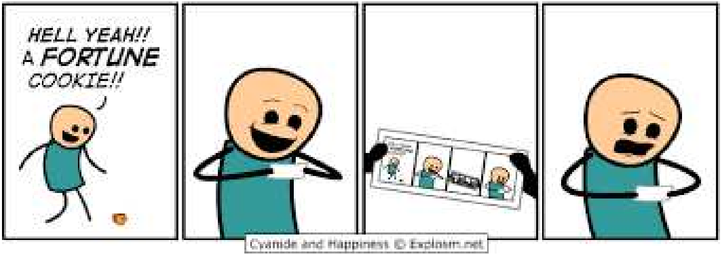
Diseño Recursivo



Yolanda Ortega Mallén

Dpto. de Sistemas Informáticos y Computación

Universidad Complutense de Madrid

Objetivos

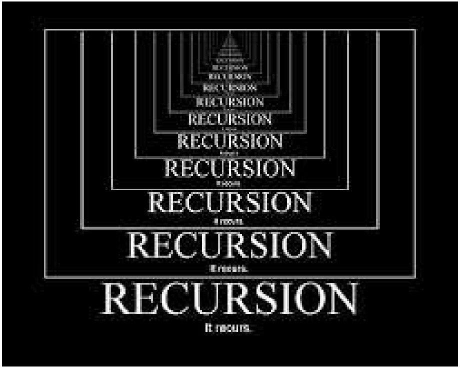
1. Realizar un diseño razonado de algoritmos recursivos.
2. Saber cómo añadir parámetros para mejorar el coste de los algoritmos recursivos.
3. Aprender a verificar la corrección de un algoritmo recursivo respecto a su especificación.
4. Aprender a obtener un algoritmo iterativo equivalente a uno recursivo.

Sumario

- Diseño de algoritmos recursivos.
- Verificación de algoritmos recursivos.
- Técnicas de inmersión.
- Transformación de algoritmos recursivos en iterativos.

Características de la recursión

¿Qué es? Permite que un procedimiento o función haga referencia a sí mismo dentro de su definición.



¿Cómo funciona? Resuelve un problema P sobre unos datos D suponiendo que P ya está resuelto para otros datos D', del mismo tipo que D pero más sencillos.

P se resuelve directamente para datos suficientemente sencillos.

¿Utilización? Para repetir cálculos (como la iteración).

Recursión vs iteración

Ejemplo: Potencia

Problema: $P \equiv m^n$ Datos: $D \equiv (m,n)$

Método iterativo

$m^n = m * m * \ldots^{(n} * m$.
Nuevo problema:
$P' \equiv$ multiplicar dos enteros.

fun potencia$(m,n : ent)$ **dev** $p : ent$
var $x : ent$
  $\langle x,p \rangle := \langle 0,1 \rangle$;
  mientras $(x \neq n)$ **hacer**
    $p := p * m$;
    $x := x + 1$
  fmientras
ffun

Método recursivo

$m^n = m^{n-1} * m$.
Mismo problema para datos más pequeños:
$D' \equiv (m,n-1)$.

fun potencia$(m,n : ent)$ **dev** $p : ent$
  casos
    $n = 0 \rightarrow p := 1$
    $\Box\ n > 0 \rightarrow p := m *$ potencia$(m,n-1)$
  fcasos
ffun

- Misma expresividad.
- Mayor nivel de abstracción.
- Programas más compactos.
- Lenguajes de programación funcional.

Esquema general

$\{ \; P(\overline{x}) \; \}$
fun $\texttt{f-rec}(\overline{x} : T_1)$ **dev** $\langle \overline{y} : T_2 \rangle$
casos
$B_t(\overline{x}) \;\rightarrow\; \overline{y} := \texttt{triv}(\overline{x})$
$\square \; B_{nt}(\overline{x}) \;\rightarrow\; \overline{y} := \texttt{comp}(\texttt{f-rec}(\texttt{s}(\overline{x})), \overline{x})$
fcasos
ffun
$\{ \; Q(\overline{x}, \overline{y}) \; \}$

Recursión lineal única llamada recursiva.

Recursión final comp no realiza acciones (devuelve el primer argumento).

Recursón múltiple más de una llamada recursiva.

Diseño y verificación de algoritmos recursivos

Los pasos a seguir son:

1. Especificación formal del algoritmo.
2. Análisis por casos, descomposición.
3. Composición de resultados.
4. Verificación formal de la corrección.
5. Estudio del coste.

Análisis por casos y composición

¿Cómo descomponer los datos para calcular la solución a partir de la solución al mismo problema para datos más pequeños?

Análisis de casos: triviales o básicos

Reducir el tamaño de los problemas en los casos recursivos y acercarse al caso trivial.

Clasificación exhaustiva cubrir todos los casos permitidos por la precondición.

Casos excluyentes no ambigüedad.

Potencia

$$\begin{array}{r|l} n = 0 & m^0 = 1 \\ \hline n > 0 & m^n = m * m^{n-1} \end{array}$$

Corrección

Demostrar que para todo posible dato de entrada $\overline{x}$ que cumpla $P(\overline{x})$, se cumple $Q(\overline{x},\texttt{f-rec}(\overline{x}))$.

