Cinemática de la Partícula

Repaso de conocimientos de 1º
- Definiciones:
  - Objeto de la Cinemática
  - Movimiento
  - Sistema de referencia
  - Trayectoria, ley horaria y ecuaciones horarias
  - Velocidad, aceleración y hodógrafa
  - Sólido de referencia y sistema coordenado
- Cambio de sistema coordenado
- Derivadas en ejes móviles: Teorema de coriolis

Otros sistemas de coordenadas
- Cilíndricas
- Polares
- Esféricas

2

✓ **Cinemática:** se ocupa del **movimiento**, sin entrar a considerar su causa.

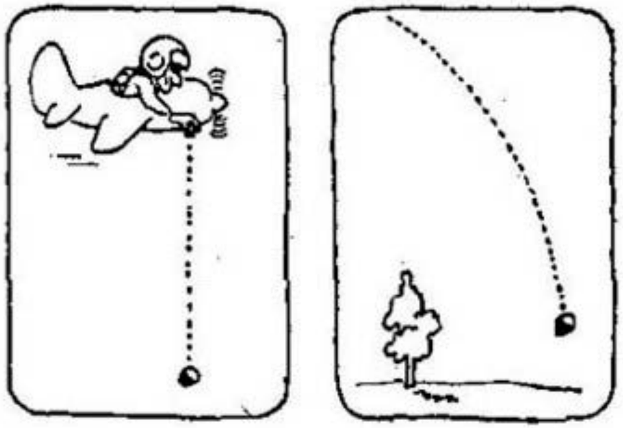
¿Qué es el movimiento?

*"El movimiento es el **cambio** de **posición** de la partícula respecto al **sistema de referencia**"*

El **movimiento** es un concepto **relativo**[1]

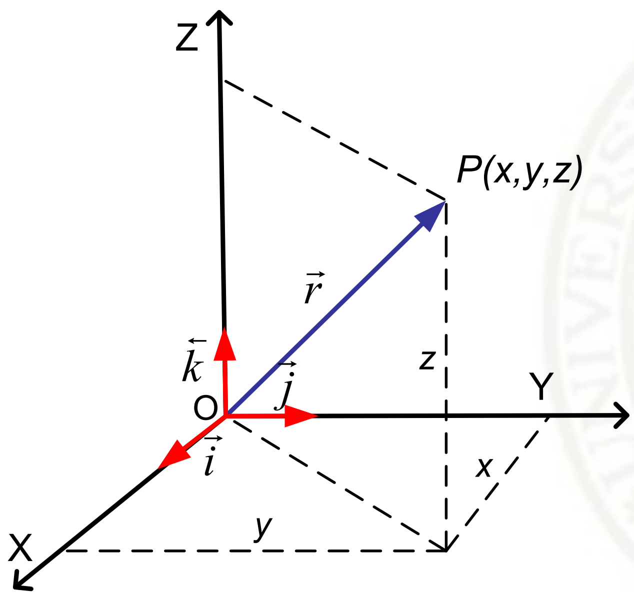
Depende del

Sistema de Referencia



[1] http://www.youtube.com/watch?v=gNPzSkC2dZU
http://www.youtube.com/watch?v=ILyOSvowW5s

✓ **Sistema de referencia:** Triedro o referencia triortogonal orientado a derechas formado por:



$$S = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \equiv Oxyz$$

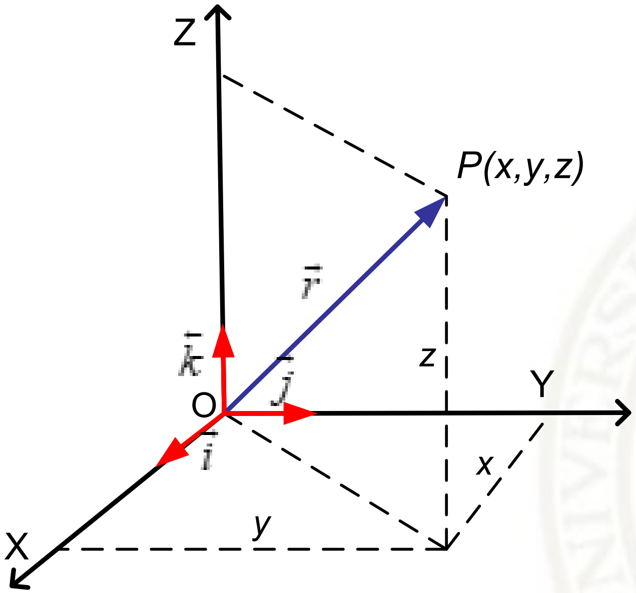
Unitarios: $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

