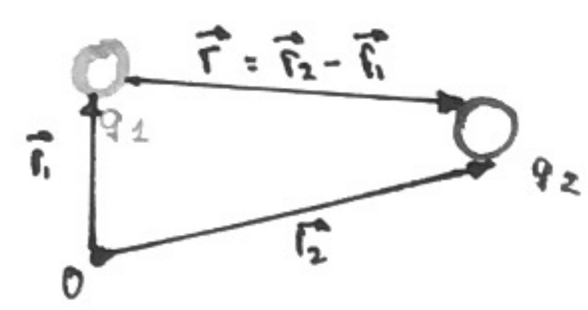
- CAMPOS Y ONDAS -

TEMA 1: Campo eléctrico:

• Ley de Coulomb:



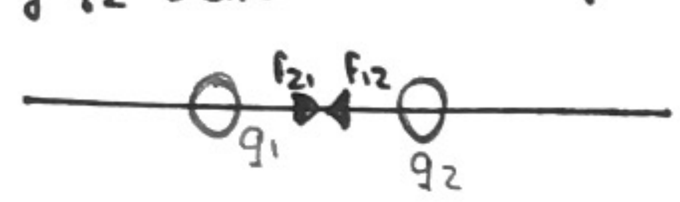
$r^2 = |\vec{r}|^2$ $\quad \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$ $\quad \vec{F} = K_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}$

$K_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$; ε_0 : permitividad en el vacío $= 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m

sistema internacional: $[q] = C$ $\quad [F] = N$ $\quad [r] = m$.

- si q_1 y q_2 tienen el mismo signo $\Rightarrow$ F es una fuerza de repulsión.

- si q_1 y q_2 tienen distinto signo $\Rightarrow$ F es una fuerza de atracción.



La ley de coulomb también se puede poner así:

$$\vec{F} = K_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u} = K_e \frac{q_1 q_2}{r^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

• Campo eléctrico: (creado por una carga puntual.

$\vec{E} = K_e \frac{q}{r^2} \vec{u}$ $\qquad \frac{\vec{F}}{q_2} = \vec{E}$ $\qquad$ sistema internacional : $[E] = \frac{N}{C}$ ó $\frac{V}{m}$

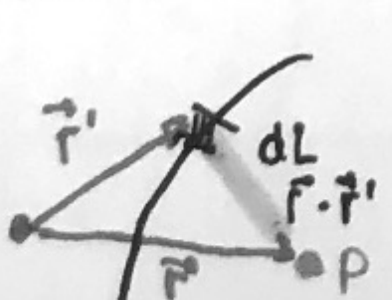
• principio de superposición (varias cargas) → calculamos la fuerza o el campo creado por cada una de las cargas de forma independiente y a continuación las sumamos todas.

• campo creado por distribuciones de carga.

1) Distribución lineal → densidad lineal de carga $\begin{cases} \text{cte} \\ \text{no cte.} \end{cases}$

densidad lineal → ρ_L ó λ $[C/m]$

* Calculamos el $d\vec{E}$ creado por dL en el punto P.



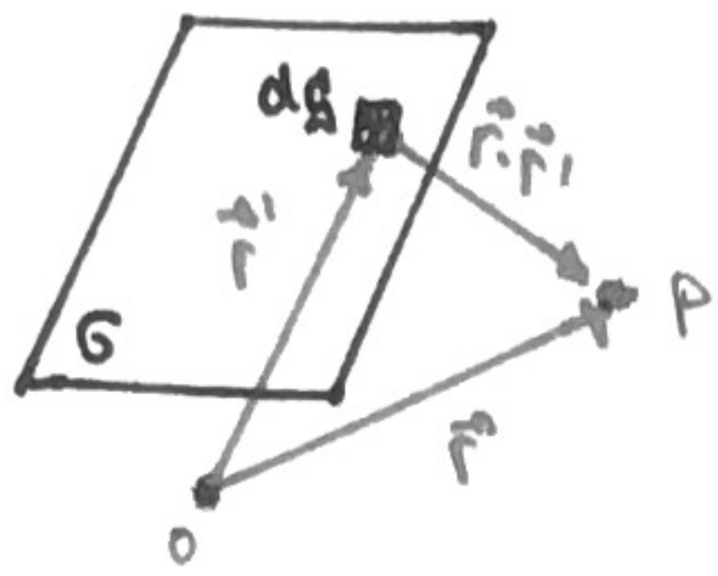
$$\begin{cases} d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} (\vec{r}-\vec{r}') \\ dq = \lambda \, dL \end{cases}$$

Hacemos la integral:

$$\vec{E} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}_{\text{fuera por que es una cte}} \int_L \frac{\lambda (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dL$$

* $\vec{r}$, vector de posición donde calculamos el campo
* $\vec{r}'$, vector de quien crea el campo.