1. Se cubren todos los casos:

$$P(\overline{x}) \Rightarrow B_t(\overline{x}) \ \vee \ B_{nt}(\overline{x})$$

2. El caso trivial es correcto:

$$P(\overline{x}) \ \wedge \ B_t(\overline{x}) \Rightarrow Q(\overline{x},\texttt{triv}(\overline{x}))$$

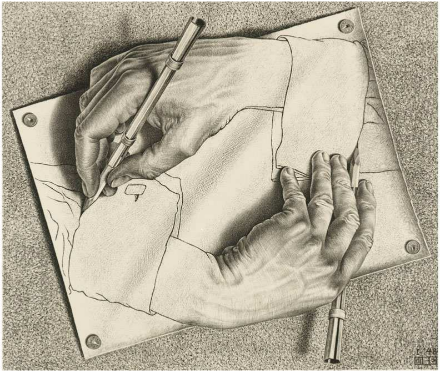
3. La función recursiva es invocada siempre en estados que satisfacen su precondición:

$$P(\overline{x}) \ \wedge \ B_{nt}(\overline{x}) \Rightarrow P(\texttt{s}(\overline{x}))$$

4. El paso de inducción es correcto:

$$P(\overline{x}) \ \wedge \ B_{nt}(\overline{x}) \ \wedge \ Q(\texttt{s}(\overline{x}),\overline{y'}) \Rightarrow Q(\overline{x},\texttt{comp}(\overline{y'},\overline{x}))$$

Terminación



5. Existe una función de tamaño t tal que

$$P(\overline{x}) \Rightarrow t(\overline{x}) \geq 0$$

6. El valor de t decrece al hacer la llamada recursiva:

$$P(\overline{x}) \land B_{nt}(\overline{x}) \Rightarrow t(\mathbf{s}(\overline{x})) < t(\overline{x})$$

Ejemplo: potencia

$\{ n \geq 0 \}$
fun $\mathtt{potencia}(m,n : \mathit{ent})$ **dev** $p : \mathit{ent}$
casos
$n = 0 \rightarrow p := 1$
$\square\ n > 0 \rightarrow$
$p := m * \mathtt{potencia}(m, n-1)$
fcasos
ffun
$\{ p = m^n \}$

$\overline{x} = \langle m, n \rangle$

$\overline{y} = p$

$P(m,n) \equiv n \geq 0$

$Q(m,n,p) \equiv p = m^n$

$B_t(m,n) \equiv n = 0$

$B_{nt}(m,n) \equiv n > 0$

$\mathtt{s}(m,n) = \langle m, n-1 \rangle$

$\mathtt{triv}(m,n) = 1$

$\mathtt{comp}(p', m, n) = m * p'$

$t(m,n) = n$

1. $n \geq 0 \Rightarrow n = 0 \ \vee \ n > 0$
2. $n \geq 0 \wedge n = 0 \Rightarrow 1 = m^n$
3. $n \geq 0 \wedge n > 0 \Rightarrow n - 1 \geq 0$
4. $n \geq 0 \wedge n > 0 \wedge p' = m^{n-1} \Rightarrow m * p' = m^n$
5. $n \geq 0 \Rightarrow n \geq 0$
6. $n \geq 0 \wedge n > 0 \Rightarrow n - 1 < n$

Ejemplo: máximo común divisor

$\{ a > 0 \wedge b > 0 \}$
fun `euclides`$(a,b : nat)$ **dev** $mcd : nat$
  casos
    $a = b \rightarrow mcd := a$
    $\square\ a > b \rightarrow mcd :=$ `euclides`$(a-b,b)$
    $\square\ a < b \rightarrow mcd :=$ `euclides`$(a,b-a)$
  fcasos
ffun
$\{ mcd = \mathrm{mcd}(a,b) \}$

Propiedades del máximo común divisor:

- $mcd(a,b) = mcd(a-b,b)$ si $a > b$.
- $mcd(a,b) = mcd(a,b-a)$ si $a < b$.
- $mcd(a,b) = a$ si $a = b$

1. $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a = b \vee a > b \vee a < b$
2. $a > 0 \wedge b > 0 \wedge a = b \Rightarrow a = mcd(a,b)$
3. $a > 0 \wedge b > 0 \wedge a > b \Rightarrow a - b > 0 \wedge b > 0$
   $a > 0 \wedge b > 0 \wedge a < b \Rightarrow a > 0 \wedge b - a > 0$
4. $a > 0 \wedge b > 0 \wedge a > b \wedge mcd' = mcd(a-b,b) \Rightarrow mcd' = mcd(a,b)$
   $a > 0 \wedge b > 0 \wedge a < b \wedge mcd' = mcd(a,b-a) \Rightarrow mcd' = mcd(a,b)$
5. Función de terminación: $t = a + b$
   $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a + b \geq 0$
6. $a > 0 \wedge b > 0 \wedge a > b \Rightarrow a - b + b < a + b$
   $a > 0 \wedge b > 0 \wedge a < b \Rightarrow a + b - a < a + b$

Análisis del coste

Recurrencias: funciones de coste recursivas.

fun `factorial`$(n : nat)$ **dev** $f : nat$
  casos
    $n = 0 \rightarrow \; f := 1$
  □ $n > 0 \rightarrow$
      $f := n * \texttt{factorial}(n-1)$
  fcasos
ffun

Recurrencia

$$T(n) = \begin{cases} k_1 & \text{si } n = 0 \\ T(n-1) + k_2 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Para obtener el orden de complejidad de $T(n)$:

Despliegue obtener fórmula explícita de $T(n)$.

Teoremas disminución del tamaño del problema por sustracción o por división.

Despliegue de recurrencias

El objetivo es conseguir una fórmula explícita (en función de n) de $T(n)$.

Despliegue Sustituir T por la parte derecha de la ecuación.
Repetir hasta encontrar una fórmula que dependa del número de despliegues (o llamadas recursivas) i.

Postulado Obtener el valor de i que hace desaparecer T (caso básico).
En la fórmula, sustituir i por ese valor para obtener la fórmula explícita T^*, que solo depende de n.

Comprobación Demostrar por inducción que $T = T^*$.