Ortogonales: $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

A derechas: $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$

La **posición** de cada partícula *P* queda determinada por las tres **coordenadas cartesianas**, (x, y, z) , del punto geométrico con el que coincide en cada instante. Éstas son las componentes del **vector de posición** (o *radiovector*) en la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



$$S = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \equiv Oxyz$$

✓ Se dirá que la partícula *P* está en **reposo** respecto de un sistema de referencia *S*, si su posición no cambia con el tiempo

$$\vec{r} = cte$$

✓ Se dirá que la partícula *P* está en **movimiento** respecto del sistema de referencia *S*, si su posición varía con el tiempo

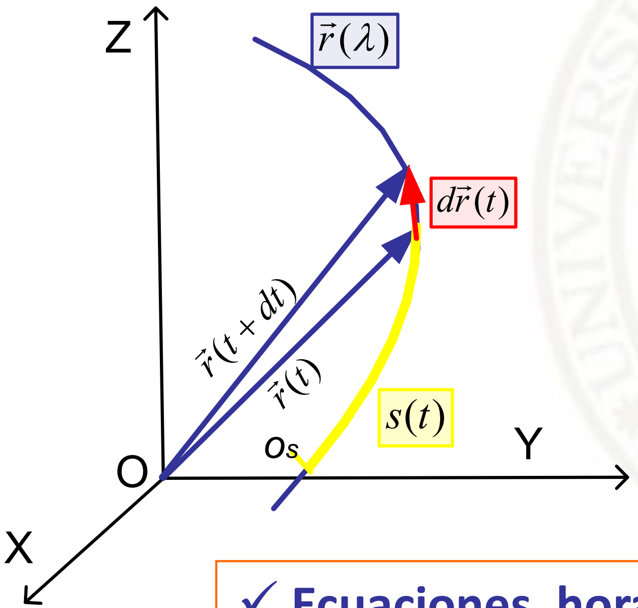
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

✓ Para un *sistema de partículas*:

✓Está en reposo respecto de un sistema de referencia *S* si, y sólo si, todas sus partículas lo están.

✓Está en movimiento respecto de un sistema de referencia *S* si al menos una se sus partículas lo está.

✓ Para **definir el movimiento** es necesario conocer no solamente las posiciones que ha ocupado el móvil sino cómo las ha ido ocupando con el tiempo, es decir, la posición del móvil en cada instante.



✓ **Trayectoria:** lugar geométrico de las posiciones ocupadas por la partícula a lo largo del tiempo:

$$\vec{r} = \vec{r}(\lambda)$$

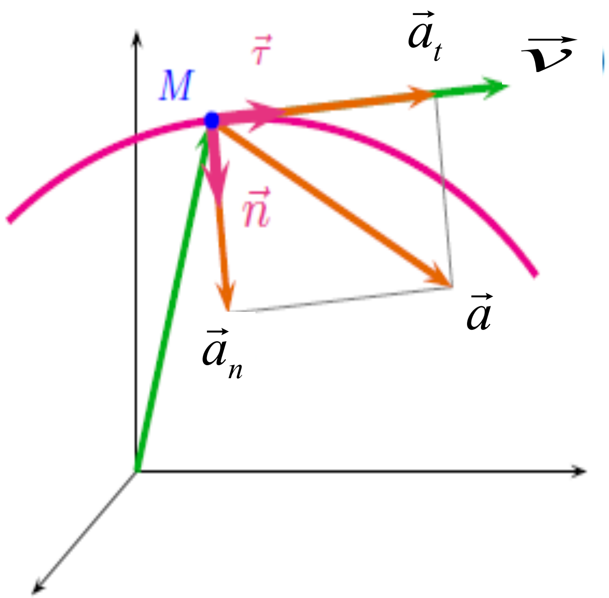
✓ **Ley horaria:** forma en que el móvil recorre su trayectoria:

$$s = s(t)$$

✓ **Ecuaciones horarias:** Ecuaciones paramétricas de la trayectoria, tomando como parámetro el tiempo:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t)$$

o de forma condensada: $\vec{r} = \vec{r}(t)$



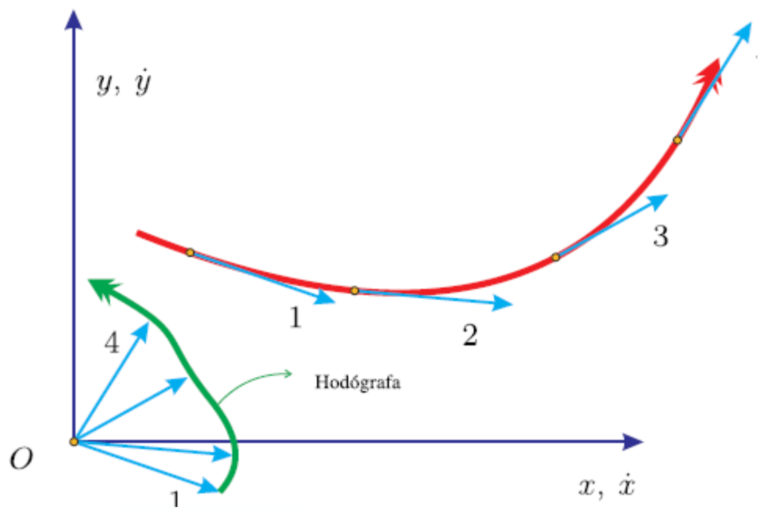
✓ **Velocidad:**

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\dot{x}(t)\vec{i}+\dot{y}(t)\vec{j}+\dot{z}(t)\vec{k}=\frac{ds}{dt}\vec{\tau}$$