2) Distribución superficial → σ : densidad superficial de carga $[C/m^2]$



$dq = \sigma\, dS$

$$\begin{cases} d\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')^3 \\ dq = \sigma\, dS \end{cases}$$

(no va a salir una integral simple).

* Dieléctricos

$\vec{E}$ → carga total
$\vec{D}$ → carga libre

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$; $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

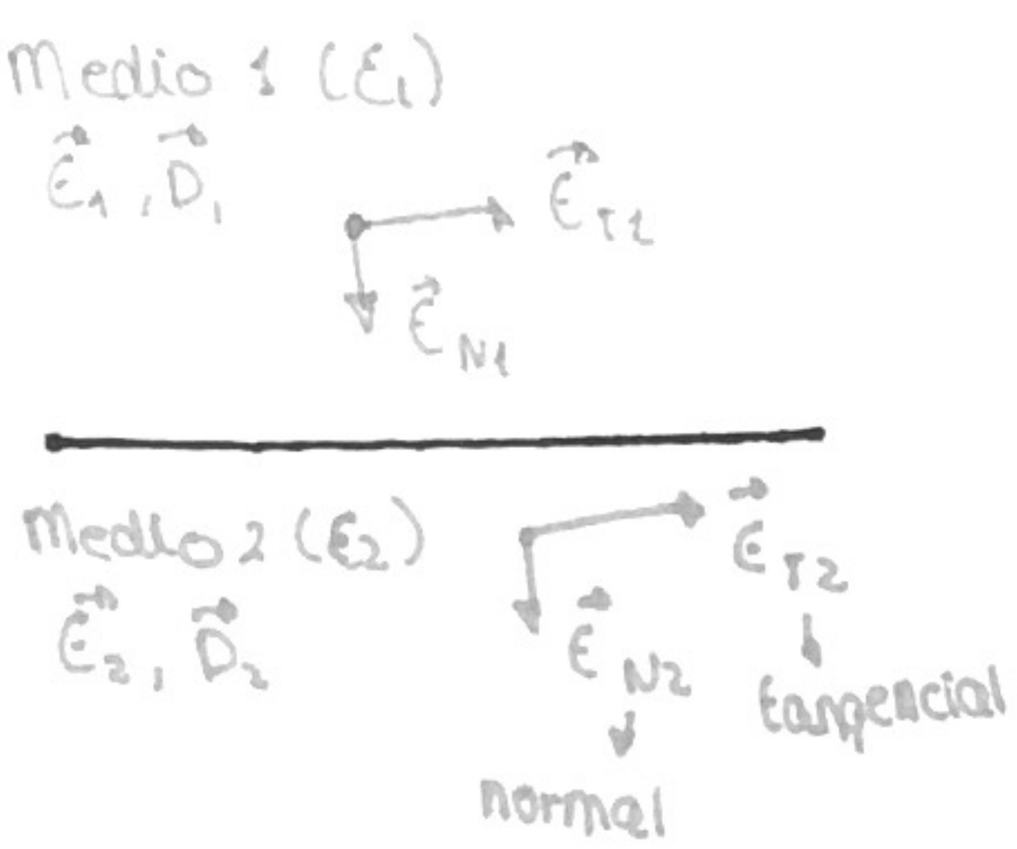
ε_0 → permitividad en el vacío

ε_r → permitividad del medio

$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$; $\vec{P}$ → carga polarizada

IMPORTANTE!

