Introducción a la Estadística y Probabilidad

Tema 6. Variable aleatoria unidimensional

MANUEL MONGE, Ph.D.

Departamento de Economía Aplicada y Métodos Cuantitativos
Facultad de Derecho, Economía y Gobierno
Universidad Francisco de Vitoria

Contenido

1. Distribución de probabilidad

Distribución de probabilidad

- Una distribución de probabilidad define o describe las probabilidades de que suceda cierta gama de resultados posibles.
- En otras palabras, lista de todos los resultados de un experimento y la probabilidad asociada a cada uno de ellos.

1. Distribución de probabilidad

Características de un distribución de probabilidad

1. La probabilidad de un resultado en particular se encuentra entre 0 y 1.
2. Los resultados son eventos mutuamente excluyentes.
3. La lista es exhaustiva. Por lo tanto, la suma de las probabilidades de los diversos eventos es igual a 1.

Ejemplo - Distribución de probabilidad

¿Cómo generar una distribución de probabilidad?
Suponga que le interesa conocer el número de caras que aparecen en tres lanzamientos de una moneda. Los resultados para este experimento posibles son:

- Cero caras;
- Una cara;
- Dos caras;
- Tres caras.

1. Distribución de probabilidad

Hay ocho (8) resultados posibles:

Resultado posible	Lanzamiento de la moneda: Primero	Segundo	Tercero	Número de caras
1	Cruz	Cruz	Cruz	0
2	Cruz	Cruz	Cara	1
3	Cruz	Cara	Cruz	1
4	Cruz	Cara	Cara	2
5	Cara	Cruz	Cruz	1
6	Cara	Cruz	Cara	2
7	Cara	Cara	Cruz	2
8	Cara	Cara	Cara	3

Para obtener el conteo de resultados puede aplicar la fórmula de la multiplicación vista en el tema 5

$\textit{Número total de disposiciones} = (m) \cdot (n) \cdot (o) = (2) \cdot (2) \cdot (2) = 8$

Es decir, podemos obtener con el lanzamiento de una moneda 3 veces ocho posibles resultados.

1. Distribución de probabilidad

Resultado posible	Lanzamiento de la moneda			Número de caras
	Primero	Segundo	Tercero	
1	Cruz	Cruz	Cruz	0
2	Cruz	Cruz	Cara	1
3	Cruz	Cara	Cruz	1
4	Cruz	Cara	Cara	2
5	Cara	Cruz	Cruz	1
6	Cara	Cruz	Cara	2
7	Cara	Cara	Cruz	2
8	Cara	Cara	Cara	3

- Observe que el resultado **cero caras** ocurre una vez, por tanto se presentó una de ocho veces (1/8), [P(0 caras)=0,125];
- **Una cara**, tres veces (3/8), [P(1 cara)=0,375];
- **Dos caras**, tres veces (3/8), [P(2 caras)=0,375];
- **Tres caras**, una sola vez (1/8), [P(3 caras)=0,125].

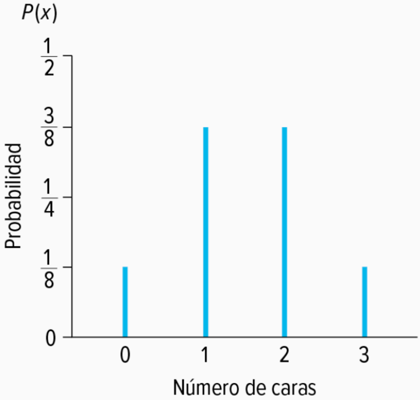
Por tanto, la suma de todas las probabilidades mutuamente excluyentes es igual a 1.

1. Distribución de probabilidad

Número de caras, x	Probabilidad del resultado, $P(x)$
0	$\frac{1}{8} = 0.125$
1	$\frac{3}{8} = 0.375$
2	$\frac{3}{8} = 0.375$
3	$\frac{1}{8} = 0.125$
Total	$\frac{8}{8} = 1.000$

Distribución de probabilidad de los eventos relativos a cero, una, dos y tres caras en tres lanzamientos de una moneda.

1. Distribución de probabilidad



Presentación gráfica del número de caras que resultan de tres lanzamientos de una moneda y la probabilidad correspondiente.

