# Tema 1: Señales y Sistemas

**Esta presentación es una adaptación del contenido proporcionado por el profesor Jesús Bescós Cano**

Ruben Tolosana

ruben.tolosana@uam.es

BiDA Lab

Biometrics & Data Pattern Analytics Lab

UAM

Universidad Autónoma de Madrid

# Índice

1. Introducción
2. Transformaciones de la variable independiente
3. Señales básicas: Impulso unidad y escalón unidad
4. Periodicidad
5. Simetrías ante la inversión
6. Señales exponenciales y sinusoidales
7. Sistemas

# Introducción

1

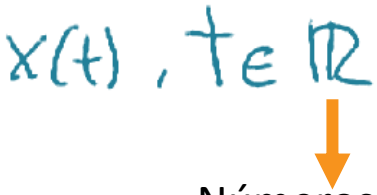
1. Introducción
2. Transformaciones de la variable independiente
3. Señales básicas: Impulso unidad y escalón unidad
4. Periodicidad
5. Simetrías ante la inversión
6. Señales exponenciales y sinusoidales
7. Sistemas

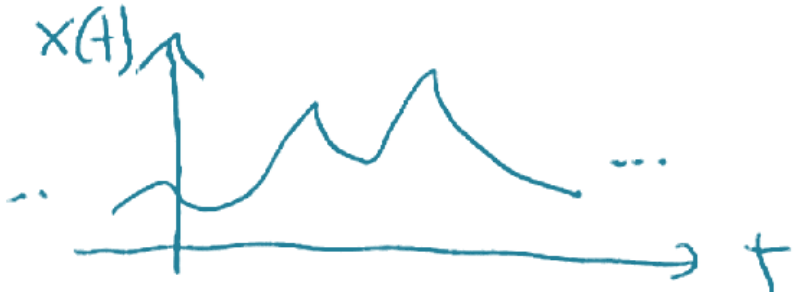
BiDALab-UAM ©

# 1. Introducción

Las señales se clasifican en:

- Señales de variable independiente continua, t:




"Señales de tiempo continuo"
"Señales continuas"

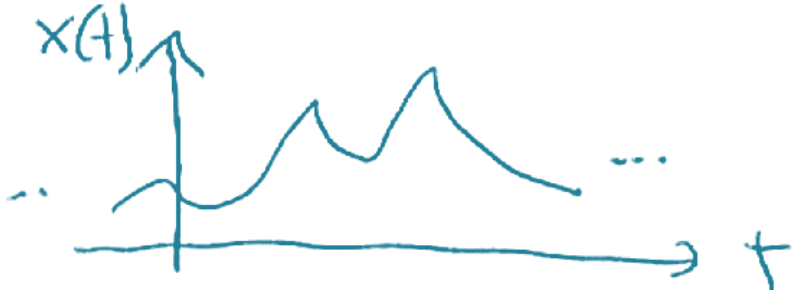
# 1. Introducción

Las señales se clasifican en:

- Señales de variable independiente continua, t:

$x(t), t \in \mathbb{R}$

Números Reales

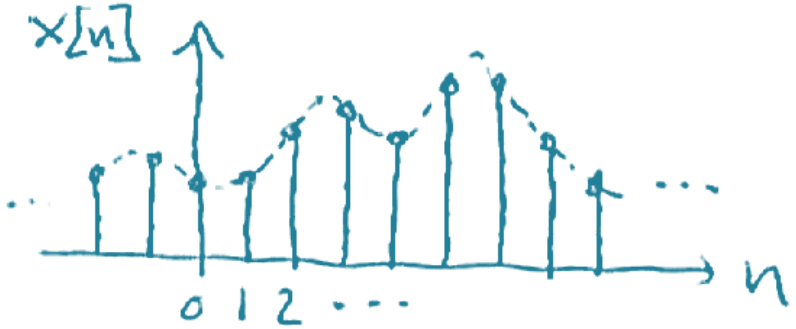



"Señales de tiempo continuo"
"Señales continuas"

- Señales de variable independiente discreta, n:

$x[n], n \in \mathbb{Z}$

Números Enteros




"Señales de tiempo discreto"
"Señales discretas"

# 1. Introducción

Energía y potencia de una señal:

- En un intervalo finito:

Continua, x(t) →

**Energía (E)**

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

**Potencia (P)**

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

→ P = E / T

# 1. Introducción

Energía y potencia de una señal:

- En un intervalo finito:

| | Energía (E) | Potencia (P) |
|---|---|---|
| Continua, x(t) → | $E = \int_{t_1}^{t_2} \lvert x(t) \rvert^2 dt$ | $P = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \lvert x(t) \rvert^2 dt$ |
| Discreta, x[n] → | $E = \sum_{n=n_1}^{n_2} \lvert x[n] \rvert^2$ | $P = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \cdot \sum_{n=n_1}^{n_2} \lvert x[n] \rvert^2$ |

→ P = E / T

# 1. Introducción

Energía y potencia de una señal:

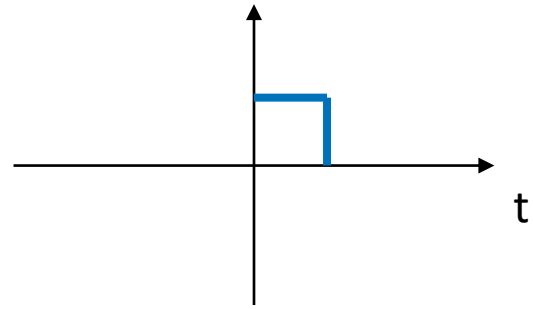
| | Energía (E) | Potencia (P) |
|---|---|---|
| • En un intervalo finito: | | |
| Continua, x(t) → | $E = \int_{t_1}^{t_2} \lvert x(t) \rvert^2 dt$ | $P = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \lvert x(t) \rvert^2 dt$ |
| Discreta, x[n] → | $E = \sum_{n=n_1}^{n_2} \lvert x[n] \rvert^2$ | $P = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \cdot \sum_{n=n_1}^{n_2} \lvert x[n] \rvert^2$ |
| • En un intervalo infinito: | | |
| Continua, x(t) → | $E_\infty = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \lvert x(t) \rvert^2 dt$ | $P_\infty = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} \lvert x(t) \rvert^2 dt$ |
| Discreta, x[n] → | $E_\infty = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \lvert x[n] \rvert^2$ | $P_\infty = \lim_{N \to \infty} \frac{\sum_{n=-N}^{N} \lvert x[n] \rvert^2}{2N+1}$ |

→ P = E / T

# 1. Introducción

Clasificación de las señales de acuerdo a estos conceptos:

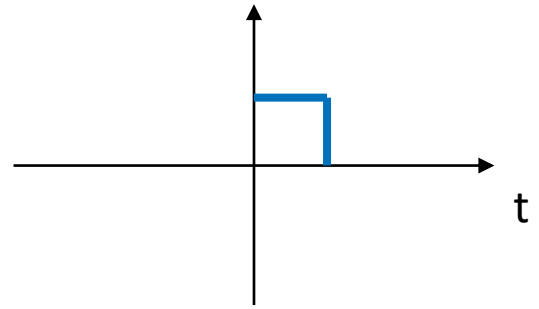
1) $E_\infty < \infty \rightarrow P_\infty = 0 \rightarrow$ Señales que sólo toman valor en un intervalo



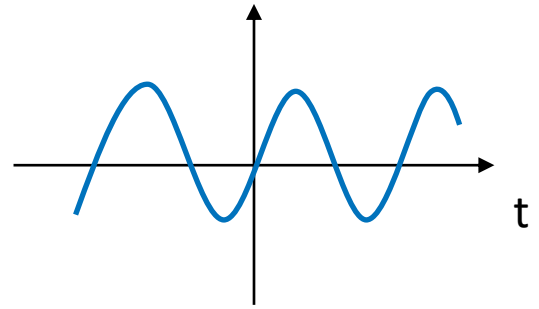
# 1. Introducción

**Clasificación de las señales de acuerdo a estos conceptos:**

1) $E_\infty < \infty \rightarrow P_\infty = 0 \rightarrow$ Señales que sólo toman valor en un intervalo



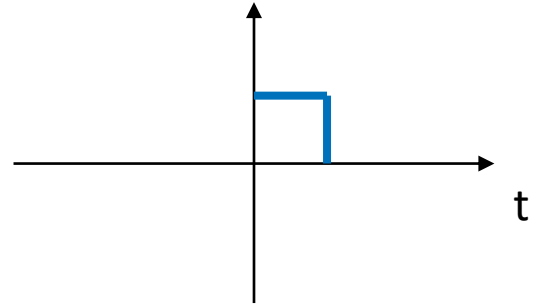

2) $E_\infty = \infty \quad ; \quad P_\infty < \infty \rightarrow$ Señales constantes, periódicas, etc.



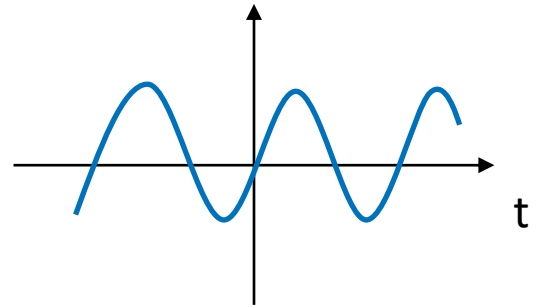
# 1. Introducción

Clasificación de las señales de acuerdo a estos conceptos:

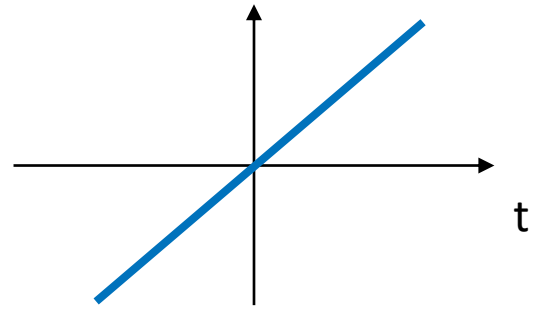
1) $E_\infty < \infty \rightarrow P_\infty = 0 \rightarrow$ Señales que sólo toman valor en un intervalo




2) $E_\infty = \infty \quad ; \quad P_\infty < \infty \rightarrow$ Señales constantes, periódicas, etc.



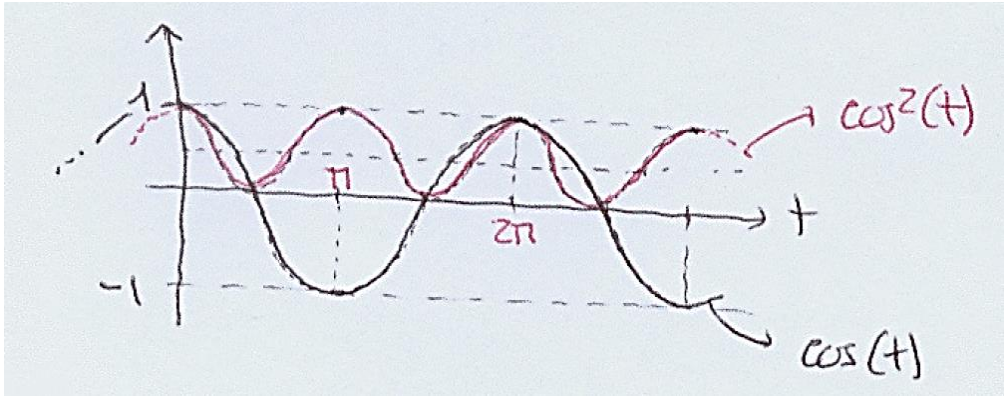

3) $E_\infty = \infty \quad ; \quad P_\infty = \infty \rightarrow$ Funciones lineales de t, n, etc.



# Problema 1.3.c)

Obtener $E_\infty$ y $P_\infty$ de la señal $x(t) = \cos(t)$:

Representación gráfica





- Referencia Problemas:
  - A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, S. H. Nawab, “Signals and Systems”, 2ª Ed, Prentice-Hall 1996.
  - A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, S. H. Nawab, “Señales y sistemas”, 2ª Ed, Prentice-Hall Hispanoamericana 1998.

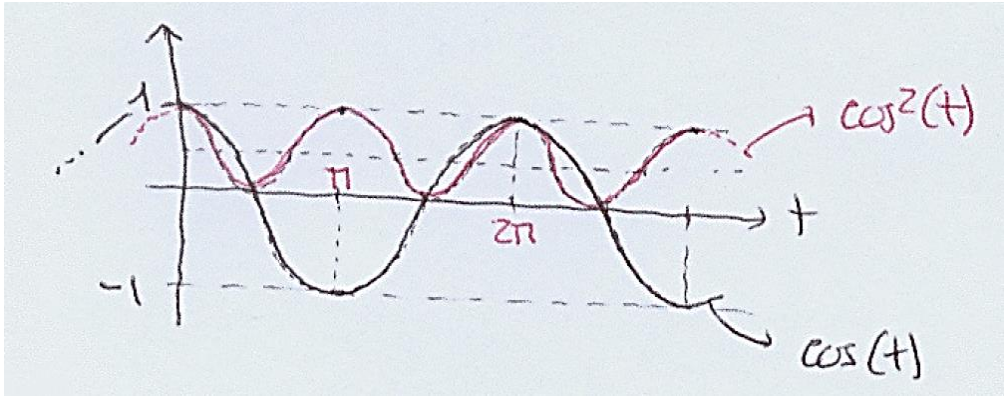
# Problema 1.3.c)

Obtener $E_\infty$ y $P_\infty$ de la señal $x(t) = \cos(t)$:

**Energía:**

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(t)\, dt = \infty$$

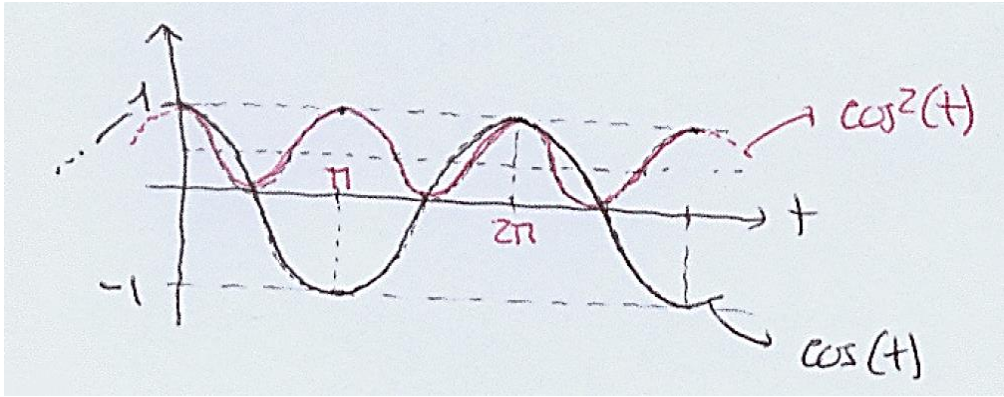
Representación gráfica



# Problema 1.3.c)

Obtener $E_\infty$ y $P_\infty$ de la señal $x(t) = \cos(t)$:

Representación gráfica




**Energía:**

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(t)\, dt = \infty$$

**Potencia:**

$$P_\infty = P_\pi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^2 dt =$$

Recordatorio

$$sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

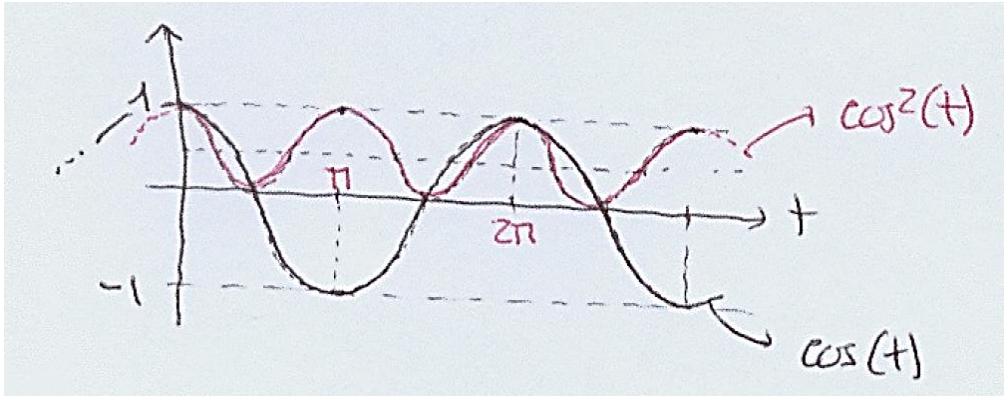
$$cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Al ser una señal periódica, calculamos la potencia en un periodo

# Problema 1.3.c)

Obtener $E_\infty$ y $P_\infty$ de la señal $x(t) = \cos(t)$:

Representación gráfica




**Energía:**

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(t)\, dt = \infty$$

**Potencia:**

$$P_\infty = P_\pi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4\pi}\cdot\int_0^{\pi} (e^{i2t} + e^{-i2t} + 2)\, dt =$$

