# Control en Variables de Estado

*Ingeniería Electrónica de Comunicaciones*

Eva Besada Portas

Departamento de Arquitectura de Computadores y Automática.
Universidad Complutense de Madrid

Curso 2020-2021



## Esquema

1 Objetivos

2 Realimentación del vector de estados

3 Estimación y realimentación del vector de estados

4 Control Óptimo

## Objetivos del tema

El objetivo del tema es el estudio de las propiedades y de los métodos de sintonización de los controladores en variables de estado habituales.

Los controladores que estudiaremos son:

- Realimentación del vector de estados
  - Básico
  - Acción directa (seguimiento de señales de referencias)
  - Acción integral (perturbaciones)
- Estimador y realimentación de estados
  - Básico
  - Acción directa
  - Acción integral

Los métodos de sintonía de los parámetros del controlador:

- Métodos de asignación de polos y ceros (conceptos de controlabilidad y obsevabilidad)
- Diseño óptimo: optimización de la integral del error y de la señal de control.



## Esquema


1 Objetivos

2 Realimentación del vector de estados

3 Estimación y realimentación del vector de estados

4 Control Óptimo

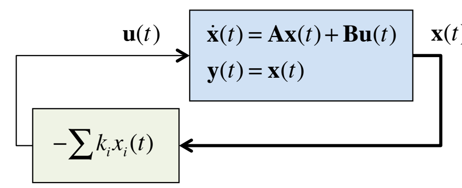
# Realimentación del vector de estados I

Supongamos que tenemos un sistema lineal:

- $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$ (ecuación de transición de estado)
- $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t)$ ($\boldsymbol{C}$ es la matriz identidad, los valores de todos los estados son medibles/accesibles)
- n estados ($\boldsymbol{A}$ matriz n*n) y m señales de control ($\boldsymbol{B}$ matriz n*m)
- La estabilidad y evolución del sistema dependen de los autovalores de $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{G}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$)

Control por realimentación del vector de estado:

- $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$
- $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) =$
  $= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) =$
  $= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t)$



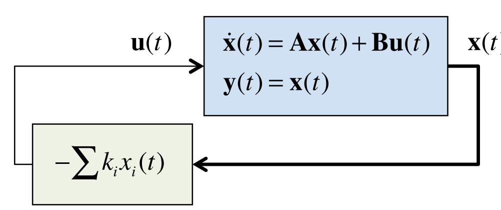

- $\boldsymbol{x}(t) = e^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})t}\boldsymbol{x}(0)$
- La evolución del sistema depende de las condiciones iniciales y de los autovalores de $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$
- $\boldsymbol{K}$ es una matriz de m*n valores, elegibles para que los autovalores del sistema en lazo cerrado tengan los valores deseados.



# Realimentación del vector de estados II

Control por realimentación del vector de estado:

- $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
- $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$
- $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t)$




- Elegir valores de $\boldsymbol{K}$ para dar a los autovalores del LC el valor deseado.

Ejemplo: Dado el sistema LTI inestable con $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, diseñar un control por realimentación del VE que haga que los autovalores (polos) del sistema en lazo cerrado estén en $\lambda = -2$ y $\lambda = -1$

Polos del sistema en LC están en:

- $|s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})| = 0$
- (s+2)(s+1)

Comparando coeficientes:

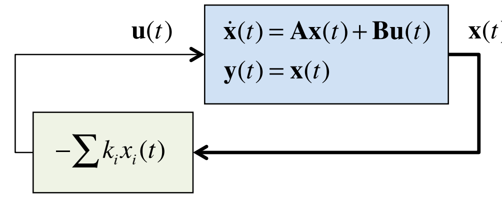
- $k_1 + 1 = 3 \rightarrow k_1 = 2$
- $k_2 - 2 = 2 \rightarrow k_2 = 4$

Simular el comportamiento del sistema.

```
syms s k1 k2;A=[-1 2;1 0]; B=[1 0]';
lambda=eig(A)' %Estabilidad del LA
K=[k1,k2]; %Vector K
 %Autovalores LC
collect(det(s*eye(2)-(A-B*K)))
collect((s+1)*(s+2))
>>lambda =[-2     1]
>> s^2 + (k1 + 1)*s + k2 - 2
>> s^2 + 3*s + 2
k1=2;k2=4;K=[k1,k2];
A2=A-B*K;B2=[0,0]';C2=eye(2);
lambda=eig(A2)' %Estabilidad del LC
>> lambda =[-2    -1]
t=0:0.01:10;u=zeros(size(t));
lsim(ss(A2,B2,C2,0),u,t,[10,10]')
```

# Realimentación del vector de estados III

Ejemplo: Dado el sistema LTI inestable con $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, diseñar un control por realimentación del VE que haga que los autovalores (polos) del sistema en lazo cerrado estén en $\lambda = -1 \pm \sqrt{2}j$.




Polos del sistema en LC están en:

- $|s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})| = 0$
- (s+1+$\sqrt{2}$j)(s+1-$\sqrt{2}$j)

Comparando coeficientes:

- $k_1 - 2 = 2 \rightarrow k_1 = 4$
- $k_2 + 3 = 3 \rightarrow k_2 = 0$

Simular el comportamiento del sistema.

```
syms s k1 k2;A=[2 -3;1 0]; B=[1 0]';
lambda=eig(A)' %Estabilidad del LA
K=[k1,k2]; %Vector K
 %Autovalores LC
collect(det(s*eye(2)-(A-B*K)))
p1=-1+sqrt(2)*j;p2=-1-sqrt(2)*j;
collect(simple((s-p1)*(s-p2)))
>>lambda =[1.0000-1.4142i   1.0000+1.4142i]
>> s^2 + (k1 - 2)*s + k2 + 3
>> s^2 + 2*s + 3
k1=4;k2=0;K=[k1,k2];
A2=A-B*K;B2=[0,0]';C2=eye(2);
lambda=eig(A2)' %Estabilidad del LC
>> lambda =[-1.0000-1.4142i   -1.0000+1.4142i]
t=0:0.01:10;u=zeros(size(t));
lsim(ss(A2,B2,C2,0),u,t,[10,10]')
```

¿Podemos asignarle, mediante realimentación de estados, a cualquier sistema LTI los autovalores deseados?

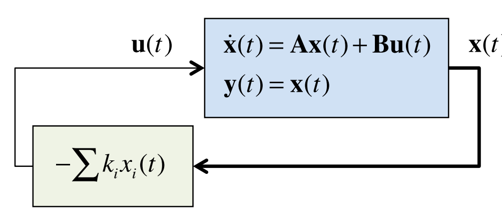
¿Podemos hacer que el sistema en LC siga a una señal de referencia?



# Realimentación del VE: controlabilidad I

¿Podemos asignarle, mediante realimentación de estados, a cualquier sistema LTI los autovalores deseados?

Ejemplo: Dado el sistema LTI inestable con $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, diseñar un control por realimentación del VE que haga que los autovalores (polos) del sistema en lazo cerrado estén en $\lambda = -1 \pm \sqrt{2}j$.




Polos del sistema en LC están en:

- $|s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})| = 0$
- (s+1+$\sqrt{2}$j)(s+1-$\sqrt{2}$j)

Comparando coeficientes:

- $k_2$ ???
- $k_1 - 2 = 2 \rightarrow k_1 = 4$
- $-k_1 + 1 = 3 \rightarrow k_1 = -2$

```
syms s k1 k2;A=[1 -1;0 1]; B=[1 0]';
lambda=eig(A)' %Estabilidad del LA
K=[k1,k2]; %Vector K
 %Autovalores LC
collect(det(s*eye(2)-(A-B*K)))
p1=-1+sqrt(2)*j;p2=-1-sqrt(2)*j;
collect(simple((s-p1)*(s-p2)))

>>lambda =[1.0000   1.0000]
>> s^2 + (k1 - 2)*s - k1 + 1
>> s^2 + 2*s + 3

solve(s^2 + (k1 - 2)*s - k1 + 1)

>> ans = [1   1-k1]
```

No es posible, el sistema no tiene solución. De hecho, si vemos la posición de los autovalores del LC, observamos que uno vale 1 y el otro tiene que ser real.

## Realimentación del VE: controlabilidad II

¿Podemos determinar si es posible asignarle libremente los autovalores a un sistema en LC a través la realimentación de estados?

Definición: controlabilidad

- El sistema $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$ con $n$ estados es controlable si la matriz de controlabilidad $\boldsymbol{CO} = [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}, ..., \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]$ tiene rango n.
- Matlab: `CO=ctrb(A,B);`
  `rank(CO)==length(A)`

Teorema de controlabilidad:

Un sistema dado por $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$ es controlable si y sólo si se pueden asignar arbitrariamente $n$ autovalores a la matriz $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK}$ obtenida mediante la ley de control de realimentación $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$

Por lo tanto, la controlabilidad es condición necesaria y suficiente para poder asignar de manera arbitraria los autovalores a la matriz $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK}$ mediante la ley de control $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$.

Ejemplos anteriores:

```
A=[-1 2;1 0]; B=[1 0]';
CO=ctrb(A,B)
rank(CO)==length(A)
>> ans = 1
```

```
A=[2 -3;1 0]; B=[1 0]';
CO=ctrb(A,B)
rank(CO)==length(A)
>> ans = 1
```

```
A=[1 -1;0 1]; B=[1 0]';
CO=ctrb(A,B)
rank(CO)==length(A)
>> ans = 0
```



## Realimentación del VE: controlabilidad III

Controlabilidad:

- Si el rango de la matriz de controlabilidad es menor que el número de estados, el sistema no es totalmente controlable.
- Sin embargo, si el rango es mayor que 0, si tiene algún estado controlable.
- El rango nos indica:
  - El número de estados controlables
  - El número de autovalores que podemos elegir.

Ejemplos anteriores:

El rango de la matriz de controlabilidad del primer y segundo sistema es 2. Por lo tanto, todos los estados son controlables y podemos fijar el valor de los dos autovalores del sistema en LC.

El rango de la matriz de controlabilidad del tercer sistema es 1. Por lo tanto, podemos controlar un estado y elegir el valor de un autovalor (aunque este tiene que ser real).

## Realimentación del VE: elección del vector K I

¿Existe algún método automático que nos permite determinar los valores de ***K*** en función de los autovalores deseados sin tener que asignarlos manualmente como en los ejemplos anteriores?

- Ackerman propone un método para sistemas SISO, que se fundamente en la idea de convertir el sistema a su representación canónica controlable y después volver a la representación original. Matlab lo implementa con la instruccion: `K=acker(A,B,[autovalores])`
- Matlab implementa un método numérico adicional en el que realiza una búsqueda óptima del valor de $K$ a partir de los autovalores deseados. Este método se llama con la orden `K=place(A,B,[autovalores])`.

  Se puede utilizar con sistemas MIMO. Es aconsejable utilizar este algoritmo siempre que sea posible, porque es más preciso que el método de Ackermann.

Ejemplos anteriores:

```
A=[-1 2;1 0]; B=[1 0]';
K=place(A,B,[-1,-2])
>> K=[2 4];
```

```
A=[2 -3;1 0]; B=[1 0]';
p1=-1+sqrt(2)*j;
p2=-1-sqrt(2)*j
K=place(A,B,[p1,p2])
>> K = [4 0]
```

```
A=[1 -1;0 1]; B=[1 0]';
p1=-1+sqrt(2)*j;
p2=-1-sqrt(2)*j
K=place(A,B,[p1,p2])
>> Error using place ...
```



## Realimentación del VE: elección del vector K II

¿En los sistemas controlables tenemos realmente capacidad para elegir libremente el valor de $K$?

- Teóricamente: si.
  - Podemos solicitar valores de ***K*** que hagan que los autovaloresa del sistema en LC tengan raíces estables simples o complejas conjugas.
- En la práctica: no.
  - Tenemos que observar el valor de la señal de control que se le aplica al sistema, ya que como hemos visto en el tema anterior los actuadores reales no permiten que se aplique cualquier valor de la señal de control.
  - Por lo tanto, hay que elegir valores de ***K*** que eviten que la señal de control se encuentre saturada durante un tiempo elevado.
  - En cualquier caso, a la hora de simular el comportamiento real del sistema podemos usar Simulink para incluir las limitaciones de los actuadores en el modelo.