2. Variables aleatorias

Variable Alatoria

- En cualquier experimento aleatorio, el resultado se presenta al azar; así, a este se le denomina **variable aleatoria**.
- Por ejemplo, lanzar un dado constituye un experimento ya que puede ocurrir cualquiera de los seis resultados posibles (1, 2, 3, 4, 5, 6).
- Otro ejemplo podría ser el número de bombillas defectuosas producidas en una hora en la fábrica de Philips Company.
- Por tanto, definimos variable aleatoria como la cantidad que resulta de un experimento que, por azar, puede adoptar diferentes valores.

2. Variables aleatorias

En el tema 5 vimos que en el estudio de la probabilidad se utilizan tres palabras clave:

Experimento

Proceso que induce a que ocurra una y solo una de varias posibles observaciones.

Resultado

Ocurrencia particular de un experimento.

Evento

Conjunto de uno o más resultados de un experimento.

Ejemplo:

	
Experimento	Lanzar un dado
Todos los posibles resultados	Se observa un 1 Se observa un 2 Se observa un 3 Se observa un 4 Se observa un 5 Se observa un 6
Algunos posibles eventos	Se observa un número par Se observa un número mayor que 4 Se observa un 3 o un número menor

En el caso del experimento del lanzamiento de un dado,

- Hay 6 posibles resultados.
- Existen varios posibles eventos.

Ejemplo - Variable Aleatoria

Considere que llevamos a cabo un experimento de lanzar al aire una moneda.

- Definimos el **espacio muestral** como el conjunto de sucesos elementales que representan los resultados posibles de un experimento (E=cara, cruz).
- Llamamos **variable aleatoria (X)** a la función que asocia a cada uno de los sucesos del espacio muestral un valor numérico perteneciente a los números reales (en nuestro ejemplo sería el número de caras o de cruz que aparecen en los tres lanzamientos).
- En el lanzamiento de una moneda, se puede convenir en que el **suceso** cara venga representado por 'H' y el **suceso** cruz por 'T'.
- Por tanto,

$$E = [cara, cruz]$$
$$X : E \rightarrow R$$
$$X(Cruz) = 0; X(Cara) = 1$$

2. Variables aleatorias

Variable aleatoria discreta

- Una variable aleatoria es **discreta** cuando toma un **número finito de valores** (o infinito numerable).
- Por tanto, adopta solo cierto número de valores separados.
- La probabilidad de una variable aleatoria discreta puede resumirse con una **distribución de probabilidad** denominada *'Función de cuantía'*.

2. Variables aleatorias

Variable aleatoria discreta

- **Distribución de probabilidad**: Función de cuantía

$$P(X = x_i) = P_i$$

- **Propiedades**
  1. $P_i \geq 0$
  2. $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$
  3. $P(a < X \leq b) \neq P(a \leq X \leq b) \neq P(a < X < b) \neq P(a \leq X < b)$
- **Función de distribución**: (escalonada)

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{xi=x1}^{x} P(X = x_i)$$

2. Variables aleatorias

Ejemplo 1 - Variable aleatoria discreta

El Banco Santander cuenta el número de tarjetas de crédito pertenecientes a un grupo de clientes. Los datos se resumen en la siguiente tabla de frecuencias relativas:

Número de tarjetas de crédito	Frecuencia relativa
0	0.3%
1	.10%
2	.18%
3	.21%
4 o más	.48%
Total	1.00%

En esta tabla de frecuencias, el número de tarjetas es la **variable aleatoria discreta**.

A veces, una variable aleatoria discreta asume valores fraccionarios o decimales. Estos deben estar separados por cierta distancia (un ejemplo podría ser que una tienda ofrezca unos cupones de descuento de 10, 15 y 25 %. Podríamos calcular la probabilidad de que un cliente usara el cupón de 10 % en oposición a uno de 15 o de 25 %.

2. Variables aleatorias

Variable aleatoria continua

- Una variable aleatoria **continua** puede asumir un número infinito de valores dentro de cierto rango.
- Es decir, es continua cuando puede tomar valores en un conjunto **infinito no numerable**.
- Se mide en una escala o un intervalo continuos.
- La probabilidad de una variable aleatoria continua puede resumirse con una **distribución de probabilidad** denominada *'Función de densidad'*.