✓ **Aceleración:**

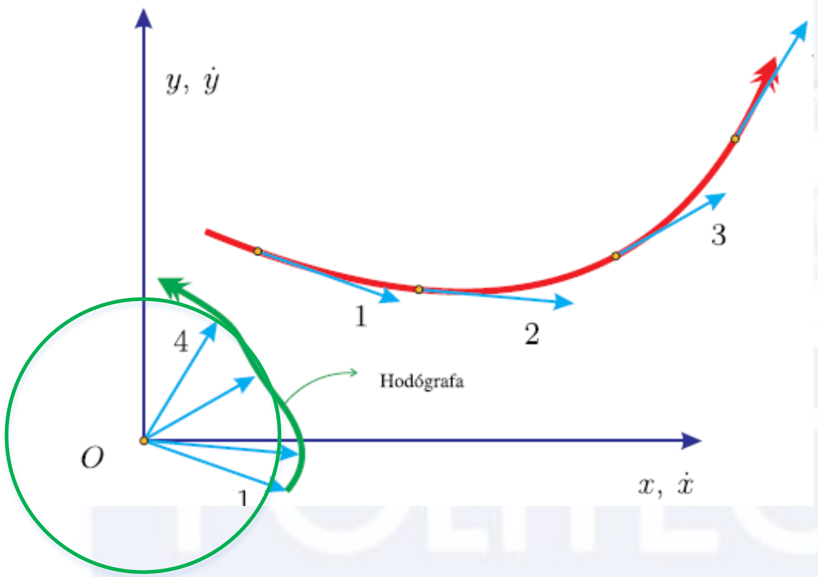
$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\ddot{x}(t)\vec{i}+\ddot{y}(t)\vec{j}+\ddot{z}(t)\vec{k}=\overbrace{\frac{d^2s}{dt^2}}^{\vec{a}_t}\vec{\tau}+\overbrace{\frac{v^2}{\rho}}^{\vec{a}_n}\vec{n}$$

✓ **Hodógrafa:** curva descrita por el extremo de un vector equipolente al vector velocidad, llevado al origen



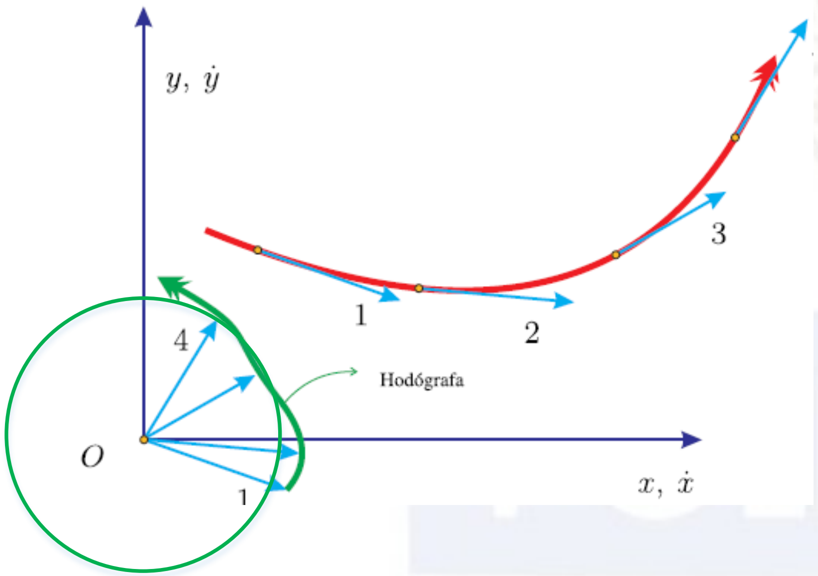
Si la hodógrafa del movimiento de una partícula es una circunferencia centrada en el origen, sabemos que :

1. El vector velocidad es constante
2. El vector aceleración es constante
3. La aceleración tangencial es nula
4. Ninguna de las anteriores es correcta



Si la hodógrafa del movimiento de una partícula es una circunferencia centrada en el origen, sabemos que :

1. El vector velocidad es constante
2. El vector aceleración es nulo
3. La aceleración tangencial es nula
4. Ninguna de las anteriores es correcta