# Realimentación del VE con acción directa I

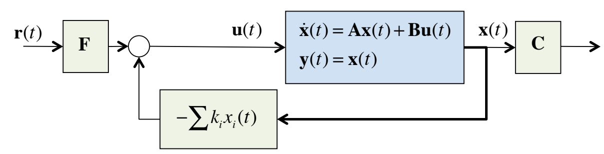
Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$

$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$

Hasta ahora, únicamente hemos realimentado el sistema original con una combinación lineal de sus estados ($\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$). De esta forma, podemos modificar la estabilidad del sistema en LC y el comportamiento del transitorio correspondiente a la evolución del sistema propio de las condiciones iniciales ($\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t)$).

Para que el sistema pueda seguir una señal de referencia:

- $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t)$
- $\boldsymbol{r}(t)$ es un vector con $m$ elementos (como el vector $\boldsymbol{u}(t)$) y $\boldsymbol{F}$ una matriz $m * m$.




- $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t)$
- $\boldsymbol{K}$ se elige para que la evolución del estado inicial sea la deseada.
- $\boldsymbol{F}$ se elige para que la salida en el estacionario siga a la entrada:

  $\boldsymbol{x}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(s) \rightarrow \boldsymbol{x}_{ss} = \lim_{s\to 0} s(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}\frac{\boldsymbol{r}_{ss}}{s}$

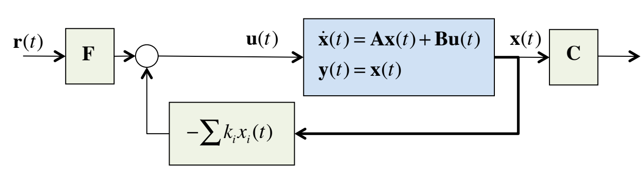
  $\boldsymbol{y}_{ss} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_{ss} = -\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}\boldsymbol{r}_{ss} \rightarrow \boldsymbol{I} = -\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}$



# Realimentación del VE con acción directa II

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$

  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$




- $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t)$
- $\boldsymbol{K}$ se elige para que la evolución del estado inicial sea la deseada.
- $\boldsymbol{F}$ se elige para que la salida en el estacionario siga a la entrada:

  $\boldsymbol{I} = -\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F} \rightarrow \boldsymbol{F}^{-1} = -\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{B}$

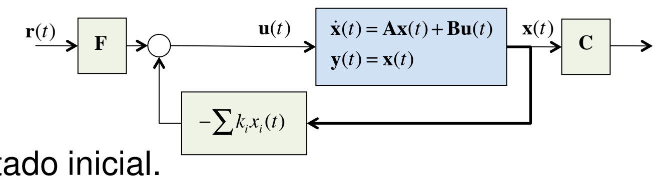
  La matriz $\boldsymbol{F}$ se puede calcular cuando:

  - Existe la inversa de $-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{B}$.
  - Se puede demostrar que la invertibilidad no depende de $\boldsymbol{K}$, si no de que $\lim_{s\to 0} \left|\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\right| \neq 0$
  - Si $\boldsymbol{A}$ es no singular (invertible) entonces la condición anterior se convierte en $\left|\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right| \neq 0$

  Por lo tanto, existen casos en los que el sistema en lazo cerrado puede seguir en el estacionario a una señal de referencia y otros en los que no.

# Realimentación del VE con acción directa III

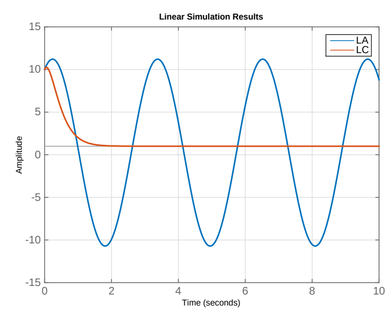
- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t)$




- $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{Kx}(t) + \boldsymbol{Fr}(t)$
- $\boldsymbol{K}$ determina la evolución del estado inicial.
- $\boldsymbol{F} = -(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}$. La inversa existe cuando $\lim_{s\to 0} \left|\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\right| \neq 0$ y cuando $\boldsymbol{A}$ es no singular y $\left|\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}\right| \neq 0$.

Ejemplo: Dado el sistema con $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, diseñar un controlador con VE de forma que los autovalores del LC estén en -4 y la salida siga a la entrada.

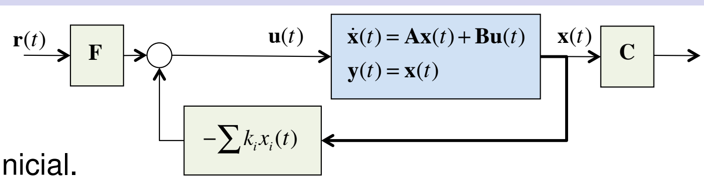
```
A=[0 1;-4 0];B=[0;1];C=[1,0];D=0;
if rank(ctrb(A,B))==length(A)  %Es controlable
    %Con place este caso no funciona
    K=acker(A,B,[-4,-4]);
    if det(C*inv(A)*B)≠0  %¿Es invertible?
        F=-inv(C*inv(A-B*K)*B);
        t=0:0.01:10;u=ones(size(t));
        lsim(ss(A,B,C,D),u,t,[10,10]');hold on;
        lsim(ss(A-B*K,B*F,C,D),u,t,[10,10]')
        legend('LA','LC')
    end
end
```






# Realimentación del VE con acción directa IV

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t)$



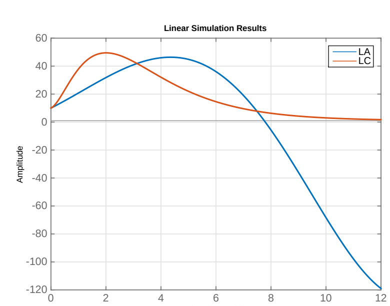

- $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{Kx}(t) + \boldsymbol{Fr}(t)$
- $\boldsymbol{K}$ determina la evolución del estado inicial.
- $\boldsymbol{F} = -(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}$. La inversa existe cuando $\lim_{s\to 0} \left|\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\right| \neq 0$ y cuando $\boldsymbol{A}$ es no singular y $\left|\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}\right| \neq 0$.

Ejemplo: Los movimientos longitudinales de un helicóptero están descritos por

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}4 & 0 & -0{,}01 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1{,}4 & 9{,}8 & 0{,}02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \theta \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6{,}3 \\ 0 \\ 9{,}8 \end{bmatrix}$$

$r(t)$, donde $\theta$ es el ángulo de inclinación del fuselaje, $q$ la velocidad de inclinación, $u$ la velocidad de avance y $r(t)$ el ángulo de inclinación del rotor principal. Diseñar un controlador por VE que tenga $\lambda = -1{,}5; -1; -0{,}5$ y que permita seguir la señal de referencia.

```
A=[-0.4 0 -0.01;1 0 0;-1.4 9.8 -0.02];
B=[6.3;0;9.8];C=[0,1,0];D=0;
if rank(ctrb(A,B))==length(A)  %Es controlable
    K=place(A,B,[-1.5,-1,-0.5]);
    if det(C*inv(A)*B)≠0  %¿Es invertible?
        F=-inv(C*inv(A-B*K)*B);
        t=0:0.01:12;u=ones(size(t));
        lsim(ss(A,B,C,D),u,t,[10,10,10]');hold on;
        lsim(ss(A-B*K,B*F,C,D),u,t,[10,10,10]');
        legend('LA','LC')
    end
end
```



# Realimentación del VE con acción integral I

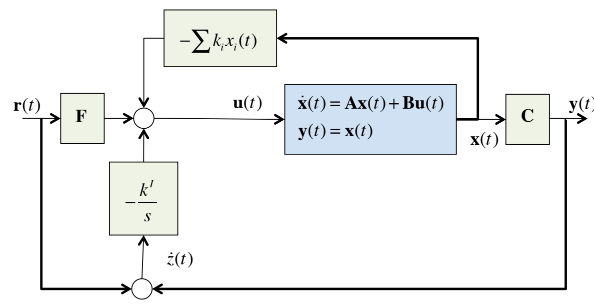
Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$

$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$

Hasta ahora, hemos utilizado como señal de control una conbinación lineal de la señal de referencia y de los estados del sistema ($\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t)$). Esto permite modificar la estabilidad del sistema y el comportamiento del transitorio, y en algunos casos (condiciones de invertibilidad de $\boldsymbol{F}$ y conocimiento preciso de todos los parámetros del sistema) que la salida siga a la entrada ($\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t)$).

Para asegurar que el sistema tiene error nulo ante una referencia escalón:

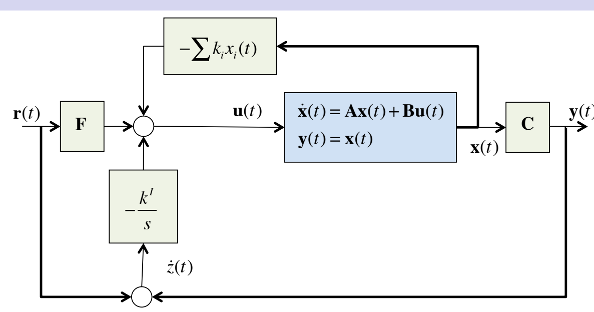
- Añadir un integrador que permita modificar el tipo del sistema.
- Incluir un nuevo estado al sistema, que corrija la señal de control hasta que la discrepancia entre la referencia y la salida sea nula.
- $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{r}(t)$
- $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{K}^I\boldsymbol{z}(t)$
- $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{F}$ son las matrices vistas anteriormente. $\boldsymbol{K}^I$ es la ganancia del término integral. Ambas ec. definen el comportamiento dinámico del controlador.






# Realimentación del VE con acción integral II

- Sistema:
  - $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  - $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Controlador:
  - $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{r}(t)$
  - $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{K}^I\boldsymbol{z}(t)$




Para analizar el comportamiento del sistema completo tenemos en cuenta que:

- Tiene los estados de la planta ($\boldsymbol{x}(t)$) y del controlador ($\boldsymbol{z}(t)$).
- Definimos el estado global $\overline{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) \end{bmatrix}$
- Sistema completo:
  - $\dot{\overline{\boldsymbol{x}}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}_{nx1} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}_{1x1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0}_{1x1} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t) + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{nx1} \\ -\boldsymbol{1}_{1x1} \end{bmatrix} \boldsymbol{r}(t)$
  - $\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}_{1x1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) \end{bmatrix}$
  - $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t) - \begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & K^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) \end{bmatrix}$
  - Si consideramos las matrices ampliadas de este sistema, tenemos una estructura análoga a la de control con VE y acción directa.

# Realimentación del VE con acción integral III

- Sistema:
  - $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  - $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Controlador:
  - $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{r}(t)$
  - $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{K}^I\boldsymbol{z}(t)$
- Sistema completo:
  - $\dot{\overline{\boldsymbol{x}}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}_{nx1} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}_{1x1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0}_{1x1} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t) + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{nx1} \\ -\boldsymbol{1}_{1x1} \end{bmatrix} \boldsymbol{r}(t)$
  - $\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}_{1x1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) \end{bmatrix}$
  - $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t) - \begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & K^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) \end{bmatrix}$
  - Elegir $\begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & K^I \end{bmatrix}$ para fijar la dinámica del LC con $\boldsymbol{r}(t) = 0$. Comprobar controlabilidad y situar autovalores con $\overline{\boldsymbol{A}}$ y $\overline{\boldsymbol{B}}$.
  - Elegir $\boldsymbol{F}$ para que en el permanente $\boldsymbol{y}_{ss} = \boldsymbol{r}_{ss}$.
    - $\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I \\ \boldsymbol{C} & 0_{1x1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}\boldsymbol{F} \\ -1_{1x1} \end{bmatrix} \boldsymbol{r}(t)$
    - $\begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{nx1} \\ \boldsymbol{0}_{1x1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}_{1x1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{ss} \\ \boldsymbol{z}_{ss} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}\boldsymbol{F} \\ -\boldsymbol{1}_{1x1} \end{bmatrix} \boldsymbol{r}_{ss}$
    - $\boldsymbol{0}_{1x1} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_{ss} - \boldsymbol{r}_{ss} \rightarrow \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_{ss} = \boldsymbol{r}_{ss} \rightarrow \boldsymbol{y}_{ss} = \boldsymbol{r}_{ss}$
    - La salida seguirá a la entrada siempre que el sistema sea estable.
    - No depende del valor de $\boldsymbol{F}$. Podríamos hacerlo 0, aunque su uso puede hacer que se llegue a la referencia antes.

