

TEMA 3: ondas planas:

* Ec. onda: $u(x, y, z, t) = M_0(x, y, z) \cos(\omega t + \varphi(x, y, z))$
 $\omega = 2\pi f$

* Fórmula de Euler: $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

[ponemos la primera en función de la segunda]

$$e^{j\theta} = \underbrace{e^{\cos\theta}}_{\text{Real}} + j \underbrace{e^{\sin\theta}}_{\text{Imaginaria}} \quad \theta = \omega t + \varphi$$

* $u(x, y, z, t) = \text{Re} \{ M_0(x, y, z) e^{j(\omega t + \varphi(x, y, z))} \}$

* $u(x, y, z, t) = \text{Re} \{ M_0(x, y, z) e^{j\omega t} e^{j\varphi(x, y, z)} \}$

FAZOR: $\tilde{u}(x, y, z, t) = M_0(x, y, z) e^{j\varphi(x, y, z)} \rightarrow \text{NUNCA en un fásor aparece el tiempo } e^{j\omega t}$

* Derivación:

$$u(x, y, z) = \text{Re} \{ M_0(x, y, z) e^{j(\omega t + \varphi)} \}$$

$$\frac{\partial M_0}{\partial t} = j\omega M_0(x, y, z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{Re} \{ M_0(x, y, z) j\omega e^{j(\omega t + \varphi)} \}$$

* Integración:

$$u(x, y, z) = \text{Re} \{ M_0(x, y, z) e^{j(\omega t + \varphi)} \}$$

$$\int u_0 dt = \frac{1}{j\omega} u_0$$

$$\int u dt = \text{Re} \{ M_0(x, y, z) \frac{1}{j\omega} e^{j(\omega t + \varphi)} \}$$

FORMA ABREVIADA:

$$\tilde{u}(x, y, z, t) = M_0(x, y, z) e^{j\varphi(x, y, z)}$$

$$\boxed{u = m_0 e^{j\varphi}}$$

16

Ondas planas en el vacío:

* Aproximamos el resultado de la ecuación de onda por medio:

1) Se propaga según el eje Z:

$$(*) E_x(z,t) = E_0 \cos(\omega t - k_0 z) \quad [+z]$$

$$(**) E_x(z,t) = E_0 \cos(\omega t + k_0 z) \quad [-z]$$

$$(\dagger) \vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - k_0 z) \hat{x}; \quad \vec{E}(z) = E_0 e^{-jk_0 z} \hat{x}$$

$$(\dagger\dagger) \vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t + k_0 z) \hat{x}; \quad \vec{E}(z) = E_0 e^{jk_0 z} \hat{x}$$

FORMA INSTANTÁNEA

FORMA FASORIAL

$$k_0 = \beta = \frac{\omega}{v_p} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}; \quad v_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$$

↳ constante de fase ↳ $3 \cdot 10^8$ m/s (en el vacío)
o número de onda

* Forma de calcular el campo $\vec{H}$:

$$\nabla \times \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \rightarrow \text{en forma fasorial:}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{y} = -j\omega \mu_0 \vec{H}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega \mu_0 H_y; \quad E_x = E_0 e^{-jk_0 z} \quad (+z)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = E_0 e^{-jk_0 z} (-jk_0)$$

$$E_0 e^{-jk_0 z} (-jk_0) = -j\omega \mu_0 H_y$$

$$H_y = \frac{k_0}{\omega \mu_0} E_0 e^{-jk_0 z}; \quad \frac{k_0}{\omega} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$H_y = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\mu_0} E_0 e^{-jk_0 z} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 e^{-jk_0 z}$$

$$H = \frac{1}{\eta_0} E_0 e^{-jk_0 z}; \quad H_y = \frac{1}{\eta_0} E_x$$

Se define $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ impedancia intrínseca en el vacío $\eta_0 = 120\pi \Omega$

* forma fasorial:

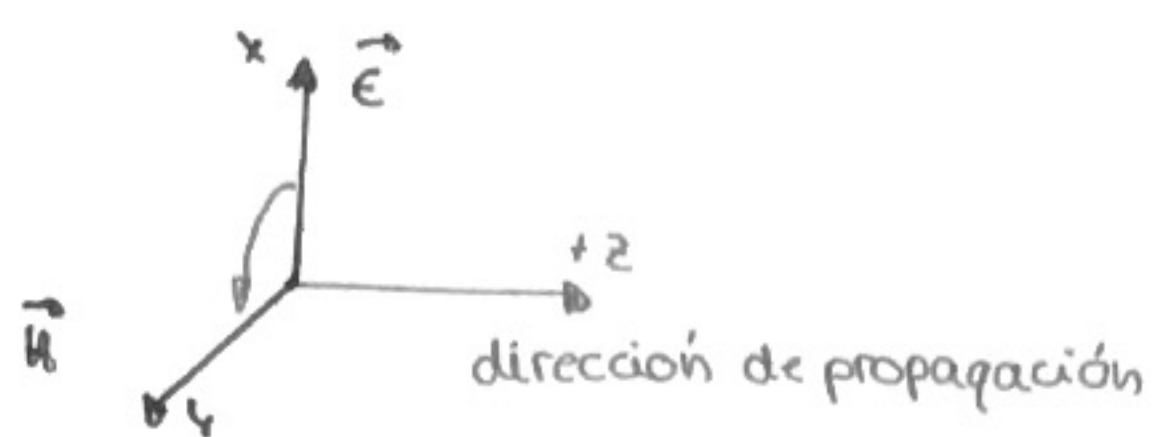
$$\vec{H} = \frac{1}{\eta_0} E_x \hat{y}$$

* forma instantánea

$$\vec{H}(z,t) = \frac{1}{\eta_0} E_0 \cos(\omega t - k_0 z) \hat{y}$$

$$H_0 = \frac{E_0}{\eta_0}$$

16



Ondas planas en medios con pérdidas

Sean ϵ_r y μ_r las características del medio:

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0; \mu = \mu_r \mu_0$$

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - Kz) \hat{x} \quad H_0 = \frac{E_0}{\eta}$$

$$\vec{H}(z,t) = H_0 \cos(\omega t - Kz) \hat{y}$$

$$K = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = \omega \sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\epsilon_r \mu_r}; K = K_0 \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$$

* Como estamos en un medio con pérdidas:

$$\sigma \neq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ si } \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1 \Rightarrow \text{Aislante} \\ \bullet \text{ si } \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1 \Rightarrow \text{Conductor} \end{array} \right. \quad \omega = 2\pi f, \text{ la } f \text{ influye}$$

* También tendremos: $\vec{D} = \alpha + j\beta$

α : coef de atenuación [Np/m]

β : coef de fase [rad/m]

$$\vec{E}(z) = E_0 \underbrace{e^{-\alpha z}}_{\text{atenuación}} e^{-j\beta z} \hat{x} = E_0 e^{-\overbrace{(\alpha + j\beta)z}^{\vec{D}}} \hat{x}$$

* La onda disminuye su amplitud según avanza?

$$\vec{E}(z,t) = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - j\beta z) \hat{x}$$

$$\vec{H}(z) = H_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \hat{y} = H_0 e^{-\overbrace{(\alpha + j\beta)z}^{\vec{D}}} \hat{y}$$

$$\vec{H}(z,t) = H_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - j\beta z) \hat{y}; H_0 = \frac{E_0}{\eta}$$

Si $\frac{G}{\omega \epsilon} \ll 1$ (aislante) $\Rightarrow \alpha \approx \frac{G}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} ; \beta \approx \omega \sqrt{\mu \epsilon} ; \eta \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} ; v \approx \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$

La velocidad de propagación

Si $\frac{G}{\omega \epsilon} \gg 1$ (conductor) $\Rightarrow \alpha = \beta \approx \sqrt{\frac{\omega \mu G}{2}} ; \eta \approx (1+j) \frac{\alpha}{G}$

Planteamiento general

El campo eléctrico está en cualquier dirección del espacio.