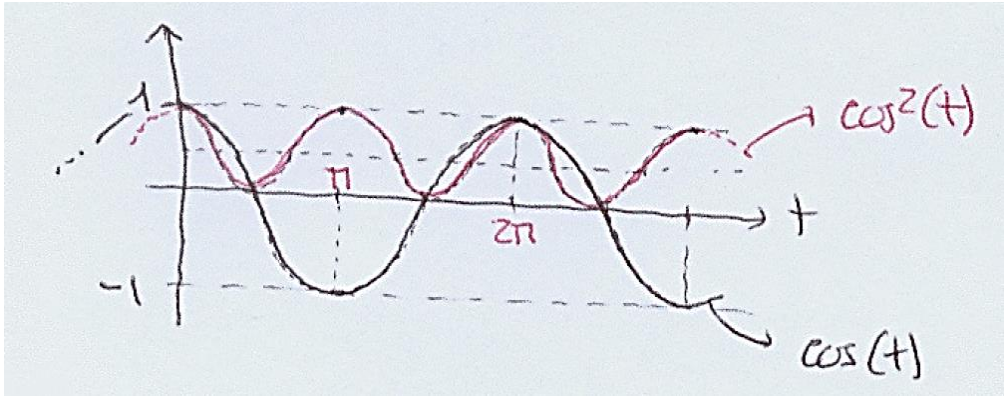
Recordatorio

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

# Problema 1.3.c)

Obtener $E_\infty$ y $P_\infty$ de la señal $x(t) = \cos(t)$:

Representación gráfica




**Energía:**

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(t)\, dt = \infty$$

**Potencia:**

$$P_\infty = P_\pi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} (e^{j2t} + e^{-j2t} + 2)\, dt =$$

$$\frac{e^{j2\pi}}{2j} - \frac{e^{j0}}{2j} = 0$$

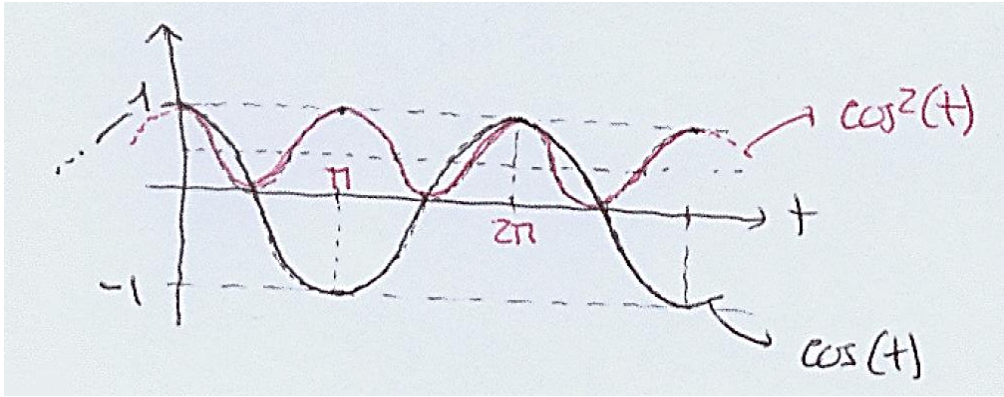
Recordatorio

$$2\pi$$

# Problema 1.3.c)

Obtener $E_\infty$ y $P_\infty$ de la señal $x(t) = \cos(t)$:

Representación gráfica




**Energía:**

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(t)\, dt = \infty$$

**Potencia:**

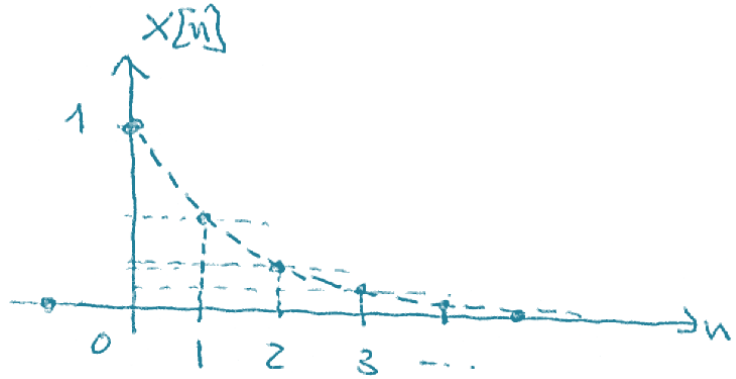
$$P_\infty = P_\pi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4\pi}\cdot\int_0^{\pi} (e^{i2t} + e^{-i2t} + 2)\, dt = \frac{1}{2}$$

# Problema 1.3.d)

Obtener $E_\infty$ y $P_\infty$ de la señal

$$x[n] = \begin{cases} (1/2)^n & , n \geq 0 \\ 0 & , n < 0 \end{cases}$$

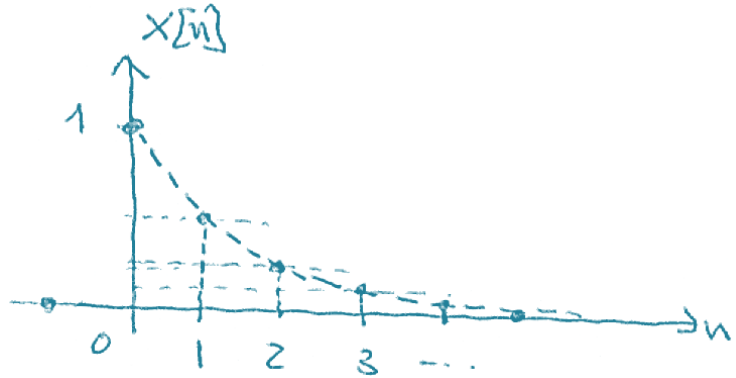
Representación gráfica



# Problema 1.3.d)

Obtener $E_\infty$ y $P_\infty$ de la señal $x[n] = \begin{cases} (1/2)^n & , n \geq 0 \\ 0 & , n < 0 \end{cases}$

Representación gráfica



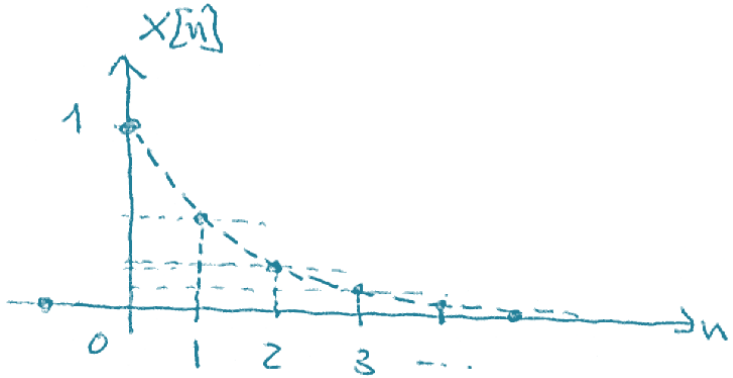

**Energía**:

$$\epsilon_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} =$$

# Problema 1.3.d)

Obtener $E_\infty$ y $P_\infty$ de la señal $x[n] = \begin{cases} (1/2)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

Representación gráfica




**Energía**:

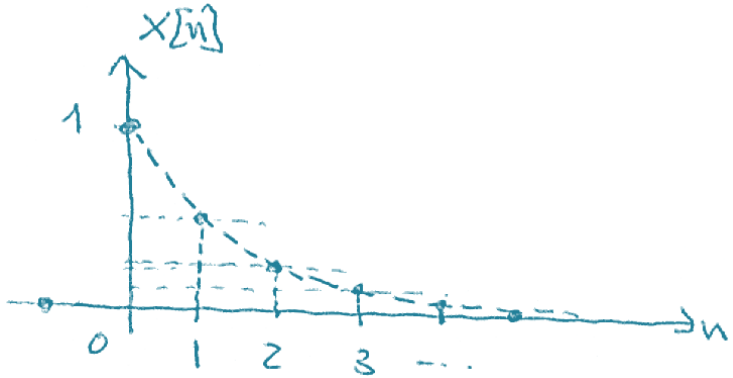
$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Recordatorio $\sum_{i=m}^{n-1} a^i = \frac{a^m - a^n}{1-a}$

# Problema 1.3.d)

Obtener $E_\infty$ y $P_\infty$ de la señal $x[n] = \begin{cases} (1/2)^n & , n \geq 0 \\ 0 & , n < 0 \end{cases}$

Representación gráfica




**Energía**:

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1-0}{1-1/4} = \frac{4}{3}$$

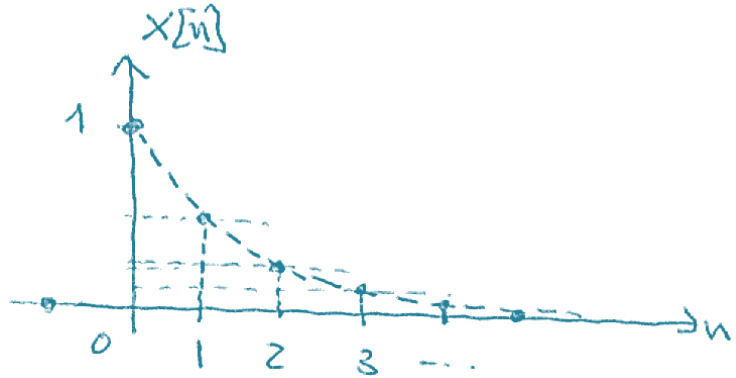
Recordatorio

$$\sum_{i=m}^{n-1} a^i = \frac{a^m - a^n}{1-a}$$

# Problema 1.3.d)

Obtener $E_\infty$ y $P_\infty$ de la señal $x[n] = \begin{cases} (1/2)^n & , n \geq 0 \\ 0 & , n < 0 \end{cases}$

Representación gráfica




**Energía**:

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1-0}{1-1/4} = \frac{4}{3}$$

**Potencia:**

$$P_\infty = \lim_{N \to \infty} \frac{E_\infty}{2N+1} = 0$$

2

# Transformaciones de la variable independiente

1. Introducción
2. Transformaciones de la variable independiente
3. Señales básicas: Impulso unidad y escalón unidad
4. Periodicidad
5. Simetrías ante la inversión
6. Señales exponenciales y sinusoidales
7. Sistemas

BiDALab-UAM ©

# 2. Transformaciones de la variable independiente

## Desplazamiento:

$x(t) \longrightarrow y(t) = x(t-t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$

- $t_0 > 0 \Rightarrow$ SEÑAL RETRASADA
- $t_0 < 0 \Rightarrow$ SEÑAL ADELANTADA

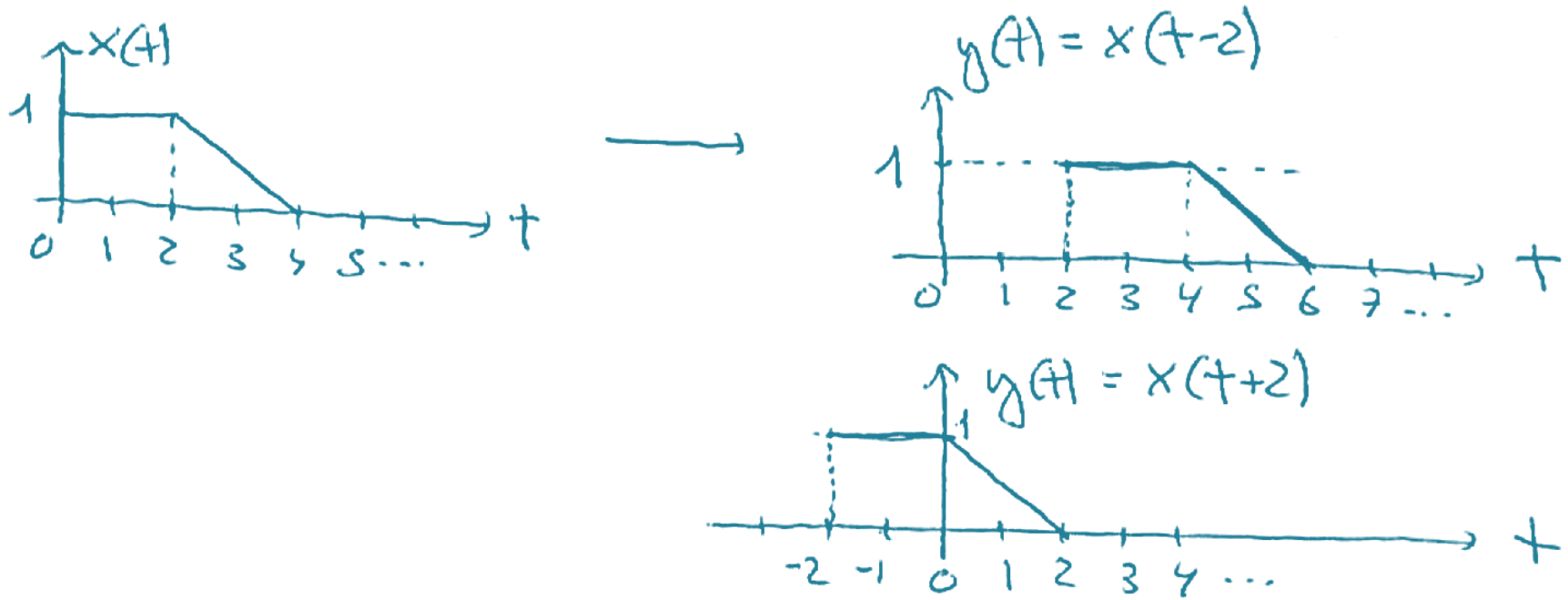
# 2. Transformaciones de la variable independiente

## Desplazamiento:

$x(t) \longrightarrow y(t) = x(t-t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$

- $t_0 > 0 \Rightarrow$ SEÑAL RETRASADA
- $t_0 < 0 \Rightarrow$ SEÑAL ADELANTADA

- **Gráficamente:**



# 2. Transformaciones de la variable independiente

## Desplazamiento:

$$x(t) \longrightarrow y(t) = x(t-t_0), \quad t_0 \in \mathbb{R}$$

- $t_0 > 0 \Rightarrow$ SEÑAL RETRASADA
- $t_0 < 0 \Rightarrow$ SEÑAL ADELANTADA

- Analíticamente:

$$t \longrightarrow (t-t_0) \quad ; \quad x(t) = \frac{t+2}{2t+1} e^{-t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = x(t-t_0) = \frac{(t-t_0)+2}{2(t-t_0)+1} e^{-(t-t_0)}$$

# 2. Transformaciones de la variable independiente

## Desplazamiento:

$$x(t) \longrightarrow y(t) = x(t-t_0), \quad t_0 \in \mathbb{R}$$

- $t_0 > 0 \Rightarrow$ SEÑAL RETRASADA
- $t_0 < 0 \Rightarrow$ SEÑAL ADELANTADA

- Analíticamente:

$$t \longrightarrow (t-t_0) \quad ; \quad x(t) = \frac{t+2}{2t+1} e^{-t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = x(t-t_0) = \frac{(t-t_0)+2}{2(t-t_0)+1} e^{-(t-t_0)}$$

$$x[n] \longrightarrow y[n] = x[n-n_0], \quad n_0 \in \mathbb{Z}$$

Mismos razonamientos que con $x(t)$

# 2. Transformaciones de la variable independiente

Inversión:

$$x(t) \longrightarrow y(t) = x(-t)$$

# 2. Transformaciones de la variable independiente

## Inversión:

$$x(t) \longrightarrow y(t) = x(-t)$$

- Gráficamente:

# 2. Transformaciones de la variable independiente

## Inversión:

$$x(t) \longrightarrow y(t) = x(-t)$$

- Analíticamente:

$$t \longrightarrow (-t) \;:\; x(t) = \frac{t+2}{2t+1} e^{-t} \Rightarrow y(t) = x(-t) = \frac{-t+2}{-2t+1} e^{t}$$

# 2. Transformaciones de la variable independiente

## Inversión:

$$x(t) \longrightarrow y(t) = x(-t)$$

- Analíticamente:

$$t \longrightarrow (-t) \;:\; x(t) = \frac{t+2}{2t+1} e^{-t} \Rightarrow y(t) = x(-t) = \frac{-t+2}{-2t+1} e^{t}$$

$$x[n] \longrightarrow y[n] = x[-n] \quad , \text{ IGUAL QUE EN TIEMPO CONTINUO}$$

# 2. Transformaciones de la variable independiente

## Escalado (t):

$x(t) \longrightarrow y(t) = x(\alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

- $|\alpha| > 1 \Rightarrow$ SEÑAL COMPRIMIDA
- $|\alpha| < 1 \Rightarrow$ SEÑAL EXPANDIDA