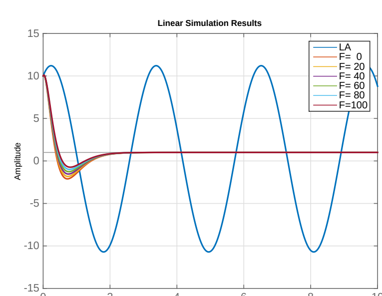


# Realimentación del VE con acción integral IV

- Sistema:
  - $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  - $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Controlador:
  - $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{r}(t)$
  - $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{K}^I\boldsymbol{z}(t)$
- Sistema completo:
  - $\dot{\overline{\boldsymbol{x}}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}_{nx1} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}_{1x1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0}_{1x1} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t) + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{nx1} \\ -\boldsymbol{1}_{1x1} \end{bmatrix} \boldsymbol{r}(t)$
  - $\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}_{1x1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) \end{bmatrix}$
  - $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t) - \begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & K^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I \\ \boldsymbol{C} & 0_{1x1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}\boldsymbol{F} \\ -1_{1x1} \end{bmatrix} \boldsymbol{r}(t)$

Ejemplo: Dado el sistema con $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, diseñar un controlador con VE y acción integral de forma que los autovalores del LC estén en -4.

```
A=[0 1;-4 0];B=[0;1];C=[1,0];D=0;n=length(A);
Aa=[A,zeros(n,1);C,0];Ba=[B;0];tx={'LA'};
if rank(ctrb(Aa,Ba))==length(Aa)  %Es controlable
    K=acker(Aa,Ba,[-4,-4,-4]);  %Con place no va
    t=0:0.01:10;u=ones(size(t));
    lsim(ss(A,B,C,D),u,t,[10,10]');hold on;
    Ac=[A-B*K(1:end-1),-B*K(end);C,0];
    for F=0:20:100
        Bc=[B*F;-1];Cc=[C,0];
        lsim(ss(Ac,Bc,Cc,D),u,t,[10,10,0]')
        tx{end+1}=sprintf('F= %3.0f',F);
    end
    legend(tx)
end
```



# Realimentación del VE con acción integral V

Beneficios adicionales de la realimentación del VE con acción integral:

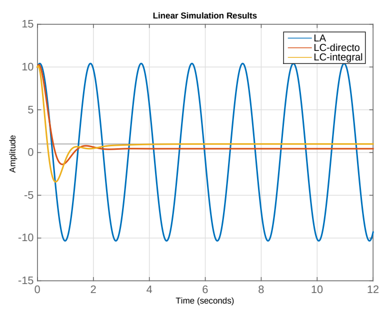
- Permite anular el error ante la entrada escalón aunque no se conozcan exactamente los parámetros del sistema
- Permite anular el error ante la entrada escalón aunque haya perturbaciones.

Ejemplo: Dado el sistema con $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, diseñar un controlador con VE de forma que los autovalores del LC estén en -4 y el error sea nulo.

1. Cuando las matrices reales del sistema son:

$$\boldsymbol{Ar} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Br} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{Cr} = \boldsymbol{C}$$




```
A=[0 1;-4 0];B=[0;1];C=[1,0];D=0;n=length(A);
Ar=[0 1;-12 0];Br=[0;0.5];Cr=C;Dr=0;n=length(A);
 %Control con acción directa: diseño con los que se
if rank(ctrb(A,B))==length(A)  %Es controlable
    K1=acker(A,B,[-4,-4]);
    if det(C*inv(A)*B)≠0  %Es invertible?
        F1=-inv(C*inv(A-B*K1)*B);
    end
end
 %Control con acción integral: : diseño con los que se
Aa=[A,zeros(n,1);C,0];Ba=[B;0]
if rank(ctrb(Aa,Ba))==length(Aa)  %Es controlable
    K2=acker(Aa,Ba,[-4,-4,-4]);  %Con place no va
end
 %Simulo con los reales
t=0:0.01:12;u=ones(size(t));
lsim(ss(Ar,Br,Cr,D),u,t,[10,10]');hold on;
lsim(ss(Ar-Br*K1,Br*F1,Cr,D),u,t,[10,10]');
Ac=[Ar-Br*K2(1:end-1),-Br*K2(end);C,0];
F2=0;Bc=[Br*F2;-1];Cc=[Cr,0];
lsim(ss(Ac,Bc,Cc,D),u,t,[10,10,0]')
legend('LA','LC-directo','LC-integral')
```



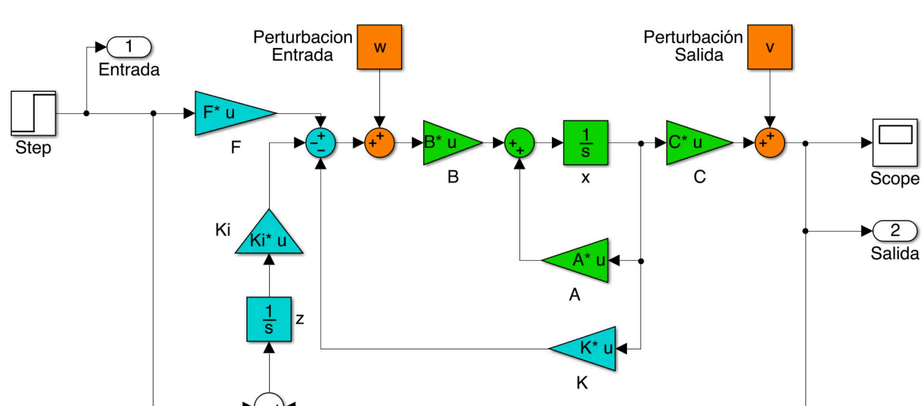
# Realimentación del VE con acción integral VI

Ejemplo: Dado el sistema con $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, diseñar un controlador con VE de forma que los autovalores del LC estén en -4 y el error sea nulo.

2. Cuando hay perturbaciones a la entrada y/o a la salida de la planta.

   Para estudiar el comportamiento con las perturbaciones es más sencillo utilizar Simulink.

- Sistema:
  - $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$
  - $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t)$
- Controlador:
  - $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{r}(t)$
  - $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{Fr}(t) - \boldsymbol{Kx}(t) - \boldsymbol{K}^I\boldsymbol{z}(t)$

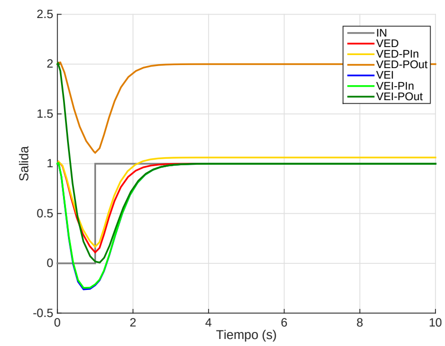



Usar ganancias matriciales (propiedades del bloque) e integradores matriciales (poniendo varios estados iniciales).

# Realimentación del VE con acción integral VII

Ejemplo: Dado el sistema con $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, diseñar un controlador con VE de forma que los autovalores del LC y el error sea nulo estén en -4.

```
A=[0 1;-4 0];B=[0;1];C=[1,0];D=0;n=length(A);
%Control con acción directa
if rank(ctrb(A,B))==length(A)  %Es controlable
    K1=acker(A,B,[-4,-4]);
    if det(C*inv(A)*B)≠0  %Es invertible?
        F1=-inv(C*inv(A-B*K1)*B);
    end
end
%Control con acción integral
Aa=[A,zeros(n,1);C,0];Ba=[B;0]
if rank(ctrb(Aa,Ba))==length(Aa)  %Es controlable
    K2=acker(Aa,Ba,[-4,-4,-4]);  %Con place no va
end
%Simulo
F=F1;Ki=0;K=K1;
w=0;v=0;[t,x,in,out]=sim('ControlVE');plot(t,in,t,out);
w=1;v=0;[t,x,in,out]=sim('ControlVE');plot(t,out);
w=0;v=1;[t,x,in,out]=sim('ControlVE');plot(t,out);
F=0;Ki=K2(end);K=K2(1:end-1);
w=0;v=0;[t,x,in,out]=sim('ControlVE');plot(t,out);
w=1;v=0;[t,x,in,out]=sim('ControlVE');plot(t,out);
w=0;v=1;[t,x,in,out]=sim('ControlVE');plot(t,out);
legend('IN','VED','VED-PIn','VED-POut','VEI','VEI-PIn','VEI-POut')
```




La acción integral permite que se contrarreste el error en la entrada y la salida del sistema completo, cosa que no ocurre con la acción directa.



# Realimentación del VE con acción integral VIII

¿Por qué la acción integral permite que el error sea nulo cuando no se conocen exactamente los valores de los parámetros del sistema o hay perturbaciones a su entrada o salida ?

- Influencia de los parámetros de la planta en la salida:
  - $\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK} & -\boldsymbol{BK}^I \\ \boldsymbol{C} & 0_{1x1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{BF} \\ -1_{1x1} \end{bmatrix} \boldsymbol{r}(t)$
  - En el estacionario (siempre y cuando el LC sea estable con los parámetros reales), se tiene que $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = 0 \to 0 = \boldsymbol{Cx}_{ss} - \boldsymbol{r}_{ss} \to \boldsymbol{r}_{ss} = \boldsymbol{Cx}_{ss} = \boldsymbol{y}_{ss}$.
  - Valores reales de $\boldsymbol{A}$ o $\boldsymbol{B}$ diferentes a los usados para sintonizar los valores de $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{K}_i$ y $\boldsymbol{F}$, siempre y cuando éstos no desestabilicen el sistema, no influyen en el valor estacionario (si en el transitorio).
  - Diferentes valores de $\boldsymbol{C}$ si influirán en el valor final.
- Perturbación en la entrada:
  - $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t) + \boldsymbol{Ew}(t)$
  - $\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK} & -\boldsymbol{BK}^I \\ \boldsymbol{C} & 0_{1x1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{BF} \\ -1_{1x1} \end{bmatrix} \boldsymbol{r}(t) + \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{0}_{1x1} \end{bmatrix} \boldsymbol{w}(t)$
  - En el estacionario, $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = 0 \to 0 = \boldsymbol{Cx}_{ss} - \boldsymbol{r}_{ss} \to \boldsymbol{r}_{ss} = \boldsymbol{Cx}_{ss} = \boldsymbol{y}_{ss}$.
  - La salida $\boldsymbol{y}(t)$ del LC puede seguir a la entrada $\boldsymbol{r}(t)$, aunque haya una perturbación en la entrada del sistema.

# Realimentación del VE con acción integral IX

- Perturbación a la salida:
  - $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t) + \boldsymbol{Ev}(t)$
  - $\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK} & -\boldsymbol{BK}^I \\ \boldsymbol{C} & 0_{1x1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{BF} \\ -1_{1x1} \end{bmatrix} \boldsymbol{r}(t) + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{1x1} \\ \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \boldsymbol{v}(t)$
  - En el estacionario, $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = 0 \rightarrow 0 = \boldsymbol{Cx}_{ss} - \boldsymbol{r}_{ss} + \boldsymbol{Ev}_{ss} \rightarrow \boldsymbol{r}_{ss} = \boldsymbol{Cx}_{ss} + \boldsymbol{Ev}_{ss} = \boldsymbol{y}_{ss}$.
  - La salida $\boldsymbol{y}(t)$ del LC puede seguir a la entrada $\boldsymbol{r}(t)$, aunque haya una perturbación en la salida del sistema.



# Esquema


1. Objetivos
2. Realimentación del vector de estados
3. Estimación y realimentación del vector de estados
4. Control Óptimo

# Estimación del VE I

En los controladores vistos en la sección anterior podíamos hacer una realimentación de estados ya que teníamos acceso a sus valores.

¿Si los estados del sistema no son medibles (accesibles) es posible reconstruir su valor de alguna forma?

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t)$
- Si conocemos las matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y el estado inicial $\boldsymbol{x}(0)$ podemos utilizar la primera ecuación para obtener el valor del estado en cualquier instante $t$.
- El problema surge realmente cuando desconocemos el estado inicial $\boldsymbol{x}(0)$.
- ¿Podemos estimar el estado a partir de un estado alternativo (aproximado, el que creemos que tiene) $\hat{\boldsymbol{x}}(0)$?
- La evolución de este vector de estados se puede calcular utilizando las ecuaciones anteriormente vistas:
  $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Si $\hat{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{x}(0)$, la evolución de los dos estados es la misma.
- Si $\hat{\boldsymbol{x}}(0) \neq \boldsymbol{x}(0)$, tendremos una evolución diferente de los vectores de estados $((\hat{\boldsymbol{x}}(t) \neq \boldsymbol{x}(t)))$y de sus salidas $(\hat{\boldsymbol{y}}(t) \neq$ e $\boldsymbol{y}(t))$.



