bien de una lente delgada en aire. En ellas, i es el ángulo de incidencia del rayo principal en la superficie o en la lente, i' es el ángulo de refracción correspondiente; en (9.22) y (9.23), n y n' son los índices de los dos medios separados por la superficie, en (9.24) n es el índice de la lente con lo que:

$$\left. \begin{aligned} n \sin i &= n' \sin i' \text{ para una superficie} \\ \sin i &= n \sin i' \text{ para una lente en aire} \end{aligned} \right\} \quad (9.25)$$

Hay que decir que la ecuación (9.24) sólo es estrictamente válida cuando se considera que el rayo principal pasa por el centro óptico de la lente.

En cuanto a la calidad de la imagen producida por un sistema afectado de astigmatismo, si dicho sistema trabaja con una apertura pequeña, esta aberración es muy importante pues cada punto objeto se transforma en una línea recta siempre y cuando la imagen se recoja en cualquiera de los dos planos sagital o tangencial. Sin embargo, si el plano imagen se toma donde está situado el círculo de menor confusión, el efecto de dicha aberración es semejante al producido por la aberración esférica. Esto es lo que sucede en el campo de la Óptica Oftálmica donde se trabaja con aperturas pequeñas debido al tamaño pupilar del ojo. En caso de que el sistema óptico trabaje con grandes aperturas, esta aberración pierde importancia y otras como el coma deterioran mucho más la calidad de la imagen final.

IX. 5.- CONDICIONES DE ABBE Y HERSCHEL

Consideremos la figura 9.23 y sea A' la imagen estigmática de A a través de una superficie. Vamos a ver las condiciones de estigmatismo para un punto B cercano al

punto A y tal que el segmento $AB = y$ está situado en un plano ortogonal al eje óptico de la superficie.

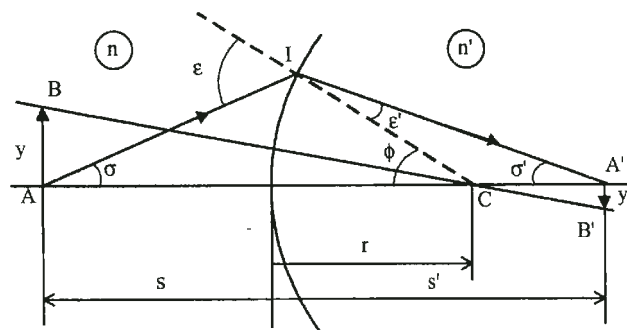


FIGURA 9.23. Relación de los senos de Abbe.

En el triángulo AIC se cumple que:

$$\frac{-r}{\sin \sigma} = \frac{r-s}{\sin(\pi-\epsilon)} \Rightarrow r-s = \frac{-r \sin \epsilon}{\sin \sigma} \quad (9.26)$$

Y en el triángulo ICA' se cumple que:

$$\frac{r}{\sin \sigma'} = \frac{s'-r}{\sin \epsilon'} \Rightarrow s'-r = \frac{r \sin \epsilon'}{\sin \sigma'} \quad (9.27)$$

Para que B' sea la imagen estigmática de B, debe cumplirse, según los triángulos ABC y A'B'C' que:

$$\frac{y}{r-s} = \frac{-y'}{s'-r} \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{s'-r}{r-s} \quad (9.28)$$

y sustituyendo (9.26) y (9.27) en (9.28), se obtiene:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{r \sin \epsilon' / \sin \sigma'}{-r \sin \epsilon / \sin \sigma} = \frac{\sin \epsilon' \sin \sigma}{\sin \epsilon \sin \sigma'} \quad (9.29)$$

Además, en el punto I de incidencia en la superficie se cumple:

$$n \sin \epsilon = n' \sin \epsilon' \Rightarrow \frac{\sin \epsilon'}{\sin \epsilon} = \frac{n}{n'}$$

con lo que la ecuación (9.29) se convierte en:

$$\frac{y'}{y} = \frac{n \sin \sigma}{n' \sin \sigma'} = \beta' \Rightarrow n y \sin \sigma = n' y' \sin \sigma' \quad (9.30)$$

La ecuación (9.30) se conoce con el nombre de “**Relación de los senos de Abbe**” y es la condición que deben cumplir los puntos B y B' para ser estigmáticos. A los puntos que cumplen esta condición se les denomina “**aplanáticos**”.

Veamos ahora la condición que deben cumplir para ser estigmáticos los puntos del eje próximos al punto A siendo A y A' estigmáticos. Para ello, consideremos la figura 9.24 que representa a las parejas AA' y BB' y sendos rayos incidiendo en el mismo punto I.

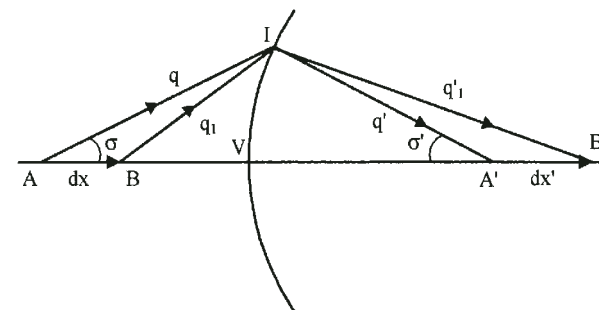


FIGURA 9.24. Relación de Herschel.

En el triángulo AIB, se cumple que:

$$q_1^2 = q^2 + dx^2 - 2qdx \cos \sigma \cong q^2 - 2qdx \cos \sigma \quad (9.31)$$

y en el triángulo IA'B', se verifica que:

$$q_1'^2 = q'^2 + dx'^2 - 2q'dx' \cos(\pi - \sigma') \cong q'^2 + 2q'dx' \cos \sigma' \quad (9.32)$$

Desarrollando las expresiones (9.31) y (9.32) obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= q \sqrt{1 - \frac{2dx \cos \sigma}{q}} \cong q \left[1 - \frac{dx \cos \sigma}{q} \right] \\ q_1' &= q' \sqrt{1 + \frac{2dx' \cos \sigma'}{q'}} \cong q' \left[1 + \frac{dx' \cos \sigma'}{q'} \right] \end{aligned} \right\} \quad (9.33)$$

Si A y A' son dos puntos estigmáticos, el camino óptico entre A y A' es constante e independiente del rayo por el que se mida:

$$(AA') = \text{constante}$$

Análogamente, si B y B' deben ser estigmáticos, el camino óptico entre B y B' debe ser constante:

$$(BB') = \text{constante}$$

por lo que la diferencia entre ambos debe ser también constante:

$$(BB') - (AA') = \text{constante} \quad \text{siendo} \quad (BB') = nq_1 + n'q'_1 \\ (AA') = nq + n'q'$$

Si sustituimos las expresiones de las distancias obtenidas en la ecuación (9.33):

$$(BB') - (AA') = nq \left[1 - \frac{dx \cos \sigma}{q} \right] + n'q' \left[1 + \frac{dx' \cos \sigma'}{q'} \right] - nq - n'q' = \text{constante}$$

$$(BB') - (AA') = -ndx \cos \sigma + n'dx' \cos \sigma' = \text{constante} \quad (9.34)$$

El valor de la constante se puede calcular particularizando la ecuación (9.34) al rayo que pasa por el vértice de la superficie y su centro de curvatura:

$$(AA') = n\overline{AV} + n'\overline{VA'} \quad (BB') = n\overline{BV} + n'\overline{VB'}$$

$$(BB') - (AA') = n\overline{BV} + n'\overline{VB'} - n\overline{AV} - n'\overline{VA'} = n(\overline{BV} - \overline{AV}) + n'(\overline{VB'} - \overline{VA'})$$

$$(BB') - (AA') = -ndx + n'dx' \quad (9.35)$$

Igualando las expresiones (9.34) y (9.35), obtenemos:

$$-ndx \cos \sigma + n'dx' \cos \sigma' = -ndx + n'dx'$$

$$ndx(1 - \cos \sigma) = n'dx'(1 - \cos \sigma')$$

$$ndx 2 \sin^2 \left(\frac{\sigma}{2} \right) = n'dx' 2 \sin^2 \left(\frac{\sigma'}{2} \right)$$

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\sigma}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\sigma'}{2} \right)} = \frac{n' dx'}{n dx} = \frac{n'}{n} \alpha = \text{constante}$$

y puesto que la relación entre el aumento axial, α , y el aumento lateral, β' , es:

$$\alpha = \frac{n'}{n} \beta'^2$$

sacando la raíz cuadrada, finalmente se obtiene:

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\sigma}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\sigma'}{2} \right)} = \frac{n'^2}{n^2} \beta'^2 \Rightarrow \left(\frac{\sin \frac{\sigma}{2}}{\sin \frac{\sigma'}{2}} \right) = \frac{n'}{n} \beta' \quad (9.36)$$

La ecuación (9.36) es "la relación de Herschel".

