BOLETÍN DE EJERCICIOS
TEMA 1. ELECTROSTÁTICA

---

1. Electrostática. Campo eléctrico

EJ. 1. 1. Calcular el campo eléctrico generado por una línea infinita de carga colocada en el eje y con una densidad lineal de carga $\rho_L = 5\ nC/m$ en el punto $P(4,0,0)$ metros. Expresarla en coordenadas cilíndricas y cartesianas.
SOLUCIÓN:
La expresión general del campo generado por una línea infinita de carga, en coordinadas cilíndricas, es:

$$\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\hat{\rho}$$

A diferencia del desarrollo teórico, la línea está colocada en el eje $\hat{y}$ pero eso no cambia el sentido de ρ que es la distancia del filamento de carga a P. En este caso es $4\ m$. Por lo tanto $\rho = 4$

$$\vec{E} = \frac{5.10^{-9}}{2\pi\, 8'854.10^{-12}\, .4}\hat{\rho} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\vec{E} = 22'47\hat{\rho}} \quad V/m$$

En este caso, expresarlo en coordenadas cartesianas es inmediato, ya que el vector de campo cae en el eje x por la posición de la línea de carga y apunta en sentido de alejarse de ella, es decir, está en el eje x, por lo tanto

$$\boxed{\vec{E} = 22'47\hat{x}} \qquad V/m$$

EJ. 1. 2. Calcular el campo eléctrico, en coordenadas cilíndricas y cartesianas, generado por una línea infinita de carga de $5 \cdot 10^{-9} C/m$ colocada paralela al eje z y cortando al plano xy en el punto $Q'(2,1,0)$ El punto en el que hay que calcular el campo es $P(1,3,0)$.
SOLUCIÓN:
El campo es un vector perpendicular a la línea. Por lo tanto solo tiene componente en $\hat{\rho}$ y su expresión es sencilla con solo obtener la distancia del punto de campo a la línea:

$$\rho = |\vec{P} - \vec{Q}'| = |(\hat{x} + 3\hat{y}) - (2\hat{x} + \hat{y})\,| = |-\hat{x} + 2\hat{y}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} = 2'24\ m$$

$$\vec{E} = \frac{5 \cdot 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0\ 2'24}\hat{\rho} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\vec{E} = 40'12\hat{\rho} \qquad V/m}$$

El campo también se puede expresar como su módulo multiplicado por un vector unitario en la dirección del campo. Esta dirección está dada por los puntos Q' y P. Por lo tanto, el vector unitario es:

$$\hat{u} = \frac{\vec{P} - \vec{Q}'}{|\vec{P} - \vec{Q}'|} = \frac{-\hat{x} + 2\hat{y}}{2'24} = -0'45\hat{x} - 0'89\hat{y}$$

$$\vec{E} = 40'12(-0'45\hat{x} - 0'89\hat{y}) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\vec{E} = -17'98\hat{x} + 35'95\hat{y} \quad V/m}$$

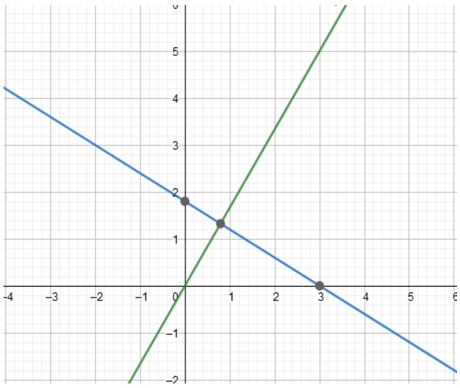
EJ. 1. 3. Se tiene una línea infinita de carga colocada en el plano xy pasando por los puntos $A(0,0,0)$ y $B(3,5,0)\ m$ La densidad lineal de carga es $\rho_L = 5.10^{-9}\ C/m$. Calcular el campo eléctrico generado por esta línea en el punto $P(3,0,0)\ m$
SOLUCIÓN:

Para calcular el campo eléctrico es necesario calcular de la distancia del punto del campo a la linea cargada l. Sea r la recta que pasa por P y es perpendicular a l. Si se llama I al punto intersección entre las dos, la distancia entre P y l es la que hay entre P e I, el punto intersección entre l y r . Se deducen las ecuaciones de ambas rectas.