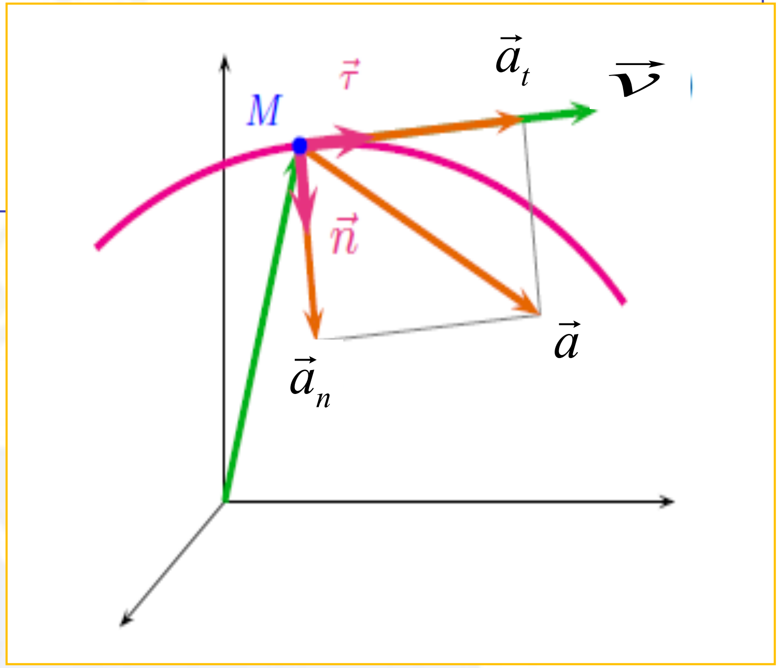
1. *No, es constante solo en módulo (radio de la circunferencia), pero no en dirección*
2. *No, porque la velocidad no es constante, cambia su dirección*
3. *Sí, el módulo de la velocidad es constante*
4. *Ninguna de las anteriores es correcta*

Un satélite describe una trayectoria curvilínea con una velocidad y aceleración conocidas en cualquier instante. La **aceleración normal** vendrá dada por:

1. $\vec{a}_n = \vec{a} \cdot \vec{n}$
2. $\vec{a}_n = (\vec{a} \cdot \vec{n})\vec{n}$
3. $\vec{a}_n = (\vec{a}_t \cdot \vec{n})\vec{n}$
4. Ninguna de las anteriores es correcta

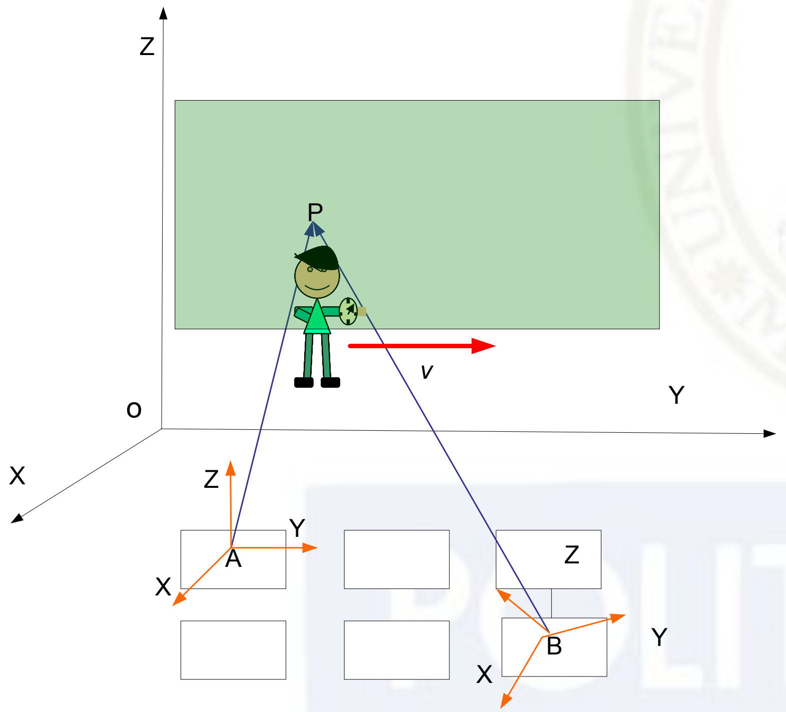
Un satélite describe una trayectoria curvilínea con una velocidad y aceleración conocidas en cualquier instante. La **aceleración normal** vendrá dada por:

1. $\vec{a}_n = \vec{a} \cdot \vec{n}$
2. $\vec{a}_n = (\vec{a} \cdot \vec{n})\vec{n}$
3. $\vec{a}_n = (\vec{a}_t \cdot \vec{n})\vec{n}$
4. Ninguna de las anteriores es correcta



✓**Sólido de referencia:** sólido ideal (distancias entre los puntos se mantienen constantes) que ocupa todo el espacio en el que se mueve una partícula.