Para que no exista deformación en la imagen de un objeto, β' debe ser constante, luego deben cumplirse las ecuaciones (9.30) y (9.36), simultáneamente. Pero, excepto para ángulos pequeños (zona paraxial), esto es imposible. Es decir, aunque el punto A del eje tenga una imagen A' estigmática, es imposible que suceda lo mismo con puntos próximos a él situados en el eje y en un plano ortogonal al eje. Esto implica que es imposible obtener simultáneamente imágenes estigmáticas de un pequeño volumen. Este problema se pone de manifiesto muy claramente en el microscopio donde el objeto es muy pequeño pero los ángulos son muy grandes (grandes aperturas). El formar en este caso una imagen perfecta implica hacerlo plano a plano, y no en su totalidad.

IX.6.- CURVATURA DE CAMPO

Cuando se trabaja en Óptica paraxial, se acepta que una lente o un sistema óptico cualquiera produce una imagen plana de un objeto plano, tal y como se muestra en la figura 9.25 a) que representa la formación de la imagen de un objeto OQ por una lente convergente de centro V. Sin embargo, y en ausencia de otras aberraciones, puede verse que la distancia $q = QV$ es algo más grande que la distancia axial OV y, en consecuencia, la distancia $q' = VQ'$ deberá ser algo más pequeña que la distancia imagen axial VO'. Cuando la distancia objeto, q , aumenta, la distancia imagen, q' , disminuye. Si este razonamiento se repite para todos los puntos de objeto OQ, los puntos imagen conjugados deben estar en una superficie curva y la imagen del objeto plano OQ es, en realidad, curva tal y como se muestra en la figura 9.25 b).

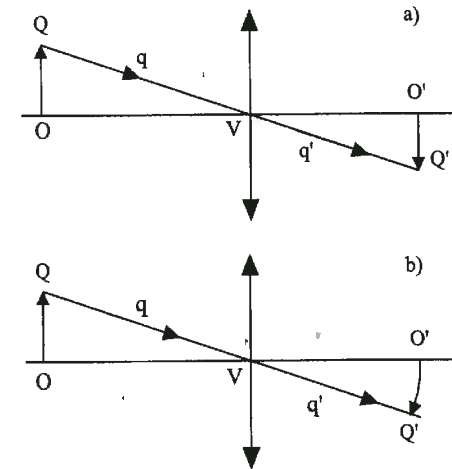


FIGURA 9.25. Curvatura de imagen en una lente delgada.

Este ejemplo nos servirá para introducir una nueva aberración: la curvatura de campo. La superficie curva donde se forma la imagen se llama superficie de Petzval,

según Joseph Petzval, un profesor de Matemáticas de Viena que, en 1843, demostró que, en ausencia de otras aberraciones, la curvatura de campo depende solamente de los radios de curvatura de las superficies de las lentes, de los índices de refracción del vidrio (o los vidrios en el caso de un sistema de varias lentes) y del medio en el que están la/s lente/s. La formación de la superficie de Petzval se puede deducir fácilmente de la figura 9.26 que muestra la refracción de varios pinceles de luz estrechos y oblicuos en una superficie esférica, donde el rayo principal de cada pincel pasa por el centro de curvatura, C, de la superficie. Es obvio que la refracción es idéntica para cada pincel y, por lo tanto, la superficie hará focalizar cada uno de ellos a la misma distancia, es decir, $aa' = bb' = dd'$. También puede verse que el centro C de la superficie es el centro de curvatura de la superficie de Petzval y el radio de esta superficie será:

$$r_p = a'C = b'C = d'C \quad (9.37)$$

Teniendo en cuenta la focal, f' , de la superficie, su radio de curvatura, r , y los índices n y n' , se obtiene que el radio de la superficie de Petzval es:

$$\begin{aligned} r_p &= a'C = a'V + VC = r - f' \\ r_p &= r - \frac{n'r}{n'-n} = \frac{-nr}{n'-n} = f \end{aligned} \quad (9.38)$$

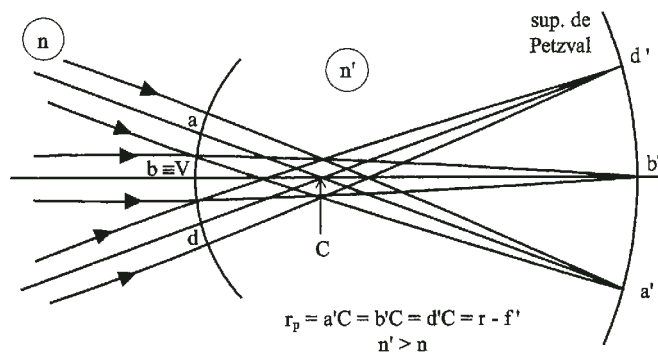


FIGURA 9.26. Superficie de Petzval en una superficie esférica.

IX.6.1.- Teorema de Petzval

Hemos considerado el caso de un objeto lejano (haces paralelos). En el caso general, de un objeto situado a una distancia finita, consideremos la situación descrita en la figura 9.27. Un objeto en forma de esfera centrado en C tendrá su imagen en la superficie de Petzval, también centrada en C. Si el radio de curvatura del objeto y de la imagen se representan por ρ y ρ' respectivamente, entonces:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= OC = OV + VC = r - s \\ \rho' &= O'C = O'V + VC = r - s' \end{aligned} \right\} \quad (9.39)$$

Aplicando ahora la ley de Gauss a la superficie:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \quad (9.40)$$

y operando en esta ecuación, se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{1}{n'\rho'} - \frac{1}{n\rho} = \frac{n - n'}{nn'r} \quad (9.41)$$

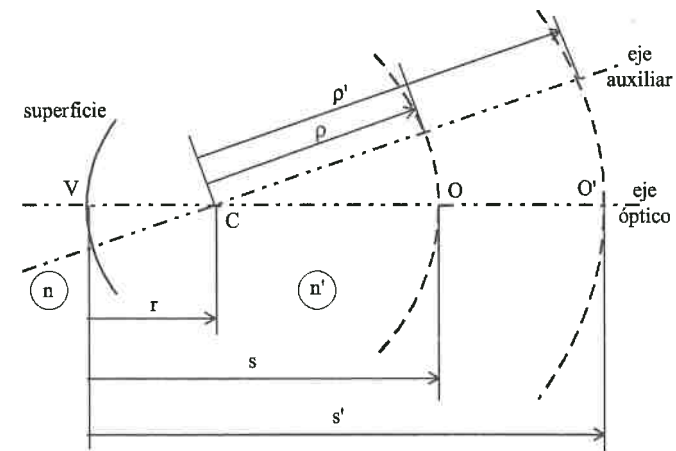


FIGURA 9.27. Teorema de Petzval.

Si en la expresión (9.41) consideramos el objeto en el infinito, entonces $\rho = \infty$ y se obtiene la misma expresión para r_p que obteníamos en la ecuación (9.38):

$$\frac{1}{n'\rho'} = \frac{n - n'}{nn'r} \Rightarrow \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{r_p} = R_p = \frac{n - n'}{nr} \quad (9.42)$$

Si en vez de una superficie, tenemos k superficies, la curvatura de la superficie de Petzval será la suma de las contribuciones de cada superficie con lo que:

$$\frac{1}{n'_k \rho'_k} - \frac{1}{n_1 \rho_1} = \sum_k \frac{n_k - n'_k}{n_k n'_k r_k} \quad (9.43)$$

Esta expresión nos relaciona el radio de curvatura de la imagen con el radio de curvatura del objeto. Si se trata de un objeto lejano, entonces $\rho_1 = \infty$ y la curvatura de la superficie de Petzval es:

$$\frac{1}{\rho'_k} = n'_k \sum_k \frac{n - n'}{nn'r} \quad (9.44)$$

En esta expresión, la cantidad que aparece dentro del sumatorio se denomina suma de Petzval y éste es el factor que debe anularse si se quiere corregir la curvatura de campo. En el caso particular de una lente delgada en aire, la superficie de Petzval tendrá una curvatura:

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1-n}{nr_1} + \frac{n-1}{nr_2} = -\frac{n-1}{r} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = -\frac{1}{nf'}$$

$$r_p = -nf' \Rightarrow R_p = -\frac{P}{n} \quad (9.45)$$

En ausencia de otras aberraciones, la curvatura de campo se define como la distancia entre la superficie de Petzval y el plano imagen paraxial. Para corregir esta aberración se necesita una superficie de Petzval lo más plana posible por lo que r_p debe ser grande. Según la expresión (9.45), en una lente esto se consigue, para una potencia dada, utilizando un índice de refracción alto. Si se utilizan dos lentes, la curvatura de la superficie de Petzval será:

$$R_p = R_{p_1} + R_{p_2} = \frac{1}{-n_1 f'_1} + \frac{1}{-n_2 f'_2}$$

y la curvatura de imagen estará corregida si $R_p = 0$, es decir, si:

$$\frac{-n_1 f'_1 - n_2 f'_2}{n_1 f'_1 n_2 f'_2} = 0 \Rightarrow n_1 f'_1 + n_2 f'_2 = 0 \quad (9.46)$$