Definimos: $K^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2$; el vector de propagación de la onda:

$$\vec{K} = K_x \hat{x} + K_y \hat{y} + K_z \hat{z} \rightarrow \text{vector propagación}$$

$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} \rightarrow \text{vector posición}$$

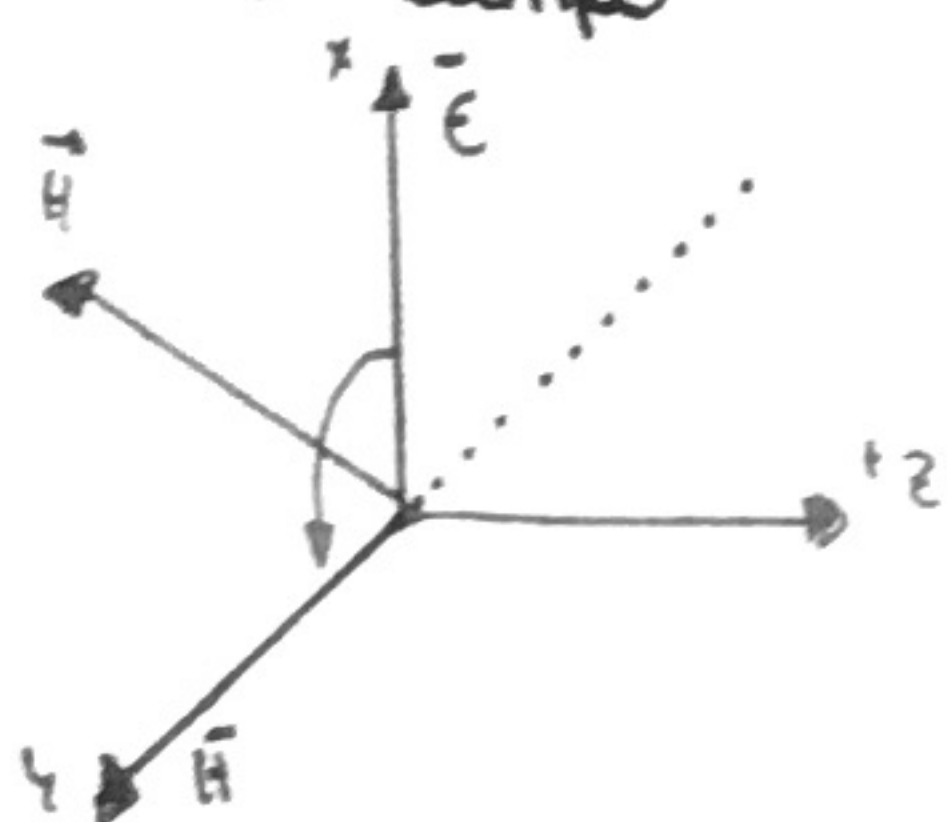
$$\vec{E} = E_0 e^{-j\vec{K} \cdot \vec{r}} \rightarrow \vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{\eta} (\vec{K} \times \vec{E}); \vec{E} = -\eta (\vec{K} \times \vec{H})$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} (\vec{E} \times \vec{K}); \vec{E} = \eta (\vec{H} \times \vec{K})$$

Ejercicio 3. 9/2/18 $\rightarrow$ Se propaga en el aire; dirección de propagación $+z$; $H_0 = \frac{1}{\pi} \text{ A/m}$