Factorial

$$T(n) = \begin{cases} k_1 & \text{si } n = 0 \\ T(n-1) + k_2 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl}
T(n) & \stackrel{1}{=} & T(n-1) + k_2 \\
& \stackrel{2}{=} & T(n-2) + k_2 + k_2 \quad = \quad T(n-2) + 2 \cdot k_2 \\
& \stackrel{3}{=} & T(n-3) + k_2 + 2 \cdot k_2 \quad = \quad T(n-3) + 3 \cdot k_2 \\
& \vdots & \\
& \stackrel{i}{=} & T(n-i) + i \cdot k_2 \\
& \vdots & \\
& \stackrel{n}{=} & T(0) + n \cdot k_2 \quad = \quad n \cdot k_2 + k_1 = T^*(n) \in \Theta(n)
\end{array}$$

$\forall n \geq 0 \,.\, T(n) = T^*(n)$

Caso base $T(0) = k_1 = T^*(0)$

Paso inductivo H.I.: $T(n) = T^*(n)$

$$T(n+1) = T(n) + k_2 \stackrel{h.i.}{=} n \cdot k_2 + k_1 + k_2 = (n+1) \cdot k_2 + k_1 = T^*(n+1)$$

- Caso directo: coste constante
- Preparación de llamadas y combinación de resultados: coste polinómico

Teorema de la resta: Descomposición restando una cantidad constante

$$T(n) = \begin{cases} k_0 & \text{si } 0 \leq n < b \\ a \cdot T(n-b) + k_1 \cdot n^k & \text{si } n \geq b \end{cases}$$

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^{k+1}) & \text{si } a = 1 \\ \Theta(a^{n \operatorname{div} b}) & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Teorema de la división: Descomposición dividiendo por una cantidad constante $b \geq 2$

$$T(n) = \begin{cases} k_0 & \text{si } 0 \leq n < b \\ a \cdot T(\frac{n}{b}) + k_1 \cdot n^k & \text{si } n \geq b \end{cases}$$

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{si } a < b^k \\ \Theta(n^k \log n) & \text{si } a = b^k \\ \Theta(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^k \end{cases}$$

El coste es menor cuanto más pequeñas son a y k y más grande es b.

División entera

$\{ a \geq 0 \wedge b > 0 \}$
fun `dividir`$(a, b : \mathit{ent})$ **dev** $\langle q, r : \mathit{ent} \rangle$
$\{ a = b * q + r \wedge 0 \leq r < b \}$

Análisis por casos y composición

- $a < b \longrightarrow q = 0$ y $r = a$ caso básico
- $a = b \longrightarrow q = 1$ y $r = 0$ caso básico
- $a > b \wedge a = b * q + r \Rightarrow a - b = b * (q - 1) + r$ caso recursivo

$a < b$	$q = 0$ y $r = a$
$a \geq b$	$q = q' + 1$ y $r = r'$ donde $\langle q', r' \rangle =$ `dividir`$(a - b, b)$

Ejemplo: División entera

fun `dividir`$(a, b : ent)$ **dev** $\langle q, r : ent \rangle$
casos
$a < b \rightarrow \langle q, r \rangle := \langle 0, a \rangle$
$\square\ a \geq b \rightarrow \langle q, r \rangle :=$ `dividir`$(a - b, b)$;
$q := q + 1$
fcasos
ffun

Coste depende de a y de b; tamaño: $n = a \text{ div } b$
$(a - b) \text{ div } b = (a \text{ div } b) - 1$

$$T(n) = \begin{cases} k_1 & \text{si } n = 0 \\ T(n-1) + k_2 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

$$T(n) \in \Theta(n) = \Theta(a \text{ div } b)$$

Ejemplo: División entera

Mayor eficiencia si dividimos el tamaño del problema.

- dividiendo a
- multiplicando b

$$\langle q', r' \rangle = \texttt{dividir}(a, 2b) \Rightarrow a = (2b) * q' + r' \ \wedge\ 0 \leq r' < 2b$$

Buscamos $\langle q, r \rangle$ tal que $a = b * q + r \ \wedge\ 0 \leq r < b$:

- $r' < b \longrightarrow \langle q, r \rangle = \langle 2q', r' \rangle$
- $b \leq r' < 2b \Rightarrow 0 \leq r' - b < b$

$$a = (2b) * q' + b + r' - b = b * (2q' + 1) + (r' - b)$$

<table>
<tr><td>$a < b$</td><td colspan="2">$q = 0$ y $r = a$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$a \geq b$</td><td colspan="2">$\langle q', r' \rangle = \texttt{dividir}(a, 2b)$</td></tr>
<tr><td>$r' < b$</td><td>$q = 2q'$ y $r = r'$</td></tr>
<tr><td>$r' \geq b$</td><td>$q = 2q' + 1$ y $r = r' - b$</td></tr>
</table>

Ejemplo: División entera

fun `dividir-efic`$(a, b : \mathit{ent})$ **dev** $\langle q, r : \mathit{ent} \rangle$

casos

$a < b \rightarrow \langle q, r \rangle := \langle 0, a \rangle$

$\square\ a \geq b \rightarrow \langle q, r \rangle :=$ `dividir-efic`$(a, 2 * b)$;

casos

$r < b \rightarrow q := 2 * q$

$\square\ r \geq b \rightarrow \langle q, r \rangle := \langle 2 * q + 1, r - b \rangle$

fcasos

fcasos

ffun

Tamaño: $n = a \text{ div } b$ $\quad a \text{ div } (2b) = (a \text{ div } b) \text{ div } 2$

$$T(n) = \begin{cases} k_1 & n = 0 \\ T(n \text{ div } 2) + k_2 & n > 0 \end{cases}$$

$$T(n) \in \Theta(\log n) = \Theta(\log(a \text{ div } b))$$

Ejercicio

Verificar la corrección de los dos algoritmos para la división entera.

Búsqueda binaria

$\{ \; ord(V,1,N) \; \wedge \; N \geq 0 \; \}$
fun `búsqueda-binaria-rec`$(V[1..N]$ **de** *ent*$, A : $ *ent*$)$ **dev** $\langle \, b :$ *bool*$, p :$ *nat* $\rangle$
$\{(b \rightarrow 1 \leq p \leq N \; \wedge \; V[p] = A) \; \wedge$
$\;(\neg b \rightarrow 1 \leq p \leq N+1 \; \wedge \; V[1..p) \prec A \; \wedge \; A \prec V[p..N]) \; \}$

$$ord(V,a,b) \equiv (\forall k : a \leq k < b : V[k] < V[k+1])$$
$$V[a..b) \prec x \equiv (\forall i : a \leq i < b : V[i] < x)$$
$$x \prec V[a..b] \equiv (\forall i : a \leq i \leq b : x < V[i])$$

Generalización: búsqueda en cualquier segmento $V[c..f]$.