- *recta l (verde en la ilustración): No tiene componente en z por lo que es de la forma $y = kx$. Pasa por $B(3, 5, 0)$ y en consecuencia se cumple que $k = 3/5$. Finalmente la expresión de l es:*

$$y = \frac{5}{3}x$$

- *recta r (azul en la ilustración): Pasa por P y es perpendicular a l. Para calcularla se aplica el hecho de que los vectores $\vec{PI}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares y por lo tanto su producto escalar es cero: $\vec{PI} \cdot \vec{B} = 0$*



El cálculo del punto de intersección $I(x_I, y_I, 0)$ se hace teniendo en cuenta que los vectores $\vec{PI}$ (formado por los puntos P e I) y $\vec{B}$ (formado por el origen de coordenadas y el punto I buscado) son perpendiculares por lo que su producto vectorial es cero:

$$\vec{PI} = (3, 0, 0) - (x, y, 0) = (3 - x)\hat{x} - \hat{y}$$

$$\vec{B} = 3\hat{x} + 5y\hat{y}$$

$$\vec{PI} \cdot \vec{B} = (3 - x)3 - 5y = 0 \Longrightarrow y = \frac{3}{5}(3 - x)$$

Como el punto $I(x_I, y_I, 0)$ buscado pertenece también a la recta l, debe cumplirse que $y_I = \frac{5}{3}x_I$ quedando:

$$\frac{5}{3}x_I = \frac{3}{5}(3 - x_I) \Rightarrow x_I = 0'79 \textit{ e } y_I = 1'32$$

Ya se puede calcular la distancia de la línea de carga al punto de campo y, en consecuencia el módulo del campo eléctrico:

$$E = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{P} - \vec{I}|} = \frac{5.10^{-9}}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{|(3, 0, 0) - (0'79, 1'32, 0|} = 43'97\ V/m$$

El campo en coordenadas cilíndricas queda:

$$\boxed{\vec{E} = 34'97\ \hat{\rho} \quad V/m}$$

Y en cartesianas: $\vec{E} = E\hat{u} = E\frac{\vec{PI}}{|\vec{PI}|} = \frac{1}{2'57}((3 - 0 - 0'79)\hat{x} - 1'32\hat{y}) = 0'86\hat{x} - 0.51\hat{y}$

$$\vec{E} = 34'97(0'86\hat{x} - 0.51\hat{y}) \Rightarrow \boxed{\vec{E} = 30'07\hat{x} - 17'8\hat{y} \qquad V/m}$$

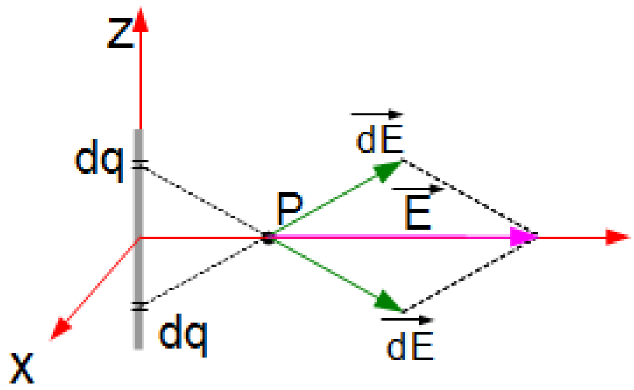


Figura 1: Eliminación de las componentes del campo que son paralelas al eje z

EJ. 1. 4. Calcular el campo eléctrico generado por una línea infinita de carga, de densidad de carga $\rho_L\ C/m$ colocada en el eje Z usando el teorema de Gauss.
SOLUCIÓN:
*Este problema presenta simetría cilíndrica porque el cálculo que se haga en un punto, para una distancia definida a la línea, las otras dos componentes (ángulo φ y altura z) no afectan al resultado. Esto es así por que la línea de carga es **infinita**.*
Además, por la misma razón, cualquier diferencial de carga en la línea, por encima del punto de campo va a tener uno igual, a la misma distancia y por debajo del primero. Entonces, los diferenciales de campo generados por cada uno de ellos son simétricos y su suma vectorial resultará tener, solamente, componente $\hat{\rho}$.
*El teorema de Gauss dice que el flujo a través de cualquier superficie **cerrada** es igual a la carga encerrada en esta superficie dividido por ϵ_0.*