el campo $\vec{H}$ varía en $(\hat{x} + \hat{y})$



Con $f = 100 \text{ MHz}$

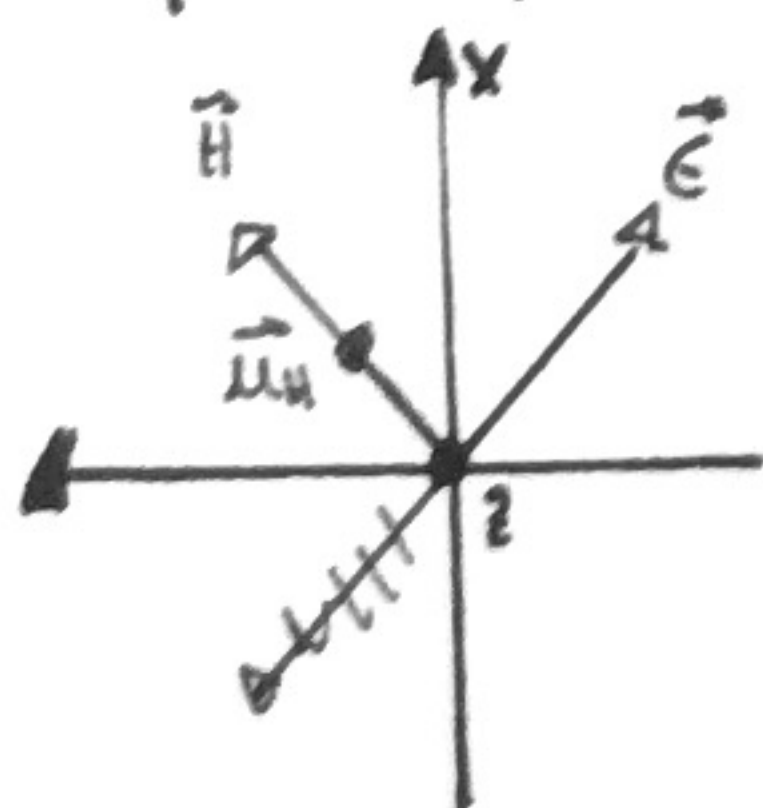
a) Expresión fasorial de $\vec{E}$.

$$\vec{E}(z) = E_0 e^{-j\beta z} \hat{u}; \hat{u} \text{ vector unitario en la dirección de } \vec{E}$$

$$H_0 = \frac{E_0}{\eta_0}; \eta_0 = 120\pi \Omega \text{ (vacío = aire)}$$

$$E_0 = \eta_0 H_0 = 120\pi \frac{1}{\pi} = 120 \text{ V/m}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/s}$$



$\vec{H}$ tiene una dirección $(\hat{x} + \hat{y})$ que convertimos en unitario:

$$\left[\frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}} \right] \Rightarrow \hat{u}_H$$

$$\left[\frac{\hat{x} - \hat{y}}{\sqrt{2}} \right] \Rightarrow \hat{u}_E$$

$$\frac{\hat{x} - \hat{y}}{\sqrt{2}} \text{ V/m}$$

$$\vec{E}(z) = 120 e^{-j\frac{2\pi}{3}z}$$

49 b) Al estar en un medio sin pérdidas:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{E_0^2}{2\eta_0} \hat{z} = \frac{120^2}{2 \cdot 120\pi} \hat{z} = \frac{60}{\pi} \hat{z} \frac{W}{m^2}$$

$$E_0 = \eta_0 H_0; \langle \vec{S} \rangle = \frac{\eta_0 H_0^2}{2\eta_0} \hat{z}$$

c) $\vec{E}(x, y, z, t) = \frac{2.1}{\pi} \sin(10^8 t - 0.7x - 1.2y - 2.7z) \text{ V/m}$

La primera onda se propaga según $z \Rightarrow \hat{z}$

$$\vec{E} = \frac{2.1}{\pi} \sin(10^8 t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \text{ V/m}$$

$$\vec{k} = 0.7\hat{x} + 1.2\hat{y} + 2.7\hat{z} \quad \vec{k} \cdot \vec{r} = 0.7x + 1.2y + 2.7z$$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

El ángulo que formarían las dos direcciones de propagación será:

$$\hat{z} \cdot \vec{k} = |\hat{z}| |\vec{k}| \cos(\alpha)$$

$$|\hat{z}| = 1; |\vec{k}| = \sqrt{(0.7)^2 + (1.2)^2 + (2.7)^2} = 3.036$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\hat{z} \cdot \vec{k}}{1 \cdot 3.036} = \frac{2.7}{3.036}; \quad \boxed{\alpha = 27.23^\circ}$$

Una onda igual que la anterior se propaga por el medio 1 ($z < 0$), el vacío, según $\hat{x}$.