$\alpha < 0 \Rightarrow$ ADEMÁS, SEÑAL INVERTIDA

# 2. Transformaciones de la variable independiente

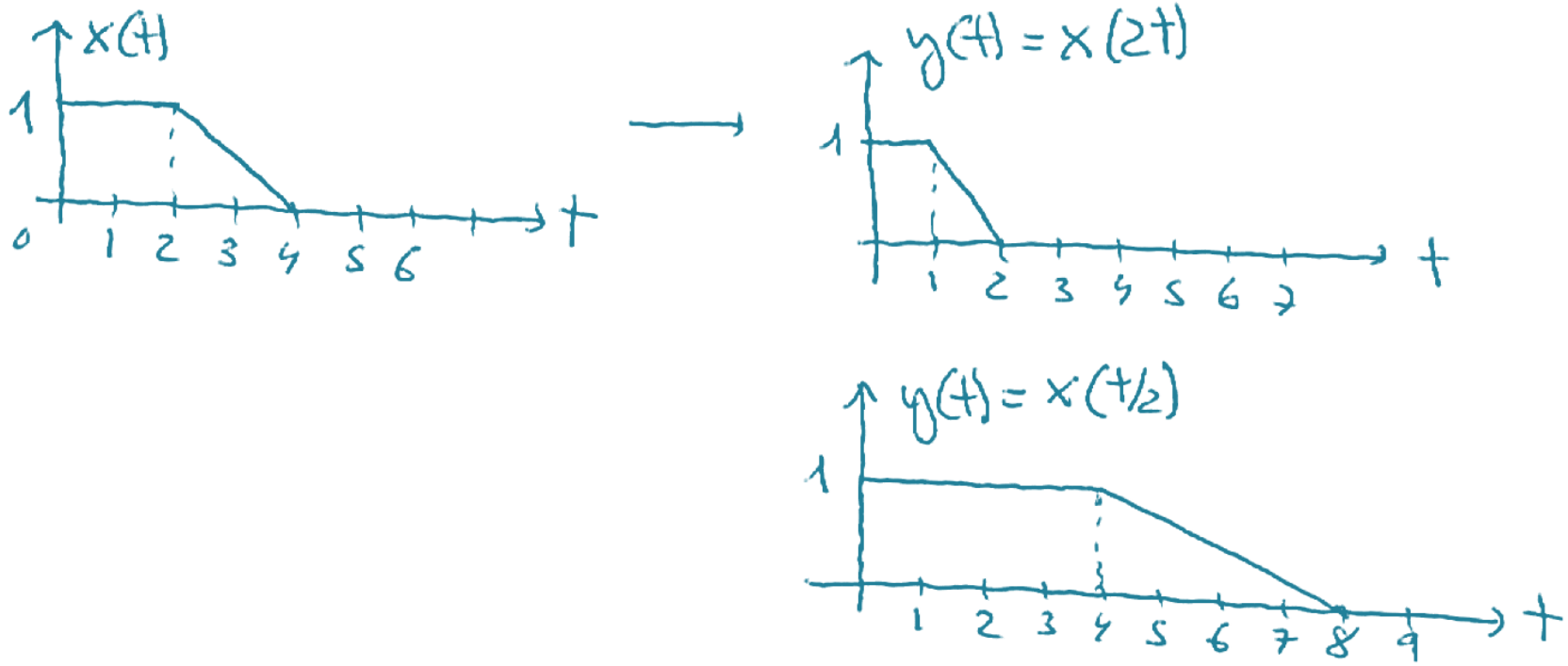
## Escalado (t):

$x(t) \longrightarrow y(t) = x(\alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

- $|\alpha| > 1 \Rightarrow$ SEÑAL COMPRIMIDA
- $|\alpha| < 1 \Rightarrow$ SEÑAL EXPANDIDA

$\alpha < 0 \Rightarrow$ ADEMÁS, SEÑAL INVERTIDA

- Gráficamente:



# 2. Transformaciones de la variable independiente

## Escalado (t):

$x(t) \longrightarrow y(t) = x(\alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

- $|\alpha| > 1 \Rightarrow$ SEÑAL COMPRIMIDA
- $|\alpha| < 1 \Rightarrow$ SEÑAL EXPANDIDA

$\alpha < 0 \Rightarrow$ ADEMÁS, SEÑAL INVERTIDA

- Analíticamente:

$$t \longrightarrow (\alpha t) \quad : \quad x(t) = \frac{t+2}{2t+1} e^{-t} \Rightarrow y(t) = x(\alpha t) = \frac{\alpha t + 2}{2\alpha t + 1} e^{-\alpha t}$$

# 2. Transformaciones de la variable independiente

## Escalado (n):

$$x[n] \longrightarrow y[n] = x[\alpha n]$$

LA OPERACIÓN SÓLO ESTÁ DEFINIDA SI $\alpha \in \mathbb{Z} \Rightarrow |\alpha| \geq 2$

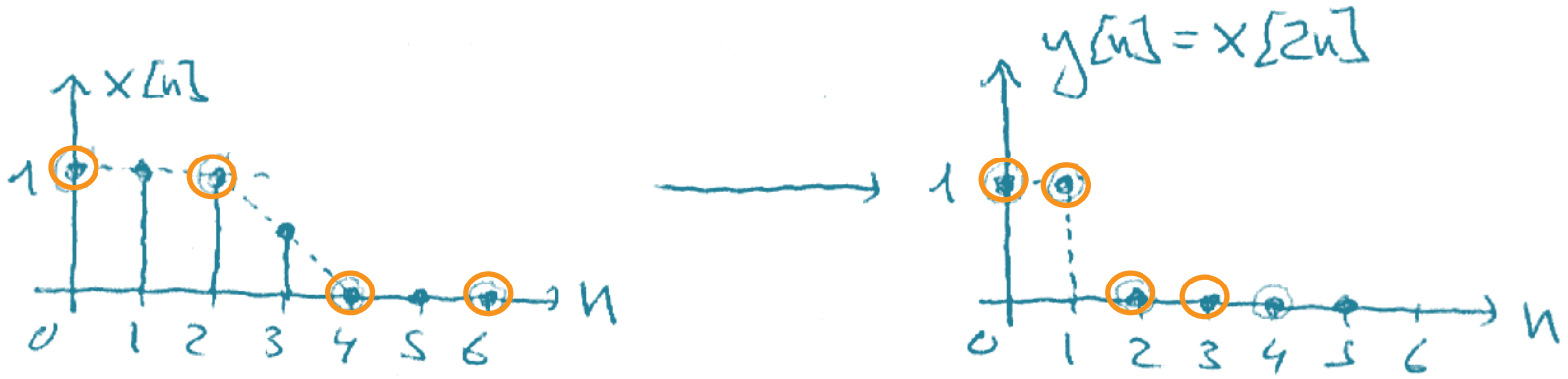
# 2. Transformaciones de la variable independiente

## Escalado (n):

$$x[n] \longrightarrow y[n] = x[\alpha n]$$

LA OPERACIÓN SÓLO ESTÁ DEFINIDA SI $\alpha \in \mathbb{Z} \Rightarrow |\alpha| \geq 2$

- Gráficamente:




Los valores **marcados** de x[n] se conservan en y[n]. El resto de valores (x[1], x[3]. x[5], etc.) se pierden => **OPERACIÓN NO REVERSIBLE**

# 2. Transformaciones de la variable independiente

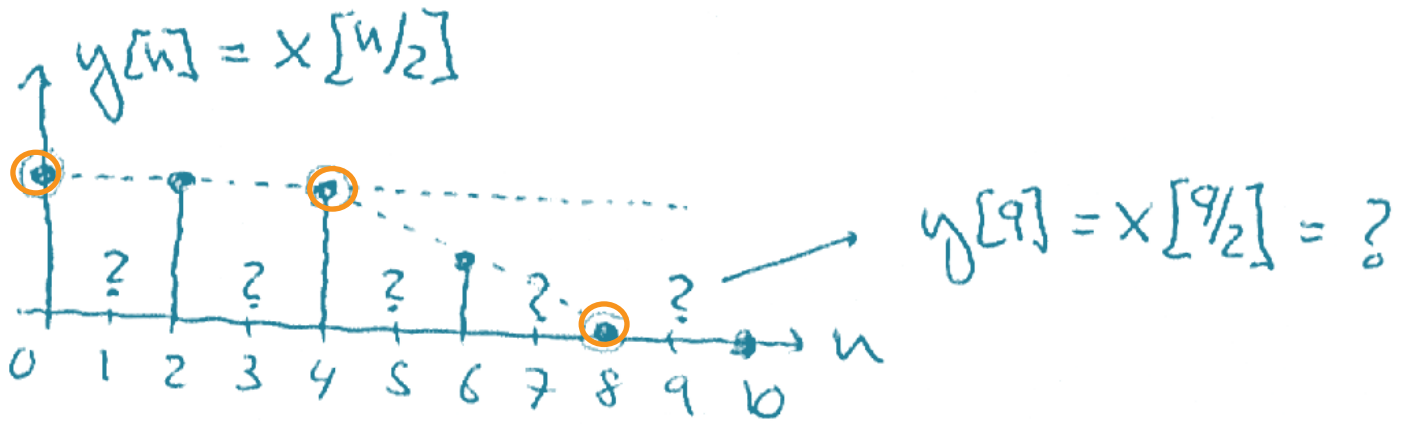
## Escalado (n):

$$x[n] \longrightarrow y[n] = x[\alpha n]$$

LA OPERACIÓN SÓLO ESTÁ DEFINIDA SI $\alpha \in \mathbb{Z} \Rightarrow |\alpha| \geq 2$

- Gráficamente:

Si $\alpha \notin \mathbb{Z}$ :



# 2. Transformaciones de la variable independiente

## Transformación Afín:

$$x(t) \longrightarrow y(t) = x(\alpha t - t_0), \quad \alpha, t_0 \in \mathbb{R}$$

# 2. Transformaciones de la variable independiente

## Transformación Afín:

$$x(t) \longrightarrow y(t) = x(\alpha t - t_0), \quad \alpha, t_0 \in \mathbb{R}$$

- Analíticamente:

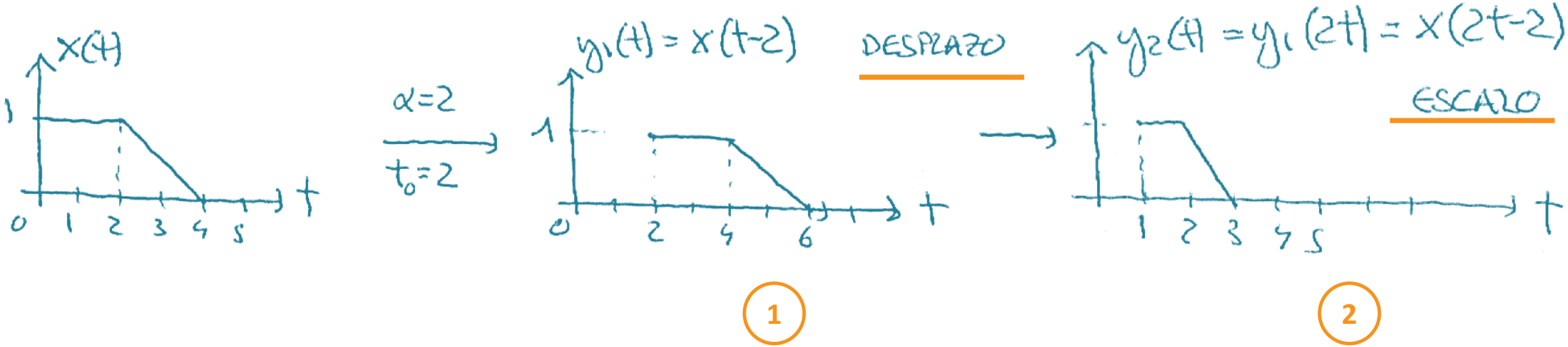
$$x(t) = \frac{t+2}{2t+1} e^{-t} \Rightarrow \quad t \longrightarrow (\alpha t - t_0)$$

# 2. Transformaciones de la variable independiente

## Transformación Afín:

$$x(t) \longrightarrow y(t) = x(\alpha t - t_0), \quad \alpha, t_0 \in \mathbb{R}$$

- Gráficamente:

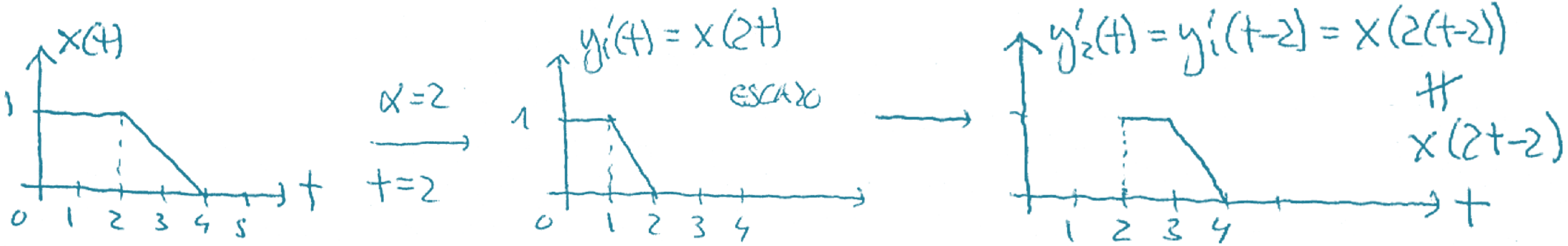


# 2. Transformaciones de la variable independiente

## Transformación Afín:

$$x(t) \longrightarrow y(t) = x(\alpha t - t_0), \quad \alpha, t_0 \in \mathbb{R}$$

- Gráficamente:




**Muy importante el orden! Se puede hacer analíticamente y ver que el orden correcto es: 1) desplazamiento, y 2) escalado**

3

# Señales básicas: Impulso unidad y escalón unidad

1. Introducción
2. Transformaciones de la variable independiente
3. Señales básicas: Impulso unidad y escalón unidad
4. Periodicidad
5. Simetrías ante la inversión
6. Señales exponenciales y sinusoidales
7. Sistemas

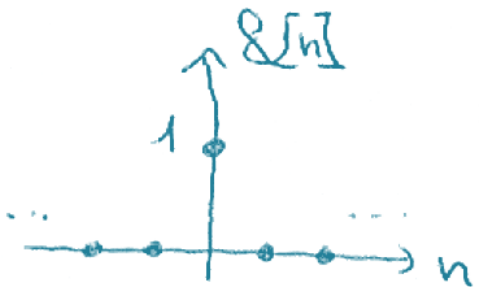
BiDALab-UAM ©

# 3. Señales básicas: Impulso unidad y escalón unidad

## a) Tiempo discreto:

- Definiciones:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & , n \neq 0 \\ 1 & , n = 0 \end{cases}$$

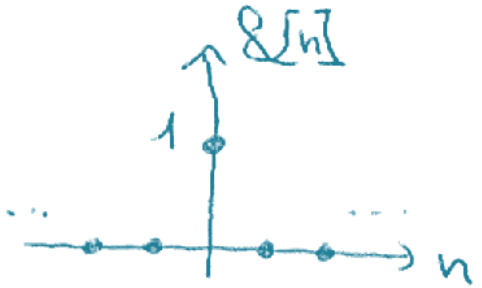


# 3. Señales básicas: Impulso unidad y escalón unidad

## a) Tiempo discreto:

- **Definiciones:**

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$



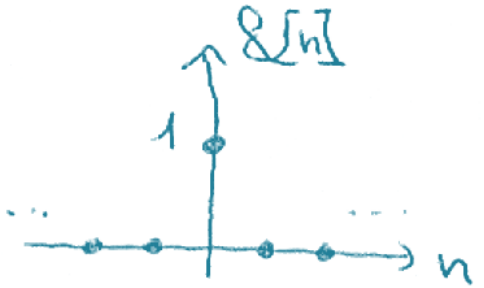

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

# 3. Señales básicas: Impulso unidad y escalón unidad

## a) Tiempo discreto:

- **Definiciones:**

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & , n \neq 0 \\ 1 & , n = 0 \end{cases}$$




$$u[n] = \begin{cases} 0 & , n < 0 \\ 1 & , n \geq 0 \end{cases}$$

- **Relaciones:**

$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$ → PRIMERA DIFERENCIA DE $u[n]$

$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] =$ → SUMA ACUMULADA

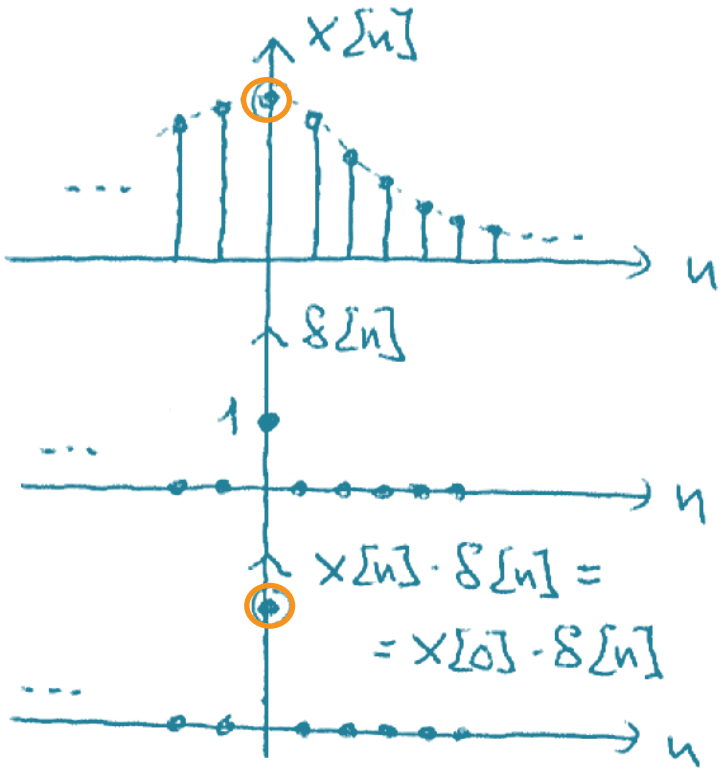
$= \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$ , SUMA DE VERSIONES DESPLAZADAS DE $\delta[n]$