Cambio de medio:



$\boxed{\text{Condiciones de contorno}}$

1. $E_{T1} = E_{T2}$; $\dfrac{D_{T1}}{\varepsilon_1} = \dfrac{D_{T2}}{\varepsilon_2}$
2. $D_{N1} = D_{N2}$; $\varepsilon_1 E_{N1} = \varepsilon_2 E_{N2}$

Potencial eléctrico

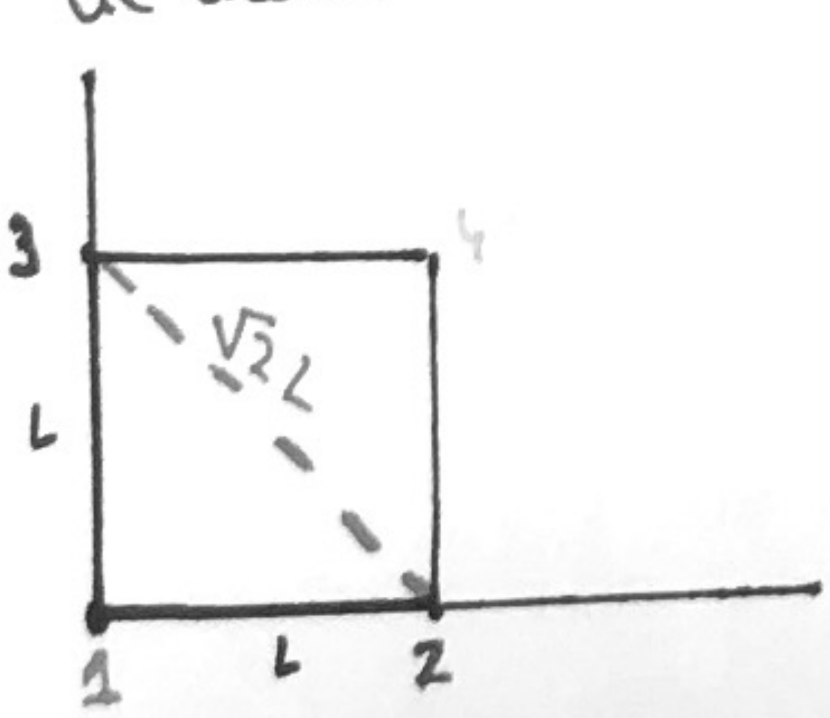
Como estamos en electroestática, $\vec{E}$ es conservativo, es decir $\underbrace{\nabla \times \vec{E} = \vec{0}}_{\text{ROTACIONAL}}$ y $\vec{E} = -\nabla V$

V es el potencial eléctrico

$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$

* Energía almacenada por un sistema de cargas

Ejemplo: calcular la energía almacenada por el sistema formado por cuatro cargas iguales q. dos positivas y dos negativas situadas en los vértices de un cuadrado de lado L.



1. Coloco $q_1>0$ en (0,0) y no supone ningún trabajo. $W_1 = 0$
2. Coloco $q_2>0$ en (L,0)
   $W_2 = q_2 V_{12} = q_2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{L} \xrightarrow{\text{FÓRMULA}} V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$
3. Coloco $q_3<0$ en (0,L)
   $W_3 = -q_3 V_{13} + (-q_3)V_{23} = -q_3 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{L} - q_3 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{\sqrt{2}L}$
4. Coloco $q_4<0$ en (L,L)
   $W_4 = -q_4 V_{14} - q_4 V_{24} - q_4 V_{34} = -q_4 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\sqrt{2}L} - q_4 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{L} - q_4 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q_3}{L}$

Energía acumulada → $W_E = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$

corriente eléctrica

$I = \frac{dq}{dt}$; sistema internacional $\rightarrow [I] = A$

* Densidad de corriente:

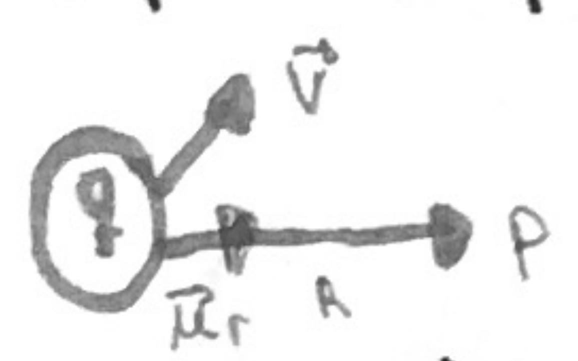
$\vec{J}$, densidad de corriente eléctrica ; $[\vec{J}] = A/m^2$

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{ds}$$

campo magnético (Magnetoestática)

* Ley de Biot-Savart:

- Campo creado por una carga en movimiento.