✓ En un *sólido de referencia* dado hay muchos *sistemas coordenados de referencia* diferentes

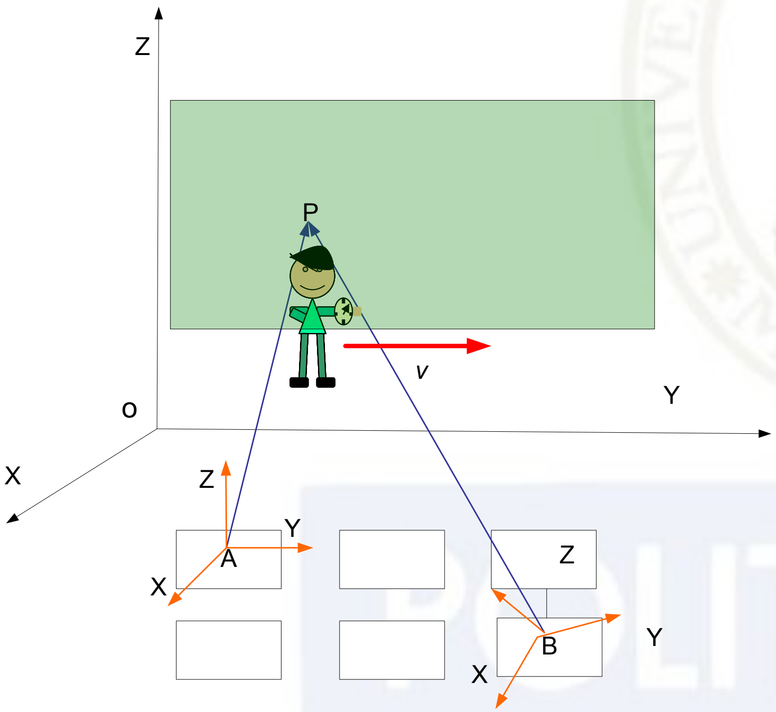


¿ La velocidad del profesor respecto de alumno A y del alumno B es la misma?

Definiciones

✓**Sólido de referencia:** sólido ideal (distancias entre los puntos se mantienen constantes) que ocupa todo el espacio en el que se mueve una partícula.

✓ En un *sólido de referencia* dado hay muchos *sistemas coordenados de referencia* diferentes

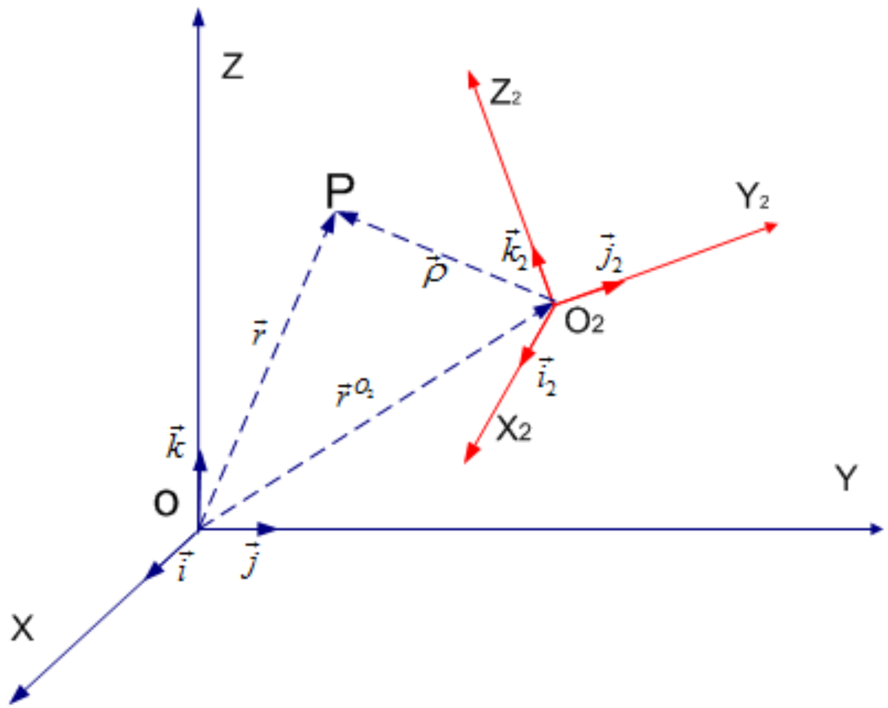


¿ La velocidad del profesor respecto de alumno A y del alumno B es la misma?

$$\overrightarrow{AP} \neq \overrightarrow{BP}$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$$

$$\vec{v}^{P/A} = \frac{d\,\overrightarrow{AP}}{dt} = \underbrace{\frac{d\,\overrightarrow{AB}}{dt}}_{=0} + \frac{d\,\overrightarrow{BP}}{dt} = \vec{v}^{P/B}$$



Punto *P* del espacio y dos sistemas de referencias cartesianas rectangulares:

$$S = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

$$S_2 = \{O; \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2\}$$

¿Qué relación existe entre las coordenadas (x, y, z) y las (x_2, y_2, z_2) del mismo punto *P*?