Esta onda incide en el vacío medio 2 ($z > 0$) caracterizado $\epsilon = 4\epsilon_0$

19

* Si el medio 1 es un aislante o dieléctrico ($\sigma_1 = 0$) y el medio 2 tiene

20

Vector de Poynting

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}; [\vec{S}] = \frac{W}{m^2}$$

Valor promedio:

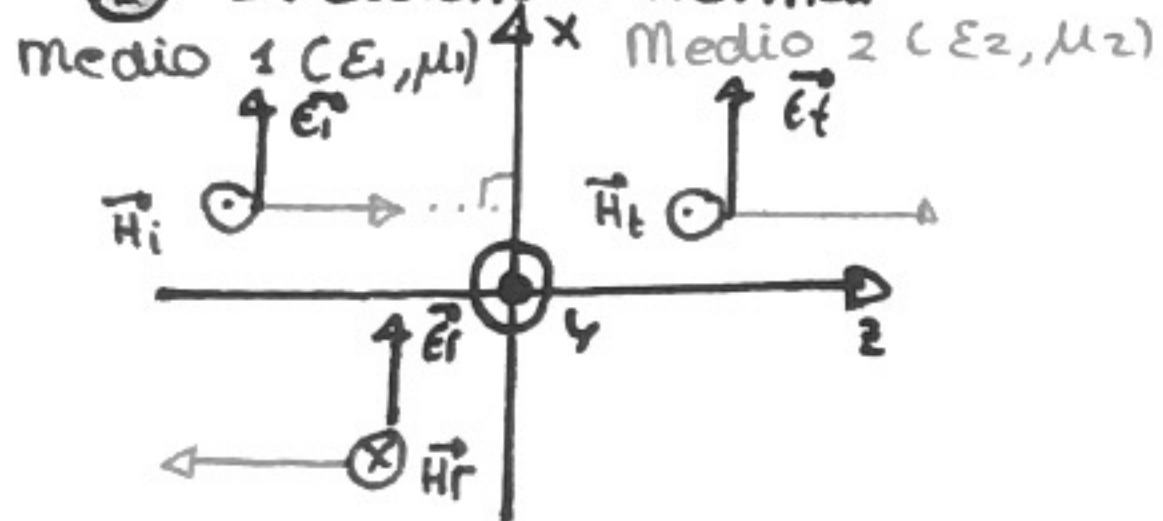
$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*]$$

$\vec{H}^*$ es el complejo conjugado de $\vec{H}$.

$\vec{S}$ es un vector en la dirección de propagación de la onda.

Ondas Planas. Cambio de medio

① Incidencia normal



$$E_{oi} + E_{or} = E_{ot}$$

$$H_{oi} - H_{or} = H_{ot} \quad (*)$$

$$\text{Recordando: } H_o = \frac{\epsilon_o}{\eta}$$

$$(*) \quad \frac{\epsilon_{oi}}{\eta_2} - \frac{\epsilon_{or}}{\eta_1} = \frac{\epsilon_{ot}}{\eta_2} \quad \text{y con } E_{oi} + E_{or} = E_{ot} \text{ obtenemos:}$$

$$E_{or} = E_{oi} \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

$$E_{ot} = E_{oi} \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \rightarrow \text{Coeficiente de reflexión}$$

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \rightarrow \text{Coeficiente de transmisión}$$

$$\tau = 1 + \Gamma; -1 \leq \Gamma \leq 1$$

$$\text{Medio ① } \vec{E}_i = E_{oi} e^{-\gamma_1 z} \hat{x}; \vec{H}_i = \frac{E_{oi}}{\eta_1} e^{-\gamma_1 z} \hat{y}$$