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

La superficie idónea en este caso es un cilindro cuyo eje coincide con el eje z. Sea uno de longitud L y radio R El flujo a través de esta superficie se puede calcular como el flujo a través de la superficie lateral, Φ_L, más el flujo a través de las dos "tapaderas"del cilindro, la superior, Φ_{TS}, y la inferior, Φ_{TI}:

$$\Phi_T = \Phi_L + \Phi_{TI} + \Phi_{TS}$$

- *En el caso de la superficie lateral, sucede que el vector $\vec{E}$ y el vector diferencial de superficie $d\vec{S}$ son paralelos, por lo que su producto escalar es igual al de sus módulos: EdS. Además, como todos los puntos de esta superficie distan lo mismo de la línea de carga (eje del cilindro), este módulo es el misto en toda ella, con lo que:*

$$\Phi_L = \int_S \vec{E} \cdot \vec{S} = \int_S EdS = E \int_S dS = ES_L = E\ 2\pi RL$$

- *En las superficies superior e inferior, el vector diferencial de superficie es perpendicular a cada una de ellas, por lo tanto según $\hat{z}$ (o $-\hat{z}$, mientras que el campo sigue siendo perpendicular a la línea. Por lo tanto, su producto escalar será cero y también lo será el flujo por ambas:*

$$\Phi_{TS} = \Phi_{TS} = 0$$

- *En el segundo miembro del teorema de Gauss, Q es la carga encerrada en la superficie. En este caso es un tramo de línea de L metros, y por tanto: $Q = \rho_L L$*

Por fin, la expresión queda:

$$E\ 2\pi RL = \rho_L L \quad \Rightarrow E = \frac{\rho_L}{2\pi R}$$

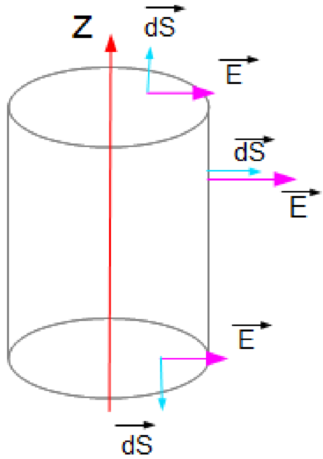


Figura 2: Visualización de los vectores asociados a las superficies laterales y tapas del cilindro

Recuérdese que R es la distancia del punto a la línea por lo que, al ser ρ la nomenclatura habitual para esta magnitud en el sistema cilíndrico, el resultado queda:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\hat{\rho}} \qquad V/m$$

EJ. 1. 5. (E) Se tiene una línea de longitud L colocada en el eje x con uno de sus extremos en el origen de coordenadas de forma que llega hasta $x = L$. Está cargada de manera uniforme a razón de $\rho_L\, C/m$. Calcule:

a) El campo eléctrico generado en el punto $P(a, 0, 0)$ siendo $a > L$.

b) El potencial eléctrico en cualquier punto del eje x para $x >> L$.

c) La energía necesaria para trasladar una carga Q del punto b al c cumpliéndose que $a << b < c$.

SOLUCIÓN:

a) La carga que va a generar el campo está distribuida a lo largo de una línea de longitud L colocada con uno de sus extremos en el origen de coordenadas (ver figura 1). Ello obliga a plantear la solución como la superposición de pequeños campos eléctricos (muy pequeños) causados por muy pequeñas porciones de carga (diferenciales de carga) que juntos dan el campo total.
Dado que el punto en el que se va a calcular el campo está en la misma recta que sustenta la línea, un diferencial de carga va a generar un campo que está también en esta línea. Como es lo mismo para cualquiera de ellos, se concluye que el campo total también lo estará. La dirección del mismo dependerá del signo de la carga que porta la línea. Al no especificarse nada se considera que la densidad ρ_L es positiva, y por tanto el campo apuntará hacia la parte positiva del eje x. Es decir tiene la forma:

$$\vec{E} = E_x\hat{x}$$

El campo generado por cada diferencial de carga es:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{d^2}\,\hat{x}$$