$\{ \; P \equiv ord(V,c,f) \; \wedge \; 1 \leq c \leq f+1 \leq N+1 \; \}$
fun `búsqueda-binaria-rec`$(V[1..N]$ **de** *ent*$, A : $ *ent*$, c, f :$ *nat*$)$ **dev** $\langle \, b :$ *bool*$, p :$ *nat* $\rangle$
$\{ \; Q \equiv (b \rightarrow c \leq p \leq f \; \wedge \; V[p] = A) \; \wedge$
$\quad (\neg b \rightarrow c \leq p \leq f+1 \; \wedge \; V[c..p) \prec A \; \wedge \; A \prec V[p..f]) \; \}$

Ejemplo: Búsqueda binaria

```
fun búsqueda-binaria-rec(V[1..N] de ent, A : ent, c, f : nat) dev ⟨b : bool, p : nat⟩
    si c > f entonces ⟨b, p⟩ := ⟨falso, c⟩
    si no
        m := (c + f) div 2 ;
        casos
              A < V[m] → ⟨b, p⟩ := búsqueda-binaria-rec(V, A, c, m − 1)
            □ A = V[m] → ⟨b, p⟩ := ⟨cierto, m⟩
            □ A > V[m] → ⟨b, p⟩ := búsqueda-binaria-rec(V, A, m + 1, f)
        fcasos
    fsi
ffun
```

Correcto para cualquier m tal que $c \leq m \leq f$.
$m := (c+f)\ \mathrm{div}\ 2$ es la más eficiente.

$$T(n) = \begin{cases} k_1 & n = 0 \\ T(n\ \mathrm{div}\ 2) + k_2 & n > 0 \end{cases}$$

$$T(n) \in \Theta(\log n) = \Theta(\log N)$$

Ejemplo: Búsqueda binaria

1. Se cubren todos los casos:
   - $P \Rightarrow c > f \;\vee\; c \leq f$
   - $c \leq f \wedge m = (c+f)\text{ div }2 \Rightarrow c \leq m \leq f$

     $P \wedge (c \leq m \leq f) \Rightarrow A < V[m] \;\vee\; A = V[m] \;\vee\; A > V[m]$
2. Los casos triviales son correctos:
   - $P \wedge (c > f) \Rightarrow (\texttt{falso} \rightarrow c \leq c \leq f \;\wedge\; V[c] = A) \;\wedge$
     $(\neg\texttt{falso} \rightarrow c \leq c \leq f+1 \;\wedge\; V[c..c) \prec A \;\wedge\; A \prec V[c..f])$
   - $P \;\wedge\; (c \leq m \leq f) \wedge A = V[m] \Rightarrow$

     $(\texttt{cierto} \rightarrow c \leq m \leq f \;\wedge\; V[m] = A) \;\wedge$

     $(\neg\texttt{cierto} \rightarrow c \leq m \leq f+1 \;\wedge\; V[c..m) \prec A \;\wedge\; A \prec V[m..f])$
3. La función recursiva es invocada en estados que satisfacen su precondición:
   - $ord(V,c,f) \wedge (1 \leq c \leq f+1 \leq N+1) \wedge (c \leq m \leq f) \Rightarrow$
     $ord(V,c,m-1) \wedge (1 \leq c \leq m \leq N+1)$
   - $ord(V,c,f) \wedge (1 \leq c \leq f+1 \leq N+1) \wedge (c \leq m \leq f) \Rightarrow$
     $ord(V,m+1,f) \wedge (1 \leq m+1 \leq f+1 \leq N+1)$

Ejemplo: Búsqueda binaria

4. Los pasos de inducción son correctos:
   - $ord(V,c,f) \wedge (1 \leq c \leq f+1 \leq N+1) \wedge (c \leq m \leq f) \wedge (A < V[m]) \wedge$
     $(b' \rightarrow c \leq p' \leq m-1 \;\wedge\; V[p'] = A) \;\wedge$
     $(\neg b' \rightarrow c \leq p' \leq m \;\wedge\; V[c..p') \prec A \;\wedge\; A \prec V[p'..m-1])$
     $\Rightarrow (b' \rightarrow c \leq p' \leq f \;\wedge\; V[p'] = A) \;\wedge$
     $(\neg b' \rightarrow c \leq p' \leq f+1 \;\wedge\; V[c..p') \prec A \;\wedge\; A \prec V[p'..f])$
   - $ord(V,c,f) \wedge (1 \leq c \leq f+1 \leq N+1) \wedge (c \leq m \leq f) \wedge (A > V[m]) \wedge$
     $(b' \rightarrow m+1 \leq p' \leq f \;\wedge\; V[p'] = A) \;\wedge$
     $(\neg b' \rightarrow m+1 \leq p' \leq f+1 \;\wedge\; V[m+1..p') \prec A \;\wedge\; A \prec V[p'..f])$
     $\Rightarrow (b' \rightarrow c \leq p' \leq f \;\wedge\; V[p'] = A) \;\wedge$
     $(\neg b' \rightarrow c \leq p' \leq f+1 \;\wedge\; V[c..p') \prec A \;\wedge\; A \prec V[p'..f])$
5. Tamaño: $t = f - c + 1$

$$ord(V,c,f) \wedge (1 \leq c \leq f+1 \leq N+1) \Rightarrow (f - c + 1 \geq 0)$$

6. El valor de t decrece al hacer las llamadas recursivas:
   - $ord(V,c,f) \wedge (1 \leq c \leq f+1 \leq N+1) \wedge (c \leq m \leq f)$
     $\Rightarrow (m - 1 - c + 1 < f - c + 1)$
   - $ord(V,c,f) \wedge (1 \leq c \leq f+1 \leq N+1) \wedge (c \leq m \leq f)$
     $\Rightarrow (f - (m+1) + 1 < f - c + 1)$

Técnicas de inmersión

Cuando la función especificada `f` no admite una descomposición recursiva, lo intentamos con una función más general: con más parámetros (de entrada) o más resultados, tal que para ciertos valores calcule lo mismo que `f`.

