Apellidos: _____ Nombre: _____

IMPORTANTE

- Duración del examen: 90 minutos
- No olvide anotar el nombre y los apellidos en todas las hojas de examen, incluido el enunciado de examen
- No se permite ningún tipo de documentación
- Las respuestas se entregarán en hojas de examen
- Se entregarán las hojas de examen, incluido el enunciado de examen, dobladas por la mitad

1. (25 puntos) Considere un sistema de control, con realimentación unitaria, al que se ha incorporado el regulador $G_c(s)$.

$$G_c(s) = 10 \cdot \frac{s + 0,01}{s + 0,001585}.$$

Determine el margen de fase que se obtiene con esta configuración, suponiendo que se han añadido 5° adicionales para compensar el efecto del regulador $G_c(s)$, si el diagrama de Bode de la planta ajustada en ganancia $G_1(s)$ obedece al mostrado en la figura 1.

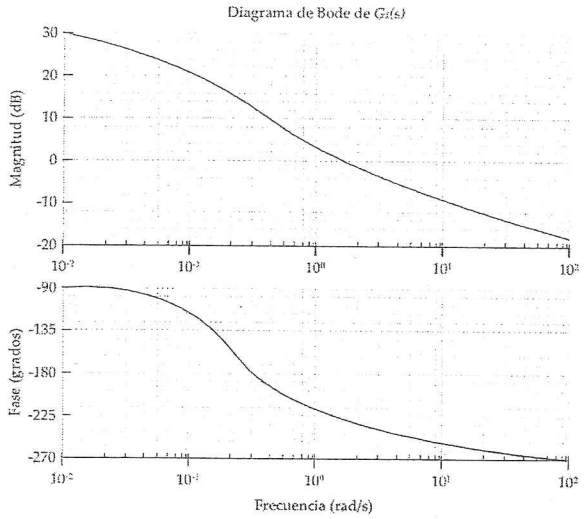


Figura 1: Diagrama de Bode de $G_1(s)$.

2. (30 puntos) Considere un sistema de control, con realimentación unitaria, al que se ha incorporado el regulador $G_c(s)$.

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right), \quad \text{con } \gamma = \beta \text{ y } \gamma, \beta > 1.$$

Determine, a tenor del diagrama de Bode de la planta ajustada en ganancia $G_1(s)$ de la figura 2, el máximo ángulo de fase que introduce el regulador a altas frecuencias, si se selecciona $\angle G_1(jw) = -180°$ como nueva frecuencia de cruce de ganancia del sistema compensado.

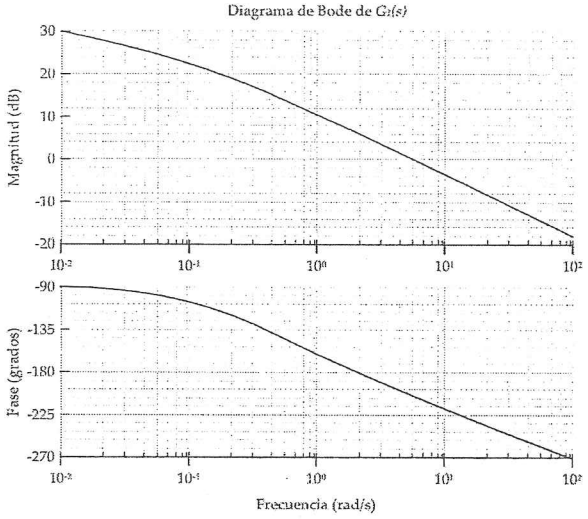


Figura 2: Diagrama de Bode de $G_1(s)$.

3. (25 puntos) Sea la siguiente ecuación en diferencias,

$$y(k+2) + 4y(k+1) + 13y(k) = x(k+1) + 2x(k).$$

   1. Determine la función de transferencia $H(z) = Y(z)/X(z)$, con $y(0) = 0, y(1) = 1$ ante una entrada $x(k) = \cos 2k\pi$.
   2. Obtenga la respuesta al impulso, $h(k)$, sirviéndose del método de descomposición en fracciones simples.

4. (20 puntos) Determine la transformada z de las siguientes funciones.

