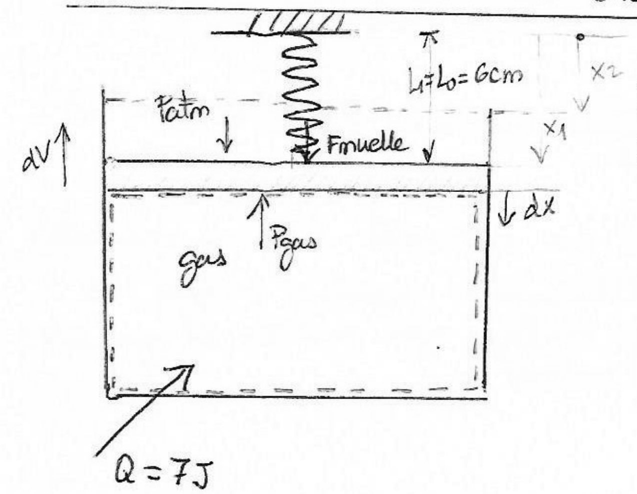
Problema (2.92 Wark)

La presión de un gas dentro de un dispositivo cilindro-émbolo está equilibrada en el exterior por una presión atmosférica de 100 KPa y un muelle elástico. El volumen inicial del gas es 32 cm³, el muelle está inicialmente sin deformar con una longitud de 6 cm y el área del émbolo sin peso es 4 cm². La adición de 7 J de calor provoca que el émbolo suba 2 cm. Si la constante del muelle es 10 N/cm calcúlese.

(a) La presión absoluta final del gas en kPa.
(b) El trabajo realizado por el gas en el cilindro en julios.
(c) La variación de energía interna del gas en julios.



Datos

$P_{atm} = 100\ kPa$

$V_1 = 32\ cm^3$

$L_1 = L_0 = 6\ cm$

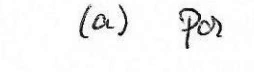
$A = 4\ cm^2$

$Q = 7J \rightarrow$ expande el gas $\rightarrow$ comprime el muelle 2cm

$K = 10\ N/cm$

Incógnitas	Soluciones
(a) P_2 (KPa)?	$P_2 = 150\ KPa$
(b) W_{gas} (J)?	$W_g = -1J$
(c) ΔU_{12} (J)?	$\Delta U_{12} = 6J$

(a) Por la Ley de Hook la fuerza exterior sobre un muelle es $F_{ext} = K(L - L_0)$



en todo momento en equilibrio $|\vec{F}_{muelle}| = |\vec{F}_{ext}|$ y son opuestas.

La fuerza que realiza el muelle sobre el émbolo es:

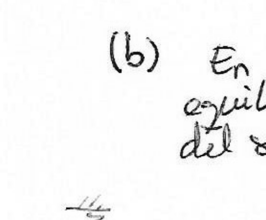
$$F = -K(L - L_0)$$

$P_1 = P_{atm} = 100\ kP$

$$P_2 = P_{atm} + \frac{F_{\substack{muelle\\sobre\\émbolo}}}{A} = P_{atm} - \frac{K(L_2 - L_0)}{A} = 100\ KPa + 10\frac{N}{cm} \cdot \frac{2\ cm}{4\ cm^2} \cdot \frac{10^4\ cm^2}{1\ m^2} \cdot \frac{1\ KN}{10^3\ N};$$

$$\boxed{P_2 = 150\ KPa}$$

(b) En todo momento, considerando un proceso cuasiestático, en émbolo está en equilibrio mecánico. Planteando el balance de fuerzas en la frontera del sistema (el gas en el interior del cilindro émbolo):



$$P_2 = P_{atm} + \frac{(-k(L - L_0))}{A} = P_{atm} - \frac{kx}{A}$$

$$W_{gas} = -\int_1^2 P_{gas}\, dV = -P_{atm}(V_2 - V_1) + \frac{K}{A}\int_1^2 x\, dV = -P_{atm}(V_2 - V_1) - \frac{K}{2}(x_2^2 - \cancel{x_1^2}^{\,0}) =$$

$$= -100\ KPa \cdot 4cm^2 \cdot 2cm \cdot \frac{1m^3}{10^6 cm^3} \cdot \frac{10^3 Pa}{1 KPa} - 10\frac{N}{cm} \cdot 2^2 cm^2 \cdot \frac{1m}{100cm} = -(0'8 + 0'2)J = -1J$$

$d(L - L_0) = dx = -\frac{dV}{A}$

$x_1 = L_1 - L_0 = 0$

$x_2 = -2cm$

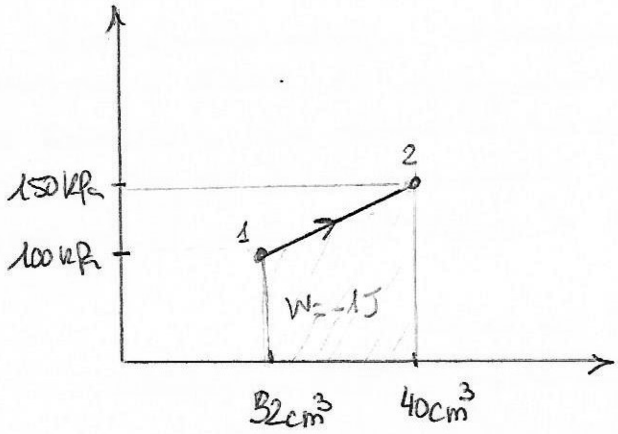
$$\boxed{W_{gas} = -1J}$$

$W_{gas} < 0$, el gas realiza un trabajo de expansión, realiza un trabajo sobre el entorno de 1J

(c) Por la 1ª Ley de Termodinámica: $\Delta U_{12} = Q_{ent} + W_{ent}$.

$$\Delta U_{12} = 7J - 1J = 6J; \quad \boxed{\Delta U_{12} = 6J}$$

El calor que se transfiere al sistema se emplea en aumentar la energía interna del gas y en realizar un trabajo sobre el exterior.



Si representamos el proceso sobre un diagrama PV vemos que la presión del gas aumenta linealmente en función del volumen.

Otra forma de hallar el trabajo es hallar el área del trapecio bajo la línea de proceso en el PV.

$$W_{ent} = W_{comp./exp.} = -\int_1^2 P\,dV = -\frac{(P_1+P_2)}{2}\cdot(V_2-V_1) = 250\cdot 10^3\,\text{Pa}\cdot 8\cdot 10^{-6}\,\text{m}^3$$

$$\boxed{W_{ent} = -1\,J}$$

Es una expansión (volumen creciente), el trabajo es negativo porque es un trabajo que realiza el gas sobre el entorno.