TEMA 8: ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

$\dim_{\mathbb{R}} V = n$, $f \in Bil_s(V)$, $\mathcal{E}(f) = (s, t)$, $M_B(f) = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ddots 1}^{s} & & \\ & \overbrace{-1 \ddots -1}^{t} & \\ & & 0 \ddots 0 \end{pmatrix}$

$s + t = rg(f)$

$\mathcal{E}(f) = (n, 0) \Longrightarrow M_B(f) = I_n$, f es definida positiva

f es producto escalar si es bilineal, simétrica, definida positiva:

$\mathbb{R}^n$, $f(v, w) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $v = (x_1, \dots, x_n)_{B_c}$, $w = (y_1, \dots, y_n)$, B_c es ortonormal

$q(v) = f(v, v) = (x_1 \dots x_n) I_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$

$q(v) = 0 \iff v = 0$

(V, f), f producto escalar sobre V

(V, f), (V', f') espacios vectoriales euclídeos

$\varnothing : V \longrightarrow V'$ isomorfismo $\Longrightarrow f'(\varnothing(v), \varnothing(w)) = f(v, w)$, $\forall v, w \in V$

Teorema

(V, f) y (V', f') espacios vectoriales euclídeos

V y V' son isomorfos $\iff \dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} V'$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormal (f)

$B' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ base ortonormal (f')

$\varnothing\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i'$

$f(v_i, v_j) = \delta_{ij} \quad || \quad f'(v_i', v_j') = \delta_{ij}$

Teorema

$f \in Bil_s(V)$, $A = (a_{ij}) = M_B(f)$, $a_{ij} = f(v_i, v_j)$

f es producto escalar $\Longleftrightarrow$ $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} > 0$, $\forall i = 1, \dots, n$

(definida positiva)

Dem.

$\Rightarrow$ f es definida positiva $\Rightarrow$ f es definida positiva sobre $\underbrace{L(v_1, \dots, v_i)}_{V_i}$

$$M_{\{v_1, \dots, v_i\}}(f|_{V_i \times V_i}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix} \xRightarrow{f|_{V_i \times V_i} \text{ d.p.}} |\ \ | > 0$$

g definida positiva, $M_{B'}(g) = I_n \Rightarrow |M_B(g)| = 1$, $|M_{B''}(g)| = |P^t I_n P| = |P^2| > 0$

$\Leftarrow$ $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $B' = \{v_1', \dots, v_n'\}$, $f(v_i', v_j') = 0$, si $i \neq j$

tal que $L(v_1, \dots, v_n) = L(v_1', \dots, v_n')$

¿$f(v_i', v_i') > 0$?

$v_1' = v_1$ $\qquad |a_{11}| > 0$

$f(v_1', v_1') = f(v_1, v_1) = a_{11} > 0$

$W = L(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}) = L(v_1', \dots, v_i', v_{i+1})$

$f|_{W \times W}$ no diagonal

$$M_{\{v_1, \dots, v_{i+1}\}}(f|_{W \times W}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i+1} \\ \vdots & & \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,i+1} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow |\ \ | > 0$

$L(v_1', \dots, v_i')^{\perp} < W$

sujeto a demostración

$\dim_{\mathbb{R}} L(v_1', \dots, v_i')^{\perp} = \operatorname{codim} L(v_1', \dots, v_i') = i+1-i = 1$

$\Rightarrow \exists\, v_{i+1}' \in L(v_1', \dots, v_i', v_{i+1})$ tal que $v_{i+1}' \in L(v_1', \dots, v_i')^{\perp}$

$\Rightarrow L(v_1', \dots, v_i', v_{i+1}) = L(v_1', \dots, v_i', v_{i+1}') = W$

¿ $f(v_{i+1}, v_{i+1}) > 0$?