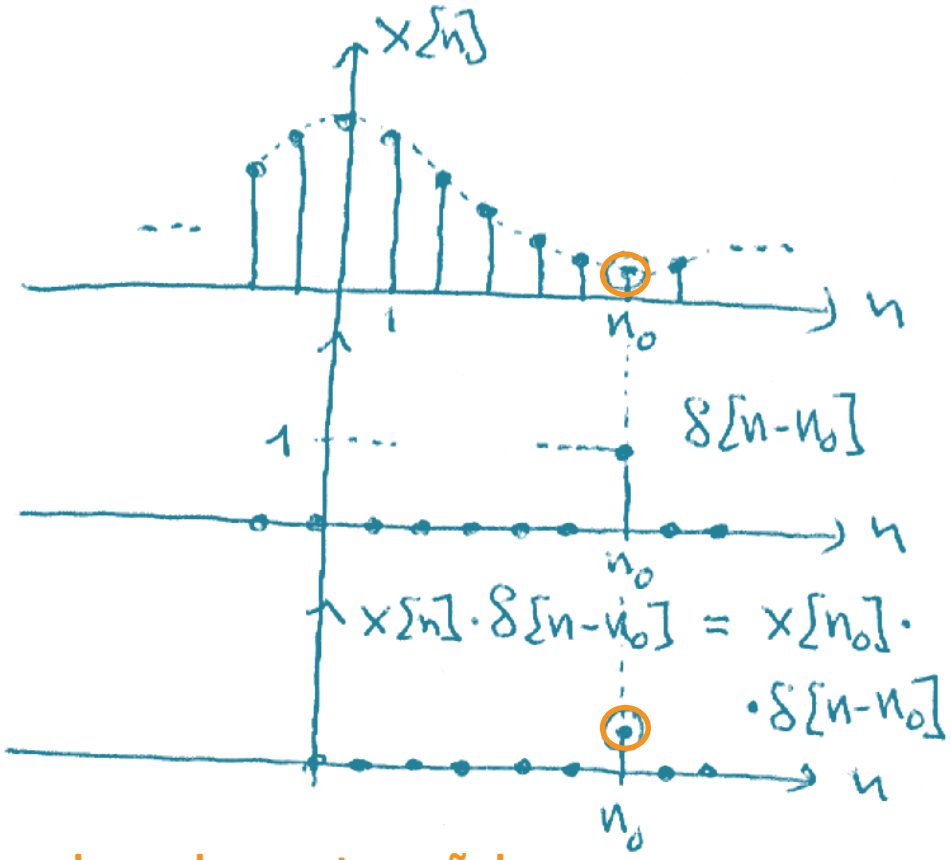
$\uparrow$ $m = n-k$

# 3. Señales básicas: Impulso unidad y escalón unidad

## a) Tiempo discreto:

- Propiedad de selección de $\delta[n]$:




**Nos permite seleccionar determinados valores de nuestra señal**

# Problema 1.12

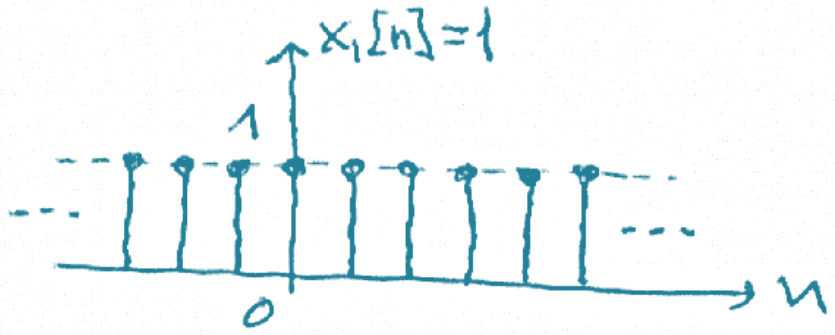
Dado $$x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n-1-k] = u[Mn - n_0]$$

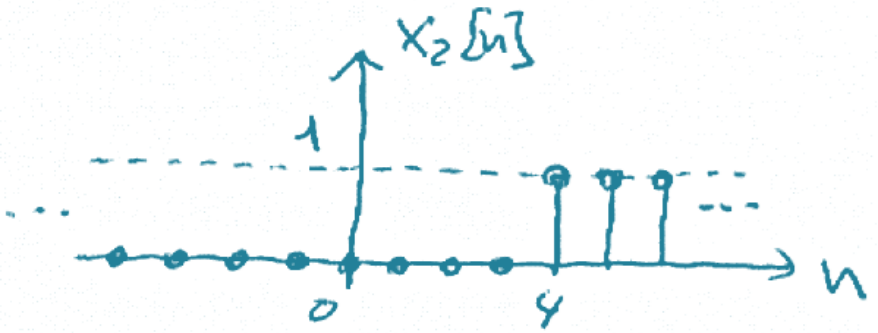
calcular los valores de M y n0 para que se cumpla la igualdad.

# Problema 1.12

Dado $x[n] = \underbrace{1}_{x1} - \underbrace{\sum_{k=3}^{\infty} \delta[n-1-k]}_{x2} = u[Mn - n_0]$

calcular los valores de M y n0 para que se cumpla la igualdad.

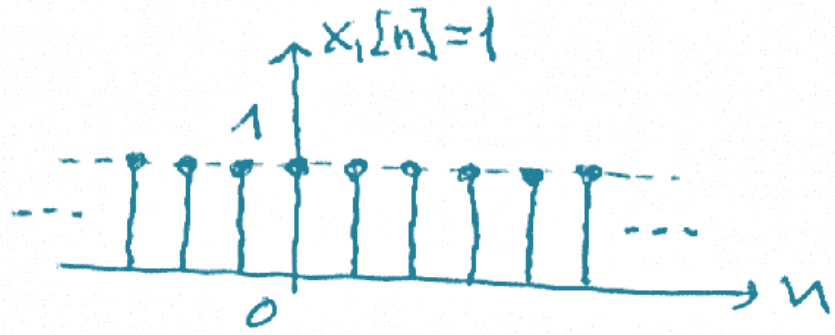


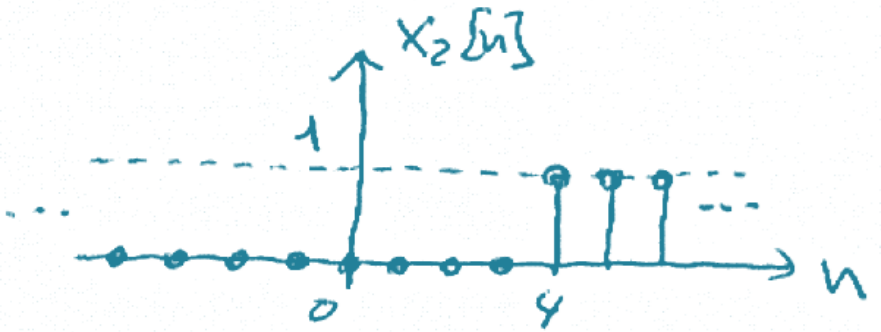



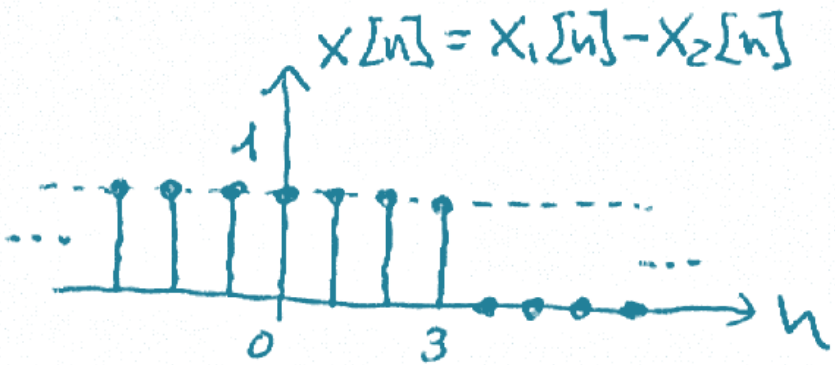
# Problema 1.12

Dado $x[n] = \underbrace{1}_{x1} - \underbrace{\sum_{k=3}^{\infty} \delta[n-1-k]}_{x2} = u[Mn - n_0]$

calcular los valores de M y n0 para que se cumpla la igualdad.



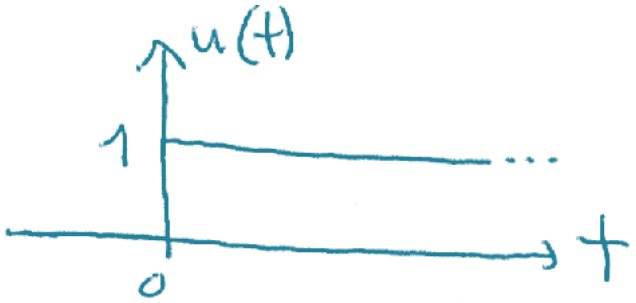

$\rightarrow x[n] = u[-n+3] \Rightarrow \begin{cases} M = -1 \\ n_0 = -3 \end{cases}$

# 3. Señales básicas: Impulso unidad y escalón unidad

## b) Tiempo continuo:

- **Definiciones:**

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , t<0 \\ 1 & , t>0 \end{cases}$$




POR ANALOGÍA CASO DISCRETO

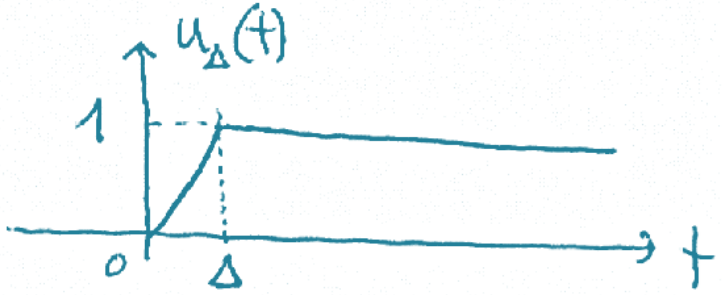
$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} = ? \rightarrow \text{NO DERIVABLE}$$

# 3. Señales básicas: Impulso unidad y escalón unidad

## b) Tiempo continuo:

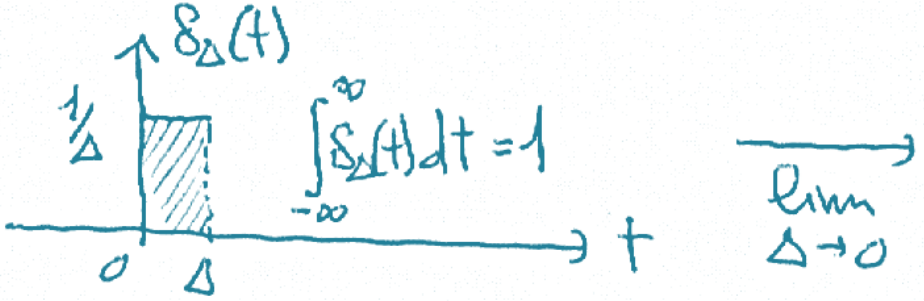
- **Definiciones:**

VERSIÓN DERIVABLE DE $u(t)$:




$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta(t) = \frac{du(t)}{dt} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{du_\Delta(t)}{dt} = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$, siendo:

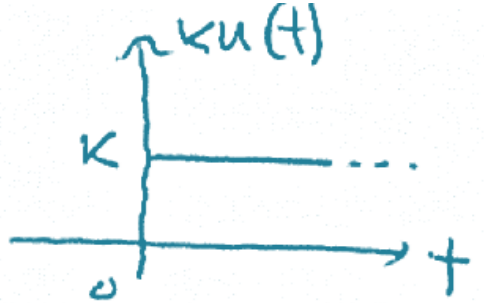


# 3. Señales básicas: Impulso unidad y escalón unidad

## b) Tiempo continuo:

- Relaciones:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \Rightarrow K\delta(t) = \frac{dKu(t)}{dt}$$



# 3. Señales básicas: Impulso unidad y escalón unidad

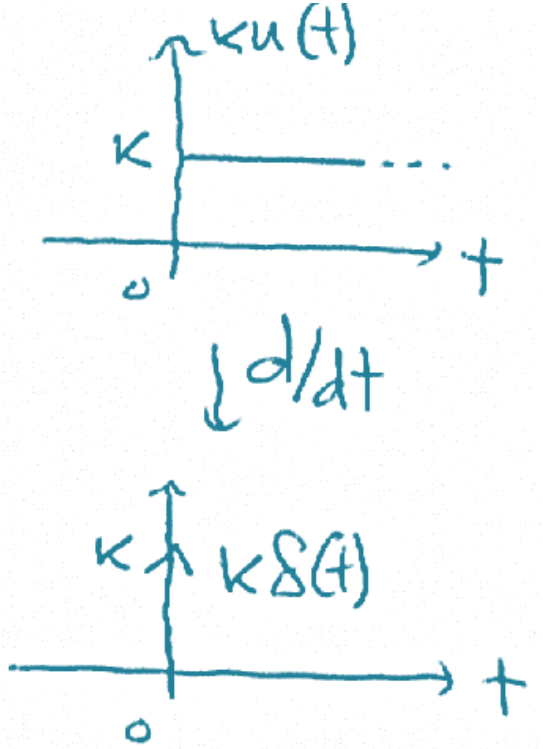
## b) Tiempo continuo:

- **Relaciones:**

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \Rightarrow k\delta(t) = \frac{d\,ku(t)}{dt}$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\sigma)\,d\sigma$$

$$\tau = t - \sigma$$



# 3. Señales básicas: Impulso unidad y escalón unidad

## b) Tiempo continuo:

- Propiedad de selección de $\delta(t)$:

$$x(t)\cdot\delta(t) = x(0)\,\delta(t) \quad , \quad x(t)\cdot\delta(t-t_0) = x(t_0)\cdot\delta(t-t_0)$$

**Nos permite seleccionar determinados valores de nuestra señal**

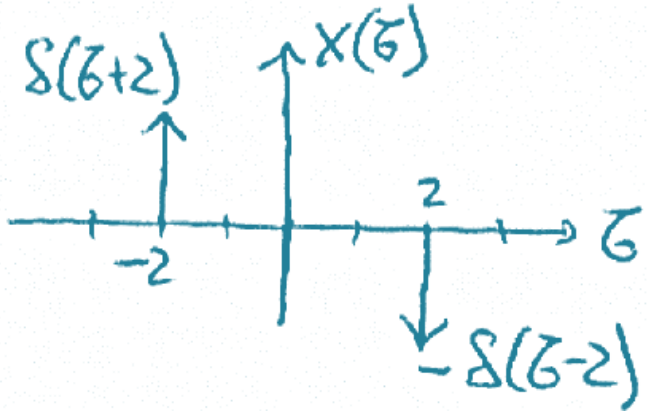
# Problema 1.13

Dado $x(t) = \delta(t+2) - \delta(t-2)$ , $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$ , calcular la $E_\infty$ de la señal y(t).

# Problema 1.13

Dado $x(t) = \delta(t+2) - \delta(t-2)$ , $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$ , calcular la $E_\infty$ de la señal y(t).

- Obtención de y(t) gráficamente:




$$\rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = \begin{cases} 0 , & t<-2 \\ 1 , & -2 \le t < 2 \\ 0 , & t \ge 2 \end{cases}$$

# Problema 1.13

Dado $x(t) = \delta(t+2) - \delta(t-2)$ , $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$ , calcular la $E_\infty$ de la señal y(t).

- Obtención de y(t) analíticamente:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau+2)\,d\tau - \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau-2)\,d\tau =$$

$\uparrow$

$\sigma_1 = \tau + 2$

$\sigma_2 = \tau - 2$

# Problema 1.13

Dado $x(t) = \delta(t+2) - \delta(t-2)$ , $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$ , calcular la $E_\infty$ de la señal y(t).

- Obtención de y(t) analíticamente:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau+2)\,d\tau - \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau-2)\,d\tau =$$

$$\uparrow \quad \sigma_1 = \tau+2 \quad \sigma_2 = \tau-2$$

$$= \int_{-\infty}^{t+2} \delta(\sigma_1)\,d\sigma_1 - \int_{-\infty}^{t-2} \delta(\sigma_2)\,d\sigma_2 = \underline{u(t+2) - u(t-2)}$$

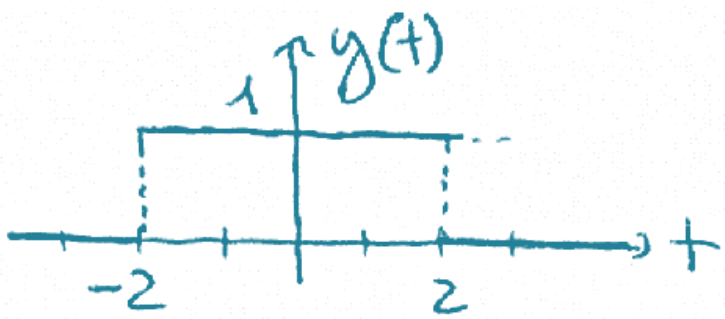
$$\uparrow \quad u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$$

# Problema 1.13

Dado $x(t) = \delta(t+2) - \delta(t-2)$ , $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$ , calcular la $E_\infty$ de la señal y(t).

