Apellidos: _____ **Nombre:** _____

IMPORTANTE

- Duración del examen: **90 minutos**
- No olvide anotar el nombre y los apellidos en todas las hojas de examen, incluido el enunciado de examen
- No se permite ningún tipo de documentación
- Las respuestas se entregarán en hojas de examen
- Se entregarán las hojas de examen, incluido el enunciado de examen, dobladas por la mitad

1. (30 puntos) Sea una respuesta al impulso para un sistema dado

$$H(s) = s + 10.$$

Si se pretende caracterizar su comportamiento a bajas frecuencias cuando se procede a su discretización mediante el método de igualación polo-cero o MPZ (*matched pole-zero mapping method*), determine los valores de K (factor de ganancia de la respuesta discretizada) que hacen viable el proceso de discretización si se ha de cumplir que $H(z)/H(s) = 1$.

2. (40 puntos) Sea el sistema de control digital mostrado en la figura 1.

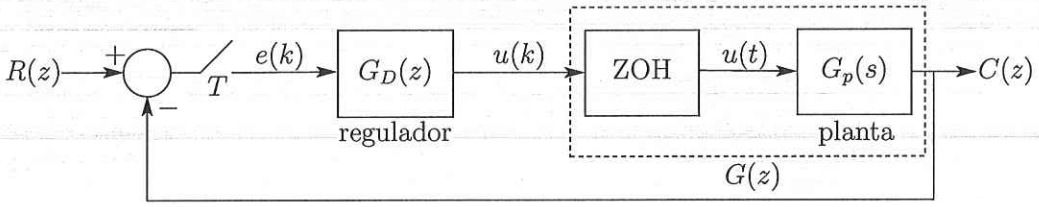


Figura 1: Sistema de control digital considerado.

Para el diseño del regulador $G_D(z)$ se opta por un filtro FIR $F(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$, de forma que la respuesta en lazo cerrado del sistema presente un tiempo de establecimiento mínimo, con un error en régimen permanente nulo, siendo $E(z) = 1 + e_1 z^{-1}$, y sin oscilaciones en régimen permanente ante una entrada escalón unidad.

Si la respuesta del sistema ante una entrada escalón unidad presenta un sobreimpulso máximo del 50 %, determine la función de transferencia en lazo abierto $G_D(z)G(z)$ que satisface los requerimientos formulados. Se asume un período de muestreo T de 1 s.

3. (30 puntos) Diseñe un regulador en tiempo discreto que cumpla con las siguientes restricciones: $\zeta = 0,12$ y $\sigma = 154,8$, considerando que en el sistema de control discreto se emplea una frecuencia de muestreo f_s 10 veces superior a la frecuencia natural amortiguada f_d del sistema.

   Si la función de transferencia de la planta obedece a

$$G(z) = \frac{(z+0,7)}{(z-0,7)(z-2)},$$

   y la posición del polo del regulador se sitúa en $z = 0,35$, justifique debidamente si el sistema es estable una vez incorporado el regulador, **sin recurrir para ello al criterio de estabilidad de Jury**.

Universidad de Alcalá

Apellidos:	Pág.:
Nombre:	Fecha:
Titulación:	
Asignatura:	Curso / grupo:

$$H_D(z) = K \cdot \frac{z - e^{-10T}}{z+1} \; ; \quad H(s) = s + 10$$

$$\frac{H_D(z \to 1)}{H(s \to 0)} = \frac{K}{10} \cdot \frac{1 - e^{-10T}}{1+1} = 1$$

$$\frac{1 - e^{-10T}}{2} = \frac{10}{K} \; ; \quad 1 - e^{-10T} = \frac{20}{K}$$

$$1 - \frac{20}{K} = e^{-10T} \; ; \quad 0 < 1 - \frac{20}{K} < 1 \rightarrow K > 20$$