$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} q \frac{\vec{V} \times \vec{u_r}}{R^2} \quad ; \quad \vec{V} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad ; \quad d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} dq \frac{\vec{V} \times \vec{u}_r}{R^2}$$

↳ campo creado por un elemento de cable conducto

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{dq}{dt} \frac{d\vec{L} \times \vec{u_r}}{R^2} \quad ; \quad I = \frac{dq}{dt}$$

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} I \frac{d\vec{L} \times \vec{u_r}}{R^2}$$ $\Rightarrow$ ~~integramos a~~ todo el cable:

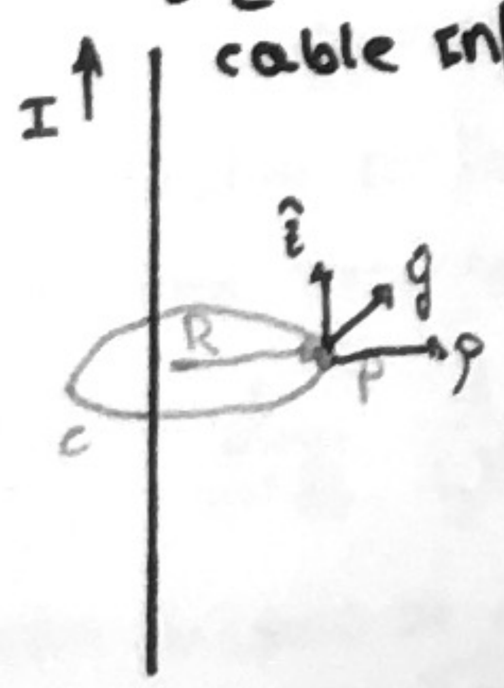
$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_L \frac{I \, d\vec{L} \times \vec{u_r}}{R^2}$$

Ley de Ampere

Sea c una curva cerrada:

cerrada → $\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{L} = \sum I_i$; I_i = intensidades que atraviesan la superficie encerrada por c.

cable infinito.



Queremos calcular el campo $\vec{H}$ a una distancia R del cable, en el punto P.

En un cable infinito $H = H(R)$, sale fuera de la integral:

$$H \int_c dL = I$$

Como la curva c es una circunferencia $\Rightarrow L = 2\pi R$

$H \, 2\pi R = I$; $H = \frac{I}{2\pi R}$; en cilíndricas : $\vec{H} = \frac{I}{2\pi R} \hat{y}$

$\boxed{\text{Relación entre } \vec{B} \text{ y } \vec{H}}$

$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$
$\begin{cases} \mu_0\text{; permitividad en el vacío} \\ \mu_r\text{; permitividad en el medio} \\ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{H/m} \end{cases}$

Condiciones de contorno campo magnético

Medio 1 ; μ_1
$\sigma_1, \vec{H}_1$ $\vec{H}_{T1}$ $\vec{H}_{N1}$

Medio 2 ; μ_2
$\sigma_2, \vec{H}_2$ $\vec{H}_{T2}$ $\vec{H}_{N2}$

① $B_{N1} = B_{N2}$ como se que $\vec{B} = \mu \vec{H}$, sustituimos:

$\mu_0 \mu_{r1} H_{N1} = \mu_0 \mu_{r2} H_{N2}$

$\mu_{r1} H_{N1} = \mu_{r2} H_{N2}$

② Las componentes tangenciales de la H son iguales si no tengo ningún tipo de corriente circulando por el medio que los separa, o frontera de separación.

$H_{T1} = H_{T2} \Rightarrow \dfrac{B_{T1}}{\mu_{r1}} = \dfrac{B_{T2}}{\mu_{r2}}$

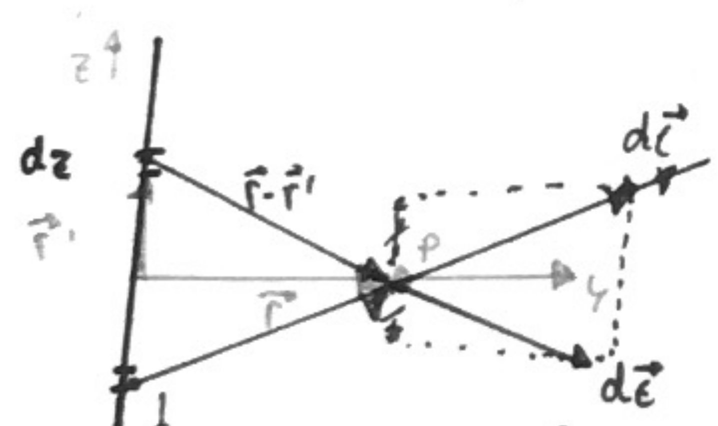
Con corrientes en la frontera de separación ($\vec{K}$):