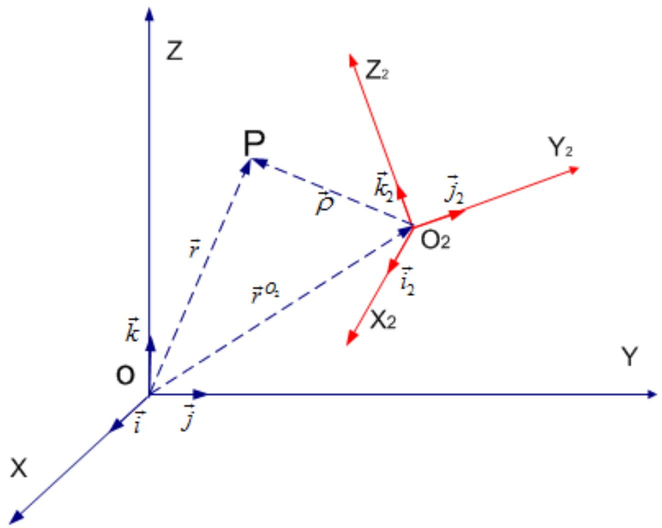
Se necesitan los siguientes datos:

1. Las coordenadas del punto O_2 en el sistema de referencia *S*

$$\overrightarrow{OO_2} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

2. Las coordenadas de los versores en la referencia *S*

$$\left.\begin{aligned}\vec{i}_2 &= q_1^1\vec{i} + q_1^2\vec{j} + q_1^3\vec{k}\\ \vec{j}_2 &= q_2^1\vec{i} + q_2^2\vec{j} + q_2^3\vec{k}\\ \vec{k}_2 &= q_3^1\vec{i} + q_3^2\vec{j} + q_3^3\vec{k}\end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad \left[\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2\right] = \left[i, \vec{j}, \vec{k}\right]Q$$



Donde la matriz Q es la *matriz de cambio de base* entre las bases $(i, \vec{j}, \vec{k})$ y $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$

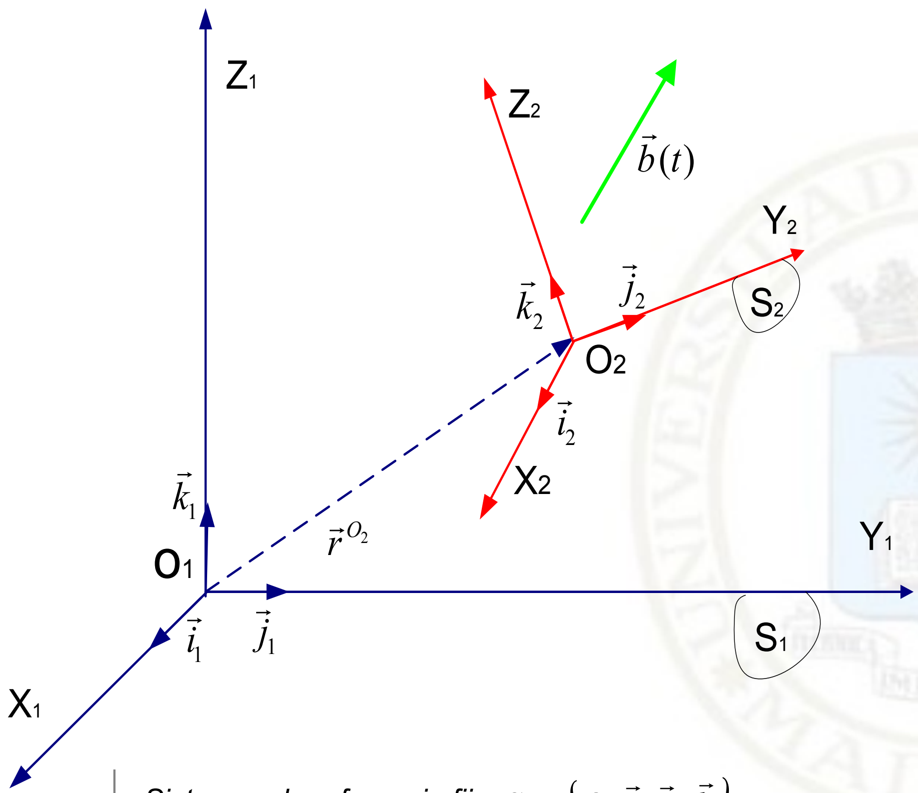
$$Q = \begin{pmatrix} q_1^1 & q_2^1 & q_2^1 \\ q_2^1 & q_2^2 & q_2^2 \\ q_3^1 & q_3^2 & q_3^3 \end{pmatrix}$$