En esta expresión el diferencial de carga es la densidad lineal de carga (culombios por metro) por la longitud del diferencial dx, es decir, $\quad dq = \rho_L dx$
Y su distancia al punto de campo, $\quad d = a - x \quad$ *, con lo que:*

$$d\vec{E} = \frac{\rho_L\, dx}{4\pi\epsilon_0(a-x)^2}\hat{x}$$

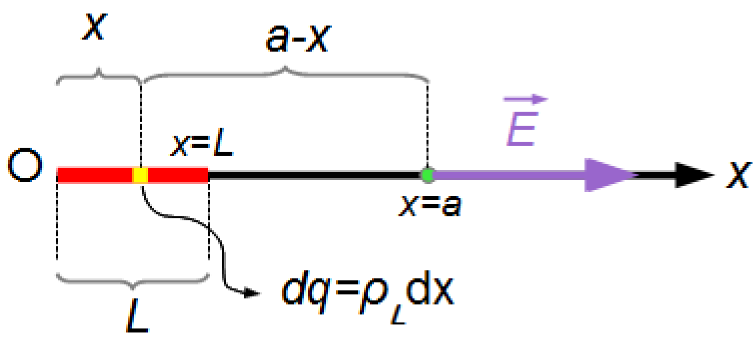


Figura 3: Línea de carga de longitud L con los parametros necesarios para calcular el campo generado por ella

El campo total será el resultado de sumar (integrar) la aportación de cada diferencial de carga desde $x = 0$ hasta $x = L$, quedando:

$$\vec{E} = \frac{\rho_L\ \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dx}{(a-x)^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_L\ \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(a-x)} \right]_0^L = \frac{\rho_L\ \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a-L} - \frac{1}{a} \right) = \frac{\rho_L\ \hat{x}}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{L}{a(a-L)}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{L}{a(a-L)}\hat{x} \quad V/m}$$

A la vista del resultado y reparando en que la carga total de la línea es $Q_T = \rho_L L$, el campo resultante se puede poner también:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{1}{a(a-L)}\hat{x} \quad V/m}$$

Como reflexión final que asegura que el resultado es correcto, se puede plantear cuál será el campo para una distancia muy alejada de la línea pero siempre en el eje x, es decir, $a \uparrow\uparrow$. Sucede que, entonces, el factor $a - L \approx a$ con lo que:

$$\vec{E} = \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{1}{a^2}\hat{x} \quad V/m$$

que es igual al campo generado por una carga puntual de carga total Q como es lógico ya que desde una distancia lejana la línea se apreciará como un punto.
También se puede plantear qué pasa si nos acercamos mucho a la línea, es decir, $a \approx L$. En este caso, el denominador se aproxima a cero resultando un campo que tiende a infinito, igual que ocurre con una carga puntual.

b) *El potencial eléctrico y el campo están relacionados por la expresión:*

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \right)$$

Como se sabe que el campo solo tiene componente en $\hat{x}$ y además que ésta solo depende de x:

$$E = -\frac{dV}{dx} \longrightarrow V = -\int E dx$$

En este caso, como debe cumplirse que $x >> L$, la expresión del campo es:

$$\vec{E} = \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{1}{x^2}\hat{x}$$

En donde se ha tenido en cuenta que el valor de a ahora es uno genérico, que llamamos x. Por tanto:

$$V = -\int \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0}\frac{dx}{x^2} = \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x} + C$$

La constante de integración se calcula recordando que el infinito es la referencia de potencial ($V = 0$), con lo que $C = 0$.

$$\boxed{V = \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0 x} \qquad Voltios}$$

c) *La energía es el producto de la carga que se transporta por la diferencia de potencial entre el punto final y el inicial:*

$$\boxed{W = Q(V(b) - V(c)) = \frac{QQ_T}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \qquad J}$$

EJ. 1. 6. Tres cargas puntuales de $-1\,nC$, $4\,nC$ y $3\,nC$, están colocadas en los puntos $(0,0,0)$, $(0,0,1)$ y $(1,0,0)$ respectivamente. Calcular la energía almacenada en este sistema.
SOLUCIÓN:
La energía es el trabajo necesario para colocar las cargas en las posiciones en que se encuentran. Se supone que de alguna manera las cargas están fijas en cada posición. Llamamos W a la energía total del sistema y W_1, W_2, y W_3 las energías necesarias para colocar las cargas 1, 2 y 3, respectivamente.
Entonces, analizamos cómo se va almacenando energía según vamos colocando cada carga:

1. *Primera carga: Como es la primera no hay ninguna carga previa y por lo tanto no hay interacción de ningún tipo. Ni ha sido necesario .^{em}pujar"(hubiera sido energía entregada al sistema), ni se ha obtenido energía (energía entregada por el sistema). Por lo tanto $W_1 = 0$*

