

Matemática Discreta y Álgebra - Curso 2020/21. APLICACIONES LINEALES

1. Estúdiese cuáles de las siguientes aplicaciones, definidas de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 , son lineales:

- a) $f(x, y) = (0, y, 0)$
- b) $f(x, y) = (x, x + y, x - y)$
- c) $f(x, y) = (2x + y, 0, 2y + x)$
- d) $f(x, y) = (x + y, 2, x)$

2. Sea f una aplicación lineal de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 tal que

$$f(u_1) = v_1 + 2v_2 - 3v_3, f(u_2) = -v_1 + 4v_2 - v_3$$

donde $B = \{u_1, u_2\}$ y $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ son bases de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 respectivamente. Hállese la imagen del vector $u = (2, -1)_B$.

3. Calcúlese la matriz asociada a la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (x - y + z, 2x - z)$$

respecto de las bases canónicas.

4. Se considera la aplicación lineal de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que está dada por $f(x, y) = (x + y, -y, y - x)$. Calcúlese, respecto de las bases canónicas:

- La matriz asociada
- Las ecuaciones de la aplicación
- Una base del núcleo
- La dimensión del núcleo
- Una base de la imagen
- El rango de la aplicación
- Compruébese la fórmula $n = \dim \ker(f) + \dim \text{Im}(f)$

5. Se dice que un vector u es invariante por una aplicación lineal f si verifica que $f(u) = u$. Hállese todos los vectores invariantes por las aplicaciones lineales definidas de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot \mathbb{R})$ en sí mismo siguientes:

- $f(x, y, z) = (3x, 4y, 5z)$
- $f(x, y, z) = (x, 2x + y, 3x + 2y + z)$
- $f(x, y, z) = (2x - y, 2y - z, 2z - x)$

6. Hállense todos los vectores que verifican la igualdad $f(u) = \lambda u$, para algún escalar λ , para las aplicaciones lineales del ejercicio anterior.

7. Sea f una aplicación lineal entre los espacios $(V, +, \cdot \mathbb{R})$ y $(W, +, \cdot \mathbb{R})$ definida por:

$$f(u_1) = v_1 + 2v_2 - v_3 - 2v_4, f(u_2) = v_1 - v_3, f(u_3) = v_2 - v_4$$

donde $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $B' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ son bases de V y W respectivamente. Calcúlese:

- La imagen del vector $u = u_1 + u_2 - 2u_3$
- La matriz de la aplicación lineal.
- El núcleo y el rango de la aplicación lineal
- Compruebe qué vectores u verifican $f(u) = -v_1 - v_2 + v_3 + v_4$.

8. Sea f la aplicación lineal de $(V, +, \cdot \mathbb{R})$ en sí mismo definida por:

$$f(u_1) = v_1 + v_3, f(u_2) = 2v_1 - v_2, f(u_3) = v_2 - v_3$$

donde $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $B'_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ son dos bases de V . Calcúlense:

- La matriz de la aplicación lineal respecto de B_1 y B_2
- Las ecuaciones de la aplicación y la imagen del vector $u = u_1 + u_2 + u_3$.
- La dimensión de $\text{Ker}(f)$ y el rango de la aplicación.
- Comprueba si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

9. Sea f la aplicación lineal de $(V, +, \cdot \mathbb{R})$ en sí mismo definida por:

$$f(u_1) = 2u_1 - u_2 - u_3, f(u_2) = -7u_2 + u_3, f(u_3) = 3u_1 - 2u_3$$

donde $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de dicho espacio. Hállese la matriz de la aplicación lineal f respecto de la base $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ donde

$$v_1 = u_1 - u_3, v_2 = u_1 + u_2, v_3 = u_3$$

10. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z),$$

la base $B = \{(0, 2, 4), (0, 4, 2), (1, 0, 0)\}$ de \mathbb{R}^3 , y la base $C = \{(6, 2), (6, -2)\}$ de \mathbb{R}^2 ,

- a) calcula la matriz de f respecto de las base B y C ,
- b) calcula la matriz de cambio de base de la base canónica de \mathbb{R}^3 a la base B ,
- c) calcula la matriz de cambio de base de la base C a la base canónica de \mathbb{R}^2 ,
- d) calcula la matriz de f respecto de las bases canónicas a partir de las matrices que has hallado en los apartados anteriores.

11. Considera los siguiente conjunto de vectores

$$B = \{(1, 2, 3, 4), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (2, -1, 3, 1)\},$$

$$C = \{(1, 2, 3), (1, 0, 1), (0, a, 0)\}$$

y la aplicación $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x, y, z, t) = (2x + y, y + 3z - t, x + z - t).$$

- (a) Comprueba que los vectores del conjunto B son una base de \mathbb{R}^4 .
- (b) ¿Para qué valores de a los vectores de C forman una base de \mathbb{R}^3 ? Justifica tu respuesta.
- (c) Comprueba que f es una aplicación lineal.
- (d) Calcula la matriz de f respecto de las bases canónicas de \mathbb{R}^4 y \mathbb{R}^3 .
- (e) Tomando $a = 1$ en el conjunto C , calcula la matriz de f respecto de las bases B y C .
- (f) Halla la matriz de cambio de base de la base canónica de \mathbb{R}^4 a la base B .
- (g) Tomando $a = 1$ en el conjunto C , halla la matriz de cambio de base de la base C a la base canónica de \mathbb{R}^3 .
- (h) Relaciona entre sí las matrices que has hallado en los apartados (d), (e), (f) y (g).

12. Consideremos una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es base de \mathbb{R}^3 , ¿pueden ser

$$\{f(v_1), f(v_2), f(v_3)\}$$

linealmente independientes? Justifica tu contestación.