- Obtención de $E_\infty$:

$$y(t) = u(t+2) - u(t-2)$$




$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-2}^{2} dt = 4$$

# Periodicidad

4

1. Introducción
2. Transformaciones de la variable independiente
3. Señales básicas: Impulso unidad y escalón unidad
4. Periodicidad
5. Simetrías ante la inversión
6. Señales exponenciales y sinusoidales
7. Sistemas

BiDALab-UAM ©

# 4. Periodicidad

a) Señales de tiempo continuo:

$x(t)$ PERIÓDICA $\Leftrightarrow$ $x(t) = x(t+T)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}^+$ (PERIODO)

$\Downarrow$

$x(t) = x(t+mT)$, $m \in \mathbb{Z}^+$ : si $x(t)$ ES PERIÓDICA DE PERIODO $T$, TAMBIÉN LO ES DE PERIODO $2T$, $3T$, ...

# 4. Periodicidad

a) Señales de tiempo continuo:

$x(t)$ PERIÓDICA $\Leftrightarrow$ $x(t) = x(t+T)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}^+$ (PERIODO)

$\Downarrow$

$x(t) = x(t+mT)$, $m \in \mathbb{Z}^+$ : si $x(t)$ ES PERIÓDICA DE PERIODO $T$, TAMBIÉN LO ES DE PERIODO $2T$, $3T$, ...

PERIODO FUNDAMENTAL, $T_0$ : MÍNIMO VALOR POSITIVO PARA EL QUE SE VERIFICA $x(t) = x(t+T_0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$

MENOR VARIABILIDAD $\Rightarrow$ MAYOR $T_0$. EN EL LÍMITE, $x(t) = cte \Rightarrow$

$\Rightarrow T_0 \to \infty$.

# Simetrías ante la inversión

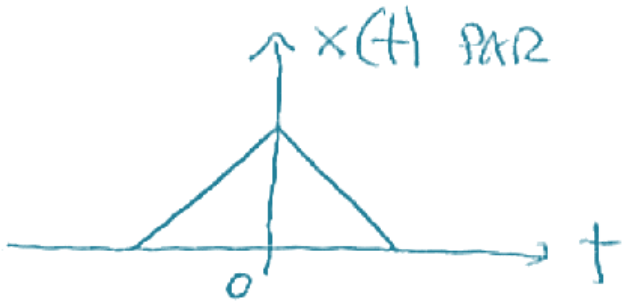
5

1. Introducción
2. Transformaciones de la variable independiente
3. Señales básicas: Impulso unidad y escalón unidad
4. Periodicidad
5. Simetrías ante la inversión
6. Señales exponenciales y sinusoidales
7. Sistemas

BiDALab-UAM ©

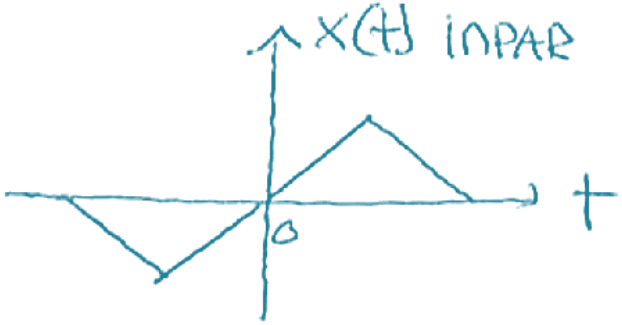
# 5. Simetrías ante la inversión

- x(t) PAR $\Longleftrightarrow$ x(t) = x(–t)




**Simetría respecto del eje t=0**

- x(t) IMPAR $\Longleftrightarrow$ x(t) = –x(–t)




**Simetría respecto del origen**

# 5. Simetrías ante la inversión

Toda señal se puede descomponer en suma de dos señales, una par y otra impar:

DADA $x(t)$, SEA $x_e(t) = \frac{1}{2}\{x(t) + x(-t)\}$, $x_e(t) = x_e(-t) \Rightarrow$ PAR

SEA $x_o(t) = \frac{1}{2}\{x(t) - x(-t)\}$, $x_o(t) = -x_o(-t) \Rightarrow$ IMPAR

$$x_e(t) + x_o(t) = x(t)$$

**Señal par** **Señal impar**

# Problema 1.7.a)

Obtener la señal par de la siguiente señal: $x[n] = u[n] - u[n-4]$

# Problema 1.7.a)

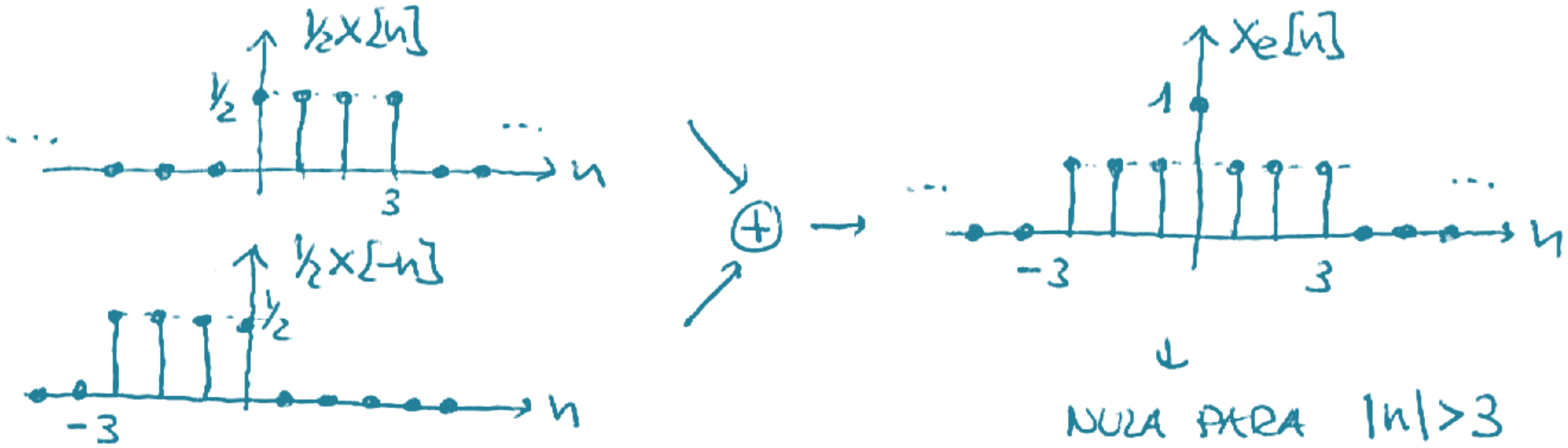
Obtener la señal par de la siguiente señal: $x[n] = u[n] - u[n-4]$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\left\{ x[n] + x[-n] \right\} = \frac{1}{2}\left\{ u[n] - u[n-4] + \overbrace{u[-n] - u[-n-4]}^{x[-n]} \right\}$$

# Problema 1.7.a)

Obtener la señal par de la siguiente señal: $x[n] = u[n] - u[n-4]$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\left\{ x[n] + x[-n] \right\} = \frac{1}{2}\left\{ u[n] - u[n-4] + \overbrace{u[-n] - u[-n-4]}^{x[-n]} \right\}$$




NULA PARA $|n| > 3$

# Problema 1.7.c)

Obtener la señal par de la siguiente señal: $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n-3]$

# Problema 1.7.c)

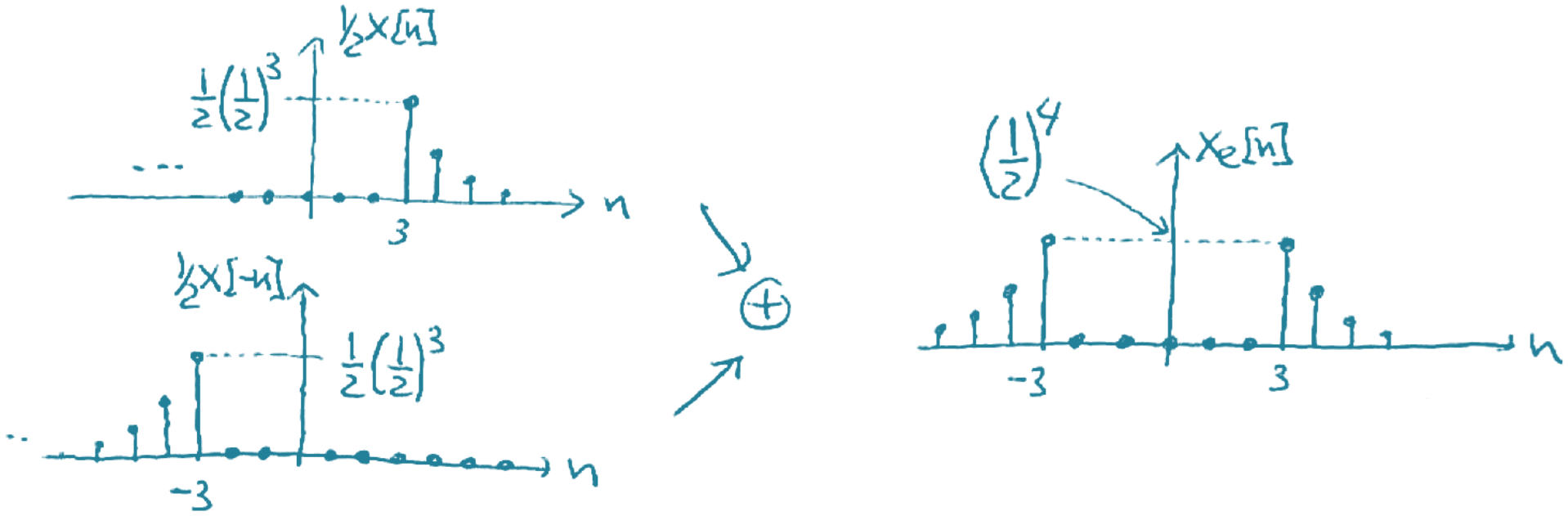
Obtener la señal par de la siguiente señal: $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n-3]$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-3] + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \cdot u[-n-3]}_{x[-n]} \right\}$$

# Problema 1.7.c)

Obtener la señal par de la siguiente señal: $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n-3]$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-3] + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \cdot u[-n-3]}_{x[-n]} \right\}$$



6

# Señales exponenciales y sinusoidales

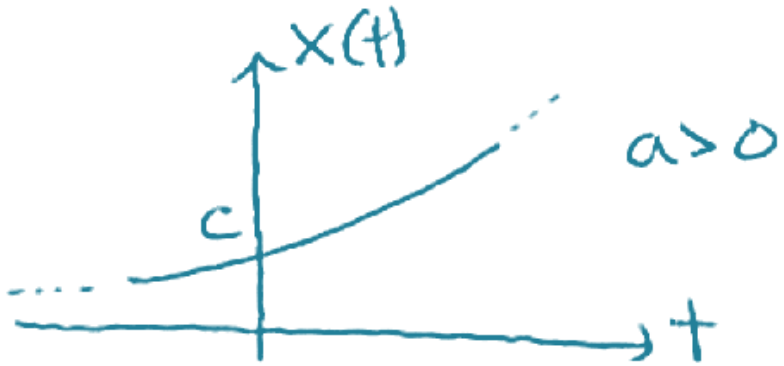
1. Introducción
2. Transformaciones de la variable independiente
3. Señales básicas: Impulso unidad y escalón unidad
4. Periodicidad
5. Simetrías ante la inversión
6. Señales exponenciales y sinusoidales
7. Sistemas

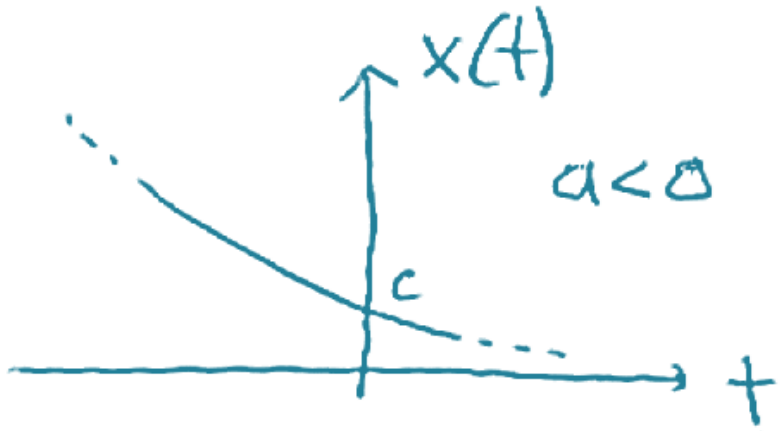
BiDALab-UAM ©

# 6. Señales exponenciales y sinusoidales

a) Señales de tiempo continuo: → $x(t) = Ce^{at}$, $C, a \in \mathbb{C}$

- Exponencial real: → $C, a \in \mathbb{R}$



# 6. Señales exponenciales y sinusoidales

a) Señales de tiempo continuo: → $x(t) = Ce^{at}$, $C, a \in \mathbb{C}$

- Exponencial compleja pura: → $a = j\omega_0$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$

# 6. Señales exponenciales y sinusoidales

a) Señales de tiempo continuo: → $x(t) = Ce^{at}$, $C, a \in \mathbb{C}$

- Exponencial compleja pura: → $a = j\omega_0$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$
  - Periodicidad:

¿ $\exists T \in \mathbb{R} \;/\; x(t) = x(t+T) \;\; \forall t \in \mathbb{R}$ ?

$x(t) = e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)} \Leftrightarrow e^{j\omega_0 T} = 1 \Rightarrow$

Recordatorio

$e^{jw_0 t} \cdot e^{jw_0 T}$

# 6. Señales exponenciales y sinusoidales

a) Señales de tiempo continuo: → $x(t) = Ce^{at}$, $C, a \in \mathbb{C}$

- Exponencial compleja pura: → $a = j\omega_0$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$
  - Periodicidad:

¿ $\exists T \in \mathbb{R} \,/\, x(t) = x(t+T) \;\; \forall t \in \mathbb{R}$ ?

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)} \Leftrightarrow e^{j\omega_0 T} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_0 T = 2k\pi \Rightarrow T = \frac{2k\pi}{\omega_0} \Rightarrow \text{PERIÓDICA}, \; T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|} :$$

$T_0 \rightarrow$ PERIODO FUNDAMENTAL

$\omega_0 \rightarrow$ PULSACIÓN FUNDAMENTAL, $\omega_0 = 2\pi f_0$

$f_0 \rightarrow$ FRECUENCIA FUNDAMENTAL

# 6. Señales exponenciales y sinusoidales

a) Señales de tiempo continuo: → $x(t) = Ce^{at}, \quad C, a \in \mathbb{C}$

- Exponenciales complejas armónicamente relacionadas:
  - Familia o conjunto de exponenciales complejas periódicas que comparten un mismo periodo T0:

$$\phi(t) = e^{j\omega t} \text{ PERIÓDICA } T_0 \Rightarrow e^{j\omega t} = e^{j\omega(t+T_0)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{j\omega T_0} = 1 \Rightarrow \omega T_0 = 2k\pi \Rightarrow \omega = \frac{2k\pi}{T_0} = k\omega_0$$

# 6. Señales exponenciales y sinusoidales

a) Señales de tiempo continuo: → $x(t) = Ce^{at}, \quad C, a \in \mathbb{C}$

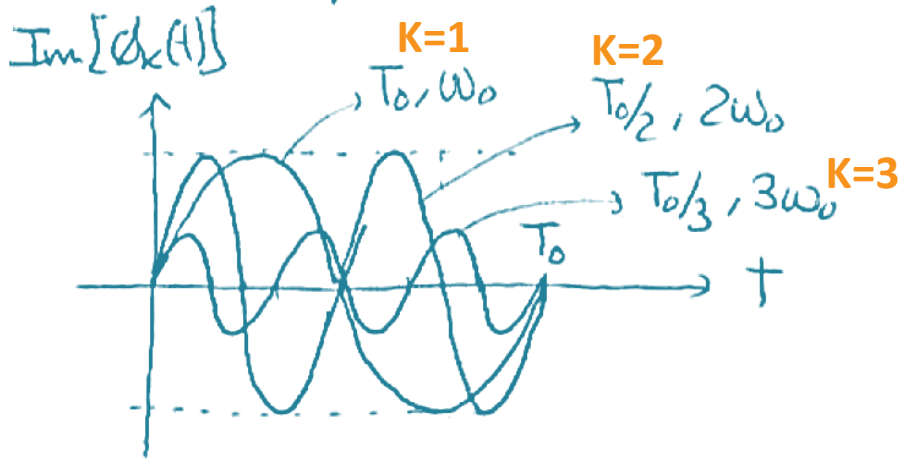
- Exponenciales complejas armónicamente relacionadas:
  - Familia o conjunto de exponenciales complejas periódicas que comparten un mismo periodo T0:

$\phi(t) = e^{j\omega t}$ PERIÓDICA $T_0 \Rightarrow e^{j\omega t} = e^{j\omega(t+T_0)} \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{j\omega T_0} = 1 \Rightarrow \omega T_0 = 2k\pi \Rightarrow \omega = \frac{2k\pi}{T_0} = k\omega_0$

En conclusión:

$$\{\phi_k(t) = e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t} = e^{jk\omega_0 t}, \underbrace{k \in \mathbb{Z}}_{\Downarrow \infty \text{ FUNCIONES}}\}$$




**Dependiendo del valor de K, las señales son distintas, pero tienen el mismo periodo fundamental (T0)**

# Problema 1.10

Obtener el periodo fundamental (T0) de la señal: $x(t) = 2\cos(10t+1) - \text{sen}(4t-1)$ , ¿$T_0$?