Ambas bases son *ortonormales* y la matriz Q es *ortogonal,* esto es, satisface la relación: $Q^T.Q = I \Leftrightarrow Q^{-1} = Q^T$

De la ecuación vectorial

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{O_2P} \quad (\vec{r} = \vec{r}^{O_2} + \vec{\rho}) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + Q\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Teorema de Coriolis



Sistemas de referencia fijo $S_1 = \{O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1\}$

y móvil $S_2 = \{O_2, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2\}$

$\vec{\omega}_{S_2/S_1}$

$$\left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right)_{S_1} = \left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right)_{S_2} + \vec{\omega}_{S_2/S_1} \wedge \vec{b}$$

Casos particulares:

- Si los sistemas S_1 y S_2 son paralelos:

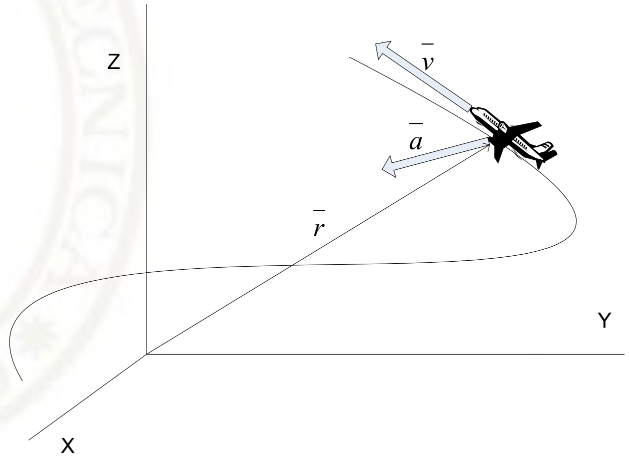
$$\left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right)_{S_1} = \left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right)_{S_2}$$

- Si la función vectorial $\vec{b}(t)$ está fija al sistema móvil S_2:

$$\left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right)_{S_1} = \vec{\omega}_{S_2/S_1} \wedge \vec{b}$$

Problema 3

Un avión describe una trayectoria curvilínea en el espacio. En la posición representada en la figura tiene una velocidad $\overline{v} = v(-\overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k})$ y una aceleración $\overline{a} = a(-\overline{j} + \overline{k})$. Determina para dicho instante:



a) Componente tangencial de la aceleración del avión.

b) Componente normal de la aceleración del avión.

c) Vectores unitarios $\overline{\tau}$, $\overline{n}$ y $\overline{b}$ del triedro intrínseco.

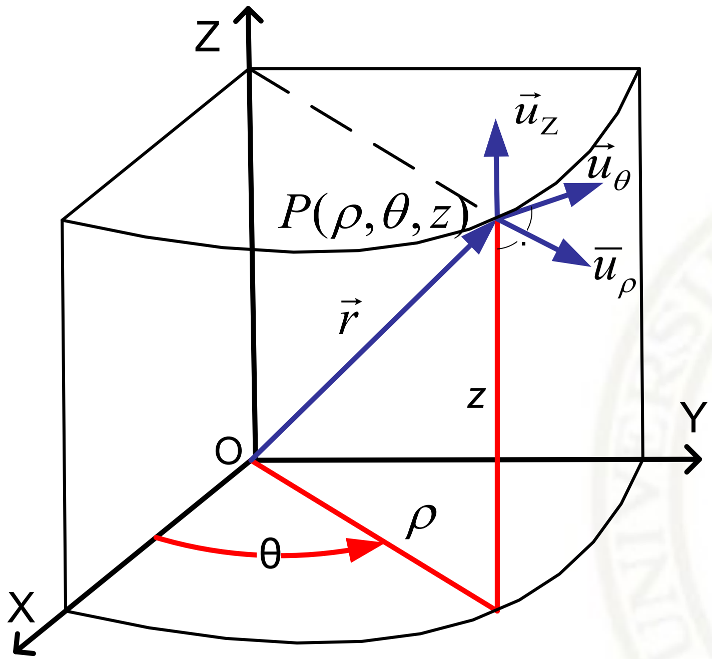
Cinemática de la Partícula

Repaso de conocimientos de 1º
- Definiciones:
  - Objeto de la Cinemática
  - Movimiento
  - Sistema de referencia
  - Trayectoria, ley horaria y ecuaciones horarias
  - Velocidad, aceleración y hodógrafa
  - Sólido de referencia y sistema coordenado
- Cambio de sistema coordenado
- Derivadas en ejes móviles: Teorema de coriolis

Otros sistemas de coordenadas
- Cilíndricas
- Polares
- Esféricas

2

Coordenadas Cilíndricas y Polares



- ρ : radio o coordenada radial ($0 \le \rho < \infty$)
- ϑ : azimut o longitud ($0 \le \theta < 2\pi$)
- z : altura ($-\infty < z < \infty$)