$H_{T1} - H_{T2} = K_N \Rightarrow \dfrac{B_{T1}}{\mu_{r1}} - \dfrac{B_{T2}}{\mu_{r2}} = K_N \mu_0$

T.1. Ejercicios y ejemplos

Ejemplo: campo creado por distribuciones de cargas ; pág 1.

Campo creado por una línea recta e infinita con densidad de carga constante, λ.



$dq = \lambda dz'$

$\vec{r}' = z'\hat{z}$
$\vec{r} = y\hat{y}$
$\Big|\ \vec{r}-\vec{r}' = y\hat{y} - z'\hat{z}$

$d\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} (\vec{r}-\vec{r}')$

simétrico porque es inf. y se anulan por lo que solo tenemos comp en el eje y.

→ por simetría se anulan las componentes verticales de los campos $d\vec{E}$ en P.

$d\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\lambda dz'}{(\sqrt{y^2+z'^2})^3} (y\hat{y} - \cancel{z'\hat{z}})$ → aplicamos la simetría → quitamos vector z

NOTA: módulo de un vector $= \sqrt{x^2+y^2}$

→ cambio que hay que utilizar $[z' = y \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}]$

$\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\lambda y\, dz'}{(y^2+z'^2)^{3/2}} \hat{y}$ (λ cte)

NOTA VER PDF CON CAMBIOS IMPORTANTES

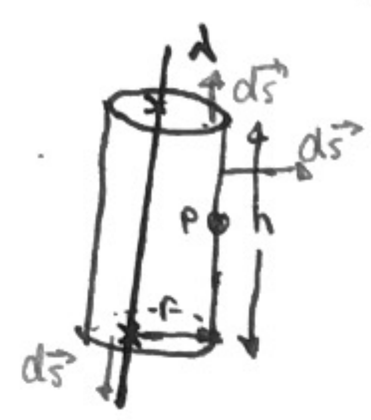
una vez hecha integral y todo: $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y} \hat{y} = \vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{u}_r$

↳ r: distancia del punto P al hilo infinito hacemos el mismo problema aplicando:

Teorema de Gauss

$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$; $\sum Q_i$ = cargas en el interior de S

S = superficie cerrada



$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$; $\sum Q_i = \lambda \cdot h$

0 porque $\vec{E}$ y $d\vec{s}$ son perpendiculares.

$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{s}}_{\text{tapa superior}} + \underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{s}}_{\text{tapa inferior}} + \underbrace{\int \vec{E}\, d\vec{s}}_{\text{lateral}}$

$d\vec{s}$ = vector perpendicular a la superficie.

$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$; $\vec{u}_r$ = vector perpendicular al hilo cargado.

$\int_{\text{sup lateral}} \vec{E}\, d\vec{s} = \int_{\text{sup lat.}} E\, ds = E\int_{S.L} ds = \boxed{ES = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}}$; $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

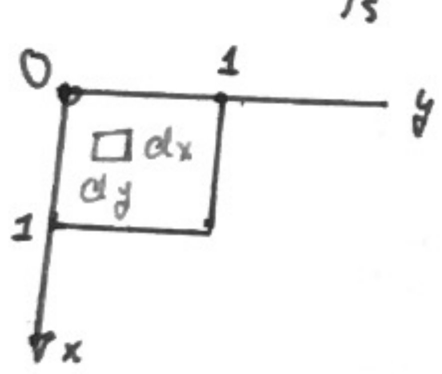
$S = 2\pi R h$
superficie de un cilindro

Ejercicio examen 29/10/18, Pág 2.

a) Carga total almacenada en el plano. Nos sugiere un cambio de variable.

densidad: $\rho = 5$

$dq = \rho_s\, ds \Rightarrow Q_T = \int_s \rho_s\, ds$; $ds = dx \cdot dy$.