Variable aleatoria continua

- **Distribución de probabilidad**: Función de densidad $\rightarrow f(x)$.
- **Propiedades**:
    1. $f(x) \geq 0, -\infty < x < +\infty$
    2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1$
- **Función de distribución**: (continua)
  $\rightarrow F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx \leftrightarrow F'(x) = f(x)$

Ejemplo - Variable aleatoria continua

La demanda semanal de gasolina de una estación de servicio es una variable aleatoria que puede tomar valores hasta 5.000 litros. Si designamos por X dicha variable, en miles de litros, y su función de densidad viene dada por:

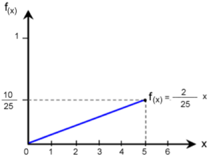
$f(x) = kx; \qquad 0 < x < 5$

$f(x) = 0; \qquad \textit{resto}$

1) Función de densidad

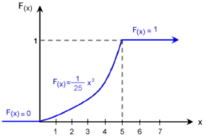
f(x)= 2/25x 0<x<5

f(x)= 0 resto



2) Función de distribución

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0 & X<0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} \frac{2}{25}xdx = \frac{1}{25}x^2 & 0 \le x < 5 \\ 1 & 5 \le x \end{cases}$$



3. Características de una variable aleatoria

3. Características de una variable aleatoria

- La información que proporciona una distribución de probabilidad se suele resumir en unas pocas medidas que caracterizan a la distribución de probabilidad.
- Estas medidas son **Media** (o **esperanza matemática**) y la **Varianza**.

3. Características de una variable aleatoria

Media o Esperanza Matemática de una distribuación de probabilidad

- Es un valor típico para representar la posición central de una distribución de probabilidad.
- También es el valor promedio de la variable aleatoria.
- También puede recibir el nombre de **valor esperado**.
- Se trata de un promedio ponderado, en el cual los posibles valores de una variable aleatoria se ponderan con sus correspondientes probabilidades de ocurrir.
- Se representa por $E(X)$ o μ.
- La media de una distribución de probabilidad discreta se calcula con la fórmula:

$$\mu = E(X) = \sum [x \cdot P(x)]$$

- La media de una distribución de probabilidad continua se calcula con la fórmula:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$$

Media o Esperanza Matemática de una distribuación de probabilidad

Propiedades:

- La esperanza de una constante es la propia constante: $E(K) = K$.
- La esperanza de una constante por una variable es igual a la constante por la esperanza de la variable: $E(KX) = KE(X)$.
- La esperanza de una suma de variables es igual a la suma de las esperanzas de las variables: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
- La esperanza de un producto de variables independientes es igual al producto de las esperanzas de las variables: $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$.

Varianza

- La **varianza** es una medida de dispersión o variabilidad que nos indica si la media es o no representativa de la distribución de probabilidades.
- Se representa por Var(X) o σ^2.
- La varianza de una distribución de probabilidad de tipo discreto:

$$\sigma^2 = E(X - E(X))^2 = \sum[(X - E(X))^2 P(X)]$$

- La varianza de una distribución de probabilidad de tipo continuo:

$$\sigma^2 = E(X - E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}(X - E(X))^2 \cdot f(x) \cdot dx$$

3. Características de una variable aleatoria

Varianza

Propiedades

- La varianza es no negativa (mínimo valor que puede tomar es cero).
- La varianza de una constante es cero.
- La varianza de una constante por una variable es igual a la constante al cuadrado por la varianza de la variable: $Var(KX) = K^2 \cdot Var(X)$.
- La varianza de una variable más una constante es igual a la varianza de la variable $Var(X + K) = Var(X)$.
- La varianza de una suma o diferencia de variables aleatorias independientes es igual a la SUMA de las varianzas de las variables: $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$.

Ejercicio

Ejercicio

Ejercicio

John Ragsdale vende automóviles nuevos en Pelican Ford. Por lo general, John vende la mayor cantidad de automóviles el sábado, así que desarrolló la siguiente distribución de probabilidades, en el cual se muestra la cantidad de automóviles que espera vender un sábado determinado.

Cantidad de automóviles vendidos, *x*	**Probabilidad, *P* (*x*)**
0	0.1
1	0.2
2	0.3
3	0.3
4	0.1
Total	1.0

- ¿De qué tipo de distribución se trata?
- ¿Cuántos automóviles espera vender John un sábado normal?
- ¿Cuál es la varianza de la distribución?

Solución Ejercicio