# Problema 1.10

Obtener el periodo fundamental (T0) de la señal: $x(t) = 2\cos(10t+1) - \text{sen}(4t-1)$ , ¿$T_0$?

$$\Rightarrow x(t) = x(t+T_0),\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} 2\cos(10t+1) = 2\cos(10(t+T_0)+1) \Rightarrow \\ \text{sen}(4t-1) = \text{sen}(4(t+T_0)-1) \Rightarrow \end{cases}$$

# Problema 1.10

Obtener el periodo fundamental (T0) de la señal: $x(t) = 2\cos(10t+1) - \text{sen}(4t-1)$ , ¿$T_0$?

$$\Rightarrow x(t) = x(t+T_0),\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} 2\cos(10t+1) = 2\cos(10(t+T_0)+1) \Rightarrow \\ \text{sen}(4t-1) = \text{sen}(4(t+T_0)-1) \Rightarrow \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} \Rightarrow 10t + 10T_0 = 10t + 2k_1\pi \Rightarrow T_0 = k_1 \cdot 2\pi/10 \\ \Rightarrow 4(t+T_0) = 4t + 2k_2\pi \Rightarrow T_0 = k_2 \cdot 2\pi/4 \end{cases}\right\} \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

# Problema 1.10

Obtener el periodo fundamental (T0) de la señal: $x(t) = 2\cos(10t+1) - \operatorname{sen}(4t-1)$ , ¿$T_0$?

$$\Rightarrow x(t) = x(t+T_0)\ ,\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} 2\cos(10t+1) = 2\cos(10(t+T_0)+1) \Rightarrow \\ \operatorname{sen}(4t-1) = \operatorname{sen}(4(t+T_0)-1) \Rightarrow \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 10t + 10T_0 = 10t + 2k_1\pi \Rightarrow T_0 = k_1 \cdot 2\pi/10 \\ \Rightarrow 4(t+T_0) = 4t + 2k_2\pi \Rightarrow T_0 = k_2 \cdot 2\pi/4 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

POR LO TANTO, $\exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \ /\ x(t) = x(t+T_0)$ ,

$$T_0 = k_1 \cdot 2\pi/10 = k_2 \cdot 2\pi/4 = \underline{\underline{\pi}}$$

OBSERVACIÓN: si $k_1$ ó $k_2 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x(t)$ NO PERIÓDICA...

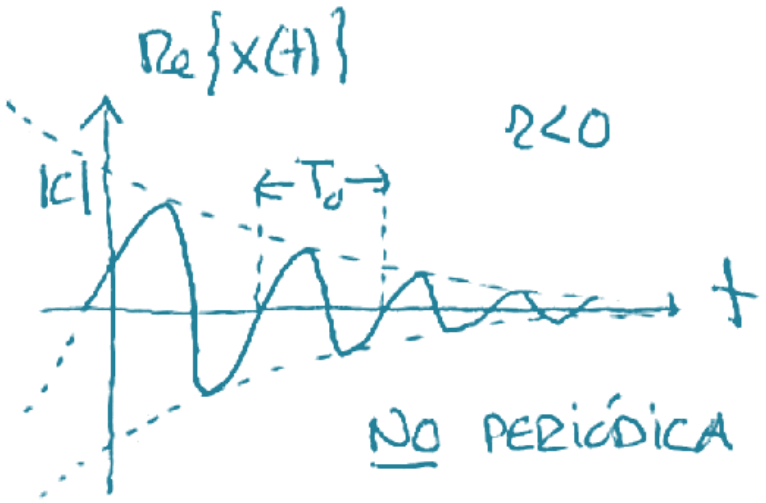
# 6. Señales exponenciales y sinusoidales

a) Señales de tiempo continuo: → $x(t) = Ce^{at}, \quad C, a \in \mathbb{C}$

- Caso general:

$$x(t) = Ce^{at}, \quad \begin{cases} C = |C|e^{j\theta} \\ a = \sigma + j\omega_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = |C|e^{j\theta} \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega_0 t} =$$

$$= \underbrace{|C|e^{\sigma t}}_{\text{EXPONENCIAL REAL}} \cdot \underbrace{e^{j(\omega_0 t + \theta)}}_{\text{EXPONENCIAL COMPLEJA PURA}}$$



# 6. Señales exponenciales y sinusoidales

a) Señales de tiempo discreto: → $x[n] = C\alpha^n = Ce^{\beta n}$ $(\alpha = e^{\beta})$

# 6. Señales exponenciales y sinusoidales

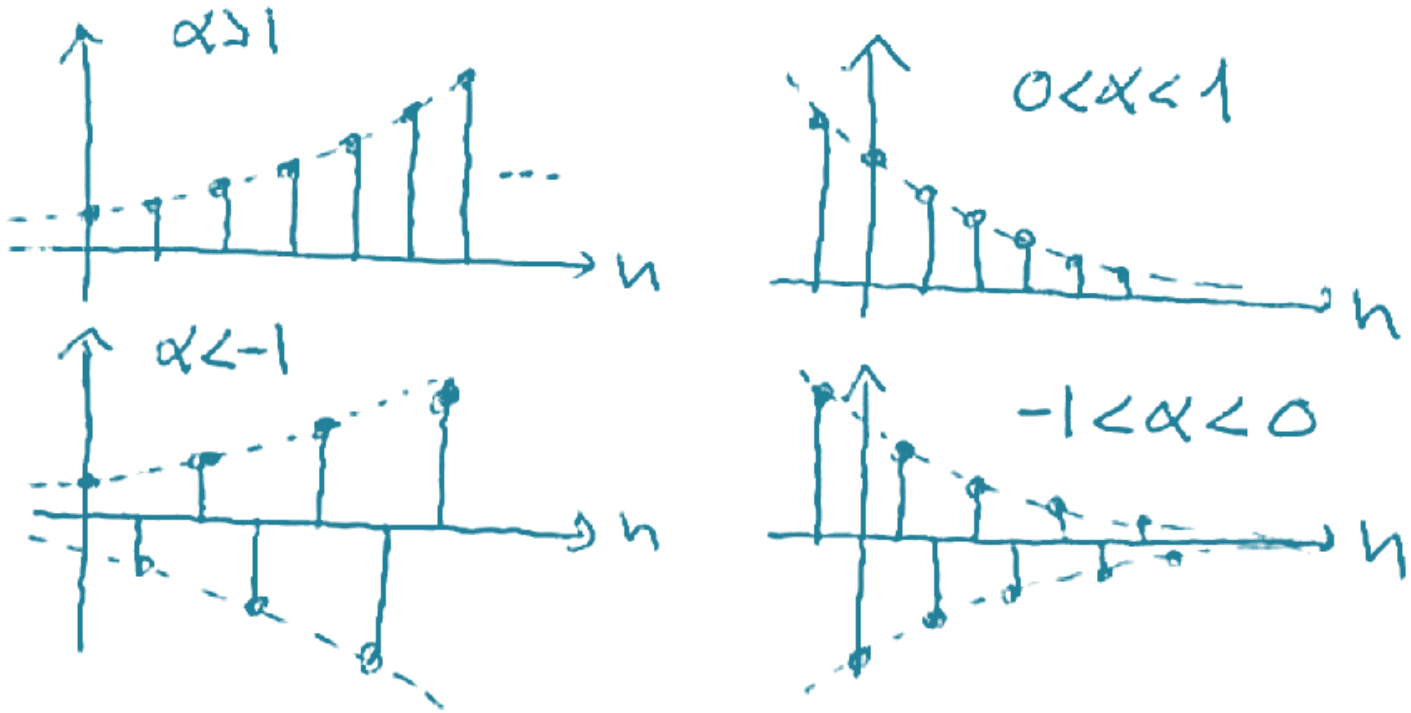
a) Señales de tiempo discreto: → $x[n] = C\alpha^n = Ce^{\beta n}$ $(\alpha = e^{\beta})$

- Exponencial real: → $C, \alpha$ REALES

# 6. Señales exponenciales y sinusoidales

a) Señales de tiempo discreto: → $x[n] = C\alpha^n = Ce^{\beta n}$ $(\alpha = e^{\beta})$

- Exponencial real: → $C, \alpha$ REALES



# 6. Señales exponenciales y sinusoidales

a) Señales de tiempo discreto: → $x[n] = C\alpha^n = Ce^{\beta n}$ $(\alpha = e^{\beta})$

- Exponencial compleja pura: → $\beta = j\omega_0$ , $\omega_0 \in \mathbb{R}$

# 6. Señales exponenciales y sinusoidales

a) Señales de tiempo discreto: → $x[n] = C\cdot\alpha^n = Ce^{\beta n}$ $(\alpha = e^{\beta})$

- Exponencial compleja pura: → $\beta = j\omega_0$ , $\omega_0 \in \mathbb{R}$
  - Interpretación del parámetro w0 (pulsación fundamental):

DADA $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ , LA SEÑAL $x'[n] = e^{j\underbrace{(\omega_0 + 2\pi)}_{\omega_0'} n} =$

$= e^{j\omega_0 n} \cdot \underbrace{e^{j2\pi n}}_{1} = x[n]$ → TODAS LAS SEÑALES CON PULSACIÓN $\omega_0 \pm 2k\pi$ SON IDÉNTICAS ⇒

⇒ TODAS LA SEÑALES DISTINTAS ESTÁN EN $\omega_0 \in [0, 2\pi)$ ó $(-\pi, \pi]$ ó CUALQUIER INTERVALO DE ANCHURA $2\pi$.

# 6. Señales exponenciales y sinusoidales

a) Señales de tiempo discreto: → $x[n] = C\alpha^n = Ce^{\beta n}$ $(\alpha = e^{\beta})$

- Exponencial compleja pura: → $\beta = j\omega_0$ , $\omega_0 \in \mathbb{R}$
  - El ritmo de oscilación de x[n] depende de w0:

$e^{j\pi n} = (-1)^n$ → ALTAS FRECUENCIAS : $\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi \ldots$

- AUMENTA PARA $0 < \omega_0 < \pi$
- DISMINUYE PARA $\pi < \omega_0 < 2\pi$

$\Rightarrow$ BAJAS FRECUENCIAS : $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \ldots$ ← $e^{j2\pi n} = (1)^n$

POR ANALOGÍA CON EL CASO CONTINUO, SE SUELE ESCOGER $\omega_0 \in (-\pi, \pi]$

# 6. Señales exponenciales y sinusoidales

a) Señales de tiempo discreto: → $x[n] = C\alpha^n = Ce^{\beta n}$ $(\alpha = e^{\beta})$

- Exponencial compleja pura: → $\beta = j\omega_0$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$
  - Periodicidad:

¿ $\exists N \in \mathbb{Z}^+ / x[n] = x[n+N]$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ ?

$x[n] = e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0(n+N)} \Leftrightarrow e^{j\omega_0 N} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \omega_0 N = 2k\pi \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N} \in \mathbb{Q}$ ($k, N \in \mathbb{Z}$)

PERIÓDICA SÓLO SI $\omega_0/2\pi$ ES RACIONAL

# 6. Señales exponenciales y sinusoidales

a) Señales de tiempo discreto: → $x[n] = C\alpha^n = Ce^{\beta n}$ $(\alpha = e^{\beta})$

- Exponencial compleja pura: → $\beta = j\omega_0$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$
  - Periodo fundamental y pulsación fundamental:

PERIÓDICA $\Rightarrow$ $\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{K}{N} = \cdots = \frac{K_0}{N_0}$ → NÚMEROS VALORES ENTEROS QUE VERIFICAN LA CONDICIÓN

$N_0$ → PERIODO FUNDAMENTAL

PULSACIÓN FUNDAMENTAL: $\omega_{0f} = \frac{2\pi}{N_0} \neq \omega_0$ (EN GENERAL)

# 6. Señales exponenciales y sinusoidales

a) Señales de tiempo discreto: → $x[n] = C\alpha^n = Ce^{\beta n}$ $(\alpha = e^{\beta})$

- Exponencial compleja pura: → $\beta = j\omega_0$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$
  - Periodo fundamental y pulsación fundamental:

PERIÓDICA $\Rightarrow$ $\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{K}{N} = \cdots = \frac{K_0}{N_0}$ → NÚMEROS VALORES ENTEROS QUE VERIFICAN LA CONDICIÓN

$N_0$ → PERIODO FUNDAMENTAL

PULSACIÓN FUNDAMENTAL: $\omega_f = \frac{2\pi}{N_0} \neq \omega_0$ (EN GENERAL)

Ej: $e^{j\pi/5}$, $e^{j2\pi/5}$, $e^{j3\pi/5}$, $e^{j4\pi/5}$

$N_0 = 10$ $\quad$ $N_0' = 5$

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{K_0}{N_0}$$

# Problema 1.11

Obtener el periodo fundamental (N0) de la señal:

$$x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi}{7}n} - e^{j\frac{2\pi}{5}n}, \quad ¿N_0?$$

# Problema 1.11

Obtener el periodo fundamental (N0) de la señal:

$$x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi}{7}n} - e^{j\frac{2\pi}{5}n}, \quad ¿N_0?$$

$$x_3[n] = e^{j\omega_{03}n}, \quad \frac{\omega_{03}}{2\pi} = \frac{1}{5} \Rightarrow N_{03} = 5$$

$$x_2[n] = e^{j\omega_{02}n}, \quad \frac{\omega_{02}}{2\pi} = \frac{2}{7} \Rightarrow N_{02} = 7$$

$x_1[n] = cte \Rightarrow$ NO AFECTA A LA PERIODICIDAD

# Problema 1.11

Obtener el periodo fundamental (N0) de la señal:

$$x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi}{7}n} - e^{j\frac{2\pi}{5}n} \quad , \quad ¿N_0?$$

$$x_3[n] = e^{j\omega_{03}n}, \quad \frac{\omega_{03}}{2\pi} = \frac{1}{5} \Rightarrow N_{03} = 5$$

$$x_2[n] = e^{j\omega_{02}n}, \quad \frac{\omega_{02}}{2\pi} = \frac{2}{7} \Rightarrow N_{02} = 7$$

$x_1[n] = cte \Rightarrow$ NO AFECTA A LA PERIODICIDAD

$$N_0 = k_2 \cdot N_{02} = k_3 \cdot N_{03} \quad , \quad k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$$

Mínimo común múltiplo de 5 y 7

$$\Rightarrow \frac{k_2}{k_3} = \frac{N_{03}}{N_{02}} = \frac{5}{7} \Rightarrow \underline{N_0 = 35}$$

# Problema 1.11

Obtener el periodo fundamental (N0) de la señal:

$$x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi}{7}n} - e^{j\frac{2\pi}{5}n}, \quad ¿N_0?$$

$$x_3[n] = e^{j\omega_{03}n}, \quad \frac{\omega_{03}}{2\pi} = \frac{1}{5} \Rightarrow N_{03} = 5$$

$$x_2[n] = e^{j\omega_{02}n}, \quad \frac{\omega_{02}}{2\pi} = \frac{2}{7} \Rightarrow N_{02} = 7$$

$x_1[n] = cte \Rightarrow$ NO AFECTA A LA PERIODICIDAD

OBSERVACIÓN: DADO QUE $N_{02}, N_{03} \in \mathbb{Z}$ SIEMPRE $\Rightarrow \frac{k_2}{k_3} \in \mathbb{Q}$ SIEMPRE $\Rightarrow$

$\Rightarrow x[n]$ SIEMPRE PERIÓDICA.

# 6. Señales exponenciales y sinusoidales

a) Señales de tiempo discreto: → $x[n] = C\alpha^n = Ce^{\beta n}$ $(\alpha = e^{\beta})$

- Exponenciales complejas armónicamente relacionadas:
  - Familia o conjunto de exponenciales complejas periódicas que comparten un mismo periodo N0:

$$\phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} \text{ PERIÓDICA } N_0 \Rightarrow e^{jk\omega_0 n} = e^{jk\omega_0(n+N_0)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{jk\omega_0 N_0} = 1 \Rightarrow k\omega_0 N_0 = 2k\pi \Rightarrow \omega_0 = \frac{2k\pi}{N_0} = k\omega_0$$

# 6. Señales exponenciales y sinusoidales

a) Señales de tiempo discreto: → $x[n] = C\alpha^n = Ce^{\beta n}$ $(\alpha = e^{\beta})$

- Exponenciales complejas armónicamente relacionadas:
  - Familia o conjunto de exponenciales complejas periódicas que comparten un mismo periodo N0:

En conclusión:

$\{\phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N_0}n},\ k \in \mathbb{Z}\}$ → ¿∞ funciones?