2. *Segunda carga: La carga es positiva y se acerca hacia la primera que es negativa y por lo tanto va a haber una interacción. La diferencia entre signos hará que se atraigan y el agente que coloca la carga puede aprovechar esa fuerza. Desde el punto de vista del sistema de carga es energía negativa porque la entrega él mismo al exterior. Los signos de las cargas están de acuerdo con esta convención.*
   Entonces: $W_2 = Q_2V_{21}$:
$$W_2 = Q_2\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|(0,0,1) - (0,0,0)|}$$

3. *Tercera carga: Al acercar esta carga desde el infinito (referencia de potencial cero) hasta el punto $(1,0,0)$ y ser positiva se tiene que vencer la repulsión con Q_2 y por otro lado "sostenerla"para evitar la atracción con Q_1. El resultado depende de los valores concretos de las cargas y las distancias de ellas al punto en el que se coloca Q_3, quedando $W_3 = Q_3(V_{31} + V_{32})$*
$$W_3 = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q_1}{|(1,0,0) - (0,0,0)|} + \frac{Q_2}{|(1,0,0) - (0,0,1)|}\right]$$

Finalmente la energía almacenada es:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(Q_1Q_2 + Q_1Q_3 + \frac{Q_2Q_3}{\sqrt{2}}\right)$$

Sustituyamos valores a continuación:

$$W = \frac{1}{4\pi\,(10^{-9}/36\pi)}\left(-4 - 3 + \frac{12}{\sqrt{2}}\right)10^{-18} = 9\left(\frac{12}{\sqrt{7}} - 7\right) = 13'37 \qquad nJ$$

EJ. 1. 7. En una región del espacio en la que hay un campo eléctrico de $\vec{E} = \hat{x} - 3\hat{y}\ V/m$, calcular la energía involucrada en mover una carga de Q desde el punto $A(3,4)$ hasta el punto $B(6,5)$ a lo largo de los siguientes caminos:

a) La línea recta que une los dos puntos

b) El camino formado por las líneas que van del punto A hasta el $C(0,5)$ y del C al B

SOLUCIÓN:
En general la energía consumida (o ganada) por el hecho de mover una carga Q dentro de una región en la que hay un campo eléctrico $\vec{E}$ responde a la expresion:

$$W = -Q \int_L \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

que expresa, en forma de ecuación, que para mover una carga a lo largo de un camino, L, costará trabajo si se hace en contra del campo (resultado negativo) o se ganará si se hace a favor. Aquí, .en contra"quiere decir en la misma dirección y sentido opuesto y .a favor"la misma dirección y sentido del campo. En otras direcciones el trabajo necesario se entregará o ganará en distinta medida definida por el producto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{l}$. Es lo mismo que lo que ocurre en otro campo de fuerzas, el del campo gravitatorio, en el que si intentamos levantar un peso (es decir moverlo en contra del campo) tendremos que aportar trabajo para conseguirlo (que por convención se le asigna signo negativo), mientras que si queremos dejarlo caer, ganaremos energía (signo positivo. Esta ganancia se puede poner de manifiesto si, por ejemplo, conectamos mediante una cuerda y polea a otro peso menor que será levantado).

a) *En el caso de mover la carga de A a B, $d\vec{L}$ se puede escribir como una distancia diferencial de avance, dl, a lo largo de la dirección definida por los puntos A y B multiplicado por un vector unitario, $\hat{l}$, en esta dirección. Es decir $d\vec{L} = \hat{l}dl$*

$$\hat{l} = \frac{\vec{B} - \vec{A}}{|\vec{B} - \vec{A}|} = \frac{(6\hat{x} + 5\hat{y}) - (3\hat{x} + 4\hat{y})}{|(6\hat{x} + 5\hat{y}) - (3\hat{x} + 4\hat{y})|} = \frac{3\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{10}} = 0'95\hat{x} + 0'32\hat{y}$$

Con lo cual:

$$W = -Q \int_A^B \vec{E} d\vec{L} = \frac{-Q}{\sqrt{10}} \int_A^B (\hat{x} - 3\hat{y}) \cdot (3\hat{x} + \hat{y}) dl = 0$$

El trabajo necesario es nulo. Lo es porque el producto escalar de $\vec{E}$ y $\hat{l}$ es cero, es decir, son perpendiculares. Estamos moviendo una carga en la dirección perpendicular al campo y en este caso no es necesario hacer esfuerzo para ello. Volviendo al caso del campo gravitatorio, el equivalente sería intentar mover algo en la horizontal (perpendicular al campo que siempre va hacia abajo, en el caso de estar sobre la superficie de la tierra). Si no fuese por rozamiento del cuerpo sobre la superficie que lo sustente, seríamos capaces de mover cualquier cuerpo independientemente de su peso.

