Ejercicio: Sea B un conjunto de 3 números enteros. Demuestra que existe un subconjunto de B tal que la suma de sus elementos es múltiplo de 3.

$\{x_1, x_2, x_3\}$

Suponer que ninguno es múltiplo de 3. Entonces sus restos pueden ser únicamente 1's y 2's.

Son las únicas formas en las que pueden aparecer los los restos

$\{[1]_3, [1]_3, [1]_3\}$, $\{[1]_3, [1]_3, [2]_3\}$, $\{[2]_3, [2]_3, [2]_3\}$, $\{[2]_3, [2]_3, [1]_3\}$

$[x_1]_3 \; [x_2]_3 \; [x_3]_3$

Podemos observar que en cualquiera de estas 4 posibilidades podemos encontrar una suma que sea congruente con 0 módulo 3.

Ejercicio: Sea B un conjunto de 5 números enteros. Demuestra que existe un subconjunto de B tal que la suma de sus elementos es múltiplo de 5.

$\{x_1, x_2, \dots, x_5\}$ Supongamos que ninguno es múltiplo de 5.

Vamos a considerar los subconjuntos de la forma $C_t = \{x_1, \dots, x_t\}$ con $1 \leq t \leq 5$.

$\{3, 7, 12, 4, 9\}$

$C_1 = \{3\}$, $C_2 = \{3, 7\}$, $C_3 = \{3, 7, 12\}$, ...

$S_1 = 3$, $S_2 = 3+7 = 10$, $S_3 = 3+7+12$, ...

$S_t = x_1 + x_2 + \cdots + x_t$ con $1 \le t \le 5$.

$t = 1, 2, 3, 4, 5$

Vamos a suponer que ninguna de las sumas S_t es múltiplo de 5.
Si ninguno es múltiplo de cinco entonces los restos de S_t son 1, 2, 3 ó 4. Entonces por el Pº del palomar habrá dos sumas distintas que tengan el mismo resto. $[S_r]_5 = [S_t]_5$ con $r < t$. Entonces el subconjunto:

$$C = \{x_{r+1}, \ldots, x_t\}$$

$r = 4$, $t = 5$

Su suma es:

$$S_c = S_t - S_r \Rightarrow [S_c]_5 = [S_t]_5 - [S_r]_5 = [0]_5$$

$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

restos
1, 2, 3, 4

$x_1 = S_1 \rightsquigarrow 2$

$x_1 + x_2 = S_2 \boxed{\rightsquigarrow 1}$

$x_1 + x_2 + x_3 = S_3 \rightsquigarrow 4$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = S_4 \rightsquigarrow 3$

$C = \{x_5\}$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = S_5 \rightsquigarrow 3$

$\boxed{\rightsquigarrow 1}$

$C = \{x_3, x_4, x_5\}$

$[S_c]_5 = [0]_5$

$$S_5 - S_2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) - (x_1 + x_2) = x_3 + x_4 + x_5$$

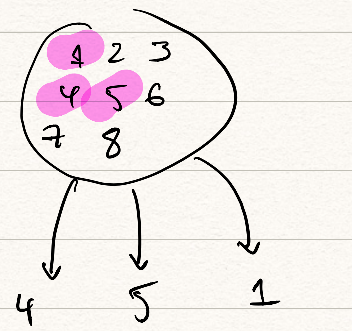
Ejemplo.

¿Cuántas cadenas, bytes, de 0's y 1's podemos formar con exactamente cinco 1's?

$\_\ \_\ 0\ \_\ \_\ 0\ \_\ 0$

$\underset{1}{0}\ \underset{2}{0}\ \underset{3}{0}\ \underset{4}{\_}\ \underset{5}{\_}\ \underset{6}{\_}\ \underset{7}{\_}\ \underset{8}{\_}$

$0\ 0\ 0\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$



$\updownarrow$

$0\ \_\ \_\ 0\ 0\ \_\ \_\ \_$

$$C_{8,3} = \binom{8}{3} = \binom{8}{5}$$

$$\uparrow$$

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}}{\cancel{3\cdot 2}} = 56$$

Ejercicio.

Calcular el coeficiente de $x^3y^2z^2$ en el trinomio $(x+2y+z)^7$.

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x\cdot x + x\cdot y + y\cdot x + y\cdot y$$
$$= x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+2y+z)^7 = (x+2y+z)(x+2y+z)\cdots(x+2y+z)$$

$\overset{1}{x}\cdot\overset{2}{x}\cdot\overset{3}{x}\cdot\overset{4}{y}\cdot\overset{5}{y}\cdot\overset{6}{z}\cdot\overset{7}{z}$ $\quad \rightsquigarrow x\cdot y\cdot y\cdot x\cdot x\cdot z\cdot z$

$\rightsquigarrow x(2y)x\cdot z\cdot z\cdot x(2y)$ $\quad \{x^1, x^2, x^3, y^1, y^2, z^1, z^2\}$

$\rightsquigarrow (2y)z\cdot z\cdot x(2y)x\cdot x$ $\quad x^1y^1x^2\cdot z^2 z^1\cdot x^3\cdot y^2 \quad x^1y^1x^3\cdot z^2\cdot z^1\cdot x^2\cdot y^2$