Por último, la sagita de la superficie de Petzval en un punto dado situado a una distancia h' del eje (figura 9.28) será:

$$\rho'^2 = h'^2 + (\rho' - x)^2 = h'^2 + \rho'^2 + x^2 - 2x\rho'$$

y despreciando el término en x^2 :

$$h'^2 = 2x\rho' \Rightarrow x = \frac{h'^2}{2\rho'} \Rightarrow x = \frac{h'^2}{2} n'_k \sum_k \frac{n - n'}{nn'r} \quad (9.47)$$

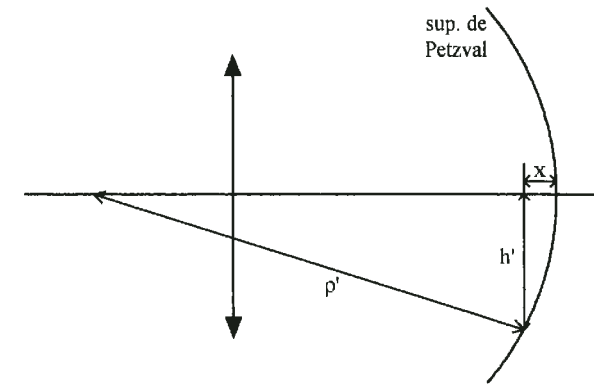


FIGURA 9.28. Sagita de la superficie de Petzval en un punto dado.

El resultado de la curvatura de imagen es que la imagen está desenfocada. Por ello, esta aberración es intolerable en objetivos fotográficos puesto que, en ese caso, la imagen debe situarse en el plano de la película y la curvatura de imagen no permite enfocar nítidamente la imagen. Sin embargo, en instrumentos visuales, si la imagen presenta una concavidad hacia el observador no perjudica tanto ya que, nuestro sentido de la vista, sin acomodar, es decir, enfocando al infinito, nos da la sensación de campos curvos. Por el contrario, si la imagen es convexa, puede resultar muy perjudicial.

La curvatura de imagen de una lente única puede corregirse con un diafragma, si éste limita los rayos que provienen de las distintas partes del objeto de tal manera que las trayectorias de los distintos rayos principales de los diferentes puntos, pasen por distintas zonas de la lente.

Si el sistema presenta astigmatismo, se pueden definir las curvaturas sagital y tangencial y también la curvatura de los puntos medios (círculos de menor confusión). En este caso, el orden de las distintas superficies es el siguiente:

T M S P o bien P S M T

En esta situación se encuentra que la distancia en dioptrías desde la imagen sagital S a la superficie de Petzval P es la mitad de la distancia entre la imagen sagital y la imagen tangencial, es decir PT:PS = 3:1.

Matemáticamente, a cada sistema óptico le corresponde una superficie de Petzval y, si se mantienen fijos los índices de refracción y las potencias de las lentes, la forma de esta superficie no puede modificarse mediante cambios en el factor de forma de las lentes o el espaciamiento entre ellas. Tales alteraciones modifican, sin embargo, la forma de las superficies tangencial y sagital pero siempre de tal forma que la relación PT:PS = 3:1. En la figura 9.29 se pueden ver la situación de las distintas superficies (sagital, tangencial y Petzval) para distintas formas de lentes. Como se puede ver, la superficie de Petzval permanece constante en los distintos casos, mientras que las superficies tangencial y sagital sí que se modifican de un

caso a otro manteniendo siempre la relación en dioptrías mencionada anteriormente. Se puede ver que algunos de estos casos, presentan un astigmatismo considerable (casos 1, 2, 3 y 7) mientras que en los otros dicho astigmatismo se ha reducido notablemente con lo que las tres superficies están mucho más cercanas entre sí y en esos casos, la lente tendrá menor astigmatismo y menor curvatura de campo.

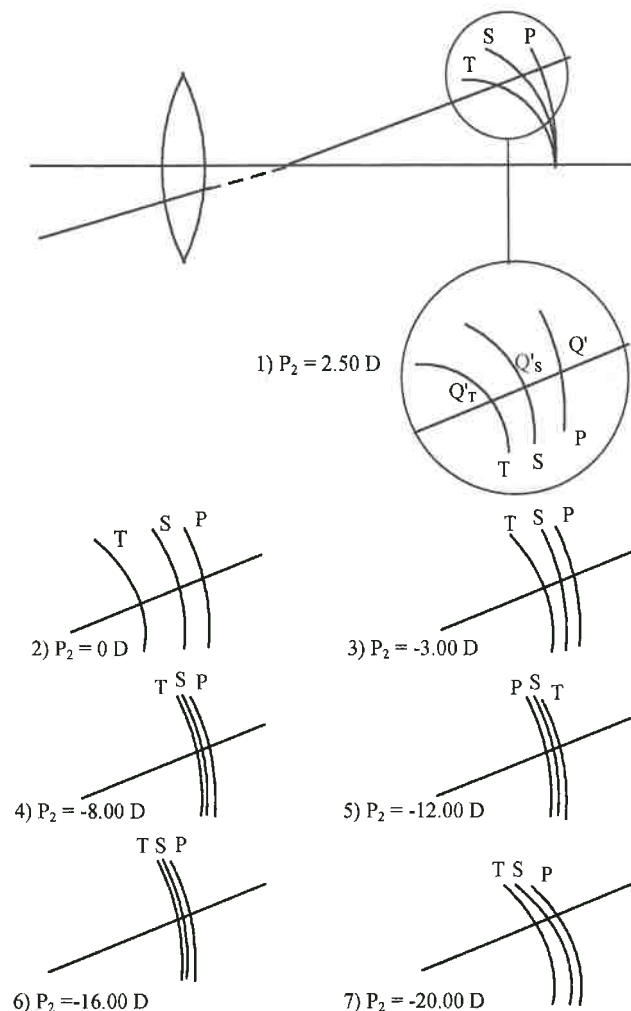


FIGURA 9.29. Relación entre la imagen sagital, la imagen tangencial y la superficie de Petzval para distintas formas de lentes.

IX.7.- DISTORSIÓN

La aberración monocromática que resta, la distorsión, concierne a la incapacidad de una lente o un sistema óptico para reproducir en forma correcta, una imagen que

sea copia del objeto. En este caso, los puntos imagen están en el plano imagen correcto que será plano si todas las aberraciones anteriores están ausentes pero, debido a la distorsión, dichos puntos ocuparán posiciones que estarán o bien más alejadas o bien más cercanas al eje que las que ocuparían si la imagen fuera perfecta. Es decir, que la distorsión es debida a una falta de constancia en el aumento lateral, β' , con lo que la relación entre el tamaño de la imagen y el tamaño del objeto varía con el punto objeto considerado.

Consideremos la figura 9.30 en donde tomamos como objeto un segmento de recta caracterizado por tres puntos cualesquiera, P, Q, y R. Si el sistema estuviera libre de distorsión (y del resto de aberraciones, por supuesto) la imagen de dicho segmento sería la recta P'Q'R' de tal manera que la relación entre ambos sería:

$$\frac{O'P'}{OP} = \frac{O'Q'}{OQ} = \frac{O'R'}{OR} = \beta' \quad (9.48)$$

Pero si suponemos que el aumento crece con la distancia del punto objeto al eje, el aumento que sufre el segmento OR será más grande que el que sufre el segmento OP. Dado que R está más alejado del eje que P, y se obtendría una imagen como la P'Q'R'. Si, por el contrario, el aumento disminuye con la distancia al eje del punto objeto considerado, la imagen del segmento PQR sería P'Q'R'. Todo ello hace que, en un sistema con distorsión, las líneas rectas del objeto que no pasen por el eje se conviertan en líneas curvas en la imagen con la concavidad o convexidad hacia el eje, según el tipo de distorsión que presente.

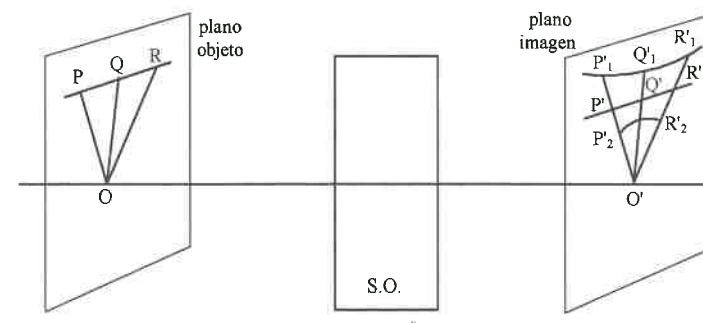


FIGURA 9.30. Distorsión en un sistema óptico.