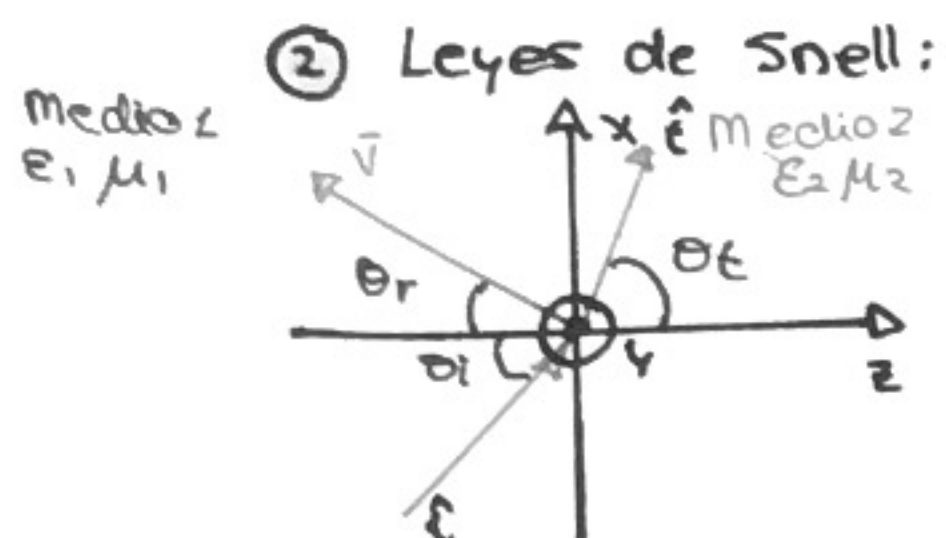
$$\vec{E}_r = E_{oi} \Gamma e^{\gamma_1 z} \hat{x}; \vec{H}_r = \frac{E_{oi} \Gamma}{\eta_1} e^{\gamma_1 z} (-\hat{y})$$

$$\text{Medio ② } \vec{E} = E_{oi} \tau e^{-\gamma_2 z} \hat{x}; \vec{H}_t = \frac{E_{oi} \tau}{\eta_2} e^{-\gamma_2 z} \hat{y}$$

29

* Si el medio 1 es un aislante o dieléctrico ($\sigma_1 = 0$) y el medio 2 tiene una alta conductividad.

($\sigma_2 \rightarrow \infty$) $\Rightarrow \Gamma = -1$ y $\tau = 0$ [Todo se refleja y nada se transmite]



1^{ra} ley: $\sin(\theta_i) = \sin(\theta_r) \Rightarrow \theta_i = \theta_r$

2^{da} ley: $\sigma_1 \sin(\theta_i) = \sigma_2 \sin(\theta_t)$

* Si $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\sigma_1 = j\beta_1$; $\sigma_2 = j\beta_2$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

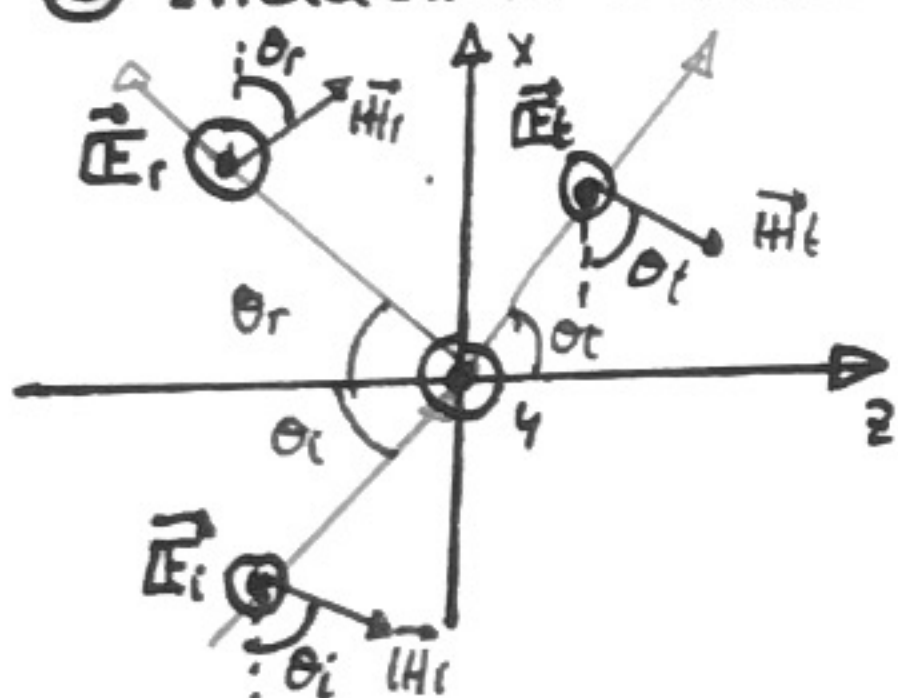
$j\beta_1 \sin(\theta_i) = j\beta_2 \sin(\theta_t)$ $\beta = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$; $\omega = 2\pi f$

$\omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \theta_i = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \sin(\theta_t)$

$\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \theta_i = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \sin \theta_t$

$\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin(\theta_i) = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \sin(\theta_t)$

③ Incidencia oblicua. Caso I: el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia.