$Q_T = \int_0^1\int_0^1 xy(x^2+y^2+25)^{3/2}\, dx\, dy$

cambio de variable que nos dan: $x^2 = u \Rightarrow x = \sqrt{u} = u^{1/2}$

$dx = \frac{1}{2}u^{-1/2}\, du = \frac{du}{2\sqrt{u}}$

como $x^2 = u \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0 \\ x=1 \Rightarrow u=1 \end{cases}$

$Q_T = \int_0^1\int_0^1 \sqrt{u}\, y(u+y^2+25)^{3/2}\frac{du}{2\sqrt{u}}\, dy = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 y(u+y^2+25)^{3/2}\, du\, dy =$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 y\left[\frac{(u+y^2+25)^{3/2+1 \to 5/2}}{5/2}\right]_0^1 dy = \frac{1}{25}\int_0^1 2y\left[\underbrace{(26+y^2)}_{f(y)}{}^{5/2 \to n} - (25+y^2)^{5/2}\right] dy =$

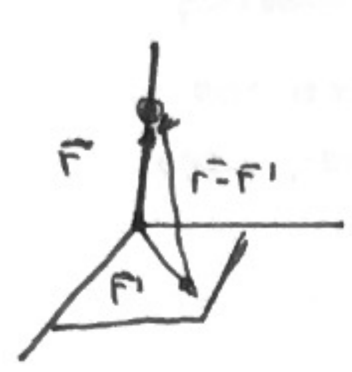
$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}$ $\qquad \underbrace{\qquad}_{f'(y)}$

FÓRMULA $\int f(x)^n \cdot f'(x)\, dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1}$; $n \neq 1$

$Q_T = \frac{1}{10}\left[\frac{(y^2+26)^{7/2}}{7/2} - \frac{(y^2+25)^{7/2}}{7/2}\right]_0^1 \Rightarrow Q_T = \frac{1}{35}\left[27^{7/2} - 26^{7/2} - \left((26^{7/2}) - 25^{7/2}\right)\right] nC$

$\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{7}$

b) campo eléctrico en el punto (0,0,5)



$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{(\vec{r}-\vec{r}')^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$dq = \rho_s\, ds \to ds = \cancel{dxdy} = (xy(x^2+y^2+25)^{3/2})\,dxdy$$

$$\vec{r} = 5\hat{z} \; ; \; r' = \hat{x}x + \hat{y}y ; \; \vec{r}-\vec{r}' = 5\hat{z} - (x\hat{x} + y\hat{y})$$

MODULO

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^3 = \left(\sqrt{x^2+y^2+25}\right)^3$$

$$\vec{E} = \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xy(x^2+\cancel{y^2}+25)(-x\hat{x}-y\hat{y}+5\hat{z})}{x^2+\cancel{y^2}+25}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^1\int_0^1 \underbrace{xy(-x\hat{x}-y\hat{y}+5\hat{z})}_{-x^2y\hat{x}-xy^2\hat{y}+5xy\hat{z}}\,dxdy = \int_0^1\int_0^1 \frac{10^{-9}xy(x^2+\cancel{y^2}+25)^{3/2}(-x\hat{x}-y\hat{y}+5\hat{z})}{4\pi\varepsilon_0(x^2+\cancel{y^2}+25)^{3/2}} = \overbrace{\frac{10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}}^{9}\int_0^1\int_0^1 xy(-x\hat{x}-y\hat{y}$$

$8.85\cdot10^{-12}$

$$+5\hat{z})\,dxdy = 9\left[\int_0^1\int_0^1 -x^2y\hat{x}\,dxdy + \int_0^1\int_0^1 -xy^2\hat{y}\,dxdy + \int_0^1\int_0^1 5xy\,dxdy\right] = 9(-1/6\,\hat{x} - 1/6\,\hat{y} + 5/4\,\hat{z})\ N/C.$$

c) Fuerza experimentada por una carga de -1 mC colocada en ese punto. te dan el campo $\vec{E}$

$$\vec{F} = q\vec{E} = \underbrace{-10^{-3}}_{1\,mC}(2\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})\Big|_{(0,0,5)}\ N$$

Ejemplo: densidad de corriente pag 3.