Si el aumento crece con la distancia al eje del punto objeto considerado, la distorsión se llama negativa o "en corno". Si el aumento disminuye con la distancia al eje del punto objeto considerado, la distorsión se denomina positiva o "en barril" (fig 9.31).



FIGURA 9.31. Distintos tipos de distorsión: en barril y en corsé.

Un sistema que no tiene distorsión se denomina sistema “**ortoscópico**”. El caso más sencillo lo constituye un simple diafragma utilizado para la formación de imágenes como puede verse en la figura 9.32.

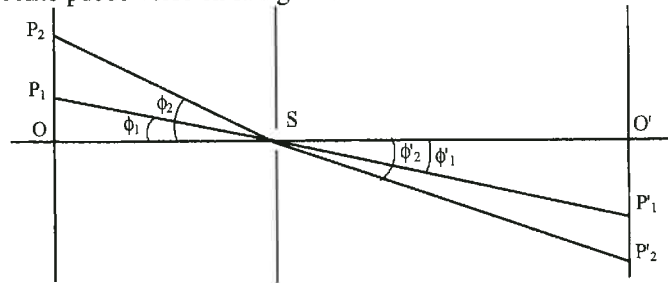


FIGURA 9.32. Una cámara de agujero no presenta distorsión.

Una lente delgada está desprovista de distorsión, pero la introducción de un diafragma delante o detrás de ella, introduce invariablemente distorsión a menos que el diafragma esté pegado a la lente. Si situamos un diafragma entre un objeto y una lente delgada convergente, como muestra la figura 9.33, los pinceles de luz que provienen de las partes más alejadas del objeto realizarán un trayecto más largo hasta la lente que el que realizarían en ausencia del diafragma (representado por la línea punteada). En este caso, la imagen ideal $O'P'$ será reemplazada por una imagen $O'P''$ afectada de distorsión positiva. Las porciones del objeto más alejadas del eje aparecerán comprimidas hacia adentro y se obtiene una distorsión en barril.

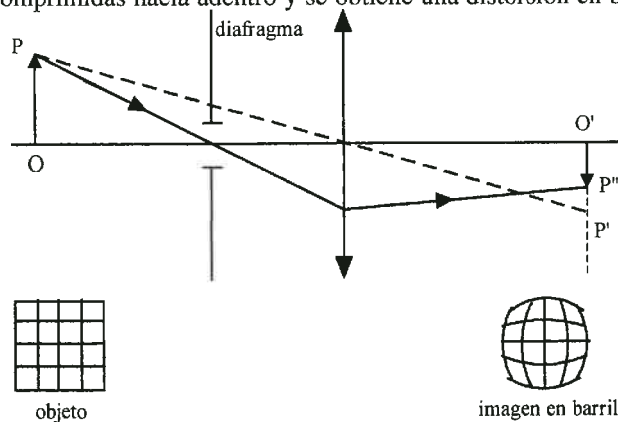


FIGURA 9.33. Formación de una imagen con distorsión en barril en una lente convergente.

Si el diafragma se introduce entre la lente y la imagen (fig. 9.34), los pinceles de luz que provienen de las partes del objeto más alejadas del eje efectuarán un trayecto más corto hasta la lente que el que realizarían en ausencia del diafragma (línea punteada). En este caso, la imagen ideal $O'P'$ será reemplazada por otra $O'P''$ afectada de distorsión negativa o en corsé y la imagen de la cuadrícula aparecerá estirada por los bordes tal y como se ve en la figura. En ambos casos, la distancia $P'P''$ es una medida de la distorsión.

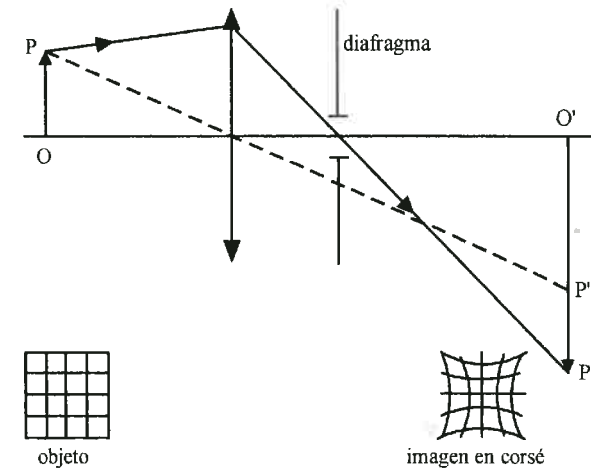


FIGURA 9.34. Formación de una imagen con distorsión en corsé en una lente convergente.

Debido al efecto de la colocación de un diafragma que acabamos de ver, situar uno entre dos elementos ópticos idénticos es una manera muy usual de eliminar la distorsión.

Finalmente consideraremos ahora la figura 9.35. Para que no haya distorsión, debe verificarse que:

$$\frac{O'Q'}{OQ} = \frac{O'P'}{OP} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} u'_Q O'E'}{\operatorname{tg} u_Q OE} = \frac{\operatorname{tg} u'_P O'E'}{\operatorname{tg} u_P OE}$$

$$\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \text{constante} \quad (9.50)$$

Ésta es la condición de las tangentes, dada por Airy en 1827. Una lente o un sistema óptico que verifica la condición de las tangentes está libre de distorsión, es decir, es un sistema ortoscópico como ya hemos mencionado anteriormente.

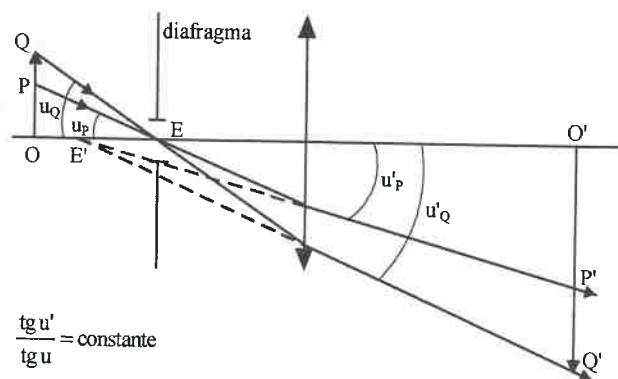


FIGURA 9.35. Sistema ortoscópico o libre de distorsión.

Para terminar con este estudio, diremos que en lentes oftálmicas, la distorsión es problemática en lentes de alta potencia. En los rangos más usuales de potencias medias o bajas, otras aberraciones como el astigmatismo por incidencia oblicua o la curvatura de campo tienen mucha más importancia y, por lo tanto, su corrección debe ser considerada en primer lugar, antes que la distorsión. Además las formas de las lentes de corrección no pueden satisfacer la condición de las tangentes y sólo es posible encontrar un mínimo de distorsión con una forma determinada.

CUESTIONES

1.- ¿Existe algún sistema óptico que cumpla simultáneamente las condiciones de Abbe y Herschel?

Como ya hemos visto, las condiciones de Abbe y Herschel no se pueden cumplir simultáneamente, salvo en la zona paraxial donde los senos de los ángulos se pueden aproximar a los ángulos y, entonces, ambas condiciones se reducen al invariante de Lagrange - Helmholtz. Sin embargo, un espejo plano es un sistema estigmático en todo el espacio, por lo tanto, en este sistema particular, sí que se pueden cumplir ambas condiciones al mismo tiempo.

2.- La imagen formada por un espejo plano, ¿es aplanática?, ¿y ortoscópica?

Como ya hemos mencionado en la cuestión anterior, la imagen dada por un espejo plano es estigmática, eso significa que es aplanática (cumple la relación de los senos de Abbe) y ortoscópica (no tiene distorsión).

3.- El invariante de Lagrange - Helmholtz, ¿asegura el cumplimiento de la condición de los senos de Abbe?, ¿qué relación hay entre ellos?

El invariante de Lagrange - Helmholtz es una relación de invariancia para la zona paraxial, sin embargo la relación de los senos de Abbe es válida para todo el espacio. Ambas se confunden cuando estamos trabajando en Óptica paraxial.

$$\text{Relación de los senos de Abbe} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{n \sin \sigma}{n' \sin \sigma'} = \beta'$$

$$\text{Invariante de Lagrange - Helmholtz} \Rightarrow n y \sigma = n' y' \sigma'$$

En zona paraxial $\sin \sigma \approx \sigma$ y, entonces la relación de los senos de Abbe se convierte en el invariante de Lagrange - Helmholtz.

4.- Enumerar las aberraciones monocromáticas, clasificarlas según sean de punto o de campo y explicar razonadamente las diferencias entre los dos tipos.