# Estimación del VE II

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t)$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Para estudiar como evoluciona la discrepancia entre ambos vectores definimos: $\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- $\dot{\boldsymbol{d}}(t) = \dot{\boldsymbol{x}}(t) - \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t) - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{Bu}(t) = \boldsymbol{Ad}(t)$.
- La evolución de la discrepancia: $\boldsymbol{d}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{d}(0) = e^{\boldsymbol{A}t}\left(\boldsymbol{x}(0) - \hat{\boldsymbol{x}}(0)\right)$:
  - Si el sistema es inestable (autovalores de $\boldsymbol{A}$ con parte real nula o positiva) $\boldsymbol{d}(\infty) = \pm\infty$. Este hecho podrá ser corregido (de forma análoga a la que se vió en la sección anterior) por medio de una realimentación del estimador de estados.
  - Si el sistema es estable (autovalores de $\boldsymbol{A}$ con parte real negativa) $\boldsymbol{d}(\infty) = 0$. Es decir, el estado real y el estimado tenderá al mismo valor de acuerdo con la dinámica establecida a través de los autovalores de $\boldsymbol{A}$.
  - Para acelerar la evolución de la discrepancia entre ambos valores podemos modificar los autovalores relacionados con la evolución de la variable $\boldsymbol{d}(t)$: $\dot{\boldsymbol{d}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{R})\boldsymbol{d}(t)$

## Estimación del VE III

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t)$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Discrepancia: $\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$
  $\dot{\boldsymbol{d}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{R})\boldsymbol{d}(t)$
- ¿Como elegir el valor de la $\boldsymbol{R}$?
  - Aunque no tenemos acceso a los estados del sistema real, si tenemos acceso a los valores de la salida $\boldsymbol{y}(t)$, que se encuentran relacionados con sus estados a través de $\boldsymbol{C}$.
  - Como $\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{Cx}(t) - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Cd}(t)$, podemos relacionar la $\boldsymbol{R}$ con $\boldsymbol{C}$ a través de una matriz auxiliar $\boldsymbol{L}$ ($\boldsymbol{R} = \boldsymbol{LC}$). El uso de $\boldsymbol{L}$ es necesario:
    1. Porque por lo general, las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{C}$ no tienen las mismas dimensiones.
    2. Para permitirnos elegir los autovalores que gobiernan la evolución de la discrepancia $\boldsymbol{d}(t)$ libremente.
- $\dot{\boldsymbol{d}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{LC}(\boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)) + \boldsymbol{Bu}(t) - \boldsymbol{Bu}(t) =$
  $= \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t) - (\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Bu}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t)))$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Bu}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$



## Estimación del VE IV

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t)$
- Discrepancia: $\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$
  $\dot{\boldsymbol{d}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\boldsymbol{d}(t)$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Bu}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- ¿Como elegir el valor de la $\boldsymbol{L}$?
  - De forma que los autovalores de $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC}$ tengan los valores deseados, para que la discrepancia entre la salida real y la salida del estimador se anule suficientemente rápido.
  - La elección de los valores de $\boldsymbol{L}$ se puede hacer manualmente, tal y como vimos en los ejemplos iniciales de elección de los valores del vector $\boldsymbol{K}$ utilizado para realizar la realimentación del vector de estados.
  - Utilizando las ordenes `acker` y `place`:
    - ★ Las ordenes se usaban para elegir los valores de $\boldsymbol{K}$ que hacen que la matriz $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK}$ tengan los autovalores necesarios.
    - ★ Para usarlas para calcular los valores de $\boldsymbol{L}$ tenemos que transponer las matrices $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})' = \boldsymbol{A}' - \boldsymbol{C}'\boldsymbol{L}'$:
      Ejemplo: `L=acker(A',C',autovalores)';`

# Estimación del VE V

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t)$
- Discrepancia: $\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$
  $\dot{\boldsymbol{d}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\boldsymbol{d}(t)$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Bu}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- ¿Podemos elegir libremente los autovalores de $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC}$?
  - Depende de los valores de las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{C}$.
  - Un sistema con $n$ estados es totalmente observable si la matriz de observabilidad $\boldsymbol{OB} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$ tiene rango $n$.
  - Matlab: `OB=obsv(A,C);`
    `rank(OB)==length(A)`
  - Teorema de observabilidad:

    Un sistema con $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t)$ es observable si y sólo si se pueden asignar arbitrariamente los $n$ autovalores de la matriz $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC}$.
  - Para poder reconstruir el estado del sistema con el estimador propuesto es necesario que el sistema sea totalmente observable.



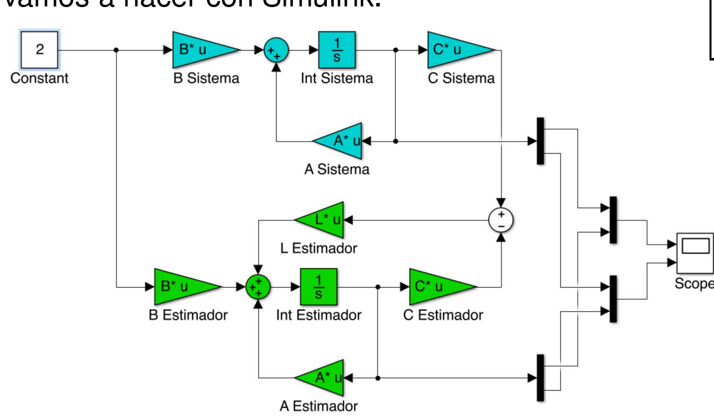
# Estimación del VE VI

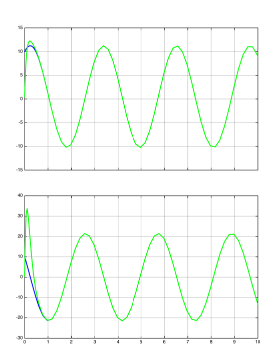
- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t)$
- Discrepancia: $\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$
  $\dot{\boldsymbol{d}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\boldsymbol{d}(t)$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Bu}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$

Ejemplo: Dado el sistema con $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, diseñar un estimador del vector de estados que tenga los autovalores en -10.

Para simular el comportamiento desde la toolbox de Control necesitamos un sistema con los estados $\boldsymbol{x}(t)$ y $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$. Lo vamos a hacer con Simulink.

```
A=[0 1;-4 0];B=[0;1];
C=[1 0];D=0;
n=length(A);
if rank(obsv(A,C))==n
    L=acker(A',C',[-10,-10])';
end
```



# Estimación y control del VE I

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Discrepancia: $\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$
  $\dot{\boldsymbol{d}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\boldsymbol{d}(t)$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$

En el caso que acabamos de ver, únicamente hemos construido un estimador del estado del sistema y estudiado su evolución. A continuación, veremos como incluir en el esquema anterior los 3 tipos de controladores vistos hasta el momento:

**Estimación y realimentación de estados**

- Control con realimentación de VE: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$
- Control con realimentación del EE: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Sistema LC: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Discrepancia: $\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$
  $\dot{\boldsymbol{d}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) - (\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\boldsymbol{d}(t)$



# Estimación y control del VE II

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Discrepancia: $\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$
  $\dot{\boldsymbol{d}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\boldsymbol{d}(t)$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Sistema completo, formado por $\boldsymbol{x}(t)$ y $\boldsymbol{d}(t)$:
  - $\hat{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{d}(t)$
  - $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) =$
    $= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{d}(t))$
  - $\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{d}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{0}_{nxn} & \boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{d}(t) \end{bmatrix}$
  - La evolución de los estados y la discrepancia entre el estado real y el estimado está gobernada por los autovalores de $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{0}_{nxn} & \boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C} \end{bmatrix}$.
  - $|s\boldsymbol{1}_{nxn} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})||s\boldsymbol{1}_{nxn} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})| = 0.$
  - La presencia del controlador no afecta a los autovalores del estimador (observador) y viceversa.
  - Lo habitual es que los autovalores del observador sean más rapidos que los del controlador, para que el estado estimado siga al estado real cuanto antes, dentro del transitorio de la evolución del sistema.

# Estimación y control del VE III

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Discrepancia: $\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$
  $\dot{\boldsymbol{d}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\boldsymbol{d}(t)$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Controlador completo (estimador+control de EE):
  - $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{L}\boldsymbol{y}(t) =$
    $= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{L}\boldsymbol{y}(t).$
  - $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
  - La función de transferencia del controlador es:
    $s\boldsymbol{I}_{nxn}\hat{\boldsymbol{X}}(s) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{X}}(s) + \boldsymbol{L}\boldsymbol{Y}(s)$
    $(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{X}}(s) = \boldsymbol{L}\boldsymbol{Y}(s)$
    $\boldsymbol{U}(s) = -\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{Y}(s)$
  - Una elección arbitraria de valores de $\boldsymbol{K}$ y de $\boldsymbol{L}$ puede dar lugar a señales de control muy elevadas. Por lo tanto, es necesario seguir comprobando el valor de la $\boldsymbol{u}(t)$ del sistema.



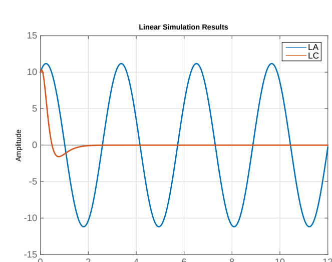
# Estimación y control del VE IV

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
  $\boldsymbol{U}(s) = -\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{Y}(s)$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$

Ejemplo: Dado el sistema con $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, diseñar un controlador con estimador y realimención de estados de forma que los autovalores del controlador estén -4 y los del estimador en -10.

Podemos resolver el problema con la toolbox de Control, simulando un sistema con los estados $\boldsymbol{x}(t)$ y $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$.

```
A=[0 1;-4 0];B=[0;1];C=[1 0];D=0;
n=length(A);
if rank(obsv(A,C))==n & rank(ctrb(A,B))==n
    K=acker(A,B,[-4,-4]);
    L=acker(A',C',[-10,-10])';
    t=0:0.01:12;u=zeros(size(t));hold on;
    lsim(A,B,C,D,u,t,[10,10]);
    Aa=[A,-B*K;L*C,A-B*K-L*C];
    Ba=[zeros(size(B));zeros(size(B))];
    Ca=[C,zeros(size(C))];
    lsim(Aa,Ba,Ca,D,u,t,[10,10,0,0]);
end
legend('LA','LC')
eig(Aa)
```

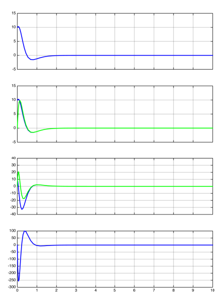


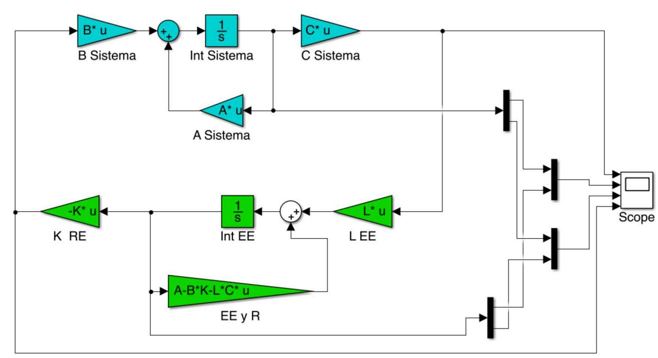
# Estimación y control del VE V

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
  $\boldsymbol{U}(s) = -\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{Y}(s)$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$

Ejemplo: Dado el sistema con $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, diseñar un controlador con estimador y realimención de estados de forma que los autovalores del controlador estén -4 y los del estimador en -10.
Alternativamente, también podemos simular el comportamiento con Simulink.

```
A=[0 1;-4 0];B=[0;1];C=[1 0];D=0;
n=length(A);OB=obsv(A,C);CO=ctrb(A,B);
if rank(OB)==n & rank(CO)==n
    K=acker(A,B,[-4,-4]);
    L=acker(A',C',[-10,-10])';
end
```








# Estimación y control del VE y acción directa I

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Discrepancia: $\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$
  $\dot{\boldsymbol{d}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\boldsymbol{d}(t)$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$

Estimación y realimentación de estados con acción directa

- Control con realimentación de VE: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t)$
- Control con realimentación del EE: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t)$
- Sistema LC: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Discrepancia: $\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$
  $\dot{\boldsymbol{d}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t) - (\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))) =$
  $= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\boldsymbol{d}(t)$

## Estimación y control del VE y acción directa II

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t)$
- Discrepancia: $\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$
  $\dot{\boldsymbol{d}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\boldsymbol{d}(t)$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Bu}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Fr}(t)$
- Sistema completo, formado por $\boldsymbol{x}(t)$ y $\boldsymbol{d}(t)$:
  - $\hat{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{d}(t)$
  - $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) - \boldsymbol{BK}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{BFr}(t) =$
    $= \boldsymbol{Ax}(t) - \boldsymbol{BK}(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{d}(t)) + \boldsymbol{BFr}(t)$
  - $\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{d}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK} & \boldsymbol{BK} \\ \boldsymbol{0}_{nxn} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{d}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{BF} \\ \boldsymbol{0}_{nx1} \end{bmatrix} \boldsymbol{r}(t)$
  - La evolución de los estados y la discrepancia entre el estado real y el estimado está también gobernada por los autovalores de $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK} & \boldsymbol{BK} \\ \boldsymbol{0}_{nxn} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC} \end{bmatrix}$.
  - $|s\boldsymbol{1}_{nxn} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})||s\boldsymbol{1}_{nxn} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})| = 0.$
  - La presencia del controlador no afecta a los autovalores del estimador (observador) y viceversa.
  - Lo habitual es que los autovalores del observador sean más rápidos que los del controlador, para que el estado estimado siga al estado real cuanto antes, dentro del transitorio de la evolución del sistema.