$\rightsquigarrow$ ~~$y\cdot z\cdot z\cdot y\cdot z\cdot x\cdot x$~~ $\quad y^2 z^2\cdot z^1\cdot x^1 y^1\cdot x^3\cdot x^2$

$$PR_7^{3,2,2} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!}$$

El coeficiente de $x^3y^2z^2$ en $(x+2y+z)^7$ es

$$4 \cdot PR_7^{3,2,2} = 4 \cdot \frac{7!}{3!\,2!\,2!}$$

El coeficiente de $x^7y^4z^5$ en $(x+y+3z)^{16}$ es

$$3^5 \cdot PR_{16}^{7,4,5} = 3^5 \cdot \frac{16!}{7! \cdot 4! \cdot 5!}$$

1. Si en una clase de 54 alumnos, 30 de los cuales son chicos y 24 son chicas, queremos formar un equipo de 4 miembros que represente a la clase en una competición:

   (i) ¿Cuántos equipos de 4 personas se pueden formar?

   (ii) ¿Cuántos equipos de 2 chicos y 2 chicas se pueden formar?

   (iii) ¿Cuántos equipos de 4 personas se pueden formar que que tengan, al menos, una chica?

(i) $\{1, 2, \ldots, 54\}$

$$\{\underset{54}{\underline{28}}, \underset{53}{\underline{3}}, \underset{52}{\underline{7}}, \underset{51}{\underline{19}}\} \neq \{19, 3, 7, 28\}$$

$$C_{54,4} = \frac{54 \cdot 53 \cdot 52 \cdot 51}{4!} = \binom{54}{4} = \frac{54!}{4!\ 50!} = \frac{54 \cdot 53 \cdot 52 \cdot 51}{4!}$$

(ii) $\binom{30}{2} \cdot \binom{24}{2}$

(iii) $\binom{54}{4} - \binom{30}{4}$ = Todos − Formados únic. por chicos.

2. Una empresa de seguridad va a comercializar un nuevo tipo de llave que se fabrica realizando incisiones de varias profundidades en ciertas posiciones fijas de la llave. Si las incisiones se pueden hacer de 4 posibles profundidades, ¿cuántas incisiones deben hacerse en cada llave para que se puedan producir más de 100.000 llaves diferentes?

?

?

?

$\underline{4}\ \underline{4}\ \underline{4}\ \ldots$

Debemos calcular x tal que $4^x \geq 100.000$.

Entonces $x = 9$ el número de incisiones.

$4^8 = 65.536$

$4^9 = 262144$

3. 20 personas se presentan a una entrevista de trabajo. ¿De cuántas formas distintas se pueden escoger por orden a las primeras 6 personas que van a ser entrevistadas?

$\underset{20}{3}\ \underset{19}{7}\ \underset{18}{4}\ \underset{17}{20}\ \underset{16}{12}\ \underset{15}{16}\ \cancel{7}$ 16 7 4 20 12 3

$$V_{20,6} = \frac{20!}{(20-6)!} = \frac{20!}{14!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15$$

4. Con los dígitos 1,2,3,4,5,6 y 7:

(i) ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden construir?

(ii) ¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden construir?

(iii) ¿Cuántos de los construidos en el apartado (ii) terminan en 3?

(iv) ¿Cuántos de los construidos en el apartado (ii) son impares? ¿y pares?

(i)

$\underline{7}\ \underline{7}\ \underline{7}\ \underline{7}$ si las cifras se repiten 7^4

(ii)

$\underline{7}\ \underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4}$ si son distintas $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

(iii)

$\underset{6}{\_}\ \underset{5}{\_}\ \underset{4}{\_}\ \underset{1}{\overset{3}{\_}}$ $6\cdot 5\cdot 4 = 120$ números distintos

(iv) $\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$\underset{6}{\_}\ \underset{5}{\_}\ \underset{4}{\_}\ \underset{4}{\overset{1,3,5,7}{\_}}$ Impares $6\cdot 5\cdot 4\cdot 4$

$\underset{6}{\_}\ \underset{5}{\_}\ \underset{4}{\_}\ \underset{3}{\overset{2,4,6}{\_}}$ Pares $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3$ +

$6\cdot 5\cdot 4\,(4+3) = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4$

5. ¿Cuantos números impares hay entre 100 y 999 con todas sus cifras distintas?

$\{0,1,2,\dots,9\}$ 10

$\underset{8}{\_}\ \underset{8}{\_}\ \underset{5}{\_} = 320$ ✓

$\{1,3,5,7,9\}$, $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$\underset{8}{\_}\cdot\overset{0}{\_}\cdot\underset{5}{\_}$ + $\underset{8}{\_}\cdot\underset{7}{\_}\cdot\underset{5}{\_}$ $= 8\cdot 5 + 8\cdot 7\cdot 5 = 8\cdot 8\cdot 5 = 320$

añadiendo el cero a fuerza

Olvidándome ya del cero que está recogido antes