Las aberraciones monocromáticas son 5: Aberración esférica, Coma, Astigmatismo, Curvatura de campo y Distorsión. Se pueden clasificar en aberraciones de punto y aberraciones de campo:

Aberraciones de punto

Aberración esférica

Coma

Astigmatismo

Aberraciones de campo

Curvatura de campo

Distorsión

Las aberraciones de punto son aquellas que afectan a la calidad de la imagen de un punto, es decir, en aquellos sistemas ópticos que presenten alguna de estas aberraciones, la imagen de un punto no es un punto sino que es una mancha de luz con una determinada forma según el tipo de aberración que presente. Las aberraciones de campo son aquellas que afectan al campo imagen en su conjunto y a la posición de los distintos puntos imagen dentro de él. En un sistema que esté afectado por alguna de las aberraciones de campo, la imagen de un punto sí es un punto pero su situación dentro del campo imagen no corresponde a la que debería tener si el sistema fuera estigmático. Esto provoca imágenes distorsionadas y/o desenfocadas en parte o en su totalidad.

5.- Indicar las aberraciones de campo que modifican el aumento lateral de un sistema óptico.

De las dos aberraciones de campo (curvatura de campo y distorsión), la que modifica el aumento lateral del sistema óptico es la distorsión, en la cual el aumento depende de la distancia del punto objeto al eje óptico del sistema. Si el aumento lateral crece con la distancia del objeto al eje, se produce una distorsión en corsé y si el aumento disminuye con la distancia al eje, se produce una distorsión en barril. Un sistema libre de distorsión es aquel en el que el aumento se mantiene constante para todas las distancias punto objeto – eje óptico y se denomina sistema ortoscópico.

6.- En una lente delgada en aire, ¿en qué consiste la curvatura de campo?, ¿cómo se traduce este efecto en la imagen?, ¿dónde está la superficie de Petzval y qué radio tiene?, ¿cómo se puede disminuir esta aberración?

La curvatura de campo o curvatura de imagen consiste en que la imagen de un objeto plano formada por un sistema óptico (en este caso, una lente delgada) está situada en una superficie curva denominada superficie de Petzval. La superficie de Petzval y el plano imagen paraxial coinciden en los alrededores del eje óptico puesto que, para puntos del eje, no existe curvatura de campo. Este efecto se traduce en que la imagen aparece desenfocada si queremos visualizarla en una pantalla plana; el centro de la imagen estará enfocado y nítido mientras que los bordes aparecerán desenfocados. En una lente delgada en aire y suponiendo el objeto en el infinito, la superficie de Petzval tiene el vértice en el plano focal imagen y su radio es $r_p = -nf'$, es decir, que la superficie de Petzval tiene una curvatura de distinto signo a la potencia de la lente. Así, si la lente es convergente, $f' > 0$ y $r_p < 0$, la superficie de Petzval será cóncava, y si la lente es divergente $f' < 0$ y $r_p < 0$, la superficie de Petzval será convexa. Para disminuir esta aberración habrá que conseguir una superficie de Petzval lo más plana posible y esto se puede conseguir fabricando la lente con un índice de refracción elevado. También resulta evidente que las lentes con potencias bajas (focales altas) tendrán menos curvatura de imagen que las lentes más potentes.

7.- ¿Qué factor de forma debe tener una lente delgada para que su focal imagen sea la misma tanto en el aire como cuando tiene delante un medio de índice n?

La focal de una lente delgada de índice n_L en aire es:

$$P_a = \frac{1}{f'_a} = (n_L - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

y si tiene delante un medio de índice n , la focal será:

$$P_n = \frac{1}{f'_n} = \frac{(n_L - n)}{r_1} + \frac{(1 - n_L)}{r_2}$$

Si ambas focales deben ser iguales:

$$\frac{(n_L - n)}{r_1} + \frac{(1 - n_L)}{r_2} = (n_L - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \Rightarrow \frac{(n_L - n)}{r_1} = \frac{(n_L - 1)}{r_1} \Rightarrow r_1 = \infty$$

es decir que la primera cara de la lente debe ser plana. Con esta condición, el factor de forma de la lente debe ser:

$$q = \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1} = \frac{\frac{r_2}{r_1} + 1}{\frac{r_2}{r_1} - 1} \xrightarrow{r_1 \rightarrow \infty} q = -1$$

que es el factor de forma buscado.

Capítulo X

ABERRACIONES CROMÁTICAS

X.1.- INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior, las cinco aberraciones de Seidel han sido consideradas en términos de luz monocromática. Existen además aberraciones cromáticas que surgen de manera específica por la utilización de luz blanca que aparecerán debido a la dependencia existente entre el índice de refracción y la longitud de onda. Puesto que el índice de refracción varía con el color, una simple lente no formará una única imagen de un objeto, sino una por cada uno de los colores presente en la fuente de luz empleada.

En el capítulo II vimos que la dependencia del índice con la longitud de onda, en la zona del espectro visible, es una función decreciente. Dado que la potencia de una lente delgada es directamente proporcional al índice, se deduce que la distancia focal crecerá con la longitud de onda. En la figura 10.1(a) está representada esquemáticamente la distribución de los puntos focales a lo largo del eje óptico para distintas longitudes de onda, supuesto un haz plano incidente en una lente convergente. Puesto que no es posible trabajar con la totalidad de longitudes de onda del espectro visible, ya vimos también en el capítulo II, que todo este rango de longitudes de onda quedaba representado por las líneas C (rojo), F (azul) y d (amarillo). En la figura 10.1(b) están representados los focos para estas tres longitudes de onda representativas del espectro visible.

Como resultado de esta descomposición de la luz policromática en las distintas longitudes de onda, el resultado que se observa en la imagen es una mancha de luz coloreada. Así, en el caso de la figura 10.1, si nos situamos más cerca de la lente la periferia de la imagen borrosa tendrá un halo rojizo, si nos alejamos de la lente, en F'_F el centro será azul y el borde rojo, al contrario de lo que ocurre si nos situamos en F'_C .

y si multiplicamos y dividimos por $(n_d - 1)$, obtenemos:

$$\Delta P = \frac{(n_F - n_C)}{n_d - 1} (n_d - 1) X \Rightarrow \Delta P = \frac{P}{v} \quad (10.4)$$

Así pues, en función del número de Abbe y de la potencia de una lente, es posible calcular la variación de la potencia con la longitud de onda. Si lo que queremos es conocer la aberración cromática longitudinal, deduciremos la posición imagen, s' , a partir de la ecuación de Gauss:

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = P \Rightarrow s' = \frac{1}{P + \frac{1}{s}} \quad (10.5)$$

La aberración cromática longitudinal o axial vendrá dada por:

$$ACL = s'_F - s'_C = \frac{1}{P_F + \frac{1}{s}} - \frac{1}{P_C + \frac{1}{s}} = \frac{P_C - P_F}{\left(P_F + \frac{1}{s}\right)\left(P_C + \frac{1}{s}\right)} \quad (10.6)$$

donde, en el numerador aparece la variación de potencia cambiada de signo, y en el denominador, aparecen términos que dependen de las potencias para las longitudes de onda extremas. Ahora bien, como en general la variación de potencia va a ser pequeña, podemos considerar que P_F y P_C se pueden escribir en términos de la potencia para la línea d, P , de la siguiente manera:

$$P_F = P + \delta P \quad P_C = P - \delta P \quad (10.7)$$

y sustituyendo en la ecuación (10.6):

$$ACL = \frac{P_C - P_F}{\left(P + \delta P + \frac{1}{s}\right)\left(P - \delta P + \frac{1}{s}\right)}$$

$$ACL = \frac{-\Delta P}{\left(P + \frac{1}{s}\right)^2 - (\delta P)^2} \quad (10.8)$$

Despreciando el término $(\delta P)^2$ que, en general, será muy pequeño y teniendo en cuenta las ecuaciones (10.4) y (10.5), se obtiene:

$$ACL = \frac{-\Delta P}{\left(P + \frac{1}{s}\right)^2} = -\frac{P}{v} s'^2 \quad (10.9)$$

Cuando se trate de un objeto en el infinito, entonces $s' = f'$ y la ecuación (10.9) quedaría:

$$ACL = -\frac{f'_d}{v} = -\frac{1}{Pv} \quad (10.10)$$

Por otra parte, la aberración cromática de aumento sería:

$$ACT = y'_F - y'_C = \frac{s'_F}{s} y - \frac{s'_C}{s} y = \frac{y}{s} ACL \quad (10.11)$$

En la figura 10.3 se puede ver representada la aberración cromática longitudinal de una lente delgada. Al plano donde la sección es mínima se le llama círculo de menor confusión.

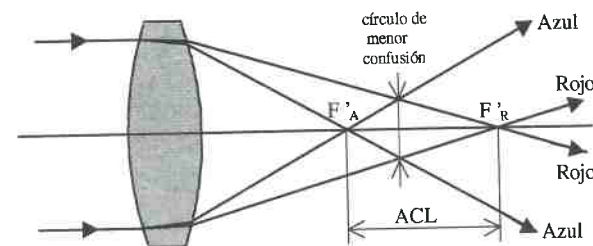


FIGURA 10.3. Aberración cromática de una lente delgada.