$\{ N \geq 0 \}$
fun `suma-vector`$(V[0..N]$ **de** *ent*$)$ **dev** s : *ent*
$\{ s = (\sum i : 0 \leq i < N : V[i]) \}$

Solución: debilitar la postcondición, sustituyendo la constante N por una variable n, que se añade como parámetro.

$\{ N \geq 0 \wedge 0 \leq n \leq N \}$
fun `gsuma-vector`$(V[0..N]$ **de** *ent*, n : *nat*$)$ **dev** s : *ent*
$\{ s = (\sum i : 0 \leq i < n : V[i]) \}$

$$\texttt{gsuma-vector}(V, N) = \texttt{suma-vector}(V)$$

Descomposición recursiva: conociendo la suma hasta $n - 1$ se puede calcular la suma hasta n.

$$s = (\sum i : 0 \leq i < n : V[i]) \overset{n>0}{\equiv} s = (\sum i : 0 \leq i < n-1 : V[i]) + V[n-1]$$

$\{ N \geq 0 \wedge 0 \leq n \leq N \}$
fun `gsuma-vector`$(V[0..N]$ **de** *ent*$, n :$ *nat*$)$ **dev** $s :$ *ent* $\{\Theta(n)\}$
  casos
    $n = 0 \rightarrow s := 0$
    $\Box\ n > 0 \rightarrow s :=$ `gsuma-vector`$(V, n-1)$;
      $s := s + V[n-1]$
  fcasos
ffun
$\{ s = (\sum i : 0 \leq i < n : V[i]) \}$

Inmersión de f en g

$\{\ P(\overline{x})\ \}$
fun f$(\overline{x})$ **dev** $\overline{y}$
$\{\ Q(\overline{x},\overline{y})\ \}$

y especificamos e implementamos una función g más general.

$\{\ P'(\overline{x},\overline{w})\ \}$
fun g$(\overline{x},\overline{w})$ **dev** $\langle \overline{y},\overline{z} \rangle$
$\{\ Q'(\overline{x},\overline{w},\overline{y},\overline{z})\ \}$

tal que, bajo ciertas condiciones $R(\overline{x},\overline{w})$, se cumple que g se comporta como f

$$P'(\overline{x},\overline{w}) \ \wedge\ \underbrace{R(\overline{x},\overline{w})}_{\overline{w}=\overline{c}} \ \wedge\ Q'(\overline{x},\overline{w},\overline{y},\overline{z}) \Rightarrow Q(\overline{x},\overline{y})$$

f es la función sumergida y g la función inmersora.

La condición R suele consistir en dar un valor inicial $\overline{c}$ a los nuevos parámetros.

Ejemplo: Raíz cuadrada entera

$\{ P \equiv n \geq 0 \}$
fun `raíz-ent`$(n : \mathit{ent})$ **dev** $r : \mathit{ent}$
$\{ Q \equiv r^2 \leq n < (r+1)^2 \}$

Inmersión: sustituir en Q la constante 1 por la variable a.

$Q' \equiv r^2 \leq n < (r+a)^2$

$Q' \wedge a = 1 \Rightarrow Q$

$\{ P' \equiv n \geq 0 \wedge a \geq 1 \}$
fun `graíz-ent`$(n, a : \mathit{ent})$ **dev** $r : \mathit{ent}$
$\{ Q' \equiv r^2 \leq n < (r+a)^2 \}$

Llamada inicial: `graíz-ent`$(n, 1) =$ `raíz-ent`(n).

Ejemplo: Raíz cuadrada entera

Cuando a es *suficientemente* grande ($n < a^2$), la solución (trivial) será $r = 0$.

Podemos intentar aumentar a, pasando a $2a$.

¿Existe relación entre `graíz-ent`(n,a) y `graíz-ent`$(n,2a)$?

La llamada recursiva devolverá r' tal que

$$r'^2 \leq n \;\wedge\; n < (r' + 2a)^2$$

Si r' cumpliera además $n < (r' + a)^2$, entonces valdría como resultado.

En caso contrario tenemos

$$(r' + a)^2 \leq n \;\wedge\; n < (r' + a + a)^2$$

con lo que $r' + a$ cumple lo que la postcondición Q' pide a r.

Ejemplo: Raíz cuadrada entera

$\{ P' \equiv n \geq 0 \wedge a \geq 1 \}$

fun `graíz-ent`$(n, a : \mathit{ent})$ **dev** $r : \mathit{ent}$

  casos

    $a^2 > n \rightarrow r := 0$

    $\square\ a^2 \leq n \rightarrow r :=$ `graíz-ent`$(n, 2 * a)$;

      casos

        $n < (r+a)^2 \rightarrow$ `nada`

        $\square\ n \geq (r+a)^2 \rightarrow r := r + a$

      fcasos

  fcasos

ffun

$\{ Q' \equiv r^2 \leq n < (r+a)^2 \}$

Tamaño: $m = n/a^2$

$$n/(2a)^2 = (n/a^2)/4$$

$$T(m) = \begin{cases} k_1 & m = 0 \\ T(m/4) + k_2 & m > 0 \end{cases}$$

`graíz-ent` tiene coste en $\Theta(\log m)$ y `raíz-ent` tiene coste en $\Theta(\log n)$.

Inmersión final

Cuando la función inmersora es recursiva final sus resultados valen como resultados de la función sumergida:

$$Q' \Rightarrow Q$$

y no depende de los parámetros adicionales $\overline{w}$.

¿Para qué sirven en este caso los parámetros adicionales?

Para acumular parte de los resultados y no tener que realizar el camino ascendente.