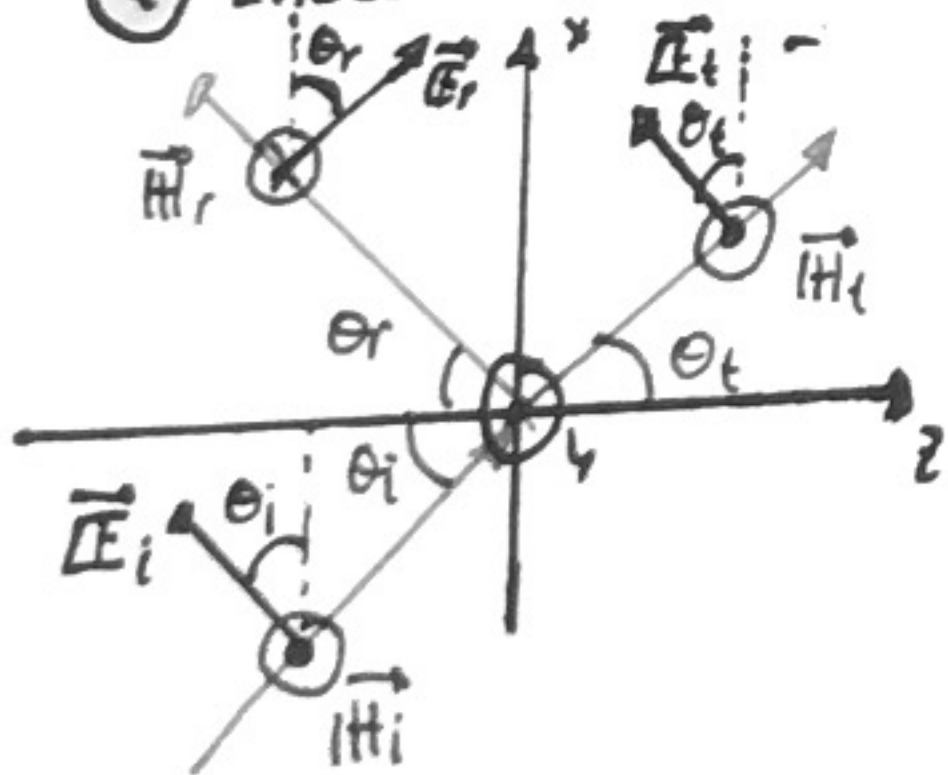
Ecuaciones de Fresnel:

$\Gamma_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$

$\tau_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos(\theta_i)}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$

$E_{or} = E_{oi} \Gamma_{\perp}$; $E_{ot} = E_{oi} \tau_{\perp}$

④ Incidencia oblicua. Caso II: el campo magnético es perpendicular al plano de incidencia.



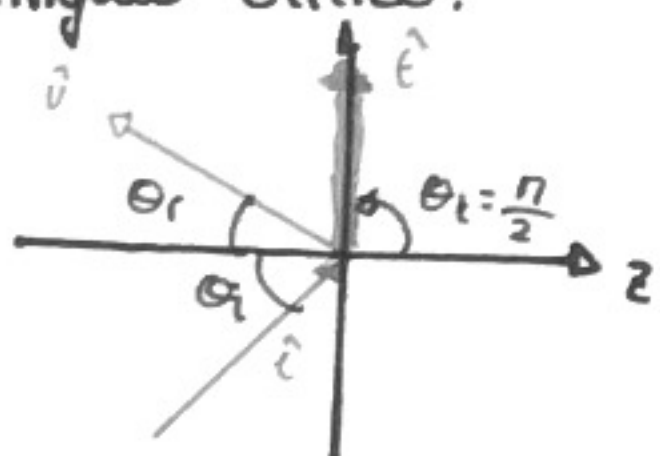
Ecuaciones de Fresnel:

$\Gamma_{\parallel} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$

$\tau_{\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$

$1 + \Gamma_{\parallel} = \tau_{\parallel} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$

5 Ángulo crítico:

Suponemos que medio 1 y medio 2 $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$ 2^{da} Ley de Snell $\Rightarrow \sqrt{\epsilon_{r1}} \sin(\theta_i) = \sqrt{\epsilon_{r2}} \sin(\frac{\pi}{2})$

$$\theta_i = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}}\right) \quad \epsilon_{r1} > \epsilon_{r2}$$

* Toda la potencia se transmite por la superficie de separación.

6 Ángulo de Brewster: el ángulo en el cual se anula la componente paralela de la onda reflejada.

$$r_{||} = 0 \Rightarrow \eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_r = 0$$

$$\theta_B = \arctg\left(\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}\right) \quad \text{Suponemos que } \mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$$

Ejercicio 2 9/11/2019

$$\vec{E}(y, z, t) = \frac{1}{60\pi} \cos(\omega t + 2\sqrt{3}x - 5z) \hat{y} \text{ V/m en el vacío } (\epsilon_0, \mu_0)$$

$$a) \vec{E}(y, z, t) = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \hat{y} \text{ V/m}$$

$$\vec{E}(y, z, t) = \frac{1}{60\pi} \cos(\omega t - (2\sqrt{3}x + 5z)) \hat{y} \text{ V/m}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = -2\sqrt{3}x + 5z \quad k_x = -2\sqrt{3}$$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad k_y = 0$$

$$\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z} \quad k_z = 5$$

$$\vec{k} = -2\sqrt{3}\hat{x} + 5\hat{z} \quad (\text{dirección de propagación de } k) \rightarrow \text{vector unitario} \Rightarrow \hat{k} = \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}; \|\vec{k}\| = 6.0828$$

$$\hat{k} = \begin{matrix} 0.6028 & 0 \\ -0.91 & 0.822 \end{matrix} \hat{x} + 0.822 \hat{z}$$

$$b) k = \frac{\omega}{c}; c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}; \|\vec{k}\| = 6.0828$$

$$\omega = k \cdot c = 6.0828 \cdot 3 \cdot 10^8 = 1.825 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$$

$$c) \vec{E} = \underbrace{\frac{1}{60\pi} e^{(2\sqrt{3}x - 5z)}}_{\text{IGUAL}} \hat{y} = \underbrace{\frac{1}{60\pi} e^{-(2\sqrt{3}x + 5z)}}_{\text{IGUAL}} \hat{y} \text{ V/m}$$

El enunciado sigue, es el de la página 18 (una onda igual...)

d) Coeficiente de reflexión



Incidencia normal $\Rightarrow \Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$

$$\eta_1 = 120\pi \Omega$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\epsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{1}{4}} 120\pi = 60\pi \Omega$$

$$\Gamma = \frac{60\pi - 120\pi}{60\pi + 120\pi} = \frac{-60\pi}{180\pi} = -1/3$$

e) $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [\vec{E} \times \vec{H}^*]$; calculamos la densidad media de potencia incidente:

$$\vec{E}_i = \frac{1}{60\pi} e^{-\beta_1 z} \hat{y}; \vec{H}_i = \frac{1/60\pi}{\eta_0} e^{-\beta_1 z} (-\hat{x})$$

$$\vec{H}_i^* = \frac{1/60\pi}{\eta_0} e^{+\beta_1 z} (-\hat{x})$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\frac{1}{60\pi} e^{-\beta_1 z} \frac{1/60\pi}{120\pi} e^{+\beta_1 z} \right] \hat{z} \frac{W}{m^2}$$

$$\langle \vec{S}_i \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{(60\pi)^2} \frac{1}{120\pi} = 3.73 \cdot 10^{-9} \hat{z} \frac{W}{m^2}$$

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{2 \cdot 60\pi}{120\pi + 60\pi} = \frac{120\pi}{180\pi} = \frac{2}{3}$$

$$\langle \vec{S}_t \rangle = \frac{2}{3} \langle \vec{S}_i \rangle$$