## Estimación y control del VE y acción directa III

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t)$
- Discrepancia: $\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$
  $\dot{\boldsymbol{d}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\boldsymbol{d}(t)$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Bu}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Fr}(t)$
- Sistema completo, formado por $\boldsymbol{x}(t)$ y $\boldsymbol{d}(t)$:
  - $\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{d}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK} & \boldsymbol{BK} \\ \boldsymbol{0}_{nxn} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{d}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{BF} \\ \boldsymbol{0}_{nx1} \end{bmatrix} \boldsymbol{r}(t)$
  - La elección del valor de $\boldsymbol{F}$ se hace para que en el estacionario la salida $\boldsymbol{y}(t)$ siga a la entrada escalón $\boldsymbol{r}(t)$:
    - $\begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{nx1} \\ \boldsymbol{0}_{nx1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK} & \boldsymbol{BK} \\ \boldsymbol{0}_{nxn} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{ss} \\ \boldsymbol{d}_{ss} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{BF} \\ \boldsymbol{0}_{nx1} \end{bmatrix} \boldsymbol{r}_{ss}$
    - $\boldsymbol{0}_{nx1} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\boldsymbol{d}_{ss} \rightarrow \boldsymbol{d}_{ss} = \boldsymbol{0}_{nx1}$
    - $\boldsymbol{0}_{nx1} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})\boldsymbol{x}_{ss} + \boldsymbol{BKd}_{ss} + \boldsymbol{BFr}_{ss} \rightarrow \boldsymbol{x}_{ss} = -(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})^{-1}\boldsymbol{BFr}_{ss}$
    - $\boldsymbol{y}_{ss} = \boldsymbol{Cx}_{ss} = -\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})^{-1}\boldsymbol{BFr}_{ss}$
    - $\boldsymbol{F}^{-1} = -\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})^{-1}\boldsymbol{B}$
    - La $\boldsymbol{F}$ se calcula de la misma forma que en el caso de la realimentación del vector de estados. Para poder obtenerla, es necesario también poder invertir la matriz.

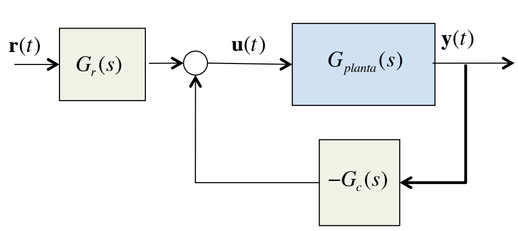
## Estimación y control del VE y acción directa IV

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t)$
- Acción directa: $\boldsymbol{F}^{-1} = -\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})^{-1}\boldsymbol{B}$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Bu}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Fr}(t)$
- Controlador completo (estimador+control de EE):
  - $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{BK}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{BFr}(t) - \boldsymbol{LC}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Ly}(t) =$
    $= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK} - \boldsymbol{LC})\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{BFr}(t) + \boldsymbol{Ly}(t).$
  - $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Fr}(t)$
  - La función de transferencia del controlador es:
    $s\boldsymbol{I}_{nxn}\hat{\boldsymbol{X}}(s) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK} - \boldsymbol{LC})\hat{\boldsymbol{X}}(s) + \boldsymbol{BFR}(s) + \boldsymbol{LY}(s)$
    $(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})\hat{\boldsymbol{X}}(s) = \boldsymbol{BFR}(s) + \boldsymbol{LY}(s)$
    $\boldsymbol{U}(s) = -\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})^{-1}\boldsymbol{LY}(s) +$
    $+(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})^{-1}\boldsymbol{BF})\boldsymbol{R}(s)$
  - Una elección arbitraria de valores de $\boldsymbol{K}$ y de $\boldsymbol{L}$ puede dar lugar a señales de control muy elevadas. Por lo tanto, es necesario seguir comprobando el valor de la $u(t)$ del sistema.
  - El controlador tiene dos entradas, la señal $\boldsymbol{y}(s)$ y la señal $\boldsymbol{r}(s)$.



## Estimación y control del VE y acción directa V

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t)$
- Acción directa: $\boldsymbol{F}^{-1} = -\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})^{-1}\boldsymbol{B}$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Bu}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Fr}(t)$
  $\boldsymbol{U}(s) = -\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})^{-1}\boldsymbol{LY}(s) + (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})^{-1}\boldsymbol{BF})\boldsymbol{R}(s)$
- Controlador, por lo tanto, toma la forma de $\boldsymbol{U}(s) = -\boldsymbol{G}_c(s)\boldsymbol{Y}(s) + \boldsymbol{G}_r(s)\boldsymbol{R}(s)$ con $\boldsymbol{G}_c(s) = \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})^{-1}\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{G}_r(s) = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})^{-1}\boldsymbol{BF}$.
- Ambas funciones de transferencia tienen los mismos polos (determinante de la matriz inversa), pero diferentes ceros.
- Para simular el comportamiento del sistema completo, se puede usar su función de transferencia en LC




$$G_{LC}(s) = G_r(s)\frac{G_{planta}(s)}{1+G_{planta}(s)G_c(s)}$$

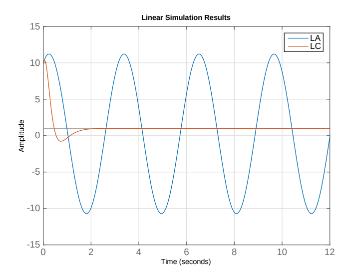
# Estimación y control del VE y acción directa VI

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t)$
- Acción directa: $\boldsymbol{F}^{-1} = -\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})^{-1}\boldsymbol{B}$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Bu}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Fr}(t)$
  $\boldsymbol{U}(s) = -\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})^{-1}\boldsymbol{LY}(s) + (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})^{-1}\boldsymbol{BF})\boldsymbol{R}(s)$

Ejemplo: Dado el sistema con $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, diseñar un controlador con estimador realimención de estados y acción directa de forma que los autovalores del controlador estén en -4 y los del estimador en -10.

Podemos resolver el problema con la toolbox de Control, simulando un sistema con los estados $\boldsymbol{x}(t)$ y $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$.

```
A=[0 1;-4 0];B=[0;1];C=[1 0];D=0;n=length(A);
if rank(obsv(A,C))==n & rank(ctrb(A,B))==n
    K=acker(A,B,[-4,-4]);
    L=acker(A',C',[-10,-10])';
    F=inv(-C*inv(A-B*K)*B);
    t=0:0.01:12;u=ones(size(t));hold on;
    lsim(A,B,C,D,u,t,[10,10]);
    Aa=[A,-B*K;L*C,A-B*K-L*C];
    Ba=[B*F;B*F];
    Ca=[C,zeros(size(C))];
    lsim(Aa,Ba,Ca,D,u,t,[10,10,0,0]);
end
legend('LA','LC')
eig(Aa)
```



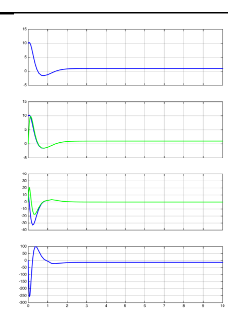


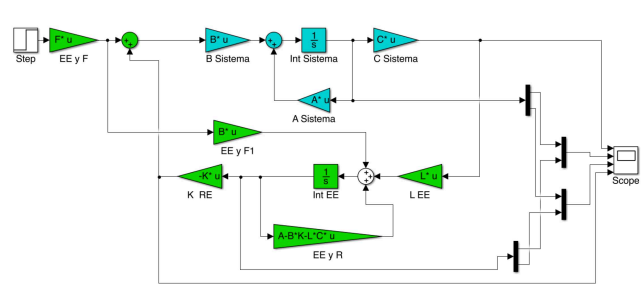

# Estimación y control del VE y acción directa VII

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t)$
- Acción directa: $\boldsymbol{F}^{-1} = -\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})^{-1}\boldsymbol{B}$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Bu}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Fr}(t)$
  $\boldsymbol{U}(s) = -\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})^{-1}\boldsymbol{LY}(s) + (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})^{-1}\boldsymbol{BF})\boldsymbol{R}(s)$

Ejemplo: Dado el sistema con $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, diseñar un controlador con estimador realimención de estados y acción directa de forma que los autovalores del controlador estén en -4 y los del estimador en -10.

```
A=[0 1;-4 0];B=[0;1];C=[1 0];D=0;n=length(A);OB=obsv(A,C);CO=ctrb(A,B);
if rank(OB)==n & rank(CO)==n
    K=acker(A,B,[-4,-4]);L=acker(A',C',[-10,-10])';F=inv(-C*inv(A-B*K)*B);
end
```





# Estimación y control del VE y acción directa VIII

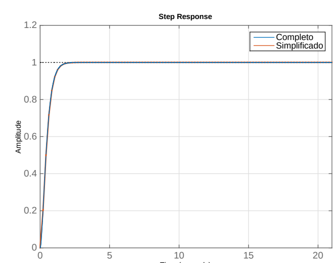
- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Acción directa: $\boldsymbol{F}^{-1} = -\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{B}$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t)$

$$\boldsymbol{U}(s) = -\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}+\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{Y}(s)+(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}+\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F})\boldsymbol{R}(s)$$

Ejemplo: Dado el sistema con $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, diseñar un controlador con estimador realimención de estados y acción directa de forma que los autovalores del controlador estén en -4 y los del estimador en -10.