$$M_{\{v_1', \dots, v_{i+1}'\}}(f|_{W\times W}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,i+1} \end{pmatrix}$$

$$M_{\{v_1', \dots, v_{i+1}'\}}(f|_{W\times W}) = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_i & \\ & & & d_{i+1} \end{pmatrix}, \quad d_1, \dots, d_i > 0$$

$$d_{i+1} = f(v_{i+1}', v_{i+1}')$$

$D = P^t C P$

$|D| = \underbrace{|P|^2}_{>0} \underbrace{|C|}_{>0}$, $d_1, \dots, d_i > 0 \Longrightarrow d_{i+1} > 0$

f no degenerada

$\{w_1, \dots, w_n\}$ ortogonales 2 a 2

$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n = 0 \Longrightarrow 0 = f(w_i, \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n) = \lambda_i f(w_i, w_i)$

Obtención base ortogonal (Método de Gram - Schmidt)

$\{v_1, \dots, v_n\}$ base de V, V espacio vectorial euclídeo, f producto escalar

$$\begin{cases} v_1' = v_1 \\ v_2' = v_2 + \lambda_{2,1} v_1' \\ v_3' = v_3 + \lambda_{3,2} v_2' + \lambda_{3,1} v_1' \\ \vdots \\ v_n' = v_n + \lambda_{n,n-1} v_{n-1}' + \dots + \lambda_{n,1} v_1' \end{cases} \qquad \lambda_{i,j} \in \mathbb{R}$$

$0 = f(v_2', v_1') = f(v_2 + \lambda_{2,1} v_1, v_1') = f(v_2, v_1) + \lambda_{2,1} \underbrace{f(v_1, v_1)}_{\neq 0} \Longrightarrow$ Despejamos el $\lambda_{2,1}$ (valor único)

$0 = f(v_3', v_2') = f(v_3, v_2') + \lambda_{3,2} f(v_2', v_2') + \lambda_{3,1} \underbrace{f(v_1', v_2')}_{=0} \Longrightarrow$ Despejamos $\lambda_{3,2}$

$0 = f(v_3', v_2') = f(v_3, v_1') + \lambda_{3,2} \underbrace{f(v_2', v_1')}_{=0} + \lambda_{3,1} f(v_1', v_1') \Longrightarrow$ Despejamos $\lambda_{3,1}$

$\vdots$

Hacemos lo mismo con todos $\Longrightarrow B' = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$ es ortogonal respecto de f

OBS

$L(v_1', \dots, v_i') = L(v_1, \dots, v_i)$, $\forall i = 1, \dots, n$

Aparte, si tomamos $v_i'' = \dfrac{v_i'}{[f(v_i', v_i')]^{1/2}}$, $B'' = \{v_1'', v_2'', \dots, v_n''\}$ es ortonormal

MÉTODO DE GRAM-SCHMIDT

$(f(v_i'', v_i'') = 1)$

Es ortonormal pues $f(v_i'', v_i'') = f\left(\dfrac{v_i'}{[f(v_i', v_i')]^{1/2}}, \dfrac{v_i'}{[f(v_i', v_i')]^{1/2}}\right)$

$$= \frac{1}{f(v_i', v_i')} \cdot f(v_i', v_i') = 1$$

$M_{B''}(f) = I_n$

Definición (Módulo de un vector)

f producto escalar

Módulo de $v \equiv \|v\| = \sqrt{f(v, v)} = \sqrt{q(v)} \in \mathbb{R}$

$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$

Propiedades del módulo

i) $\|v\| \geq 0$, $\|v\| = 0 \iff v = 0$

ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

Dem: $\sqrt{q(\lambda v)} = \sqrt{\lambda^2 q(v)} \overset{\sqrt{\lambda^2} = |\lambda|}{=} \lambda \cdot \sqrt{q(v)}$

iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ DESIGUALDAD TRIANGULAR

Si V es un espacio vectorial y existe $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ que verifique estas tres propiedades decimos que es un espacio normado

Proposición (Desigualdad de Schwarz)

f producto escalar $\implies f(v, w)^2 \leq q(v)\,q(w)$

Dem.