PARA QUE $T > 0$

Universidad de Alcalá

Apellidos:	Pág.:
Nombre:	Fecha:
Titulación:	
Asignatura:	Curso / grupo:

$$E(z) = P(z)N(z) = 1 + e_1 z^{-1}$$

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})N(z) \quad \begin{cases} N(z) = (1-a_0) + (1-a_0-a_1)z^{-1} \\ \text{RESTO} = 1 - a_0 - a_1 - a_2 = 0 \end{cases}$$

$$1 - a_0 = 1 \rightarrow a_0 = 0$$

$$N(z) = 1 + (1 - a_1) z^{-1} \rightarrow N(z) = 1 - 0.5 z^{-1}$$

$$\text{RESTO} = 1 - a_1 - a_2 = 0$$

$$C(z) = R(z) \cdot F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \left(a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \right)$$

$$= a_1 z^{-1} + \underbrace{(a_1 + a_2)}_{} z^{-2} + \cdots$$

$$a_1 = 1.5 \; (M_p = 50\%) \rightarrow 1.5 + a_2 = 1$$

$$a_2 = -0.5$$

$$G_D(z)\, G(z) = \frac{F(z)}{(1 - z^{-1})N(z)} = \frac{1.5 z^{-1} - 0.5 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.5 z^{-1})}$$

Universidad de Alcalá

Apellidos:	Pág.:
Nombre:	Fecha:
Titulación:	
Asignatura:	Curso / grupo:

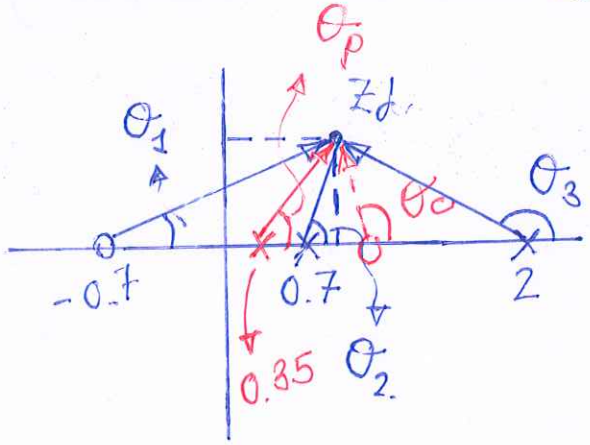
$\zeta = 0.12$

$\sigma = w_n \zeta = 154.8 \rightarrow w_n = 1290 \text{ rad/s}$

$S_d = -\zeta w_n \pm w_n \sqrt{1-\zeta^2}\, j = -154.8 \pm 1280 j$

$f_s = 10 f_d = 10 \cdot \frac{1280}{2\pi} = 2038 \text{ Hz} \rightarrow T_s = \frac{1}{f_s} \cong 0.5 \text{ ms}$

$z_d = e^{S_d T_s} = 0.74 \pm 0.55 j$



$\angle G(z)\big|_{z_d} = \theta_1 - \theta_2 - \theta_3$

$\theta_1 = 21°$, $\theta_2 = 86°$, $\theta_3 = 156.4°$

$= -221.4° \neq -180°$

$\angle G_D(z) G(z)\big|_{z_d} = \theta_1 + \theta_c - \theta_p - \theta_2 - \theta_3 = -180°$

$\theta_p = 55°$

$\theta_c = 96.4°$

$\tan^{-1} \frac{0.55}{c - 0.74} = 83.6° \rightarrow c = 0.8012$

$\left| K_D \cdot \frac{z - 0.8012}{z - 0.35} \cdot \frac{z + 0.7}{(z-0.7)(z-2)} \right|_{z_d} = 1 \rightarrow K_D \cong 0.6$

ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

$$1 + 0.6 \cdot \frac{z-0.8012}{z-0.35} \frac{z+0.7}{(z-0.7)(z-2)} = 0$$

$$(z-0.35)(z-0.7)(z-2) + 0.6(z-0.8012)(z+0.7) = 0$$

$$z^3 - 2.45z^2 + 2.2843z - 0.8265 = 0$$

$$(z-0.74-0.55j)(z-0.74+0.55j)(z-x) = 0$$

$$(z^2 - 1.48z + 0.8501)(z-x) = 0$$

$$\simeq 0.97$$

(DENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA DE RADIO UNIDAD → ESTABLE)