También podemos resolver el problema con la toolbox de Control y las funciones de transferencia (sin prefijar estados, por eso los resultados no coincide con los anteriores).

```
A=[0 1;-4 0];B=[0;1];C=[1 0];D=0;n=length(A);
if rank(obsv(A,C))==n & rank(ctrb(A,B))==n
    K=acker(A,B,[-4,-4]);
    L=acker(A',C',[-10,-10])';
    F=inv(-C*inv(A-B*K)*B);
    Gc=tf(ss(A-B*K-L*C,L,K,0));
    Gr=tf(ss(A-B*K-L*C,B*F,-K,F));
    Gp=tf(ss(A,B,C,D))
    GLC=Gr*Gp/(1+Gp*Gc)
    step(GLC,minreal(GLC),21);
end
legend('Completo','Simplificado');
```





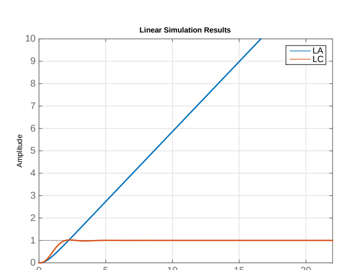

# Estimación y control del VE y acción directa IX

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Acción directa: $\boldsymbol{F}^{-1} = -\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{B}$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t)$

$$\boldsymbol{U}(s) = -\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}+\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{Y}(s)+(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}+\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F})\boldsymbol{R}(s)$$

Ejemplo: Dado el sistema con $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 2{,}5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, diseñar un controlador con estimador realimención de estados y acción directa de forma que los autovalores del controlador estén en $[-1{,}42; -1{,}04 \pm 2{,}14j]$ y los del estimador en $[-4{,}25; -3{,}13 \pm 6{,}41j]$.

```
A=[0 1 0;0 -2 1;0 0 -8];B=[0;0;4];C=[2.5,0,0];D=0;
n=length(A);
if rank(obsv(A,C))==n & rank(ctrb(A,B))==n
    K=place(A,B,[-1.42,-1.04+2.14j,-1.04-2.14j]);
    L=acker(A',C',[-4.25,-3.13+6.41j,-3.13-6.41j])';
    F=inv(-C*inv(A-B*K)*B);
    t=0:0.01:22;u=ones(size(t));hold on;
    lsim(A,B,C,D,u,t,[0,0,0]);
    Aa=[A,-B*K;L*C,A-B*K-L*C];
    Ba=[B*F;B*F];Ca=[C,zeros(size(C))];
    lsim(Aa,Ba,Ca,D,u,t,[0,0,0,0,0,0]);
end
legend('LA','LC')
eig(Aa);minreal(tf(ss(Aa,Ba,Ca,D)))
```

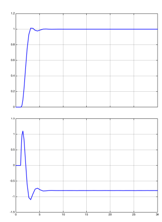


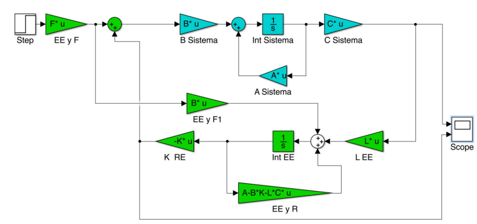
# Estimación y control del VE y acción directa X

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Acción directa: $\boldsymbol{F}^{-1} = -\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{B}$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t)$
  $\boldsymbol{U}(s) = -\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{Y}(s) + (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F})\boldsymbol{R}(s)$

Ejemplo: Dado el sistema con $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2{,}5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, diseñar un controlador con estimador realimención de estados y acción directa de forma que los autovalores del controlador estén en $[-1{,}42; -1{,}04 \pm 2{,}14j]$ y los del estimador en $[-4{,}25; -3{,}13 \pm 6{,}41j]$.

```
A=[0 1 0;0 -2 1;0 0 -8];B=[0;0;4];C=[2.5,0,0];D=0;n=length(A);
if rank(obsv(A,C))==n & rank(ctrb(A,B))==n
    K=place(A,B,[-1.42,-1.04+2.14j,-1.04-2.14j]);
    L=acker(A',C',[-4.25,-3.13+6.41j,-3.13-6.41j])'; F=inv(-C*inv(A-B*K)*B);
end
```





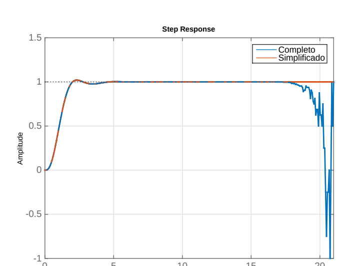



# Estimación y control del VE y acción directa XI

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Acción directa: $\boldsymbol{F}^{-1} = -\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{B}$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t)$
  $\boldsymbol{U}(s) = -\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{Y}(s) + (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F})\boldsymbol{R}(s)$

Ejemplo: Dado el sistema con $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2{,}5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, diseñar un controlador con estimador realimención de estados y acción directa de forma que los autovalores del controlador estén en $[-1{,}42; -1{,}04 \pm 2{,}14j]$ y los del estimador en $[-4{,}25; -3{,}13 \pm 6{,}41j]$.

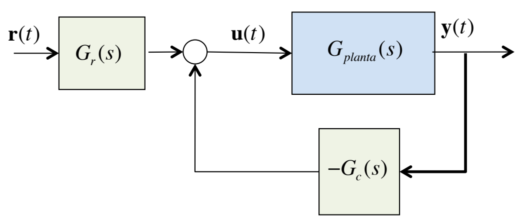
```
A=[0 1 0;0 -2 1;0 0 -8];
B=[0;0;4];C=[2.5,0,0];D=0;
n=length(A);
if rank(obsv(A,C))==n & rank(ctrb(A,B))==n
    K=place(A,B,[-1.42,-1.04+2.14j,-1.04-2.14j]);
    L=acker(A',C',[-4.25,-3.13+6.41j,-3.13-6.41j])';
    F=inv(-C*inv(A-B*K)*B);
    Gc=tf(ss(A-B*K-L*C,L,K,0));
    Gr=tf(ss(A-B*K-L*C,B*F,-K,F));
    Gp=tf(ss(A,B,C,D))
    GLC=Gr*Gp/(1+Gp*Gc)
    step(GLC,minreal(GLC),21);
end
legend('Completo','Simplificado');
```



# Estimación y control del VE y acción directa XII

¿Por que el resultado es diferente, cuando se simula a través de las funciones de transferencia en el segundo caso?
El motivo se encuentra en los polos que tienen los controladores:

- $\boldsymbol{U}(s) = -\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})^{-1}\boldsymbol{LY}(s) + (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})^{-1}\boldsymbol{BF})\boldsymbol{R}(s)$
- Los polos los fijan los autovalores de $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK} - \boldsymbol{LC}$
- Ejemplo 1: los autovalores son $[-14{,}0000 \pm 8{,}7178i]$
- Ejemplo 2: los autovalores son $[-2{,}9429 \pm 8{,}3169i; 1{,}8759]$
- En el segundo ejemplo tenemos controladores con autovalores inestables, que son el origen del problema:




$G_{LC}(s) = G_r(s)\frac{G_{planta}(s)}{1+G_{planta}(s)G_c(s)}$

Los polos de $G_c(s)$ no dan problemas, ya que pasan al numerado de $G_{LC}(s)$.

Los polos de $G_r(s)$ son los problemáticos, ya que se quedan en el denominador de $G_{LC}(s)$.

- En simulación, podemos simplificar los polos de $G_c(s)$ y $G_r(s)$, y por lo tanto, no observar ningún problema.
- En los experimentos reales, este montaje puede ser problemático, ya que los polos no se cancelarán realmente.



# Estimación y control del VE y acción directa XIII

¿Que podemos hacer para evitar el problema?

1. Aunque tenemos libertad para escoger los valores de $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{L}$ independiente, debemos comprobar que los autovalores de $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK} - \boldsymbol{LC}$ son estables (parte real negativa) cuando queramos hacer el montaje a través de los controladores $G_r(s)$ y $G_c(s)$
2. En el caso de tener autovalores inestables podemos usar un $G_r(s)$ alternativo (ya que es la causa del problema):
   - $G_r(s) = K$ (es decir usaremos una ganancia pura)
   - $G_{LC}(s) = K\frac{G_{planta}(s)}{1+G_{planta}(s)G_c(s)}$
   - $y_{ss} = lim_{s\to 0} sG_{LC}(s)r(s) = lim_{s\to 0} sG_{LC}(s)\frac{r_{ss}}{s} = lim_{s\to 0} K\frac{G_{planta}(s)}{1+G_{planta}(s)G_c(s)} r_{ss}$
   - $1 = lim_{s\to 0} K\frac{G_{planta}(s)}{1+G_{planta}(s)G_c(s)} \to K = \frac{1}{G_{planta}(0)} + G_c(0)$
   - $G_{planta}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} \to G_{planta}(0) = \boldsymbol{C}(-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$
   - $G_c(s) = \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})^{-1}\boldsymbol{L} \to G_c(0) = \boldsymbol{K}(-\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})^{-1}\boldsymbol{L}$
   - Aparentemente, es necesario que $G_{planta}(0) \neq 0$. Sin embargo, tambien funciona utilizando únicamente el elemento de $G_c(0)$.

# Estimación y control del VE y acción directa XIV

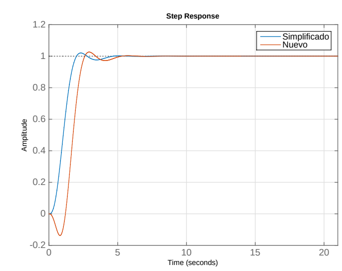
- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Acción directa: $\boldsymbol{F}^{-1} = -\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{B}$
- Control:

$$\boldsymbol{U}(s) = -\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{Y}(s) + (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F})\boldsymbol{R}(s)$$

Alternativamente: $G_r = K = \frac{1}{G_{planta}(0)} + G_c(0)$

Ejemplo: Dado el sistema con $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2{,}5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, diseñar un controlador con estimador realimención de estados y acción directa de forma que los autovalores del controlador estén en $[-1{,}42; -1{,}04 \pm 2{,}14j]$ y los del estimador en $[-4{,}25; -3{,}13 \pm 6{,}41j]$.

```
A=[0 1 0;0 -2 1;0 0 -8];B=[0;0;4];C=[2.5,0,0];D=0;
if rank(obsv(A,C))==length(A) & rank(ctrb(A,B))==length(A
    K=place(A,B,[-1.42,-1.04+2.14j,-1.04-2.14j]);
    L=acker(A',C',[-4.25,-3.13+6.41j,-3.13-6.41j])';
    F=inv(-C*inv(A-B*K)*B);
    Gp=tf(ss(A,B,C,D));Gc=tf(ss(A-B*K-L*C,L,K,0));
    Gr=tf(ss(A-B*K-L*C,B*F,-K,F)); %Original
    Gplanta0=-C*inv(A)*B; %No se puede usar
    Gc0=K*inv(-A+B*K+L*C)*L;
    Gr2=Gc0;
    GLC1=minreal(Gr*Gp/(1+Gp*Gc)) %Simplificado
    GLC2=Gr2*Gp/(1+Gp*Gc) %Nuevo
    step(GLC1,GLC2,21);
end
legend('Simplificado','Nuevo');
```





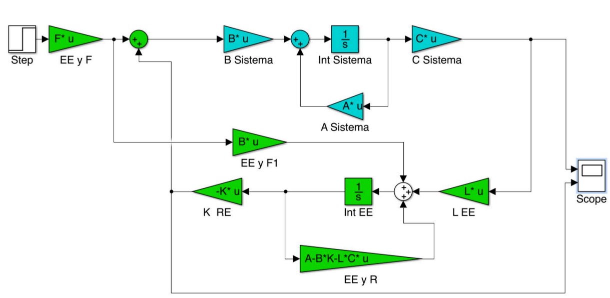

# Estimación y control del VE y acción directa XV

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Acción directa: $\boldsymbol{F}^{-1} = -\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{B}$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t)$

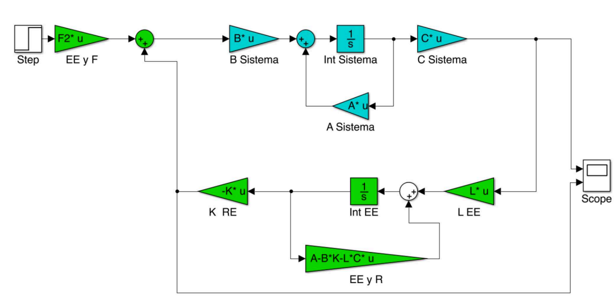
$$\boldsymbol{U}(s) = -\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{Y}(s) + (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F})\boldsymbol{R}(s)$$

Alternativamente: $G_r(s) = \boldsymbol{F}_2 = \frac{1}{G_{planta}(0)} + G_c(s)$

Original:

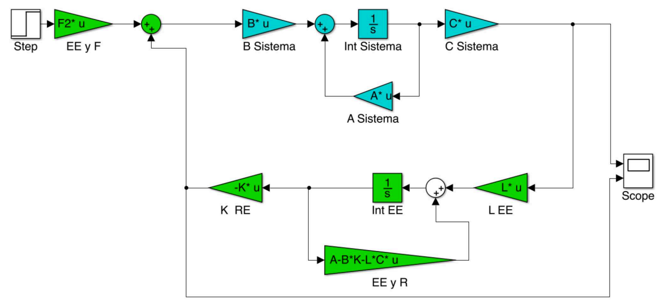



Alternativo:



# Estimación y control del VE y acción directa XVI

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t)$
- Control alternativo:
  $\boldsymbol{U}(s) = -G_c(s)\boldsymbol{Y}(s) + \boldsymbol{F}_2\boldsymbol{R}(s)$
  $G_c(s) = \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})^{-1}\boldsymbol{L}$
  $\boldsymbol{F}_2 = \frac{1}{G_{planta}(0)} + G_c(s)$




¿En el estacionario, con el control alternativo, los dos estados tienden al mismo valor?