$0 \leq q(v + \lambda w) = \underbrace{q(v)}_{\in \mathbb{R}} + \lambda^2 \underbrace{q(w)}_{\in \mathbb{R}} + 2\lambda \underbrace{f(v, w)}_{\in \mathbb{R}}$ Polinomio real de grado 2 en λ

Para que el polinomio se anule: $v + \lambda w = 0 \implies v = -\lambda w$ → $q(a) = 0 \iff a = 0$

Hay máximo una raíz (si v y w son proporcionales)

$\implies \Delta \leq 0 \implies f(v, w)^2 \leq q(v)\,q(w)$

Dem. iii)

$$\|v+w\|^2 = q(v+w) = f(v+w, v+w) = q(v) + 2f(v,w) + q(w) \leq q(v) + 2\sqrt{q(v)}\sqrt{q(w)} + q(w)$$

$$= \left(\sqrt{q(v)} + \sqrt{q(w)}\right)^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$$

$$\Longrightarrow \underline{\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|}$$

OBS (Fórmula del producto escalar de toda la vida)

$$\frac{|f(v,w)|}{\|v\|\cdot\|w\|} \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq \underbrace{\frac{f(v,w)}{\|v\|\cdot\|w\|}}_{\cos\theta,\ 0 \leq \theta \leq \pi \text{ único}} \leq 1$$

$$\Longrightarrow \underline{f(v,w) = \|v\|\cdot\|w\|\cdot\cos\theta}$$

Proposición

i) f producto escalar, $W < V \Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}} W^{\perp} = n - \dim_{\mathbb{R}} W$

Dem.

$\dim W = m$, $\{w_1, \dots, w_m\}$ base de W $\qquad f_d : V \longrightarrow V^*$, $w \longmapsto f_d(w)$

$$v \in W^{\perp} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = f(v, w_i) = f_d(w_i)(v) = \omega_i \in V^* & a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \text{ (Ecuación cartesiana)} \\ i = 1, \dots, m \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Tenemos m ecuaciones cartesianas

Además, f no degenerada $\Longrightarrow$ f_d isomorfismo $\Longrightarrow$ m ecuaciones cartesianas independientes

$$\Longrightarrow \underline{\dim_{\mathbb{R}} W^{\perp} = n - m = \operatorname{codim}_{\mathbb{R}} W}$$

ii) $W \cap W^{\perp} = \{0\}$

Dem: $\underset{w \in W \cap W^{\perp}}{f(w,w)} = 0 \overset{\uparrow}{\underset{f\text{ p.e.}}{\Longrightarrow}} w = 0$

Consecuencia

$V = W \oplus W^\perp$

Dem: $\dim(W + W^\perp) = \underset{W}{m} + \underbrace{n - m}_{W^\perp} - \underset{W \cap W^\perp}{0} = n$

Definición (Endomorfismos autoadjuntos)

(V, f) espacio vectorial euclídeo

$\varnothing \in End_{\mathbb{R}}(V)$ es autoadjunto (respecto de f) si $f(v, \varnothing(w)) = f(\varnothing(v), w), \forall v, w \in V$

OBS

Sea B base de V

$A = M_B(\varnothing)$ | $v = (x_1, \dots, x_n)_B$

$C = M_B(f)$ | $w = (y_1, \dots, y_n)_B$

$$(x_1 \cdots x_n)\, A^t C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \cdots x_n)\, C A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ \forall v, w \in V$$

$\Longrightarrow$ $\varnothing$ es autoadjunto $\Longleftrightarrow A^t \cdot C = C \cdot A$

Si B base ortonormal: $\varnothing$ es autoadjunto $\Longleftrightarrow A^t = A \Longleftrightarrow A$ simétrica

Teorema Espectral

07/04/2021

!!

(V, f) espacio vectorial euclídeo.

Si $\varnothing \in End_{\mathbb{R}}(V)$ es autoadjunto, entonces existe B base de V ortonormal respecto de f formada por vectores propios (respecto de $\varnothing$). B diagonaliza a f y $\varnothing$ simultáneamente

Dem.