X.4.- DOBLETES ACROMÁTICOS DELGADOS. DOBLETE PEGADO

Dado que las aberraciones cromáticas están basadas en la dependencia del índice de refracción con la longitud de onda, las combinaciones de lentes con diferentes tipos de vidrio son uno de los mejores métodos para su corrección. Esta combinación puede ser de contacto o separada.

Si las dos lentes que se combinan para corregir la aberración cromática están en contacto, entonces la potencia total será la suma de las potencias de cada una de las lentes. En concreto si combinamos dos lentes (doblete):

$$P = P_1 + P_2 \quad (10.12)$$

La variación de potencia del doblete será la suma de las variaciones de potencia de cada una de las lentes que lo forman:

$$\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2$$

y si tenemos en cuenta la ecuación (10.4), entonces:

$$\Delta P = \frac{P_1}{v_1} + \frac{P_2}{v_2} \quad (10.13)$$

Para llegar a este resultado estamos suponiendo que las dos lentes que forman el doblete son delgadas y están en contacto. Si queremos que no exista variación de potencia con la longitud de onda:

$$\frac{P_1}{v_1} + \frac{P_2}{v_2} = 0 \quad (10.14)$$

que es la condición de acromatismo de un doblete pegado. De esta ecuación y de la ecuación (10.12) se pueden deducir las potencias que deben tener cada una de las lentes para conseguir el doblete acromático buscado:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{Pv_1}{v_1 - v_2} \\ P_2 &= -\frac{Pv_2}{v_1 - v_2} \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

Dado que los números de Abbe son siempre positivos, de la ecuación (10.15) se deduce que las potencias de las dos lentes deben tener signos contrarios. Supongamos que la potencia total del doblete es positiva, $P > 0$. Podemos distinguir dos casos:

- que la primera lente sea de vidrio flint y la segunda de vidrio crown, en cuyo caso $v_1 < v_2$ y de la ec. (10.15) deducimos que $P_1 < 0$ y $P_2 > 0$,
- que la primera lente sea de vidrio crown y la segunda de vidrio flint, en cuyo caso $v_1 > v_2$ y de la ec. (10.15) deducimos que $P_1 > 0$ y $P_2 < 0$.

En ambos casos la lente positiva es crown y la negativa flint. En la figura 10.4 se puede ver el esquema de un doblete acromático pegado con el trazado de rayos correspondiente y en la figura 10.5 se muestran algunos de los dobletes más utilizados, siendo de entre todos ellos el más usado el de Fraunhofer. La utilización de dobletes con la primera lente tipo Crown es más usual debido a la mayor resistencia de estos al uso.

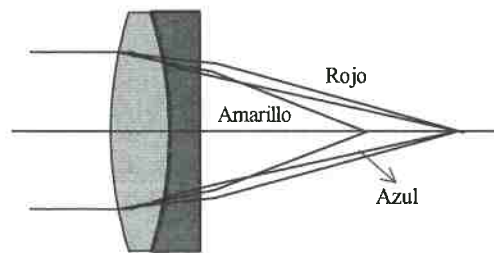


FIGURA 10.4. Doblete acromático pegado.

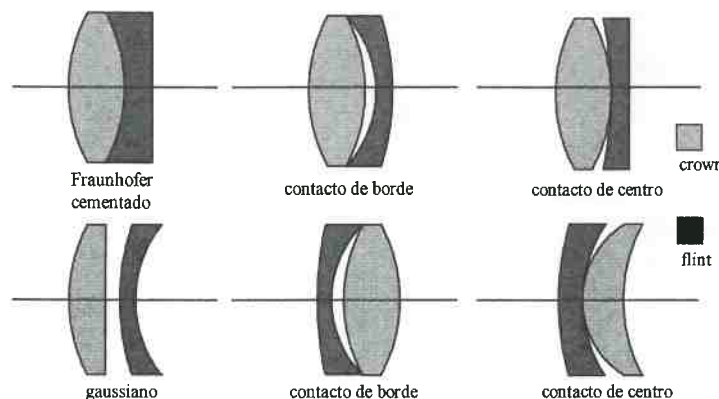


FIGURA 10.5. Algunos tipos de dobletes acromáticos.

Cuando se utilizan dobletes para corregir la aberración cromática, hay que tener cuidado pues en ocasiones presentan aberraciones monocromáticas importantes. El doblete de Fraunhofer cementado por su forma convexo plana puede ser, por otra parte, adecuado para corregir la aberración esférica y el coma.

X.5.- DOBLETE ACROMÁTICO SEPARADO

Supongamos ahora que tenemos dos lentes delgadas separadas por una distancia "e"; la potencia será ahora:

$$P = P_1 + P_2 - eP_1P_2 \quad (10.16)$$

La variación de potencia debido al índice de refracción será:

$$\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2 - e(P_1\Delta P_2 + P_2\Delta P_1) \quad (10.17)$$

Recordando ahora el valor de ΔP para cada lente (ec. 10.4) e imponiendo la condición $\Delta P = 0$ obtendremos la condición de acromatismo para el doblete separado:

$$0 = \frac{P_1}{v_1} + \frac{P_2}{v_2} - eP_1P_2 \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) \quad (10.18)$$

Con esta ecuación y la ec. (10.16) podemos obtener el valor de cada una de las potencias de las lentes conociendo el valor de "e". Si las dos lentes son del mismo vidrio, las dispersiones son iguales y entonces:

$$0 = \frac{P_1}{v} + \frac{P_2}{v} - eP_1P_2 \frac{2}{v}$$

$$0 = P_1 + P_2 - 2eP_1P_2 \Rightarrow e = \frac{P_1 + P_2}{2P_1P_2} = \frac{f'_1 + f'_2}{2} \quad (10.19)$$

La ecuación (10.18) que expresa el acromatismo para un doblete separado, asegura que la potencia total no varía al cambiar la longitud de onda. Dado que la posición de los planos principales depende de las focales de cada lente, cada posición imagen para cada longitud de onda se medirá desde sitios distintos y, por tanto no queda corregida la aberración cromática longitudinal. Sin embargo, puesto que el aumento lateral viene dado por la expresión:

$$\beta' = 1 - \frac{a'}{f'}$$

si las distancias a' de las longitudes de onda C y F son iguales y la potencia también, las imágenes obtenidas serán ambas del mismo tamaño y, por tanto, se habrá corregido la aberración cromática de aumento (fig. 10.5). Para corregir la aberración cromática de posición (fig. 10.6) las potencias para las longitudes de onda C y F no pueden ser iguales.

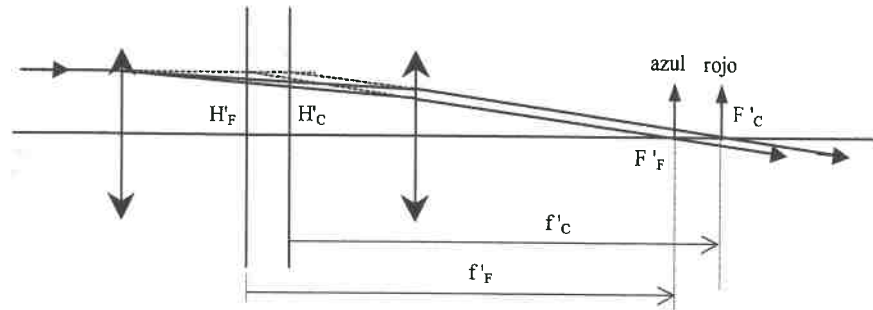


FIGURA 10.6. Doblete separado con corrección de AC de aumento.

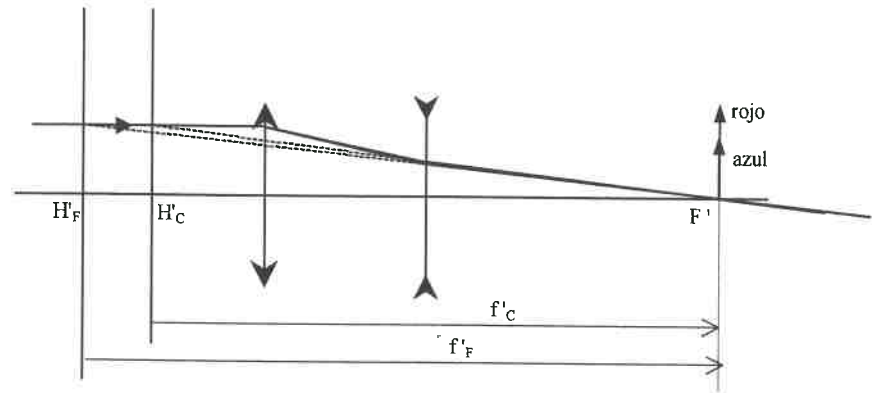


FIGURA 10.7. Doblete separado con corrección de AC de posición.