$\phi_{k+N_0}[n] = e^{j(k+N_0)\frac{2\pi}{N_0}n} = e^{jk\frac{2\pi}{N_0}} \cdot \underbrace{e^{j2\pi n}}_{1} = \phi_k[n] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **$N_0$ funciones distintas**

**Ejemplo: N0 = 4** → $e^{j\frac{\pi}{2}n}$, $e^{j\pi n}$, $e^{j\frac{3\pi}{2}n}$, $e^{j2\pi n}$, $e^{j\frac{5\pi}{2}n}$, $e^{j\frac{\pi}{2}n}$,

K=1 K=2 K=3 K=4

# Sistemas

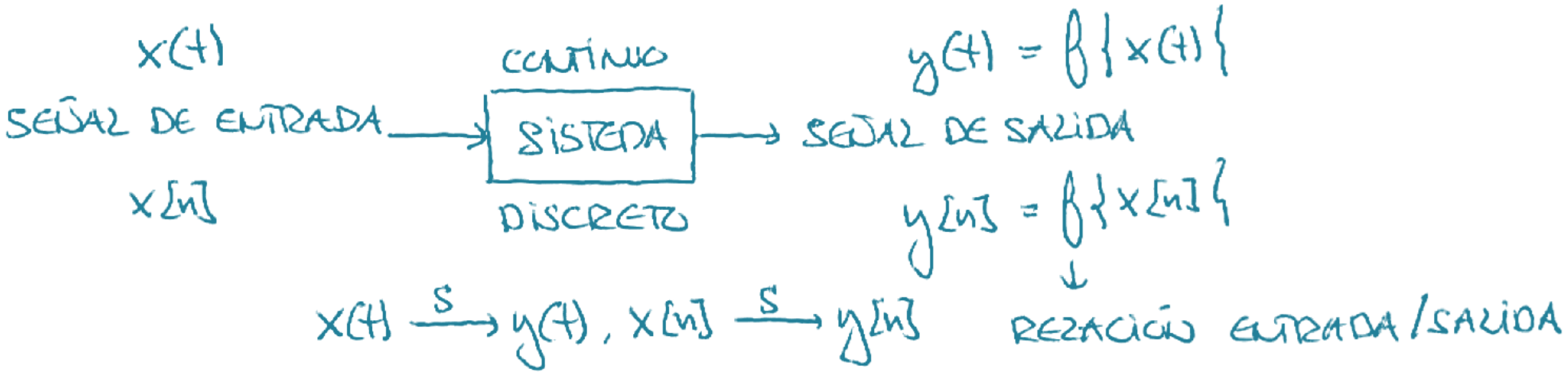
7

1. Introducción
2. Transformaciones de la variable independiente
3. Señales básicas: Impulso unidad y escalón unidad
4. Periodicidad
5. Simetrías ante la inversión
6. Señales exponenciales y sinusoidales
7. Sistemas

BiDALab-UAM ©

# 7. Sistemas

Definición y notación:



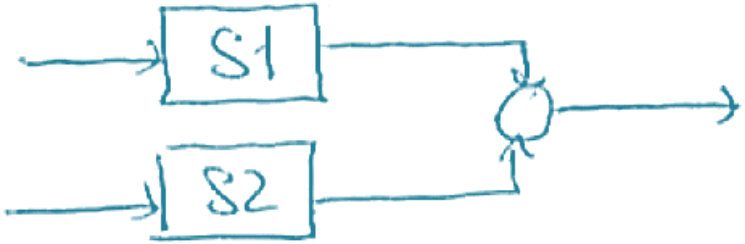
# 7. Sistemas

Interconexión:

- Conexión en cascada:

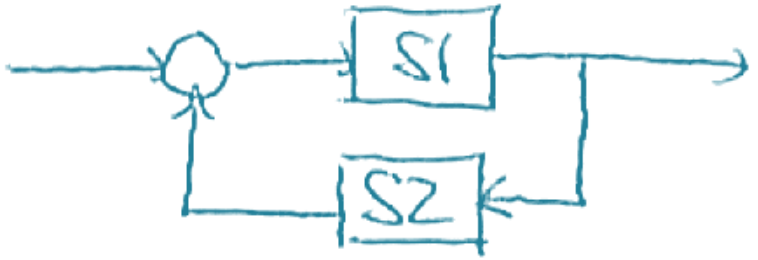
**Por ejemplo, sistemas de comunicaciones como telefonía**

- Conexión en paralelo:



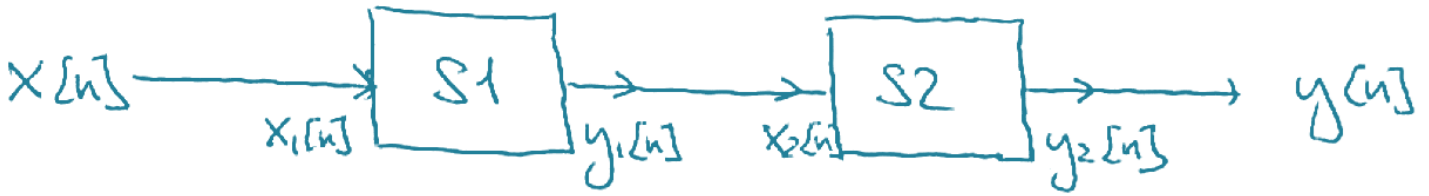

**Por ejemplo, sistemas de inteligencia artificial basados en la fusión de características**

- Conexión con realimentación:




**Por ejemplo, sistemas de control como el climatizador del coche**

# Problema 1.15



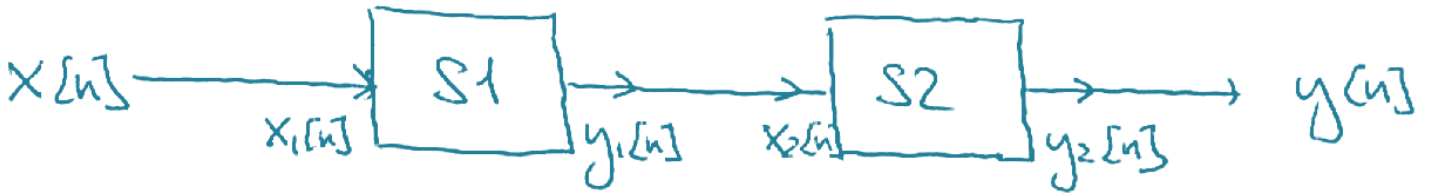

Dado el siguiente sistema:

a) Calcular la señal a la salida y[n]

$$S_1: \quad y_1[n] = 2x_1[n] + 4x_1[n-1]$$

$$S_2: \quad y_2[n] = x_2[n-2] + \frac{1}{2}x_2[n-3]$$

# Problema 1.15




Dado el siguiente sistema:

a) Calcular la señal a la salida y[n]

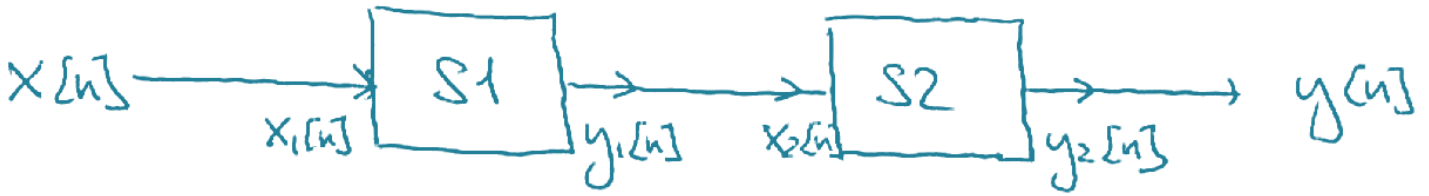
$$S_1: \quad y_1[n] = 2x_1[n] + 4x_1[n-1]$$

$$S_2: \quad y_2[n] = x_2[n-2] + \frac{1}{2}x_2[n-3]$$

$$x_1[n] = x[n] \Rightarrow y_1[n] = 2x[n] + 4x[n-1]$$

$$x_2[n] = y_1[n] \Rightarrow y_2[n] = y[n] = y_1[n-2] + \frac{1}{2}y_1[n-3] \Rightarrow$$

# Problema 1.15




Dado el siguiente sistema:

a) Calcular la señal a la salida y[n]

$$S_1: \quad y_1[n] = 2x_1[n] + 4x_1[n-1]$$

$$S_2: \quad y_2[n] = x_2[n-2] + \frac{1}{2}x_2[n-3]$$

$$x_1[n] = x[n] \Rightarrow y_1[n] = 2x[n] + 4x[n-1]$$

$$x_2[n] = y_1[n] \Rightarrow y_2[n] = y[n] = y_1[n-2] + \frac{1}{2}y_1[n-3] \Rightarrow$$

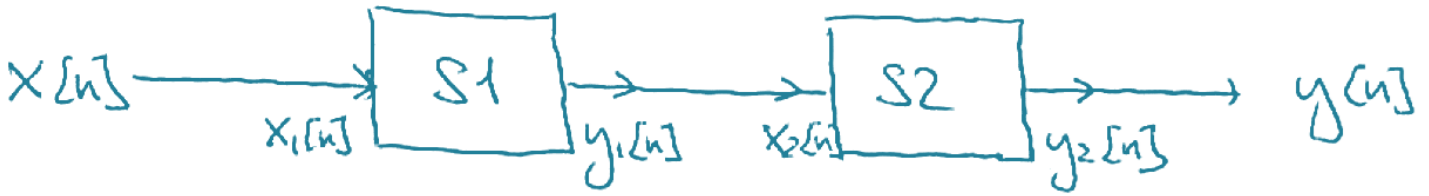
$$\Rightarrow y[n] = \underbrace{2x[n-2] + 4x[n-3]}_{y_1[n-2]} + \underbrace{x[n-3] + 2x[n-4]}_{\frac{1}{2}y_1[n-3]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y[n] = 2x[n-2] + 5x[n-3] + 2x[n-4]$$

# Problema 1.15

Dado el siguiente sistema:

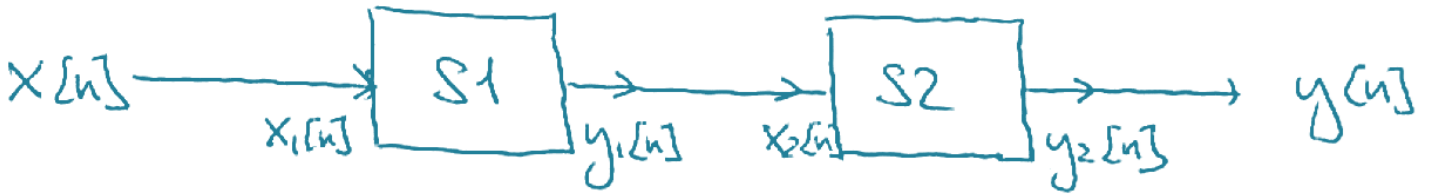
b) Si intercambio S1 por S2?




$$S_1: \quad y_1[n] = 2x_1[n] + 4x_1[n-1]$$

$$S_2: \quad y_2[n] = x_2[n-2] + \frac{1}{2}x_2[n-3]$$

# Problema 1.15




Dado el siguiente sistema:

b) Si intercambio S1 por S2?

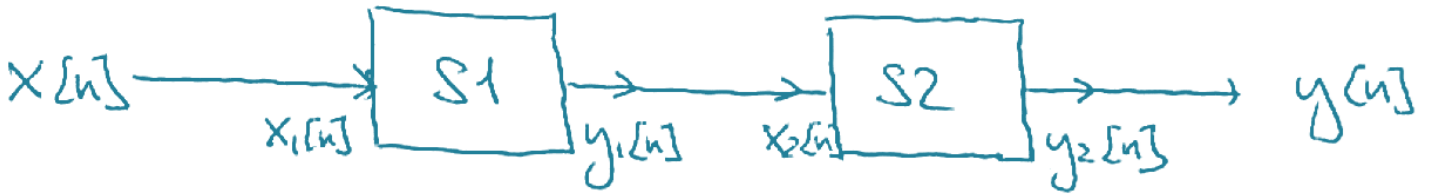
$$S_1: \quad y_1[n] = 2x_1[n] + 4x_1[n-1]$$

$$S_2: \quad y_2[n] = x_2[n-2] + \frac{1}{2}x_2[n-3]$$

$$x_2[n] = x[n] \Rightarrow y_2[n] = x[n-2] + \frac{1}{2}x[n-3]$$

$$x_1[n] = y_2[n] \Rightarrow y_1[n] = y[n] = 2y_2[n] + 4y_2[n-1] \Rightarrow$$

# Problema 1.15




Dado el siguiente sistema:

b) Si intercambio S1 por S2?

$$S_1: \quad y_1[n] = 2x_1[n] + 4x_1[n-1]$$

$$S_2: \quad y_2[n] = x_2[n-2] + \frac{1}{2}x_2[n-3]$$

$$x_2[n] = x[n] \Rightarrow y_2[n] = x[n-2] + \frac{1}{2}x[n-3]$$

$$x_1[n] = y_2[n] \Rightarrow y_1[n] = y[n] = 2y_2[n] + 4y_2[n-1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y[n] = 2x[n-2] + 5x[n-3] + 2x[n-4]$$

⇓

EL ORDEN EN QUE SE INTERCONECTAN ESTOS SISTEMAS NO ALTERA EL RESULTADO

# 7. Sistemas

Propiedades:

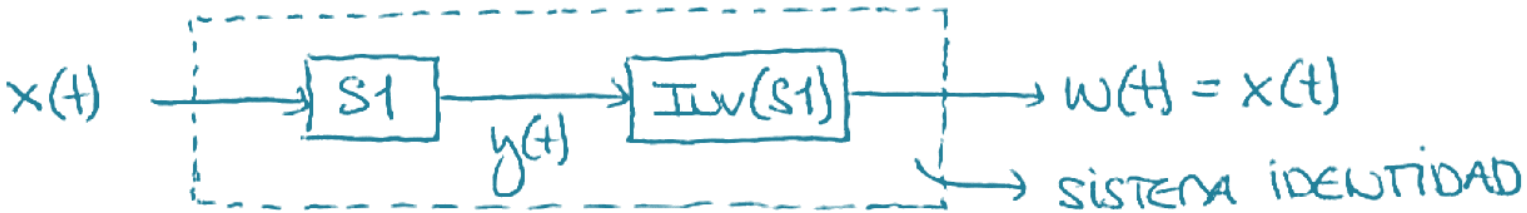
- Memoria: la salida en un “instante” dado depende de la entrada en un “instante” distinto. Es decir, tiene un mecanismo de “almacenaje” o memoria.

# 7. Sistemas

Propiedades:

- Memoria: la salida en un "instante" dado depende de la entrada en un "instante" distinto. Es decir, tiene un mecanismo de "almacenaje" o memoria.

- Invertible: entradas distintas dan lugar siempre a salidas distintas.

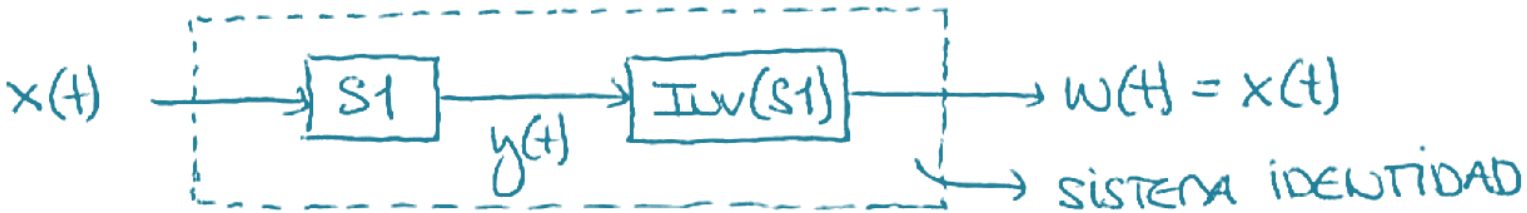


# 7. Sistemas

Propiedades:

- Memoria: la salida en un "instante" dado depende de la entrada en un "instante" distinto. Es decir, tiene un mecanismo de "almacenaje" o memoria.

- Invertible: entradas distintas dan lugar siempre a salidas distintas.




- Causal: la salida en un "instante" dado depende de la entrada en ese mismo "instante" o en "instantes" anteriores. Por lo tanto, un sistema sin memoria será un sistema causal.

# 7. Sistemas

Propiedades:

- Estable: si la entrada está acotada, la salida también:

$$|x(t)| \leq B,\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow |y(t)| \leq B',\ \forall t \in \mathbb{R}$$

# 7. Sistemas

Propiedades:

- Invariante: un desplazamiento de la entrada da lugar al mismo desplazamiento de la salida.

DADO $x(t) \rightarrow [S] \rightarrow y(t)$ DEFINIDO POR $y(t) = \{\{x(t)\}\}$.

a) DADA $\underbrace{x'(t) = x(t-t_0)}_{\text{ENTRADA DESPLAZADA}}$, OBTENER $\underbrace{y'(t) = \{\{x'(t)\}\}}_{\text{RESPUESTA A UNA ENTRADA DESPLAZADA}}$

b) OBTENER LA EXPRESIÓN DE $y(t-t_0)$:

$\underbrace{y(t-t_0)}_{\text{SALIDA DESPLAZADA}} = \{\{x(t-t_0)\}\}$ → CAMBIAR '$t$' POR '$t-t_0$'

c) ¿$y'(t) = y(t-t_0)$?
- SI ⇒ INVARIANTE
- NO ⇒ NO INVARIANTE

# 7. Sistemas

Propiedades:

- Lineal: se tiene que cumplir que sea aditivo y proporcional (homogéneo):

a) ADITIVO:

$$x_1[n] \xrightarrow{S} y_1[n]$$

$$x_2[n] \xrightarrow{S} y_2[n]$$

$$x'[n] = x_1[n] + x_2[n] \xrightarrow{S} y'[n] = f\{x'[n]\} = y_1[n] + y_2[n]$$

# 7. Sistemas

Propiedades:

- Lineal: se tiene que cumplir que sea aditivo y proporcional (homogéneo):

a) ADITIVO:

$$x_1[n] \xrightarrow{S} y_1[n]$$
$$x_2[n] \xrightarrow{S} y_2[n]$$

$$x'[n] = x_1[n] + x_2[n] \xrightarrow{S} y'[n] = \mathcal{S}\{x'[n]\} = y_1[n] + y_2[n]$$

b) HOMOGÉNEO:

$$x[n] \xrightarrow{S} y[n]$$

$$x'[n] = \alpha x[n] \xrightarrow{S} y'[n] = \mathcal{S}\{x'[n]\} = \alpha y[n]$$

# Problema 1.16

Dado el siguiente sistema: $y[n] = x[n] \cdot x[n-2]$

a) ¿Tiene memoria?