Supongamos $f = x^2 + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ irreducible, $f \mid q_\varnothing$

Entonces, veamos existe $0 \neq v \in V$ tal que $q_{\varnothing, v} = f$

$q_\varnothing = f^a \cdot g$, $a \geq 1$, $f \nmid g \Longrightarrow \exists\, w \in V$ tal que $q_{\varnothing, w} = f^a$ Lema previo a Cayley Hamilton

Sea $v = f(\varnothing)^{a-1}(w) \Rightarrow q_{\varnothing,v} \mid f \Rightarrow \underline{q_{\varnothing,v} = f}$

Si fueran l.d. $\varnothing(v)$ se anularía en un polinomio de grado 1

$\pi = L(v, \varnothing(v))$, $\dim_{\mathbb{R}} \pi = 2$, $\pi <_{\varnothing} V$ $(\varnothing^2(v) = -a_1 \varnothing(v) - a_0 v)$

$f|_{\pi \times \pi} : \pi \times \pi \to \mathbb{R}$ es producto escalar

$\psi = \varnothing|_{\pi} : \pi \to \pi$ es endomorfismo y es autoadjunto respecto de $f|_{\pi \times \pi} = g$

$$M_{\{v, \varnothing(v)\}}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

Sea $\{w_1, w_2\}$ base ortonormal de g

$$M_{\{w_1, w_2\}}(\psi) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ (Simétrica)}$$

$x^2 + a_1 x + a_0 = p_\psi = x^2 - (a+c)x + a \cdot c - b^2$

Discriminante

Es irreducible $\Rightarrow 0 > a_1^2 - 4a_0 = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$ ¡! ABSURDO

$\Rightarrow q_\varnothing = (x-\lambda_1)^{a_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_t)^{a_t}$, $a_i \geq 1$

Veamos $a_i = 1$, $\forall i = 1, \ldots, t$

Sea $\lambda = \lambda_i$, $a = a_i$, para cierto i

Veamos $\operatorname{Ker}(\varnothing - \lambda id)^2 \subseteq \operatorname{Ker}(\varnothing - \lambda id)$

$v \in \operatorname{Ker}(\varnothing - \lambda id)^2$

$f(\underbrace{(\varnothing - \lambda id)}(v), (\varnothing - \lambda id)(v)) = f(v, (\varnothing - \lambda id)^2(v)) = f(v, 0) = 0$

Endomorfismo autoadjunto

$\Rightarrow$ Como f es producto escalar, $(\varnothing - \lambda id)(v) = 0 \Rightarrow v \in \operatorname{Ker}(\varnothing - \lambda id)$

$\Rightarrow \operatorname{Ker}(\varnothing - \lambda id)^2 \subseteq \operatorname{Ker}(\varnothing - \lambda id)$

$\Rightarrow a_1 = \ldots = a_t = 1 \Rightarrow \varnothing$ diagonalizable $\Rightarrow \exists B$ base de vectores propios

$B = B_1 \cup \ldots \cup B_t$, B_i base de $V_{\varnothing, \lambda_i}$

$p_\varnothing = \pm (x-\lambda_1)^{e_1 = d_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_t)^{e_t = d_t} \Rightarrow B_i = \{v_{i1}, \ldots, v_{id_i}\}$

Sean $v_i \in B_i$, $v_j \in B_j$, $i \neq j$. Veamos que son ortogonales:

$$f(\lambda_i v_i, v_j) = f(\phi(v_i), v_j) = f(v_i, \phi(v_j)) = f(v_i, \lambda_j v_j)$$

$$\lambda_i f(v_i, v_j) \qquad\qquad \lambda_j f(v_i, v_j)$$

$$\Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j) f(v_i, v_j) = 0 \underset{\lambda_i \neq \lambda_j}{\Longrightarrow} f(v_i, v_j) = 0$$

Además, podemos tomar B_i base de V_{ϕ,λ_i} ortonormal respecto de $f|_{V_{\phi,\lambda_i} \times V_{\phi,\lambda_i}}$

$\Rightarrow$ $\underline{B = B_1 \cup \ldots \cup B_t \text{ es ortonormal respecto de } f}$ (pues la restricción sigue siendo producto escalar)

Interpretación matricial

B base ortonormal

$$M_B(f) = I_n, \quad M_B(\phi) = \lambda_1 Id_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_t Id_t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 \ddots \lambda_t & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_t \end{pmatrix}$$

B diagonaliza simultáneamente a f (por congruencia)

y a ϕ (por semejanza)

Aparte:

$A \in S_n(\mathbb{R})$ (simétrica)