✓**Vector de posición:** $\vec{r} = \rho\,\vec{u}_\rho + z\,\vec{u}_z$

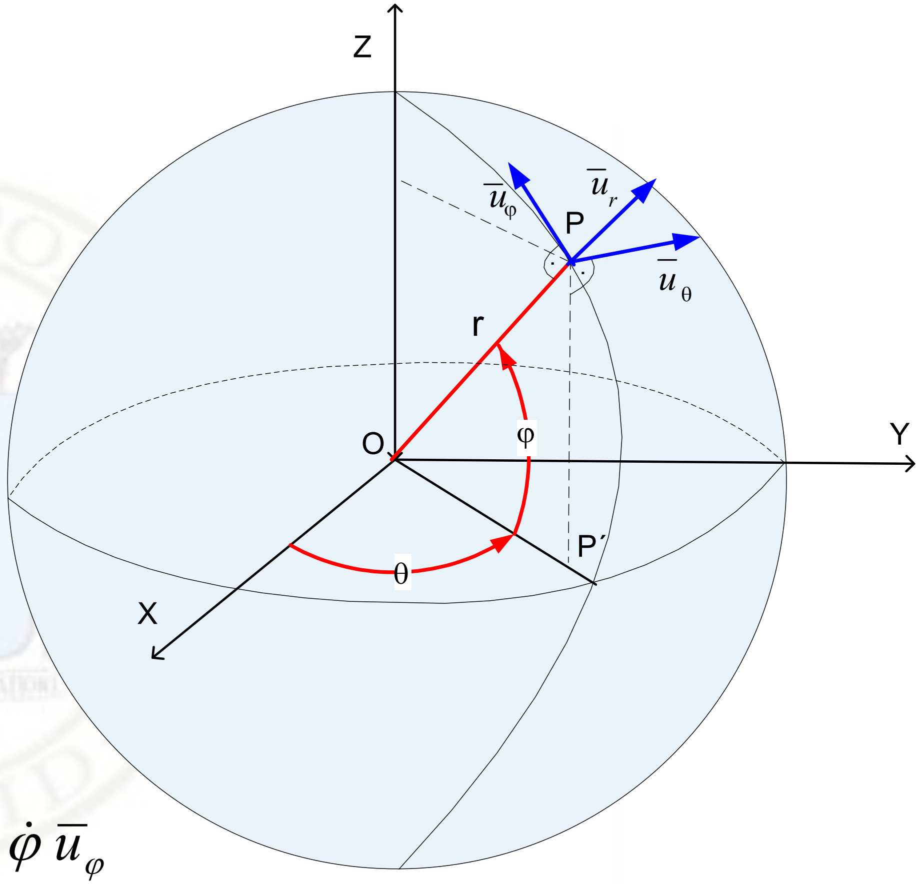
✓**Velocidad:** $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\;\vec{u}_\rho + \rho\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z$

✓**Aceleración:** $\vec{a} = (\;\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2\;)\,\vec{u}_\rho + (2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta + (\ddot{z})\,\vec{u}_z$

✓ Cuando ***z=0*** → ***coordenadas polares***

Coordenadas Esféricas

- r : radio o distancia al origen ($0 \le r < \infty$)
- ϑ : azimut o longitud ($0 \le \theta < 2\pi$)
- φ : latitud ($-\frac{\pi}{2} \le \varphi < \frac{\pi}{2}$)



✓**Vector de posición:** $\overline{r} = r\,\overline{u}_r$

✓**Velocidad:** $\overline{v} = \dot{r}\,\overline{u}_r + r\,\dot{\theta}\cos\varphi\,\overline{u}_\theta + r\,\dot{\varphi}\,\overline{u}_\varphi$

✓**Aceleración:**

$$\overline{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\cos^2\varphi - r\dot{\varphi}^2)\,\overline{u}_r + (2\dot{r}\,\dot{\theta}\cos\varphi + r\ddot{\theta}\cos\varphi - 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\,sen\varphi)\,\overline{u}_\theta +$$
$$+ (2\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\dot{\theta}^2\cos\varphi\,sen\varphi + r\ddot{\varphi})\,\overline{u}_\varphi$$

7. Un avión vuela horizontalmente con velocidad $\vec{v}$ a una altitud h respecto del punto O, en el que se halla situada una antena siguiendo su trayectoria rectilínea y uniforme. En el instante inicial $(t_0 = 0)$ el avión sobrevuela la posición A. Sabiendo que la distancia del punto A al punto O es d, determinar:

- 7.1. Posición del avión indicando sus coordenadas esféricas (r, θ, φ).
- 7.2. Velocidad del avión en el sistema de coordenadas esféricas centrado en la antena.
- 7.3. Si a partir de un determinado instante comienza a variar su velocidad, $v(t)$, siguiendo la misma trayectoria, obtener su aceleración en el sistema de coordenadas esféricas centrado en la antena.