Existe la posibilidad de que una (o las dos) de las lentes del doblete separado sea, a su vez, un doblete pegado. En este caso, al calcular los parámetros del doblete separado, se usan como índice n y número de Abbe v del doblete pegado los valores equivalentes:

$$n = \frac{P_1 + P_2}{\frac{P_1}{n_1} + \frac{P_2}{n_2}} \quad v = \frac{P_1 + P_2}{\frac{P_1}{v_1} + \frac{P_2}{v_2}} \quad (10.20)$$

donde P_1 , n_1 y v_1 son los parámetros de la primera lente del doblete pegado, P_2 , n_2 y v_2 son los parámetros de la segunda lente del doblete pegado. Con esta operación, se pueden conseguir valores equivalentes de n y v que no corresponden a ningún vidrio real existente.

X.6.- ABERRACIONES EN VISIÓN

Evidentemente todas las aberraciones estudiadas hasta ahora, tanto las cromáticas como las monocromáticas, no tienen la misma importancia para los procesos de visión o en el diseño de las lentes compensadoras.

En lo que se refiere a las aberraciones monocromáticas, tanto la aberración esférica, como el coma, el astigmatismo, la curvatura de campo y la distorsión influyen como ya hemos visto en la calidad de la imagen final. Todas, excepto la aberración esférica, son aberraciones fuera de eje y, si bien la colocación adecuada de diafragmas puede eliminar la presencia de alguna de ellas, esto no es siempre viable cuando el sistema implicado es el ojo. A continuación vamos a ver la influencia en el proceso de la visión de cada una de las aberraciones y como paliar sus posibles efectos.

- **Aberración esférica.** Como hemos visto, la aberración esférica es el mayor problema en sistemas ópticos de gran apertura. Debido al pequeño diámetro de la pupila, el haz de luz incidente en el ojo está bastante limitado de modo que el ojo se puede considerar como un sistema óptico de pequeña apertura. Así pues, la aberración esférica es relativamente poco importante en el ojo, aunque puede hacerse más importante cuando la pupila está dilatada. La agudeza visual o el poder resolutorio del ojo quedan afectados por esta aberración cuando la pupila es mayor de 2,5 mm de diámetro.

En la reducción de los efectos de la aberración esférica en el ojo intervienen otros factores. Las zonas periféricas de la córnea se alejan de la forma esférica haciéndose más planas de modo que refractan menos que la porción central. La parte central del cristalino refracta más que sus zonas exteriores debido a un pequeño aumento del índice de refracción en su centro. También, la luz incidente en la córnea periférica contribuye menos a la sensación luminosa de la imagen retiniana, dando así mayor peso a la acción de la córnea central.

El cambio de curvatura puede aplicarse a una lente oftálmica para reducir su aberración esférica igualando la cantidad de refracción dada por ambas superficies de la lente. En general, la aberración esférica sólo es importante en lentes oftálmicas para potencias de +10 D o más. En tal caso las superficies asféricas, pueden usarse para reducir la aberración. Por último, hay que tener en cuenta que esta afirmación no es cierta para las lentes de contacto o las lentes intraoculares.

- **Astigmatismo.** El astigmatismo oblicuo en el ojo, debido a rayos que entran fuera de eje es relativamente poco importante por varias razones. Su efecto es reducido por el aplanamiento y el bajo poder resolutorio de la retina periférica. La curvatura de la retina, además, coloca el círculo de mínima confusión donde la calidad de la imagen es óptima. Por supuesto el ojo puede sufrir también de astigmatismo refractivo debido a pérdidas de esfericidad de la córnea y, en menor grado, del cristalino. Cuando ambos tipos de astigmatismo están presentes, la compensación se lleva a cabo usando cambios de curvatura en la lente oftálmica con una superficie tórica.

En cambio, la refracción de los rayos oblicuos a través de una lente oftálmica conducen a la más importante de todas las aberraciones. El astigmatismo oblicuo es normalmente el de mayor interés en el diseño de lentes oftálmicas y usualmente se controla modificando la forma de la lente o con el uso de superficies asféricas.

- **Coma.** Como la aberración esférica, el coma es una aberración dependiente de la apertura y se beneficia del esfuerzo para reducir el astigmatismo oblicuo. No es importante en el ojo por las mismas razones presentadas en nuestra discusión sobre el astigmatismo. Asimismo, en las lentes oftálmicas, tampoco es de gran importancia debido a que los radios de curvatura utilizados son mucho mayores que el diámetro pupilar.
- **Curvatura de campo.** Esta aberración se reduce en el esfuerzo de corregir el astigmatismo oblicuo usando una lente con forma de menisco. No es una aberración importante del ojo. La curvatura de la superficie retiniana ayuda a corregir la curvatura en la imagen. Como decíamos anteriormente, la reducida resolución disponible en la retina periférica ayuda a superar el efecto de empeoramiento en la calidad de la imagen. Algunas curvaturas de campo pueden simplemente compensarse por la acomodación en el ojo hipermetrópico.

La curvatura de campo puede ser importante en la visión periférica a través de una lente oftálmica, debido a que los rayos forman grandes ángulos con el eje óptico. Generalmente está asociada al astigmatismo por incidencia oblicua y junto con él, es de gran importancia en el diseño de lentes oftálmicas, mejorando ambas aberraciones al modificar la forma de la lente aunque las soluciones para anular cada una de ellas no son exactamente las mismas.

- **Distorsión.** Hay poca distorsión en el ojo en sí. Esta aberración no es importante por las mismas razones dadas antes para el astigmatismo ocular. Sin embargo, la distorsión puede aparecer cuando se observa a través de la periferia de lentes esféricas de alta potencia. Las lentes positivas muestran cierta distorsión en corsé mientras que las negativas exhiben distorsión en barril. Cuando esta aberración existe, puede ser disminuida con cambios drásticos en la curvatura de la lente. Tales lentes son difíciles de hacer y poco estéticas, por lo que la distorsión es normalmente ignorada en el diseño de lentes oftálmicas con superficies esféricas. Para mejorar las prestaciones de las lentes en lo que respecta a esta aberración, se utilizan las superficies asféricas.
- **Aberración cromática.** Como hemos visto en este último capítulo, la aberración cromática resulta cuando la luz incidente es policrómica, lo cual es casi siempre el caso. En el ojo, la separación entre el azul y el rojo del espectro en el eje óptico es de aproximadamente entre 1,5 y 2 D cuando el amarillo-verde o la parte más sensible del espectro está enfocada en retina. Normalmente considerada una desventaja, la aberración cromática en el ojo puede tener también un uso práctico. Debido a que la luz azul está enfocada más cerca de la córnea que la luz roja, su presencia puede ayudar a obtener una evaluación cualitativa de la presencia de miopía o hipermetropía. Si un filtro delante del ojo, tal como un vidrio de cobalto, admite sólo luz azul y roja dentro del ojo, un hipermetrope verá un centro azul en un campo rojo, mientras un miope verá un centro rojo en un campo azul. Además, la aberración cromática del ojo permite minimizar el esfuerzo en la acomodación ya que, generalmente,

el ojo focaliza en la retina las radiaciones rojas para los objetos lejanos y las azules para los objetos próximos.

La dispersión cromática no tiene mayor consideración en lentes de baja potencia, pero en lentes de alta potencia puede conducir a la observación de bordes laterales coloreados en la imagen cuando la visión se realiza en las partes externas (periféricas) de la lente. Esta condición existe cuando se usan vidrios de alto índice, como flint, en ciertos tipos de bifocales.

El grado de dispersión cromática está determinado por el material de la lente y no le afectan los cambios de curvatura de la lente. Puede compensarse mediante el uso de un doblete, pero el espesor final y el peso de la lente lo hace poco práctico en las lentes oftálmicas.

CUESTIONES

1.- Calcular la relación entre los números de Abbe de las lentes que forman un doblete acromático pegado teniendo en cuenta que la potencia de una de ellas es de 5 D y la potencia total del doblete es de 2 D.

Puesto que la potencia total del doblete es de 2 D y la potencia de una de las lentes que lo componen es de 5 D, la potencia de la otra lente será:

$$P = P_1 + P_2 \Rightarrow 2 = 5 + P_2 \Rightarrow P_2 = -3D$$

Por otra parte, aplicando la condición de acromatismo en un doblete pegado se obtiene que la relación entre los números de Abbe de las dos lentes del doblete debe ser:

$$\frac{P_1}{V_1} + \frac{P_2}{V_2} = 0 \Rightarrow \frac{5}{V_1} + \frac{-3}{V_2} = 0 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{3}$$

2.- Una lámina plano paralela en aproximación paraxial, ¿qué aberraciones presenta?