$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ endomorfismo, $(\mathbb{R}^n, \odot)$ espacio vectorial euclídeo

producto escalar usual

B_c ortonormal $\Rightarrow$ ϕ autoadjunto

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

B ortonormal y de vectores propios

$D = P^{-1} \cdot A \cdot P$, $P = M(B, B_c)$ ortogonal ($\underline{\underline{P^t = P^{-1}}}$), pues:

$$M_{B_c}(\cdot) = M_B(\cdot) = I_n$$

$$\underset{\text{por congruencia}}{\Rightarrow} I_n = P^t I_n P \Rightarrow P^t P = I_n \Rightarrow P^t = P^{-1}$$

$\Rightarrow D = P^{-1}AP = P^tAP \Rightarrow$ La matriz diagonaliza simultáneamente por congruencia y semejanza

Conclusión

Toda matriz real simétrica se puede diagonalizar por congruencia y semejanza (con la misma matriz).

OBS

$\phi \in End_{\mathbb{R}}(V)$ diagonalizable $\Rightarrow \exists f: V \times V \to \mathbb{R}$ producto escalar tal que ϕ es autoadjunto respecto de f

!!

Como encontrarla:

B base de V de vectores propios de ϕ, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

$\Rightarrow$ Imponemos que $M_B(f) = I_n$

$f(\phi(v_i), v_j) = f(\lambda_i v_i, v_j) = \lambda_i f(v_i, v_j) = \lambda_i \delta_{ij}$

$f(v_i, \phi(v_j)) = f(v_i, \lambda_j v_j) = \lambda_j f(v_i, v_j) = \lambda_j \delta_{ij}$

Definición (Aplicación que conserva el producto escalar)

(V, f) e.v.e.

$\phi: V \to V$ conserva f si $f(\phi(v), \phi(w)) = f(v, w)$, $\forall v, w \in V$

OBS

Si ϕ conserva f, entonces ϕ es $\mathbb{R}$-lineal

Dem.

$\phi(\lambda v) - \lambda \phi(v) \overset{?}{=} 0$

$f(\phi(\lambda v) - \lambda\phi(v), \phi(\lambda v) - \lambda\phi(v))$

$= f(\phi(\lambda v), \phi(\lambda v)) + \lambda^2 f(\phi(v), \phi(v)) - 2\lambda^2 f(\phi(\lambda v), \phi(v))$

$= f(\lambda v, \lambda v) + \lambda^2 f(v, v) - 2\lambda^2 f(\lambda v, v) = \lambda^2 f(v, v) + \lambda^2 f(v, v) - 2\lambda^2 f(v, v) = 0$

$f(\phi(v+w) - \phi(v) - \phi(w), \phi(v+w) - \phi(v) - \phi(w)) \overset{?}{=} 0$

Definición (Aplicación ortogonal)

$\phi : V \to V$ es una aplicación ortogonal si:

i) ϕ es $\mathbb{R}$-lineal

ii) ϕ conserva f

Notación

$O(V) = \{\phi : V \to V \,,\ \phi \text{ ortogonal}\}$

Propiedades

i) $\phi \in O(V) \Rightarrow \phi$ biyectiva

Dem.

$v \in Ker(\phi) \Rightarrow \phi(v) = 0 \Rightarrow f(\phi(v), \phi(v)) = f(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0$

$\Rightarrow Ker(\phi) = \{0\}$ (inyectiva) $\Rightarrow \dim Im = n$ (suprayectiva)

ii) $\phi \in O(V) \Rightarrow \phi^{-1} \in O(V)$

Dem. Trivial

iii) $\phi, \psi \in O(V) \Rightarrow \psi \circ \phi \in O(V)$

Dem. $f((\phi \circ \psi)(v), (\phi \circ \psi)(w)) = f(\phi(\psi(v)), \phi(\psi(w))) = f(\psi(v), \psi(w)) = f(v, w)$

OBS

$(O(V), \circ)$ es un GRUPO (no conmutativo)

Grupos

$(GL(V), \circ)$ (Aplicaciones biyectivas $V \to V$)

$$\begin{array}{ccc} GL(V) & & O(V) < GL(V) \\ \wr\!\wr & & \wr\!\wr \qquad \wr\!\wr \\ GL_n(\mathbb{R}) & & ¿? < GL_n(\mathbb{R}) \end{array}$$

Orientación

B, B' bases de V (espacio real)