Ejemplo: Suma de los elementos de un vector

$\{ P' \equiv 0 \leq n \leq N \wedge w = (\sum i : 0 \leq i < n : V[i]) \}$
fun gfsuma-vector$(V[0..N)$ **de** *ent*$, n$: *nat*$, w$: *ent*$)$ **dev** s : *ent*
$\{ Q' \equiv s = (\sum i : 0 \leq i < N : V[i]) \}$

Como $P' \wedge n = N \Rightarrow Q'^{w}_{s}$ consideramos el caso trivial $B_t \equiv n = N$, en el cual se devuelve como resultado el acumulador.

Llamada inicial: $n = 0$ y $w = 0$.

Sucesor: $\mathtt{s}(n) = n + 1$.

La precondición se debe cumplir al hacer la llamada recursiva:

$$w = (\sum i : 0 \leq i < n + 1 : V[i]) = (\sum i : 0 \leq i < n : V[i]) + V[n]$$

fun gfsuma-vector$(V[0..N)$ **de** *ent*$, n$: *nat*$, w$: *ent*$)$ **dev** s : *ent*
casos
$n = N \rightarrow s := w$
$\square\ n < N \rightarrow s :=$ gfsuma-vector$(V, n+1, w + V[n])$
fcasos
ffun

Inmersión por razones de eficiencia

Añadir más parámetros (de entrada o salida) para que la función sea más eficiente.

Calcular expresiones costosas mediante parámetros acumuladores.

Inmersión de parámetros se necesita una expresión compleja e antes de la llamada recursiva.
Nuevo parámetro p de entrada, y se añade $p = e$ a la precondición.

Inmersión de resultados se necesita una expresión compleja e después de la llamada recursiva.
Nuevo parámetro de salida p, y se añade $p = e$ a la postcondición.

Ejemplo: Raíz cuadrada entera

Inmersión de parámetros para calcular $(r+a)^2 = r^2 + a^2 + 2ra$.

$\{\ n \geq 0\ \wedge\ a \geq 1\ \wedge\ ac = a^2\ \}$

fun ggraíz-ent$(n, a, ac : \mathit{ent})$ **dev** $r : \mathit{ent}$

casos

$ac > n \ \rightarrow\ r := 0$

$\square\ ac \leq n \ \rightarrow\ r :=$ ggraíz-ent$(n, 2*a, 4*ac)$;

casos

$n < r^2 + ac + 2*r*a \ \rightarrow$ nada

$\square\ n \geq r^2 + ac + 2*r*a \ \rightarrow\ r := r + a$

fcasos

fcasos

ffun

$\{\ r^2 \leq n < (r+a)^2\ \}$

Llamada inicial: ggraíz-ent$(n, 1, 1)$.

Ejemplo: Raíz cuadrada entera

Inmersión de resultados para calcular r^2.

$\{\ n \geq 0\ \wedge\ a \geq 1\ \wedge\ ac = a^2\ \}$
fun $\texttt{gggraíz-ent}(n, a, ac : \mathit{ent})$ **dev** $\langle\, r, rc : \mathit{ent} \,\rangle$
casos
$ac > n \ \rightarrow\ \langle\, r, rc \,\rangle := \langle\, 0, 0 \,\rangle$
$\square\ ac \leq n \ \rightarrow\ \langle\, r, rc \,\rangle := \texttt{gggraíz-ent}(n, 2*a, 4*ac)\ ;$
$e := rc + ac + 2*r*a\ ; \qquad \{\ e = (r+a)^2\ \}$
casos
$n < e \ \rightarrow\ \texttt{nada}$
$\square\ n \geq e \ \rightarrow\ \langle\, r, rc \,\rangle := \langle\, r+a, e \,\rangle$
fcasos
fcasos
ffun
$\{\ r^2 \leq n < (r+a)^2\ \wedge\ rc = r^2\ \}$

$\texttt{raíz-ent}(n) = \texttt{graíz-ent}(n,1) = \texttt{ggraíz-ent}(n,1,1) =$
$\mathit{prim}(\texttt{gggraíz-ent}(n,1,1))$

Función de Fibonacci eficiente

$\{\ \texttt{cierto}\ \}$
fun $\texttt{gfibonacci}(n : \mathit{nat})$ **dev** $\langle f, g : \mathit{nat} \rangle$
  casos

$$
\begin{array}{rlll}
 & n = 0 \rightarrow & \langle f, g \rangle := \langle 0, 1 \rangle & \\
\Box & n > 0 \rightarrow & \langle f, g \rangle := \texttt{gfibonacci}(n-1)\,; & \\
 & & \langle f, g \rangle := \langle g, f + g \rangle &
\end{array}
$$

  fcasos
ffun
$\{\ f = \mathit{fib}_n \wedge g = \mathit{fib}_{n+1}\ \}$

$T(n) \in \Theta(n)$

Transformación de recursivo a iterativo

- El lenguaje disponible no soporta recursión.
- Reducción del coste adicional en *tiempo*
  $\hookrightarrow$ llamada a subprograma y paso de parámetros.
- Reducción del coste adicional en *memoria*
  $\hookrightarrow$ pila de activaciones.

Pero la versión iterativa es menos legible y modificable.

Transformación automatizada (compilador) en algunos casos
$\hookrightarrow$ versión iterativa optimizada en memoria

Transformación de recursivo final a iterativo

$$\begin{array}{ccccccc}
\texttt{fun-rec}(x) & \xrightarrow{B_{nt}(x)} & \texttt{fun-rec}(\texttt{s}(x)) & \xrightarrow{B_{nt}(\texttt{s}(x))} & \cdots & \xrightarrow{B_t(x')} & \texttt{triv}(x') \\
 & & & & & & \| \\
y & \longleftarrow & & & & & y
\end{array}$$

$\{\ P(\overline{x})\ \}$
fun $\texttt{f-rec}(\overline{x})$ **dev** $\overline{y}$
casos
$B_t(\overline{x}) \ \rightarrow\ \overline{y} := \texttt{triv}(\overline{x})$
$\square\ B_{nt}(\overline{x}) \ \rightarrow\ \overline{y} := \texttt{f-rec}(\texttt{s}(\overline{x}))$
fcasos
ffun
$\{\ Q(\overline{x},\overline{y})\ \}$