En zona paraxial, la lámina plano paralela es un sistema estigmático (como ya hemos visto en el capítulo 5) ya que produce un desplazamiento axial que es independiente del ángulo de incidencia. Pero este hecho es cierto cuando la lámina opera con luz monocromática, si se emplea luz policromática existirá una dispersión cromática debido a la refracción en las dos caras de la lente. Esto se pone de manifiesto en la expresión para el desplazamiento axial $L = d(1 - 1/n)$ que, como vemos depende del índice de refracción y, por tanto, de la longitud de onda. Esto significa que las imágenes correspondientes a las distintas longitudes de onda estarán separadas entre sí y habrá una cierta aberración cromática de posición. Ahora bien como la lámina (sumergida) no produce desviación, sino únicamente un desplazamiento de los rayos de luz, es cierto que las distintas longitudes de onda saldrán separadas entre sí pero todas ellas paralelas a la dirección inicial del rayo.

3.- Una lámina plano paralela de vidrio crown 523:587 produce, en condiciones paraxiales, un desplazamiento axial de 5 mm. Sabiendo que el producto de los índices $n_C n_F = 2.33$, calcular la aberración cromática longitudinal producida por la lámina. Calcular asimismo los índices n_C y n_F del vidrio.

Sabiendo el desplazamiento producido y el índice de refracción para la línea d, podemos conocer el espesor de la lámina:

$$L = d \left(1 - \frac{1}{n} \right) \Rightarrow 5 = d \left(1 - \frac{1}{1.523} \right) \Rightarrow d = 14.56 \text{ mm}$$

La aberración cromática longitudinal producida por la lámina será:

$$ACL = L_F - L_C = d \left(1 - \frac{1}{n_F} \right) - d \left(1 - \frac{1}{n_C} \right) = d \left(\frac{1}{n_C} - \frac{1}{n_F} \right) = d \frac{n_F - n_C}{n_F n_C}$$

Y teniendo en cuenta la expresión del número de Abbe:

$$V = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C} \Rightarrow 58.7 = \frac{1.523 - 1}{n_F - n_C} \Rightarrow n_F - n_C = 0.0089$$

sustituyendo ahora en la expresión para calcular la ACL:

$$ACL = 14.56 \frac{0.0089}{2.33} = 0.06 \text{ mm}$$

Por otra parte, para calcular los índices para las líneas C y F:

$$\left. \begin{array}{l} n_F - n_C = 0.0089 \\ n_F n_C = 2.33 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} n_F = 1.531 \\ n_C = 1.522 \end{array}$$

4.- En un doblete separado, la condición $\Delta P = 0$ implica corregir el cromatismo de posición, ¿cierto o falso?, ¿por qué?

Es falso. La condición $\Delta P = 0$ que expresa el acromatismo para un doblete separado, asegura que la potencia total no varía al cambiar la longitud de onda. Dado que la posición de los planos principales depende de las focales de cada lente, cada posición imagen para cada longitud de onda se medirá desde sitios distintos y, por tanto **no queda corregida la aberración cromática longitudinal**. Sin embargo, puesto que el aumento lateral viene dado por la expresión:

$$\beta' = 1 - \frac{a'}{f'}$$

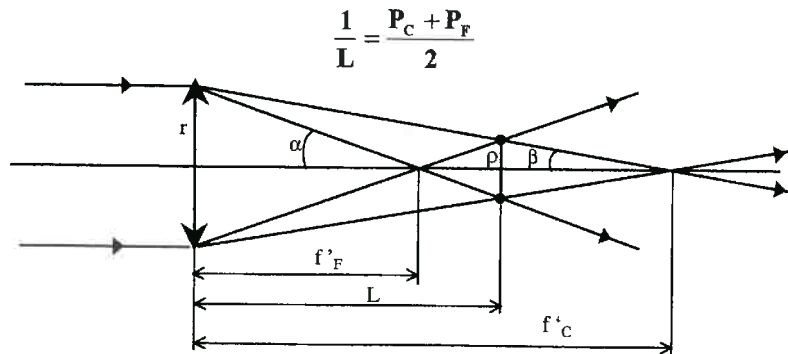
si las distancias a' de las longitudes de onda C y F son iguales y la potencia también, las imágenes obtenidas serán ambas del mismo tamaño y, por tanto, se habrá corregido **la aberración cromática de aumento**.

5.- Para conseguir un doblete acromático pegado de 5 D se combinan dos lentes cuyos números de Abbe son 64 y 32. Calcular las potencias de las dos lentes.

Utilizando las expresiones de la ecuación (10.16) que nos permiten calcular las potencias de las dos lentes del doblete y sustituyendo los datos:

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = \frac{P V_1}{V_1 - V_2} \\ P_2 = -\frac{P V_2}{V_1 - V_2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} P_1 = \frac{5 \times 64}{64 - 32} = 10D \\ P_2 = -\frac{5 \times 32}{64 - 32} = -5D \end{array}$$

6.- Demostrar que en una lente delgada con objeto en el infinito y que trabaja con luz blanca, el círculo focal mínimo está situado a una distancia L de la lente tal que:



De la figura se deduce que:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{r}{f'_F} = \frac{\rho}{L - f'_F} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{r}{f'_C} = \frac{\rho}{f'_C - L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow r = \rho \frac{f'_F}{L - f'_F} = \rho \frac{f'_C}{f'_C - L}$$

$$\frac{L - f'_F}{f'_F} = \frac{f'_C - L}{f'_C} \Rightarrow L(f'_F + f'_C) = 2f'_F f'_C \Rightarrow \frac{1}{L} = \frac{f'_F + f'_C}{2f'_F f'_C}$$

$$\frac{1}{L} = \frac{P_C + P_F}{2}$$

7.- Una lente delgada de 5 D fabricada con un material 580:410 trabaja con un haz paralelo de luz blanca. El círculo focal mínimo está situado a 199 mm de la lente. Calcular el tamaño de dicho círculo si la lente tiene 5 cm de diámetro.

De la cuestión anterior sabemos que el círculo focal mínimo se forma a una distancia L de la lente tal que:

$$\frac{1}{L} = \frac{P_C + P_F}{2} \Rightarrow P_C + P_F = \frac{2}{L}$$

Por otra parte, también sabemos que la diferencia de potencias para las longitudes de onda C y F se puede obtener por la expresión:

$$P_F - P_C = \frac{P}{v}$$

Sumando ambas ecuaciones y sustituyendo los valores numéricos:

$$2P_F = \frac{2}{L} + \frac{P}{v} \Rightarrow P_F = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{0.199} + \frac{5}{41} \right) = 5.086 \text{ D} \Rightarrow f'_F = 19.66 \text{ cm}$$

También de la cuestión anterior, la relación entre el tamaño de la lente, r , y el tamaño del círculo focal mínimo, ρ , viene dado por la expresión:

$$r = \rho \frac{f'_F}{L - f'_F} \Rightarrow \rho = \frac{r(L - f'_F)}{f'_F}$$

$$\rho = \frac{2.5(19.9 - 19.66)}{19.66} \Rightarrow \rho = 0.31 \text{ mm}$$

BIBLIOGRAFÍA

- "Óptica". E. Hecht y A. Zajac. Ed. Fondo Educativo Interamericano, 1977.
- "Óptica". J. Casas. Universidad de Zaragoza, 1994.
- "Fundamentals of Optics". F. A. Jenkins and H. E. White. Ed. McGraw-Hill, 1981.
- "The Principles of Ophthalmic Lenses". M. Jalie. Ed. A.B.D.O, 1988.
- "Optique" Cours de Physique I. A. Moussa, P. Ponsonnet. Ed. A. Desvigne, 1977.
- "Optique" Optique Géométrique, Matricielle et Ondulatoire. J.PH. Pérez. Ed. Masson, 1984.
- "Basic Optics and Optical Instruments". Bureau of Naval Personnel. Ed. Dover, 1969.
- "Physique pratique. Tome 3: Optique". J. Berty, A. Escaut, P. Marchand, L. Martin, A. Oustry. Ed. Librairie Vuibert, 1974.
- "Elements of Modern Optical Design". D.C. O'Shea. Ed. John Wiley & Sons, 1985.
- "Geometrical and Physical Optics". R.S. Longhurst. Ed. Longman, 1986.
- "Clinical Optics". T.E. Fannin, T. Grosvenor. Ed. Butterworths, 1987.
- "Optical Instrumentation". B.N. Begunov, N.P. Zakaznov, S.I. Kiryushin, V.I. Kuzichev. Ed. Mir, 1988.
- "Optics and Vision". L.S. Pedrotti, F.L. Pedrotti, S.J. Ed. Prentice Hall, 1998.
- "Curso de introducción a la Óptica Geométrica". F. Mateos, L. Carretero, A. Fimia, R. Fuentes, I. Pascual. Universidad de Alicante, 1996.
- "Dictionnaire de Physique". J.P. Mathieu, A. Kastler, P. Fleury. Ed. Masson, 1991.
- "Comprendre et appliquer l'Optique. 1- Optique Géométrique". M. Gabriel, C. Ernst, J. Grange. Ed. Masson, 1992.