$P = M(B, B') \in GL_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow \begin{cases} |P| > 0 \Longrightarrow B \text{ y } B' \text{ tienen la misma orientación} \\ |P| < 0 \Longrightarrow B \text{ y } B' \text{ tienen distinta orientación} \end{cases}$

Solo hay dos orientaciones para cualquier espacio vectorial
- Positiva
- Negativa

$\{e_1, \dots, e_n\}$ positiva $\Longrightarrow \{-e_1, \dots, e_n\}$ negativa

En $\mathbb{R}^n$, B_c es positiva

$\varnothing \in GL(V)$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $B' = \{\varnothing(v_1), \dots, \varnothing(v_n)\}$

$M(B', B) = M_B(\varnothing) = A \begin{cases} |A| > 0 \Longrightarrow \varnothing \text{ conserva la orientación} \Longrightarrow \varnothing \in GL^+(V) \\ |A| < 0 \Longrightarrow \varnothing \text{ invierte la orientación} \Longrightarrow \varnothing \in GL^-(V) \end{cases}$

Unión disjunta

$GL(V) = GL^+(V) \dot{\cup} GL^-(V)$

$O(V) = O^+(V) \dot{\cup} O^-(V)$

Ej: $(\mathbb{R}^n, f)$ e.v.e. , $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$

$\varnothing : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ simetría en base W y dirección $W^\perp$ (simetría ortogonal respecto de W)

Veamos $\varnothing$ es una aplicación ortogonal.

$v_1 \in \mathbb{R}^n$, $v_1 = w_1 + w_1'$

$v_2 \in \mathbb{R}^n$, $v_2 = w_2 + w_2'$

$f(\varnothing(v_1), \varnothing(v_2)) = f(w_1 - w_1', w_2 - w_2') = f(w_1, w_2) + f(w_1', w_2')$

$f(v_1, v_2) = f(w_1 + w_1', w_2 + w_2') = f(w_1, w_2) + f(w_1', w_2')$ //

- $n = 3$: $M_B(\varnothing) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \varnothing \in O^-(V)$

$\{v_1, v_2, v_3\} \longmapsto \{v_1, v_2, -v_3\}$

Base de $\varnothing$ hiperplano $\Longrightarrow \varnothing$ simetría especular

simetría

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \phi \in O^+(V)$$

$$\{v_1, v_2, v_3\} \longmapsto \{v_1, -v_2, -v_3\}$$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{simetría}}}{\text{Base de } \phi}$ recta $\Longrightarrow$ ϕ simetría axial

Ej: $(\mathbb{R}^n, f)$ e.v.e. , $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$

$\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ proyección en base W y dirección $W^\perp$ (proyección ortogonal respecto de W)

ϕ no es una aplicación ortogonal (por lo general no es biyectiva)

Propiedades

(V, f) e.v.e., $\phi \in End_{\mathbb{R}}(V)$, $A = M_B(\phi)$, $C = M_B(f)$

i) $\phi \in O(V) \Longleftrightarrow A^t C A = C \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si } B \\ \text{ortonormal}}}{\Longleftrightarrow} A^t \cdot A = I_n$ (A es ortogonal)

ii) $\phi \in O(V) \Longrightarrow \det(\phi) = \pm 1$ (pues $(\det(\phi))^2 = |A|^2 = |A^t||A| = |I_n| = 1$)

iii) $\phi \in O(V) \Longrightarrow \sigma(\phi) \subseteq \{1, -1\}$

Dem.

$$\phi(v) = \lambda v \overset{\substack{v \neq 0 \\ \downarrow}}{\Longrightarrow} \|v\|^2 = f(v,v) = f(\phi(v), \phi(v)) = f(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 f(v,v) \Longrightarrow \lambda^2 = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$$

iv) $\phi \in O(V)$, $W <_\phi V \Longrightarrow W^\perp <_\phi V$ y $\underbrace{V = W \oplus W^\perp}_{\text{ya lo sabemos}}$

Dem.

$$v \in W^\perp \overset{?}{\Longrightarrow} \phi(v) \in W^\perp$$

$$f(v, w) = 0, \forall w \in W \overset{?}{\Longrightarrow} f(\phi(v), w) = 0, \forall w \in W$$