- $\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{BK} \\ \boldsymbol{LC} & \boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK} - \boldsymbol{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \hat{\boldsymbol{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{BF}_2 \\ \boldsymbol{0}_{nx1} \end{bmatrix} \boldsymbol{r}(t)$
- $\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \hat{\boldsymbol{0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{BK} \\ \boldsymbol{LC} & \boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK} - \boldsymbol{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{ss} \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{ss} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{BF}_2 \\ \boldsymbol{0}_{nx1} \end{bmatrix} \boldsymbol{r}_{ss}$
- $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{Ax}_{ss} - \boldsymbol{BK}\hat{\boldsymbol{x}}_{ss} = -\boldsymbol{BF}_2\boldsymbol{r}_{ss} \\ \boldsymbol{LCx}_{ss} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK} - \boldsymbol{LC})\hat{\boldsymbol{x}}_{ss} = \boldsymbol{0}_{nx1} \end{array}\right\}$. A la hora de resolver el sistema se puede observar que por lo general los estados son diferentes.



# Estimación y control del VE y acción integral I

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t)$
- Discrepancia: $\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$
  $\dot{\boldsymbol{d}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\boldsymbol{d}(t)$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Bu}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$

Estimación y realimentación de estados con acción integral

- $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{r}(t)$
- Control con realimentación de VE: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{Kx}(t) + \boldsymbol{Fr}(t) - \boldsymbol{K}^I\boldsymbol{z}(t)$
- Control con realimentación del EE: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Fr}(t) - \boldsymbol{K}^I\boldsymbol{z}(t)$
- Sistema LC: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) - \boldsymbol{BK}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{BFr}(t) - \boldsymbol{BK}^I\boldsymbol{z}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t)$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{BK}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{BFr}(t) - \boldsymbol{BK}^I\boldsymbol{z}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Discrepancia: $\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$
  $\dot{\boldsymbol{d}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) - \boldsymbol{BK}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{BFr}(t) - \boldsymbol{BK}^I\boldsymbol{z}(t) -$
  $(\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{BK}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{BFr}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t)) - \boldsymbol{BK}^I\boldsymbol{z}(t)) =$
  $= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\boldsymbol{d}(t)$

# Estimación y control del VE y acción integral II

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Discrepancia: $\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$
  $\dot{\boldsymbol{d}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\boldsymbol{d}(t)$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{K}^I\boldsymbol{z}(t)$ con $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{r}(t)$.
- Sistema completo, formado por $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{z}(t)$ y $\boldsymbol{d}(t)$:
  - $\hat{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{d}(t)$
  - $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I\boldsymbol{z}(t) =$
    $= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{d}(t)) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I\boldsymbol{z}(t)$
  - $\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{z}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{d}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I & \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}_{1x1} & \boldsymbol{0}_{1xn} \\ \boldsymbol{0}_{nxn} & \boldsymbol{0}_{1x1} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) \\ \boldsymbol{d}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}\boldsymbol{F} \\ -\boldsymbol{1}_{1x1} \\ \boldsymbol{0}_{nx1} \end{bmatrix} \boldsymbol{r}(t)$
  - La evolución de los estados y la discrepancia entre el estado real y el estimado está también gobernada por los autovalores de la matriz de transición.
  - $|s\boldsymbol{1}_{(n+1)x(n+1)} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I \\ \boldsymbol{C} & 0_{1x1} \end{bmatrix})||s\boldsymbol{1}_{nxn} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})| = 0.$
  - La presencia del controlador no afecta a los autovalores del estimador (observador) y viceversa. Hacer que los del observador sean más rápidos.



# Estimación y control del VE y acción integral III

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Discrepancia: $\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$
  $\dot{\boldsymbol{d}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\boldsymbol{d}(t)$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{K}^I\boldsymbol{z}(t)$ con $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{r}(t)$.
- Sistema completo, formado por $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{z}(t)$ y $\boldsymbol{d}(t)$:
  - $\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{z}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{d}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I & \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}_{1x1} & \boldsymbol{0}_{1xn} \\ \boldsymbol{0}_{nxn} & \boldsymbol{0}_{1x1} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) \\ \boldsymbol{d}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}\boldsymbol{F} \\ -\boldsymbol{1}_{1x1} \\ \boldsymbol{0}_{nx1} \end{bmatrix} \boldsymbol{r}(t)$
  - Para calcular los valores de $\boldsymbol{L}$: `L=acker(A',C',autovalores);`
  - Para calcular los valores de $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{K}^I$, podemos hacer lo que hicimos en el caso del control con realimentación de estados y acción integral: utilizar el sistema ampliado formado por $\boldsymbol{x}(t)$ y $\boldsymbol{z}(t)$.
    - $A_a = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}_{nx1} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}_{1x1} \end{bmatrix}$
    - $B_a = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0}_{1x1} \end{bmatrix}$
    - `K=acker(Aa,Ba,autovalores)` y obtener $\boldsymbol{K}$ de los primeros $n$ elementos de `K` y $\boldsymbol{K}^I$ del último.

# Estimación y control del VE y acción integral IV

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Discrepancia: $\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$
  $\dot{\boldsymbol{d}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\boldsymbol{d}(t)$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{K}^I\boldsymbol{z}(t)$ con $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{r}(t)$.
- Sistema completo, formado por $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{z}(t)$ y $\boldsymbol{d}(t)$:
  - $\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{z}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{d}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I & \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}_{1x1} & \boldsymbol{0}_{1xn} \\ \boldsymbol{0}_{nxn} & \boldsymbol{0}_{1x1} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) \\ \boldsymbol{d}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}\boldsymbol{F} \\ -\boldsymbol{1}_{1x1} \\ \boldsymbol{0}_{nx1} \end{bmatrix} \boldsymbol{r}(t)$
  - El valor de $\boldsymbol{F}$ puede ser cualquiera, ya que la acción integral es la que asegura que la referencia siga a la entrada en el estacionario:
    - $\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I & \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}_{1x1} & \boldsymbol{0}_{1xn} \\ \boldsymbol{0}_{nxn} & \boldsymbol{0}_{1x1} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{ss} \\ \boldsymbol{z}_{ss} \\ \boldsymbol{d}_{ss} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}\boldsymbol{F} \\ -\boldsymbol{1}_{1x1} \\ \boldsymbol{0}_{nx1} \end{bmatrix} \boldsymbol{r}(t)$
    - $\boldsymbol{0}_{nx1} = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\boldsymbol{d}_{ss} \rightarrow \boldsymbol{d}_{ss} = \boldsymbol{0}$
    - $\boldsymbol{0}_{0x1} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_{ss} - \boldsymbol{r}_{ss} \rightarrow \boldsymbol{r}_{ss} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_{ss}) = \boldsymbol{y}_{ss}$
    - La salida seguirá al sistema siempre que el sistema en lazo cerrado sea estable.
    - Elegimos $\boldsymbol{F}$ como una ganancia para agilizar, en todo caso, la respuesta del sistema.



# Estimación y control del VE y acción integral V

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Acción directa: Cualquier $\boldsymbol{F}$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{K}^I\boldsymbol{z}(t)$ con $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{r}(t)$.
- Controlador completo (estimador+control de EE):
  - $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I\boldsymbol{z}(t) - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{L}\boldsymbol{y}(t) =$
    $= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{L}\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I\boldsymbol{z}(t)$.
  - $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{r}(t)$
  - $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{K}^I\boldsymbol{z}(t)$
  - La función de transferencia del controlador es:
    $s\boldsymbol{I}_{nxn}\hat{\boldsymbol{X}}(s) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{X}}(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}\boldsymbol{R}(s) + \boldsymbol{L}\boldsymbol{Y}(s) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I\boldsymbol{Z}(s)$

    $s\boldsymbol{Z}(s) = \boldsymbol{Y}(s) - \boldsymbol{R}(s) \rightarrow \boldsymbol{Z}(s) = \frac{\boldsymbol{Y}(s)-\boldsymbol{R}(s)}{s}$

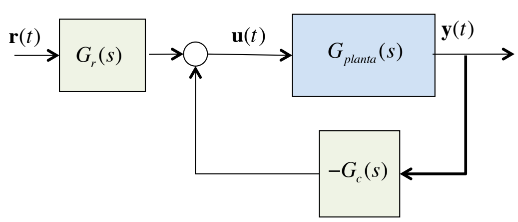
    $(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{X}}(s) = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{F} + \frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I}{s})\boldsymbol{R}(s) + (\boldsymbol{L} - \frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I}{s})\boldsymbol{Y}(s)$
    $\boldsymbol{U}(s) = [-\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}(\boldsymbol{L} - \frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I}{s}) - \frac{\boldsymbol{K}^I}{s}]\boldsymbol{Y}(s) +$
    $+[\boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{F} + \frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I}{s}) + \frac{\boldsymbol{K}^I}{s}]\boldsymbol{R}(s)$
  - El controlador tiene dos entradas, la señal $\boldsymbol{y}(s)$ y la señal $\boldsymbol{r}(s)$.

# Estimación y control del VE y acción integral VI

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Acción directa: Cualquier $\boldsymbol{F}$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{K}^I\boldsymbol{z}(t)$ con $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{r}(t)$.

$$\boldsymbol{U}(s) = [-\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}(\boldsymbol{L} - \tfrac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I}{s}) - \tfrac{\boldsymbol{K}^I}{s}]\boldsymbol{Y}(s) +$$
$$+[\boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{F} + \tfrac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I}{s}) + \tfrac{\boldsymbol{K}^I}{s}]\boldsymbol{R}(s)$$

- Controlador, por lo tanto, toma la forma de $\boldsymbol{U}(s) = -\boldsymbol{G}_c(s)\boldsymbol{Y}(s) + \boldsymbol{G}_r(s)\boldsymbol{R}(s)$ con $\boldsymbol{G}_c(s) = \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}(\boldsymbol{L} - \tfrac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I}{s}) + \tfrac{\boldsymbol{K}^I}{s}$ y
  $\boldsymbol{G}_r(s) = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{F} + \tfrac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I}{s}) + \tfrac{\boldsymbol{K}^I}{s}$.
- Ambas funciones de transferencia tienen los mismos polos (determinante de la matriz inversa), pero diferentes ceros.




$$G_{LC}(s) = G_r(s)\frac{G_{planta}(s)}{1+G_{planta}(s)G_c(s)}$$



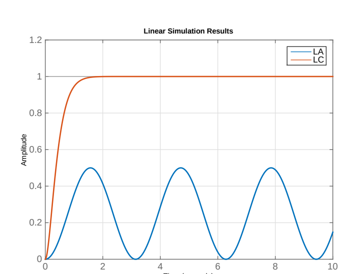
# Estimación y control del VE y acción integral VII

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Acción directa: Cualquier $\boldsymbol{F}$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{K}^I\boldsymbol{z}(t)$ con $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{r}(t)$.

$$\boldsymbol{U}(s) = [-\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}(\boldsymbol{L} - \tfrac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I}{s}) - \tfrac{\boldsymbol{K}^I}{s}]\boldsymbol{Y}(s) +$$
$$+[\boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{F} + \tfrac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I}{s}) + \tfrac{\boldsymbol{K}^I}{s}]\boldsymbol{R}(s)$$

Ejemplo: Dado el sistema con $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, diseñar un controlador con estimador realimención de estados y acción integral de forma que los autovalores del controlador estén en -4 y los del estimador en -20.

```
A=[0 1;-4 0];B=[0;1];C=[1 0];D=0;n=length(A);
Am=[A,zeros(n,1);C,0];Bm=[B;0];
if rank(obsv(A,C))==n & rank(ctrb(Am,Bm))==(n+1)
    K=acker(Am,Bm,[-4,-4,-4]);Ki=K(end);K=K(1:end-1);
    L=acker(A',C',[-20,-20])';
    t=0:0.01:10;u=ones(size(t));
    lsim(A,B,C,D,u,t,[0,0]);hold on;
    F=20 %Cualquiera sirve
    At=[A,-B*Ki,-B*K;C,0,zeros(1,n);L*C,-B*Ki,A-B*K-L*C];
    Bt=[B*F;-1;B*F];Ct=[C,0,zeros(1,n)];
    lsim(At,Bt,Ct,0,u,t,[0,0,0,0,0])
end
legend('LA','LC');
```