$\{\ P(\overline{x})\ \}$
fun $\texttt{f-it}(\overline{x})$ **dev** $\overline{y}$
var $\overline{x}'$
$\overline{x}' := \overline{x}\ ;$
$\{\ INV(\overline{x}',\overline{x})\ \}$
mientras $B_{nt}(\overline{x}')$ **hacer**
$\overline{x}' := \texttt{s}(\overline{x}')$
fmientras ;
$\overline{y} := \texttt{triv}(\overline{x}')$
ffun
$\{\ Q(\overline{x},\overline{y})\ \}$

$INV(\overline{x}',\overline{x}) \equiv P(\overline{x}') \wedge \texttt{f-rec}(\overline{x}) = \texttt{f-rec}(\overline{x}')$
Función de cota: tamaño de $\overline{x}'$.

Ejercicio

Verificar la versión iterativa.

Ejemplo: Suma de los elementos de un vector

fun gfsuma-vector$(V[0..N]$ **de** *ent*$, n :$ *nat*$, w :$ *ent*$)$ **dev** $s :$ *ent*
  casos
    $n = N \rightarrow s := w$
  $\square$ $n < N \rightarrow s :=$ gfsuma-vector$(V, n+1, w+V[n])$
  fcasos
ffun

fun gfsuma-vector-it$(V[0..N]$ **de** *ent*$, n :$ *nat*$, w :$ *ent*$)$ **dev** $s :$ *ent*
var $n' :$ *nat*$, w' :$ *ent*
  $\langle n', w' \rangle := \langle n, w \rangle$;
  mientras $n' < N$ **hacer**
    $\langle n', w' \rangle := \langle n'+1, w'+V[n'] \rangle$
  fmientras ;
  $s := w'$
ffun

fun suma-vector-it$(V[0..N]$ **de** *ent*$)$ **dev** $s :$ *ent*
var $n :$ *nat*
  $\langle n, s \rangle := \langle 0, 0 \rangle$;
  mientras $n < N$ **hacer**
    $\langle n, s \rangle := \langle n+1, s+V[n] \rangle$
  fmientras
ffun

Ejemplo: Máximo común divisor

fun `mcd-rec`$(a, b : \mathit{ent})$ **dev** $mcd : \mathit{ent}$
    casos
        $a = b \;\rightarrow\; mcd := a$
        $\square\; a > b \;\rightarrow\; mcd :=$ `mcd-rec`$(a-b, b)$
        $\square\; a < b \;\rightarrow\; mcd :=$ `mcd-rec`$(a, b-a)$
    fcasos
ffun

fun `mcd-it`$(a, b : \mathit{ent})$ **dev** $mcd : \mathit{ent}$
var $a', b' : \mathit{ent}$
    $\langle a', b' \rangle := \langle a, b \rangle$;
    mientras $a' \neq b'$ **hacer**
        casos
            $a' > b' \;\rightarrow\; a' := a' - b'$
            $\square\; a' < b' \;\rightarrow\; b' := b' - a'$
        fcasos
    fmientras ;
    $mcd := a'$
ffun

Transformación de recursivo (lineal) no final a iterativo

$$
\begin{array}{ccccccc}
\texttt{fun-rec}(x_1) & \xrightarrow{B_{nt}(x_1)} & \texttt{fun-rec}(x_2) & \xrightarrow{B_{nt}(x_2)} & \cdots & \xrightarrow{B_t(x_k)} & \texttt{triv}(x_k) \\
 & & & & & & \| \\
\texttt{comp}(y_2, x_1) & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \underbrace{\texttt{comp}(y_k, \overbrace{\texttt{s}^{-1}(x_k)}^{x_{k-1}})}_{y_{k-1}} & \longleftarrow & y_k
\end{array}
$$

$\{\ P(\overline{x})\ \}$
fun $\texttt{f-rec}(\overline{x})$ **dev** $\overline{y}$
  casos
    $B_t(\overline{x}) \ \rightarrow\ \overline{y} := \texttt{triv}(\overline{x})$
    $\square\ B_{nt}(\overline{x}) \ \rightarrow$
      $\overline{y} := \texttt{comp}(\texttt{f-rec}(\texttt{s}(\overline{x})), \overline{x})$
  fcasos
ffun
$\{\ Q(\overline{x}, \overline{y})\ \}$

fun $\texttt{f-it}(\overline{x})$ **dev** $\overline{y}$
var $\overline{x}'$
  $\overline{x}' := \overline{x}$;
  $\{\ INV_1(\overline{x}', \overline{x})\ \}$
  mientras $B_{nt}(\overline{x}')$ **hacer**
    $\overline{x}' := \texttt{s}(\overline{x}')$
  fmientras ;
  $\overline{y} := \texttt{triv}(\overline{x}')$;
  $\{\ INV_2(\overline{x}', \overline{x}, \overline{y})\ \}$
  mientras $\overline{x}' \neq \overline{x}$ **hacer**
    $\overline{x}' := \texttt{s}^{-1}(\overline{x}')$;
    $\overline{y} := \texttt{comp}(\overline{y}, \overline{x}')$
  fmientras
ffun

$$INV_1(\overline{x}',\overline{x}) \equiv P(\overline{x}') \wedge suc(\overline{x}',\overline{x})$$

$$suc(\overline{x}',\overline{x}) \equiv (\exists i : 0 \leq i : \overline{x}' = \mathtt{s}^i(\overline{x}) \wedge (\forall j : 0 \leq j < i : B_{nt}(\mathtt{s}^j(\overline{x})) \wedge P(\mathtt{s}^j(\overline{x}))))$$

$$INV_2(\overline{x}',\overline{x},\overline{y}) \equiv INV_1(\overline{x}',\overline{x}) \wedge Q(\overline{x}',\overline{y})$$

Ejercicio

Verificar la versión iterativa.