$\phi : V \longrightarrow V$ es biyectiva $\Longrightarrow \phi|_W : W \longrightarrow W$ es biyectiva

$\Longrightarrow$ $w = \phi(w')$, para algún $w' \in W$

$$\Longrightarrow f(\phi(v), w) = f(\phi(v), \phi(w')) = f(v, w') = 0$$

OBS

f producto escalar $\Longrightarrow W^{\perp\perp} = W$

Clasificación de aplicaciones ortogonales

$n = \dim_{\mathbb{R}} V$

- $n = 1$: $(a)^t (a) = 1 \Rightarrow (a^2) = 1$

$\Rightarrow O(V) = \{ id_V , -id_V \}$

- $n = 2$: $\phi \in O(V)$. $M_B(\phi) = A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ es ortogonal, $B = \{v_1, v_2\}$ base ortonormal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^t A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

$a = \cos\theta$, $b = \operatorname{sen}\theta$, $c = \cos\theta'$, $d = \operatorname{sen}\theta'$, $0 \le \theta, \theta' \le 2\pi$

$$0 = ac+bd = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta' = \cos(\theta - \theta') \iff \theta' = \begin{cases} \theta + \frac{\pi}{2} \\ \theta + \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

- $\theta' = \theta + \pi/2$: $c = \cos(\theta') = \cos(\theta + \pi/2) = -\operatorname{sen}(\theta) = -b$
  $d = \operatorname{sen}(\theta') = \operatorname{sen}(\theta + \pi/2) = \cos(\theta) = a$

$\Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{DIRECTA}}$ $(|A| = a^2 + b^2 > 0)$

- $\theta' = \theta + 3\pi/2$: $c = \cos(\theta') = \cos(\theta + 3\pi/2) = \operatorname{sen}(\theta) = b$
  $d = \operatorname{sen}(\theta') = \operatorname{sen}(\theta + 3\pi/2) = -\cos(\theta) = -a$

$\Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{INVERSA}}$ $(|A| = -a^2 - b^2 < 0)$

$$\phi \in O^+(V) \Rightarrow M_B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

ortonormal

$$\phi \in O^-(V) \Rightarrow M_B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1$$

$$\phi \in O^+(V) \Rightarrow p_\phi = x^2 - 2x\cos\theta + 1 \Rightarrow x = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2}$$

$\Rightarrow \theta = 0, \pi \Rightarrow$ Solo hay autovalores si $\theta = 0$ (id_V) o $\theta = \pi$ $(-id_V)$

$$\phi \in O^-(V) \Rightarrow p_\phi = x^2 - 1 = (x+1)(x-1) = q_\phi \Rightarrow \phi \text{ diagonalizable}$$

$\Rightarrow M_{B'}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, B' ortonormal (ϕ simetría) (*)

(*)

v) $\phi \in O(V)$, $v \in V_{\phi,1}$, $w \in V_{\phi,-1} \Rightarrow f(v,w) = 0$

Dem. $f(v,w) = f(\phi(v), \phi(w)) = f(v, -w) = -f(v,w) \Rightarrow 2f(v,w) = 0 \Rightarrow f(v,w) = 0$

OBS

$O^+(V)$ siempre son rotaciones (subgrupo de $O(V)$, al componer dos el det es 1)

$O^-(V)$ no es subgrupo (al componer dos el det es 1)

Problema

Encontrar la rotación que surge de componer dos simetrías ortogonales en el plano vectorial euclídeo.

Teorema 13 / 04 / 2021

$\phi \in O(V) \Longrightarrow \exists B$ base ortonormal de V tal que:

$$M_B(\phi) = I_s \oplus (-I_t) \oplus \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{pmatrix} \cos\theta_t & -\operatorname{sen}\theta_t \\ \operatorname{sen}\theta_t & \cos\theta_t \end{pmatrix}, \quad s,t \geq 0, \quad 0 \leq \theta_i < 2\pi, \quad n = s+t+2m, \quad m \geq 0$$

Dem.