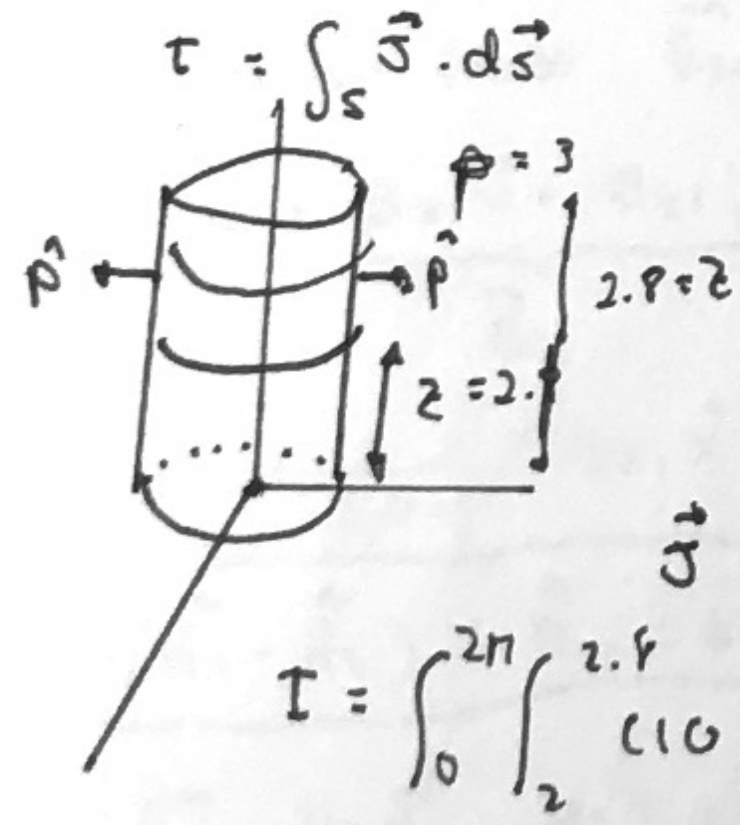
Nos dan $\vec{J} = 10\rho^3 z\,\hat{\rho} - 4\rho\cos^2\varphi\,\hat{\varphi}\ \frac{mA}{m^2}$ → nos lo dan en cilíndricas.

a) obtener $\vec{J}$ en $(3, 30°, 2)$ → cilíndricas $(\hat{\rho}, \varphi, \hat{z})$

$$\vec{J} = 10\cdot3^3\cdot2\cdot\hat{\rho} - 4\cdot\cos^2(30)\hat{\varphi}\ \frac{mA}{m^2}$$

b) I? $0<\varphi<2\pi$ $\quad 2<z<2.8$

$$I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{s} \qquad d\vec{s} = dxdy\,\vec{n}$$



$$\boxed{d\vec{s} = \rho\, d\varphi\, dz\, \hat{\rho}}$$

Elemento de superficie lateral en cilíndricas.

$$\vec{J} = 10\rho^3 z\hat{\rho} - 4\rho\cos^2\varphi\hat{\varphi}\ \frac{mA}{m^2}$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_2^{2.8} (10\rho^3 z\hat{\rho} - 4\rho\cos^2\varphi\underbrace{\hat{\varphi})\cdot\rho\,d\varphi\,dz\,\hat{\rho}}_{\hat{\varphi}\cdot\hat{\rho}=0} = \int_0^{2\pi}\int_2^{2.8} 10\rho^4 z\,d\varphi\,dz = 10\rho^4\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\left[\frac{z^2}{2}\right]_2^{2.8}\ mA$$

↳ $\rho = 3$

Ejercicio exámen 20/11/17 pág 3.

1.- nos dan un campo $\vec{H} = x^2\hat{x} + y^2\hat{y}$, obtener la circulación $\left(\int_L \vec{H}\cdot d\vec{L}\right)$ a lo largo de la curva L dada por $y = x^2$, desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$

Nos pide calcular $\int_L \vec{H}\cdot d\vec{L}$, estamos en cartesianas y dos dimensiones.