Ejemplo: Suma de los elementos de un vector

fun $\texttt{gsuma-vector}(V[0..N]$ **de** *ent*, n : *nat*) **dev** s : *ent*
  casos
    $n = 0 \rightarrow s := 0$
    $\Box\ n > 0 \rightarrow s := \texttt{gsuma-vector}(V, n-1)\,;$
      $s := s + V[n-1]$
  fcasos
ffun

fun $\texttt{gsuma-vector-it}(V[0..N]$ **de** *ent*, n : *nat*) **dev** s : *ent*
var n' : *nat*
  $n' := n\,;$
  mientras $n' > 0$ **hacer**
    $n' := n' - 1$
  fmientras ;
  (equivalente a $n' := 0$)
  $s := 0\,;$
  mientras $n' \neq n$ **hacer**
    $n' := n' + 1\,;$
    $s := s + V[n' - 1]$
  fmientras
ffun

Ejemplo: División entera

fun `dividir-rec`$(a, b : \mathit{ent})$ **dev** $\langle q, r : \mathit{ent} \rangle$
  casos
    $a < b \ \rightarrow \ \langle q, r \rangle := \langle 0, a \rangle$
    $\square\ a \geq b \ \rightarrow \ \langle q, r \rangle :=$ `dividir-rec`$(a - b, b)$
      $q := q + 1$
  fcasos
ffun

fun `dividir-it`$(a, b : \mathit{ent})$ **dev** $\langle q, r : \mathit{ent} \rangle$
var $a', b' : \mathit{ent}$
  $a' := a \, ; \ b' := b \, ;$
  mientras $a' \geq b'$ **hacer**
    $a' := a' - b'$
  fmientras ;
  $\langle q, r \rangle := \langle 0, a' \rangle \, ;$
  mientras $a' \neq a$ **hacer**
    $a' := a' + b' \, ; \ q := q + 1$
  fmientras
ffun

¿Si no existe la función inversa del sucesor, s^{-1}?

s	s^{-1}
$+\,1$	$-\,1$
$-\,1$	$+\,1$
$*\,2$	div 2
div 2	no hay

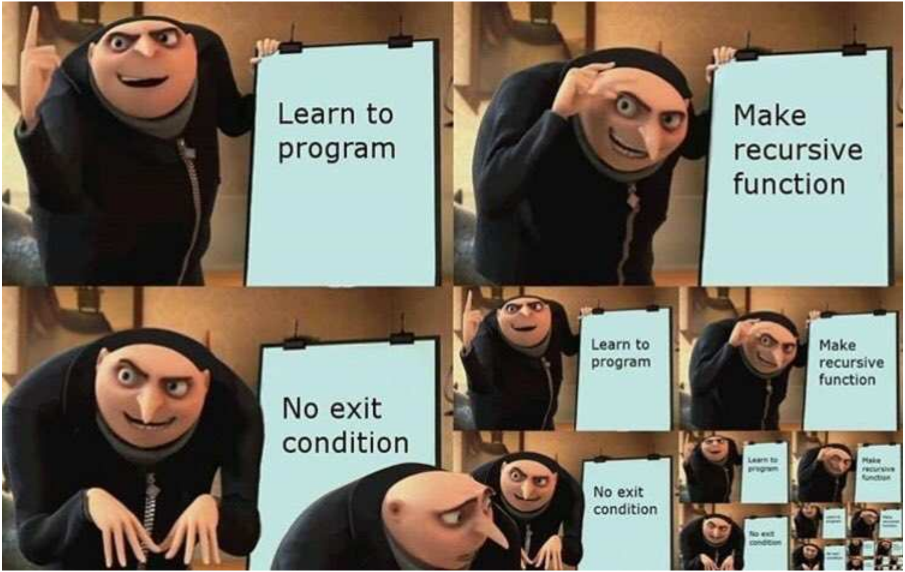
Resolvemos este problema utilizando una pila:

fun $\texttt{f-it}(\overline{x})$ **dev** $\overline{y}$
var $\overline{x'}, p$: *pila*
$\quad\langle\,\overline{x'}, p\,\rangle := \langle\,\overline{x}, \texttt{pila-vacía}()\,\rangle\,;$
$\quad$**mientras** $B_{nt}(\overline{x'})$ **hacer**
$\quad\quad\langle\,\overline{x'}, p\,\rangle := \langle\,\texttt{s}(\overline{x'}), \texttt{apilar}(p, \overline{x'})\,\rangle$
$\quad$**fmientras** ;
$\quad\overline{y} := \texttt{triv}(\overline{x'})\,;$
$\quad$**mientras** $\neg\texttt{es-pila-vacía}(p)$ **hacer**
$\quad\quad\langle\,\overline{x'}, p\,\rangle := \langle\,\texttt{cima}(p), \texttt{desapilar}(p)\,\rangle\,;$
$\quad\quad\overline{y} := \texttt{comp}(\overline{y}, \overline{x'})$
$\quad$**fmientras**
ffun

Ejemplo: Sumar dígitos

fun `suma-dígitos`$(n : nat)$ **dev** $s : nat$
  casos
      $n < 10 \ \rightarrow \ s := n$
    □ $n \geq 10 \ \rightarrow \ s :=$ `suma-dígitos`$(n \operatorname{div} 10) + (n \operatorname{mód} 10)$
  fcasos
ffun

fun `suma-dígitos-it`$(n : nat)$ **dev** $s : nat$
var $n' : nat, p : pila[nat]$
  $n' := n$;
  $p :=$ `pila-vacía`$()$;
  mientras $n' \geq 10$ **hacer**
    `apilar`(p, n') ;
    $n' := n' \operatorname{div} 10$
  fmientras ;
  $s := n'$
  mientras $\neg$`es-pila-vacía?`(p) **hacer**
    $n' :=$ `cima`(p) ; `desapilar`(p) ;
    $s := s + (n' \operatorname{mód} 10)$
  fmientras
ffun


Learn to program
Make recursive function
No exit condition
Learn to program
Make recursive function
No exit condition