   1. $f(k) = 2^k \cdot [ku(k) - 2(k-1)u(k-1)]$.
   2. $f(k) = \dfrac{2^k}{k!}$, para $k \geqslant 0$. <u>Nota</u>: $e^u = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$.

$$G_c(s) = K_c \cdot \beta \cdot \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = K_c \cdot \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} = 10 \cdot \frac{s+0,01}{s+0,001585}$$

$$\frac{1}{T} = 0,01 \; ; \; \frac{1}{\beta T} = 0,001585 \rightarrow \beta = 6,31$$

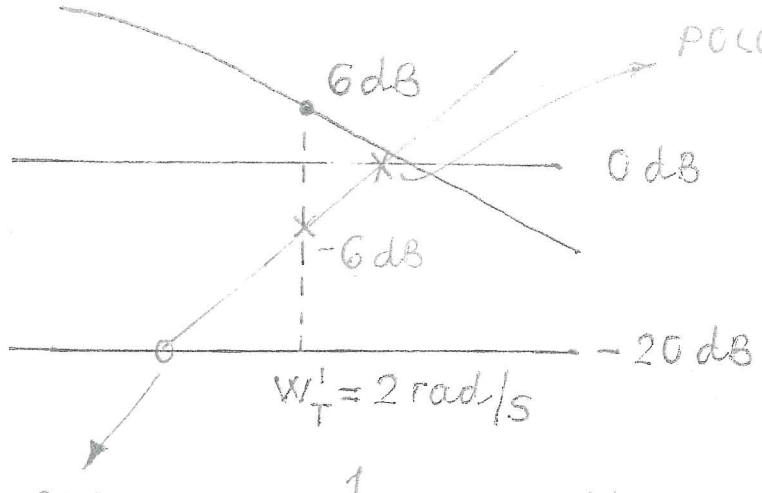
LA ATENUACIÓN QUE INTRODUCE EL REGULADOR A ALTAS FRECUENCIAS ES $-20 \log \beta = -16$ dB.

EN $w = 0,2$ rad/s, $|G_1(jw)| = 16$ dB, POR LO QUE LA NUEVA FRECUENCIA DE CRUCE DE GANANCIA $w_T' = 0,2$ rad/s

$MF = 180° - 153° = 27°$

$$\angle G_1(jw)_{w_T'} = -153°$$

LA NUEVA FRECUENCIA DE CRUCE DE GANANCIA, PARA UN ÁNGULO DE FASE $\angle G_1(jw) = -180°$, ES $w_T' = 2\ rad/s$



POLO EN $w_p = \frac{\beta}{T_1} \cong 4\ rad/s$

$\beta = 10$

CERO EN $w_z = \frac{1}{T_1} = 0,4\ rad/s$

$$\operatorname{sen} \phi_m = \frac{1 - \frac{1}{\beta}}{1 + \frac{1}{\beta}} = \frac{1 - 0,1}{1 + 0,1} = 0,8181 \simeq 0,82\ rad$$

$\phi_m \cong 55°\ (0,9614\ rad)$

$$Z\{y(k+2)\} = z^2 Y(z) - z^2 y(0) - z\, y(1)$$

$$Z\{4y(k+1)\} = 4z\,Y(z) - 4z\,y(0)$$

$$Z\{13\,y(k)\} = 13\,Y(z)$$

$$Z\{x(k+1)\} = z\,X(z) - z\,x(0)$$

$$Z\{2x(k)\} = 2X(z)$$

$$x(k) = \cos 2k\pi$$
$$x(0) = 1$$

$$z^2 Y(z) - z^2 y(0) - z\,y(1) + 4z\,Y(z) - 4z\,y(0) + 13\,Y(z) = z\,X(z) - z\,x(0) + 2X(z)$$

$$(z^2 + 4z + 13)\,Y(z) = (z+2)\,X(z) + \cancel{z^2 y(0)}^{\,0} + z\,y(1) + \cancel{4z\,y(0)}^{\,0} - z\,x(0)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z+2}{(z^2+4z+13)} + \cancel{z\,y(1)}^{\,z} - \cancel{z\,x(0)}^{\,-z}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z+2}{(z^2+4z+13)}$$

$\dfrac{z+2}{(z+2)^2+3^2}$, POR INSPECCIÓN EN TABLA DE TRANSFORMADAS Z, LA NÚM. 17,

$$h(k) = e^{-2k} \cdot \cos 3k, \quad k \geq 0$$

SE CONSIDERA POSITIVAMENTE.

$$h(k) = \frac{1}{2}(-2-3i)^{k-1} + \frac{1}{2}(-2+3i)^{k-1}, \quad k > 0$$

② $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2 \cdot z^{-1})^k}{k!} = e^{2 \cdot z^{-1}}$

① $f(k) = 2^k \cdot k \cdot u(k) - 2^k \cdot 2(k-1)\, u(k-1)$

$$F(z) = \frac{2z}{(z-2)^2} - \frac{8}{(z-2)^2} = \frac{2(z-4)}{(z-2)^2}$$