Inducción sobre $n = \dim_{\mathbb{R}} V$

- $n=1$: Ya lo hemos visto

$\dim_{\mathbb{R}} W < n \overset{?}{\Longrightarrow} \dim_{\mathbb{R}} W = n$

CASO 1: $\lambda = \pm 1 \in \sigma(\phi) \Longrightarrow$ Sea $v_1 \in V_{\phi,\lambda}$

$W = L(v_1) <_\phi V$

$V =_\phi W \oplus W^\perp$

$\phi|_{W^\perp}$ es ortogonal $\overset{HI}{\Longrightarrow} M_{\{v_1, \underbrace{v_2, \dots, v_n}_{\text{Base } W^\perp}\}} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & M(\phi|_{W^\perp}) \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \pm 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \underline{M(\phi|_{W^\perp})} \\ 0 & \end{array}\right)$

Satisface la condición por hipótesis

CASO 2: $\sigma(\phi)$ es vacío

$q_\phi = f_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot f_t^{a_t}$, $f_1, \ldots, f_t \in \mathbb{R}[x]$ irreducibles de grado 2

Sea $q_{\phi, v_1} = f_1 = x^2 + a_1 x + a_0$ En la demostración del teorema espectral vimos que este vector existe.

$$\left.\begin{array}{l} \pi = L(v_1, \phi(v_1)) <_\phi V \\ \dim_{\mathbb{R}} \pi = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow V =_\phi \pi \oplus \pi^\perp$$

$\phi|_\pi$, $\phi|_{\pi^\perp}$ ortogonales

$$\left.\begin{array}{l} B_\pi = \{v_1, v_2\} \text{ ortonormal en } \pi \\ B_{\pi^\perp} = \{v_3, \ldots, v_n\} \text{ ortonormal en } \pi^\perp \end{array}\right\} \text{HI}$$

$\Longrightarrow M_{\underbrace{B_\pi \cup B_{\pi^\perp}}_{\text{ortonormal}}}(\phi) = M_{B_\pi}(\phi|_\pi) \oplus M_{B_{\pi^\perp}}(\phi|_{\pi^\perp})$ es del tipo deseado q.e.d.

• $n = 3$: CASO 1: $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right) \in O^+(V)$ Rotación de ángulo θ con eje $L(v_1)$

CASO 2: $\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right) \in O^-(V)$ ó $\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \in O^+(V)$

CASOS PARTICULARES:

• $\phi \in O^+(V) \Longrightarrow M_B(\phi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right)$

- $\theta = 0 \Longrightarrow \phi = id_V$
- $\theta = \pi \Longrightarrow M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $L(v_1) = V_{\phi,1}$
  $L(v_2, v_3) = V_{\phi,-1} = L(v_1)^\perp$

ϕ simetría axial ortogonal de eje (base) $L(v_1)$
y dirección $L(v_1)^\perp$

- $\varnothing \in O^-(V) \Rightarrow M_B(\varnothing) = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_B(\varnothing_2)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{M_B(\varnothing_1)} = M_B(\varnothing_2 \circ \varnothing_1)$

Descomposición de toda aplicación ortogonal inversa como composición de simetría y rotación

$$\begin{cases} \varnothing = \varnothing_2 \circ \varnothing_1 \\ \varnothing_1 \text{ giro de eje } L(v_1) \text{ y de ángulo } \theta \\ \varnothing_2 \text{ simetría (especular) ortogonal con dirección } L(v_1) \text{ y base } L(v_2, v_3) = L(v_1)^\perp \end{cases}$$

$$M_B(\varnothing) = I_s \oplus (-I_t) \oplus \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

t es impar $\Rightarrow M_B(\varnothing) = (-1) \oplus I_s \oplus (-I_{t-1}) \oplus \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$$= (-1) \oplus \underset{|C|=1}{C} = \underbrace{((-1) \oplus I_{n-1})}_{\substack{M_B(\varnothing_2) \\ \text{simetría especular}}} \underbrace{((1) \oplus C)}_{\substack{M_B(\varnothing_1) \\ \text{rotación}}}$$

- $\varnothing_1 = id_V \Rightarrow \varnothing = \varnothing_2$ simetría especular

OBS

$\varnothing \in O^-(V) \Rightarrow \varnothing$ se puede ver como la composición de una simetría especular y una rotación