# Problema 1.16

Dado el siguiente sistema: $y[n] = x[n] \cdot x[n-2]$

a) ¿Tiene memoria?

- Si, la salida y[n] depende de la entrada en instantes de tiempo distintos, x[n-2].

# Problema 1.16

Dado el siguiente sistema: $y[n] = x[n] \cdot x[n-2]$

b) Dada la siguiente señal de entrada

$$x[n] = A \cdot \delta[n]$$

Calcular la señal a la salida y[n].

# Problema 1.16

Dado el siguiente sistema: $y[n] = x[n] \cdot x[n-2]$

b) Dada la siguiente señal de entrada

$$x[n] = A \cdot \delta[n]$$

Calcular la señal a la salida y[n].

$$y[n] = A\delta[n] \cdot A\delta[n-2] = A^2 \cdot \underbrace{\delta[n] \cdot \delta[n-2]}_{=0, \forall n \in \mathbb{Z}} = 0$$

# Problema 1.16

Dado el siguiente sistema: $y[n] = x[n] \cdot x[n-2]$

c) ¿Es invertible?

# Problema 1.16

Dado el siguiente sistema: $y[n] = x[n] \cdot x[n-2]$

c) ¿Es invertible?

- No, hay infinitas entradas

$$x[n] = A \cdot \delta[n]$$

que dan lugar a la misma señal de salida (y[n] = 0).

# Problema 1.30

Dado el siguiente sistema:

$$y[n] = \begin{cases} x[n-1], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$$

a) ¿Es invertible? En caso afirmativo, ¿sistema inverso?

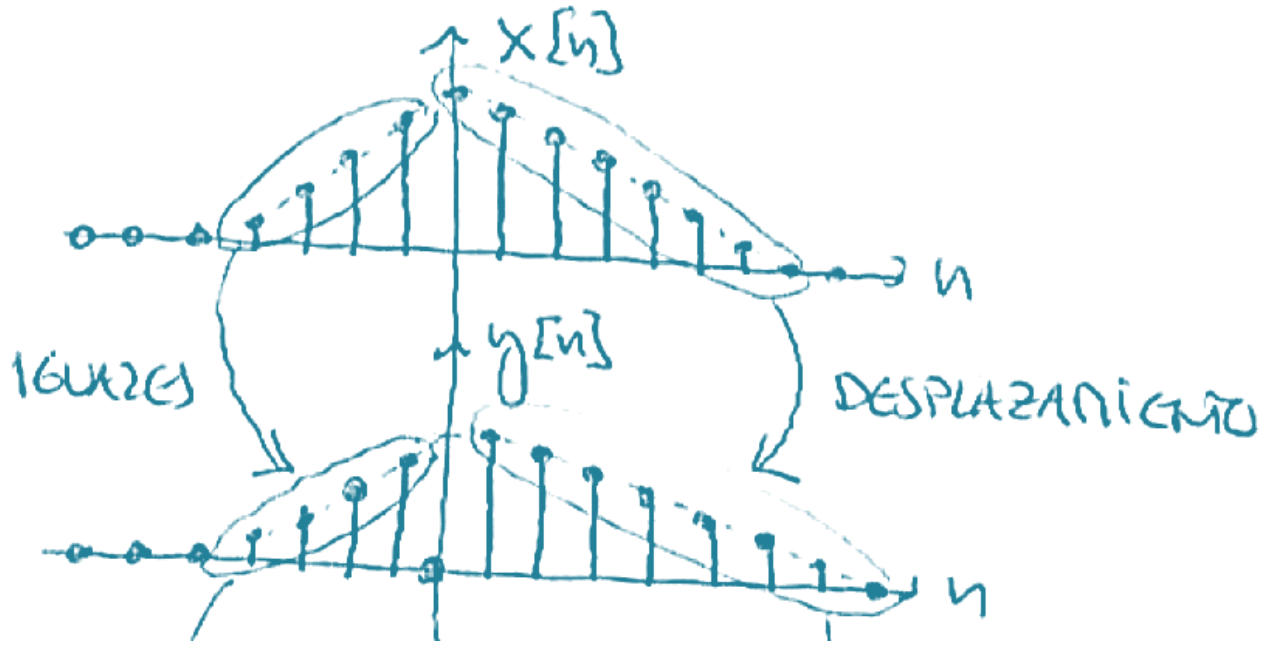
# Problema 1.30

Dado el siguiente sistema:

$$y[n] = \begin{cases} x[n-1], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$$

a) ¿Es invertible? En caso afirmativo, ¿sistema inverso?

Ej:



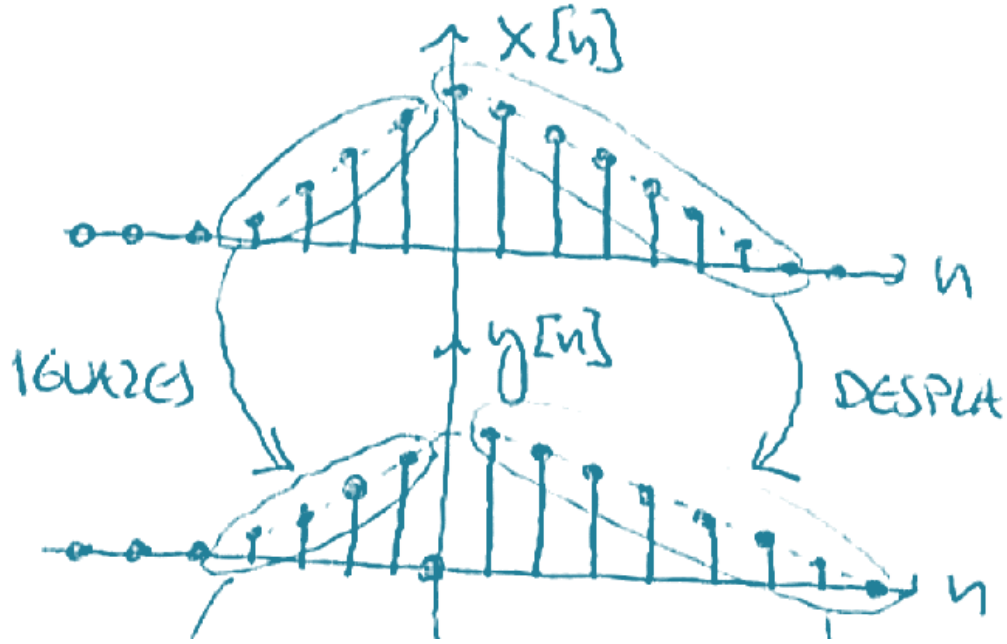
# Problema 1.30

Dado el siguiente sistema:

$$y[n] = \begin{cases} x[n-1], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$$

a) ¿Es invertible? En caso afirmativo, ¿sistema inverso?

Ej:




IGUALES

DESPLAZAMIENTO

OBSERVACIÓN: TODOS LOS VALORES DE LA ENTRADA ESTÁN EN LA SALIDA, SEA CUAL SEA LA ENTRADA ⇒ ENTRADAS DISTINTAS DAN SIEMPRE LUGAR A SALIDAS DISTINTAS ⇒ **INVERTIBLE**

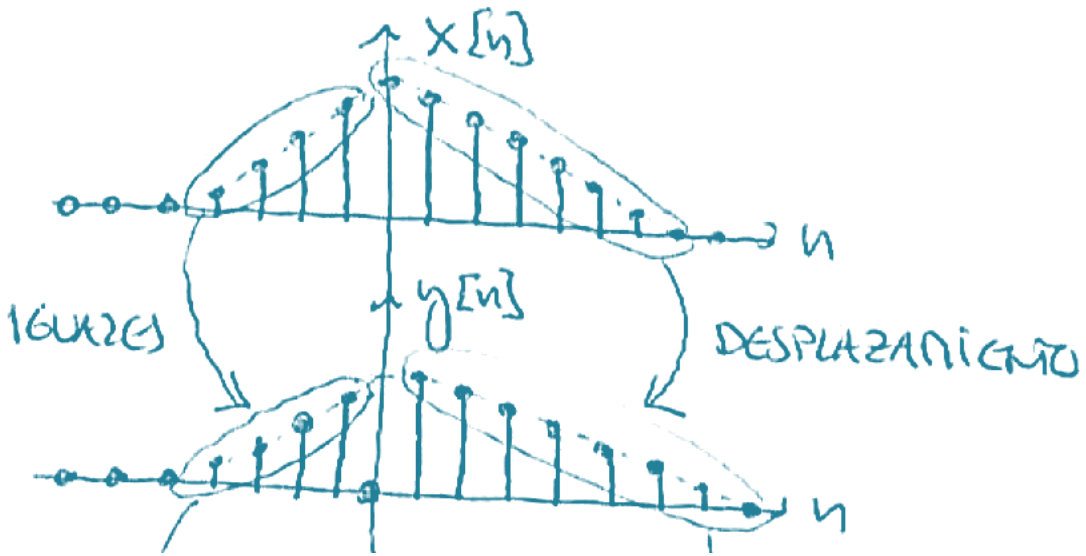
# Problema 1.30

Dado el siguiente sistema:

$$y[n] = \begin{cases} x[n-1], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$$

a) ¿Es invertible? En caso afirmativo, ¿sistema inverso?

Ej:




**Sistema Inverso**

# Problema 1.30

Dado el siguiente sistema:

$$y[n] = \begin{cases} x[n-1], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$$

a) ¿Es invertible? En caso afirmativo, ¿sistema inverso?

$$w[n] = \begin{cases} y[n+1], & n \geq 0 \\ y[n], & n \leq -1 \end{cases}$$

**Sistema Inverso**

# Problema 1.27.c)

Dado el siguiente sistema:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\,d\tau$$

a) ¿Memoria?

# Problema 1.27.c)

Dado el siguiente sistema:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\,d\tau$$

a) ¿Memoria?

- Si, la señal de salida y(t) depende de valores de la entrada desde $-\infty$ hasta 2t.

# Problema 1.27.c)

Dado el siguiente sistema:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\,d\tau$$

b) ¿Invariante?

# Problema 1.27.c)

Dado el siguiente sistema:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\,d\tau$$

b) ¿Invariante?

a) $x'(t) = x(t-t_0) \Rightarrow y'(t) = \int_{-\infty}^{2t} x'(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau - t_0)\,d\tau$

b) $y(t-t_0) = \int_{-\infty}^{2(t-t_0)} x(\tau)\,d\tau$

c) ¿$y(t-t_0) = y'(t)$? : $y'(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau - t_0)\,d\tau \underset{\tau - t_0 = \sigma}{=} \int_{-\infty}^{2t-t_0} x(\sigma)\,d\sigma \neq y(t-t_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{NO INVARIANTE}}$

# Problema 1.27.c)

Dado el siguiente sistema:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\,d\tau$$

c) ¿Lineal?

# Problema 1.27.c)

Dado el siguiente sistema:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\,d\tau$$

c) ¿Lineal?

a) ADITIVIDAD:

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\,d\tau$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)\,d\tau$$

$$x'(t) = x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow y'(t) = \int_{-\infty}^{2t} x'(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{2t} \{x_1(\tau) + x_2(\tau)\}\,d\tau = \quad \text{(LINEALIDAD } \int \text{)}$$

$$= \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\,d\tau + \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)\,d\tau = y_1(t) + y_2(t) \Rightarrow \boxed{\text{ADITIVO}}$$

# Problema 1.27.c)

Dado el siguiente sistema:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\,d\tau$$

c) ¿Lineal?

b) HOMOGENEIDAD:

$$x(t) \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\,d\tau$$

$$x'(t) = kx(t) \longrightarrow y'(t) = \int_{-\infty}^{2t} x'(\tau)\,d\tau \overset{\text{LINEALIDAD}}{=} \int_{-\infty}^{2t} kx(\tau)\,d\tau =$$

$$= k \cdot \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\,d\tau = k\,y(t) \Rightarrow \boxed{\text{HOMOGÉNEO}}$$

# Problema 1.27.c)

Dado el siguiente sistema:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\,d\tau$$

c) ¿Lineal?

b) HOMOGENEIDAD:

$$x(t) \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\,d\tau$$

$$x'(t) = kx(t) \longrightarrow y'(t) = \int_{-\infty}^{2t} x'(\tau)\,d\tau \overset{\text{LINEALIDAD}}{=} \int_{-\infty}^{2t} kx(\tau)\,d\tau =$$

$$= k \cdot \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\,d\tau = k\,y(t) \Rightarrow \boxed{\text{HOMOGÉNEO}}$$

ADITIVO → LINEAL

# Problema 1.27.c)

Dado el siguiente sistema:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\,d\tau$$

d) ¿Causal?

# Problema 1.27.c)

Dado el siguiente sistema:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\,d\tau$$

d) ¿Causal?

- La señal de salida y(t) depende de valores de entrada en el intervalo (–∞, 2t). Por lo tanto, si t > 0, la salida y(t) depende de valores futuros hasta 2t, es decir, posteriores a t. Resumen, el sistema es no causal.

# Problema 1.27.c)

Dado el siguiente sistema:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\,d\tau$$

e) ¿Estable?

# Problema 1.27.c)

Dado el siguiente sistema:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\,d\tau$$

e) ¿Estable?

$$|x(t)| \leq B, \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\,d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{2t} |x(\tau)|\,d\tau \leq \int_{-\infty}^{2t} B\,d\tau = \infty \Rightarrow$$

$\nexists$ COTA

$\Rightarrow$ NO ESTABLE

# Problema 1.27.f)

Dado el siguiente sistema: $y(t) = x(t/3)$

a) ¿Memoria?

# Problema 1.27.f)

Dado el siguiente sistema: $y(t) = x(t/3)$

a) ¿Memoria?

Ej: $y(10) = x(10/3)$

$\downarrow$

$\neq 10 \Rightarrow$ **CON MEMORIA**

# Problema 1.27.f)

Dado el siguiente sistema: $y(t) = x(t/3)$

b) ¿Invariante?

# Problema 1.27.f)

Dado el siguiente sistema: $y(t) = x(t/3)$

b) ¿Invariante?

a) $x'(t) = x(t-t_0) \Rightarrow y'(t) = x'(t/3) = x(t/3 - t_0)$

b) $y(t-t_0) = x\left(\frac{t-t_0}{3}\right)$

c) $y'(t) \neq y(t-t_0) \Rightarrow$ NO INVARIANTE

# Problema 1.27.f)

Dado el siguiente sistema: $y(t) = x(t/3)$

c) ¿Lineal?

# Problema 1.27.f)

Dado el siguiente sistema: $y(t) = x(t/3)$

c) ¿Lineal?

a) ADITIVIDAD:

$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = x_1(t/3)$

$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = x_2(t/3)$

---

$x'(t) = x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow y'(t) = x'(t/3) = x_1(t/3) + x_2(t/3) =$

$= y_1(t) + y_2(t) \Rightarrow$ ADITIVO

# Problema 1.27.f)

Dado el siguiente sistema: $y(t) = x(t/3)$

c) ¿Lineal?

a) ADITIVIDAD:

$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = x_1(t/3)$

$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = x_2(t/3)$

$x'(t) = x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow y'(t) = x'(t/3) = x_1(t/3) + x_2(t/3) = y_1(t) + y_2(t) \Rightarrow$

ADITIVO

b) HOMOGENEO:

$x(t) \longrightarrow y(t) = x(t/3)$

$x'(t) = kx(t) \longrightarrow y'(t) = x'(t/3) = kx(t/3) = ky(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ HOMOGENEO $\longrightarrow$ LINEAL

# Problema 1.27.f)

Dado el siguiente sistema: $y(t) = x(t/3)$

d) ¿Causal?

# Problema 1.27.f)

Dado el siguiente sistema: $y(t) = x(t/3)$

d) ¿Causal?

$\epsilon_1$: $y(-9) = x(-3)$

↓

POSTERIOR A $-9$ ⇒ **NO CAUSAL**

# Problema 1.27.f)

Dado el siguiente sistema: $y(t) = x(t/3)$

e) ¿Estable?

# Problema 1.27.f)

Dado el siguiente sistema: $y(t) = x(t/3)$

e) ¿Estable?

$|x(t)| \leq B, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow |y(t)| = |x(t/3)| \leq B, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ **ESTABLE**

LA OPERACIÓN NO AFECTA A LA AMPLITUD

# Tema 1: Señales y Sistemas

**Esta presentación es una adaptación del contenido proporcionado por el profesor Jesús Bescos Cano**

Ruben Tolosana

ruben.tolosana@uam.es

BiDA Lab

Biometrics & Data Pattern Analytics Lab

UAM

Universidad Autónoma de Madrid