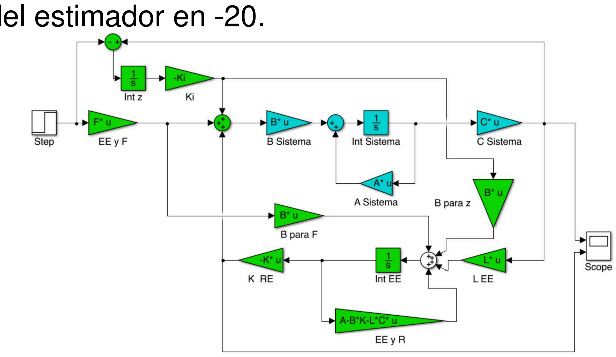


# Estimación y control del VE y acción integral VIII

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t)$
- Acción directa: Cualquier $\boldsymbol{F}$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Bu}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Fr}(t) - \boldsymbol{K}^I\boldsymbol{z}(t)$ con $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{r}(t)$.
  $$\boldsymbol{U}(s) = [-\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})^{-1}(\boldsymbol{L} - \tfrac{\boldsymbol{BK}^I}{s}) - \tfrac{\boldsymbol{K}^I}{s}]\boldsymbol{Y}(s) +$$
  $$+[\boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})^{-1}(\boldsymbol{BF} + \tfrac{\boldsymbol{BK}^I}{s}) + \tfrac{\boldsymbol{K}^I}{s}]\boldsymbol{R}(s)$$

Ejemplo: Dado el sistema con $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, diseñar un controlador con estimador realimención de estados y acción integral de forma que los autovalores del controlador estén en -4 y los del estimador en -20.

```
A=[0 1;-4 0];B=[0;1];
C=[1 0];D=0;n=length(A);
Am=[A,zeros(n,1);C,0];Bm=[B;0];
OB=obsv(A,C);CO=ctrb(Am,Bm);
if rank(OB)==n & rank(CO)==(n+1)
    K=acker(Am,Bm,[-4,-4,-4]);
    Ki=K(end);K=K(1:end-1);
    L=acker(A',C',[-20,-20])';
    F=20;  %Cualquiera sirve
end
```



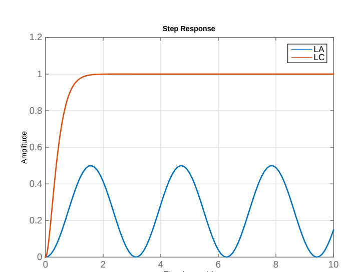



# Estimación y control del VE y acción integral IX

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t)$
- Acción directa: Cualquier $\boldsymbol{F}$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Bu}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Fr}(t) - \boldsymbol{K}^I\boldsymbol{z}(t)$ con $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{r}(t)$.
  $$\boldsymbol{U}(s) = [-\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})^{-1}(\boldsymbol{L} - \tfrac{\boldsymbol{BK}^I}{s}) - \tfrac{\boldsymbol{K}^I}{s}]\boldsymbol{Y}(s) +$$
  $$+[\boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})^{-1}(\boldsymbol{BF} + \tfrac{\boldsymbol{BK}^I}{s}) + \tfrac{\boldsymbol{K}^I}{s}]\boldsymbol{R}(s)$$

Ejemplo: Dado el sistema con $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, diseñar un controlador con estimador realimención de estados y acción integral de forma que los autovalores del controlador estén en -4 y los del estimador en -20.

```
A=[0 1;-4 0];B=[0;1];C=[1 0];D=0;n=length(A);
Am=[A,zeros(n,1);C,0];Bm=[B;0];
if rank(obsv(A,C))==n & rank(ctrb(Am,Bm))==(n+1)
    K=acker(Am,Bm,[-4,-4,-4]);Ki=K(end);K=K(1:end-1);
    L=acker(A',C',[-20,-20])';
    F=20;  %Cualquiera sirve
    Gp=tf(ss(A,B,C,D));
    syms s
    Gc2=collect(-(-K*inv(s*eye(n)-A+B*K+L*C)*(L-B*Ki/s)-Ki/s));
    Gr2=collect(F-K*inv(s*eye(n)-A+B*K+L*C)*(B*F+B*Ki/s)+Ki/s);
     %Se leen los coeficientes.
    Gc=tf([6576,18064,25600],[1,52,924,0])
    Gr=tf([20,864,10560,25600],[1,52,924,0])
    step(Gp,Gp*Gr/(1+Gp*Gc),10)
end
```

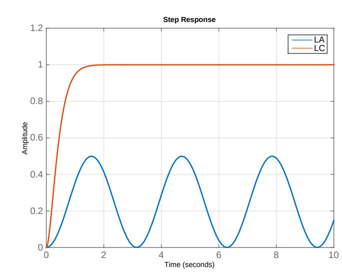


# Estimación y control del VE y acción integral X

- Sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$
- Acción directa: Cualquier $\boldsymbol{F}$
- Estimador: $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t))$
  $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$
- Control: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{K}^I\boldsymbol{z}(t)$ con $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{r}(t)$.
  $\boldsymbol{U}(s) = [-\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}(\boldsymbol{L} - \frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I}{s}) - \frac{\boldsymbol{K}^I}{s}]\boldsymbol{Y}(s) +$
  $+[\boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}_{nxn} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{F} + \frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^I}{s}) + \frac{\boldsymbol{K}^I}{s}]\boldsymbol{R}(s)$

Ejemplo: Dado el sistema con $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, diseñar un controlador con estimador realimención de estados y acción integral de forma que los autovalores del controlador estén en -4 y los del estimador en -20.

```
A=[0 1;-4 0];B=[0;1];C=[1 0];D=0;n=length(A);
Am=[A,zeros(n,1);C,0];Bm=[B;0];
if rank(obsv(A,C))==n & rank(ctrb(Am,Bm))==(n+1)
    K=acker(Am,Bm,[-4,-4,-4]);Ki=K(end);K=K(1:end-1);
    L=acker(A',C',[-20,-20])';
    F=20;  %Cualquiera sirve
    Acon=[A-B*K-L*C,-B*Ki;zeros(1,n+1)];
    Bcon=[L,B*F;1,-1];Ccon=[-K,-Ki];Dcon=[0,F];
    Gp=tf(ss(A,B,C,D));
    Gcon=tf(ss(Acon,Bcon,Ccon,Dcon))
    Gc=-Gcon(1)
    Gr=Gcon(2)
    step(Gp,Gp*Gr/(1+Gp*Gc),10)
end
legend('LA','LC');
```






# Estimación y control del VE y acción integral X

- Las ventajas de la acción integral se mantienen cuando realimentamos el estado estimado:
  - Elimina el efecto, sobre la salida del sistema en lazo cerrado, de las perturbaciones constantes que haya en la entrada y en la salida de la planta.
  - Permite seguir a la entrada aunque no se conozcan exactamente los valores de las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$
- A la hora de implementar el controlador a través de las dos funciones de transferencia, hay que comprobar que los autovalores $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}$ son estables. Si no lo son:
  - Se puede usar una $\boldsymbol{F}$ alternativa (procedimiento visto en el caso de realimentación del estimador con acción directa).
  - Como $\boldsymbol{F}$ puede tomar cualquier valor, podemos hacerlo cero, de forma que no tengamos la conexión de la señal de referencia a través de $\boldsymbol{F}$.

## Esquema


1. Objetivos
2. Realimentación del vector de estados
3. Estimación y realimentación del vector de estados
4. Control Óptimo




## Sintonización óptima del controlador I

Para elegir los parámetros del controlador ($\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{F}$) podemos seguir varios procedimientos:

- Asignación de los autovalores (visto a lo largo del tema)
- Utilizar algoritmos de optimización y una función objetivo/restricciones dependiente de los parámetros del sistema.
- Sintonizar optimamente la $\boldsymbol{K}$ del sistema por el método LQR (Lineal Quadratic Regulator):
  - Dado el sistema: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  - Función de coste: $J = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}(t)^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}(t)^T \boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t))dt$ donde $\boldsymbol{Q}$ es simétrica y semidifinida positiva y $\boldsymbol{R}$ es simétrica y definida positiva (porque tiene que ser invertible).
  - La ley de control que minimiza $J$: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$ donde $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{S}$ es una matriz simétrica semidefinida positiva, solución de la ecuación algebraica de Riccati: $\boldsymbol{S}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{S} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{S} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}$.
  - Matlab encuentra la solución: `[K,S,autovalor]=lqr(A,B,Q,R).`
  - A través de los valores de las matrices $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$ indicamos los estados y señales de control que deseamos optimizar más.

# Sintonización óptima del controlador II

- El método LQR permite sintonizar el valor de la $\boldsymbol{K}$ de todos los controladores vistos (y no sólo el de realimentación de estados):
  - Para los casos con realimentación y realimentación + acción directa, se obtendrá directamente el valor de $\boldsymbol{K}$ a partir de las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$.
  - Para el caso con realimeación+acción integral, se obtendrá el valor de $[\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}^I]$ a partir de las matrices ampliadas con el estado $\boldsymbol{z}$.
  - Para sintonizar el valor de la $\boldsymbol{L}$ en los controles con estimador de estados, se mira el valor de los autovalores asociados a la $\boldsymbol{K}$ y se eligen valores con dinámicas más rápidas.
  - El valor de la matriz $\boldsymbol{F}$ se elige como ya se ha visto.
- En cualquier caso, podemos usar los valores propuestos por el método para $\boldsymbol{K}$ y por nosotros para $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{L}$ como punto de partida de un algoritmos de optimización más genérico que nos permita poner restricciones u optimizar otras funciones $J$.
- A pesar de la sencillez aparente de la técnica, elegir los valores de $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$ que produzcan el comportamiento deseado no es una labor trivial.



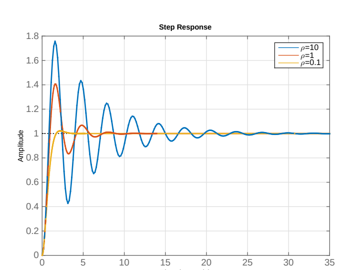
# Sintonización óptima del controlador III

Ejemplo: Dado el sistema con $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, diseñar un controlador con VE y acción directa por el método LQR.

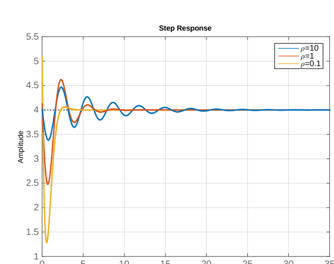
- $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Penaliza por separado la suma de los cuadrados de los estados.
- $\boldsymbol{R} = \rho$. Penaliza, con un factor $\rho$, el cuadrado de la señal de control.

```
A=[0 1;-4 0];B=[0;1];C=[1,0];D=0;n=length(A);
Q=[1 0;0 1];R=10;  %Con rho=10
[K,S,autovalores]=lqr(A,B,Q,R);
F=inv(-C*inv(A-B*K)*B);
figure(1);step(ss(A-B*K,B*F,C,0)),hold on;  %Respuesta
figure(2);step(ss(A-B*K,B*F,-K,F)),hold on;  %Control
Q=[1 0;0 1];R=1;  %Con rho=1
[K,S,autovalores]=lqr(A,B,Q,R);
F=inv(-C*inv(A-B*K)*B);
figure(1);step(ss(A-B*K,B*F,C,0)),hold on;  %Respuesta
figure(2);step(ss(A-B*K,B*F,-K,F)),hold on;  %Control
Q=[1 0;0 1];R=0.1;  %Con rho=0.1
[K,S,autovalores]=lqr(A,B,Q,R);
F=inv(-C*inv(A-B*K)*B);
figure(1)
figure(1);step(ss(A-B*K,B*F,C,0)),hold on;  %Respuesta
legend('\rho=10','\rho=1','\rho=0.1')
figure(2);step(ss(A-B*K,B*F,-K,F)),hold on;  %Control
legend('\rho=10','\rho=1','\rho=0.1')
```

Salida:




Control:



# Sintonización óptima del controlador IV

Para elegir los valores de las matrices $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$ se puede seguir el método de Bryson y Ho:

1. Utilizar inicialmente matrices diagonales, cuyos elementos sean la inversa de los cuadrados máximos que deseamos para la variable correspondiente
2. Modificando los valores de las diagonales hasta que se obtenga un compromiso adecuado entre el tiempo de respuesta, el amortiguamiento y el esfuerzo de control.

Alternativamente, se puede usar una variante del método LQR en el que la matriz $\boldsymbol{Q}$ está relacionado con el peso de la salida y la $\boldsymbol{R}$ con la señal de control:

- Función de coste: $J = \int_0^\infty (\boldsymbol{y}(t)^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{u}(t)^T \boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t))dt$
- La ley de control que minimiza $J$: $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$
- Se encuentra la relación de $\boldsymbol{K}$ con las matrices del sistema, usando un sistema alternativo que nos da la relación de $\boldsymbol{y}$ con el estado y el método LQR para estados.
- Matlab encuentra la solución: `[K,S,autovalor]=lqry(A,B,Q,R).`