En $\mathbb{R}^2$: $d\vec{L} = dx\hat{x} + dy\hat{y}$

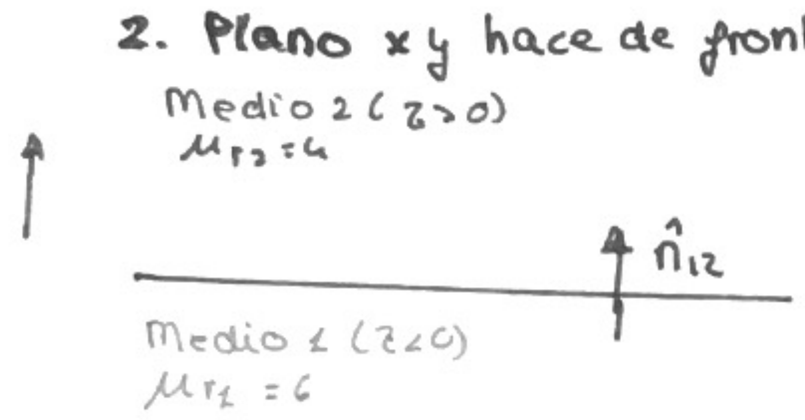
$$\int_L \vec{H}\cdot d\vec{L} = \int_L (x^2\hat{x} + y^2\hat{y})\cdot(dx\hat{x} + dy\hat{y});$$

$\int_L H\cdot d\vec{L} = \int_L (x^2 dx + y^2 dy)$; comos tenemos que hacerlo a lo largo de la curva $y = x^2$ significa que x e y no son independientes. $\Rightarrow$ ~~dy =~~ $y = x^2 \Rightarrow dy = 2x\,dx$

$$\int_L \vec{H}\, d\vec{L} = \int_0^1 x^2\,dx + x^4\,2x\,dx = \int_0^1 (x^2 + 2x^5)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{2/3}$$

Ejercicio exámen 29/10/18 Pág 4.

2. Plano xy hace de frontera entre 2 medios



* $K = \frac{1}{\mu_0}\hat{y}\ \frac{mA}{m}$
* $\vec{B_2} = 5\hat{x} + 8\hat{z}\ \frac{mWb}{m^2}$ = miniteslas.

a) $\vec{H_1}$ y $\vec{B_1}$

b) Energía magnética almacenada.

a) condición de contorno 1. $B_{N1} = B_{N2}$; $\vec{B_2} = \vec{B_{T2}} + \vec{B_{N2}} \begin{cases} \vec{B}_{T2} = 5\hat{x} \\ \vec{B}_{N2} = 8\hat{z} \end{cases}$

Por lo tanto $\vec{B_{N1}} = 8\hat{z}$

$$\vec{B_1} = \underbrace{B_{x1}\hat{x} + B_{y1}\hat{y}}_{\vec{B_{T1}}} + 8\hat{z} \Rightarrow \underbrace{\vec{B_1} = \mu_1\vec{H_1}}_{\text{FÓRMULA}} \qquad \mu_1 = \mu_r\mu_0 = 6\mu_0$$

$\vec{H_1} = \frac{1}{6\mu_0}(B_{x1}\hat{x} + B_{y1}\hat{y} + 8\hat{z})$; utilizamos la otra condición de contorno.

$\boxed{(\vec{H_1} - \vec{H_2}) \times \hat{n}_{12} = \vec{K}}$ $\hat{n}_{12} = \hat{z}$

$\vec{B_2} = \mu_2\vec{H_2}$; $\mu_2 = \mu_{r2}\mu_0 = 4\mu_0$

$$\vec{H_2} = \frac{1}{4\mu_0}(5\hat{x} + 8\hat{z})$$

$$\vec{H_1} - \vec{H_2} = \frac{1}{\mu_0}\left[\left(\frac{B_{x1}}{6} - \frac{5}{4}\right)\hat{x} + B_{y1}\hat{y} + \left(\frac{8}{6} - 2\right)\hat{z}\right]$$

$(\vec{H_1} - \vec{H_2}) \times \hat{n}_{12}$ producto vectorial $\frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{B_{x1}}{6} - \frac{5}{4} & B_{y1} & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{K} \Rightarrow \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{B_{y1}}{6}\hat{x} - \left(\frac{B_{x1}}{6} - \frac{5}{4}\right)\hat{y}\right] = \overbrace{\frac{1}{\mu_0}\hat{y}}^{K}$

$\boxed{B_{y1} = 0}$ $\quad -\left(\frac{B_{x1}}{6} - \frac{5}{4}\right) = 1$; $B_{x1} = 3/2$ $\quad \boxed{\vec{B_1} = 3/2\,\hat{x} + 8\hat{z}\ \frac{mWb}{m^2}}$ $\quad \boxed{\vec{H_1} = \frac{\vec{B_1}}{\mu_1} = \frac{1}{\mu_0 6}\vec{B_1}}\ \frac{mA}{m}$