b) *El trabajo necesario en el segundo caso se calcular dividiendo el camino en dos tramos, primero del punto A al C, y segundo del C al B. Al igual que en el apartado a), necesitamos los vectores unitarios y la expresión de los caminos en ambos casos:*

- *Tramo $A - C$:* $\hat{l}_{A-C} = \frac{5\hat{x} - (3\hat{x} + 4\hat{y})}{|5\hat{x} - (3\hat{x} + 4\hat{y})|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{x} - 2\hat{y})$
  El camino que define la trayectoria es (recta que pasa por los puntos $A(3,4)$ y $C(5,0)$), $y = -2(x-5)$. El diferencial de avance por este camino, dl, es un recorrido que no es ni paralelo al eje x ni al y, por lo está relacionado con sus componentes dx y dy: $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + (-2dx)^2} = \sqrt{5}dx$. Con todo ello:

$$W_{A-C} = -Q \int_{A-C} \vec{E} \cdot \hat{l}_{A-C} dl = -Q \int_{x=3}^{5} (\hat{x} - 3\hat{y}) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} (\hat{x} - 2\hat{y}) \sqrt{5} dx = -14Q\ J$$

- *Tramo $C - B$:* $\hat{l}_{C-B} = \frac{(6\hat{x} + 5\hat{y}) - 5\hat{x}}{|6\hat{x} + 5\hat{y}) - 5\hat{x}|} = \frac{1}{\sqrt{26}}(\hat{x} + 5\hat{y})$
  En este caso la recta por la que se integra es $y = 5(x-5) \rightarrow dy = 5dx$ y $dl = \sqrt{26}dx$.

$$W_{C-B} = -Q \int_{C-B} \vec{E} \cdot \hat{l}_{C-B} dl = -Q \int_{x=5}^{6} (\hat{x} - 3\hat{y}) \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} (\hat{x} + 5\hat{y}) \sqrt{26} dx = 14Q\ J$$

$$W_{A-C} = W_{A-C} + W_{C-B} = -14Q + 14Q = 0\ J$$

Resultado que era de esperar ya que el campo eléctrico es conservativo.

EJ. 1. 8. Dos medios homogéneos dieléctricos tienen frontera en el plano $z = 0$. En la región correspondiente a $z \geq 0$, medio 1, la constante dieléctrica relativa es $\epsilon_{r1} = 4$, y en la región $z \leq 0$ la misma constante vale $\epsilon_{r2} = 3$. Para $z \geq 0$, es decir, en el medio 1, existe un campo eléctrico uniforme de valor: $\vec{E_1} = 5\hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z}$. Calcular:

a) Calcular el campo eléctrico en el medio 2, $\vec{E_2}$

b) Calcular los ángulos que forman los campos $\vec{E_1}$ y $\vec{E_2}$ con la interfaz.

SOLUCIÓN:

a) *El campo eléctrico en el medio dos está definido por las relaciones que ligan las componentes normal y tangencial de ambos campos en la interfaz. Lejos de la interfaz el campo es el mismo que en la interfaz. En el medio 1 el campo es constante, y por tanto así es también muy cerca de la interfaz. Justo al otro lado, el único motivo del cambio es la distinta constante dieléctrica. No hay nada por lo que deba cambiar el campo al alejarse de la interfaz y, por lo tanto, lejos de ella sigue teniendo el mismo valor (vectorial).*

$$\vec{E}_{N2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\vec{E}_{N1} = \frac{\epsilon_{r1}\epsilon_0}{\epsilon_{r2}\epsilon_0}\vec{E}_{N2} = \vec{E}_{N2}\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \qquad ; \qquad \vec{E}_{T2} = \vec{E}_{T1}$$

El campo en el medio 1 *se escribe en función de sus componentes tangencial y normal:*

$$\vec{E_1} = (5\hat{x} - 2\hat{y}) + (3\hat{z}) = \vec{E}_{T1} + \vec{E}_{N1}$$

Las componentes tangencial y normal a la interfaz del campo en el medio 2 *son:*

$$\vec{E}_{N2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\vec{E}_{N1} = \frac{4}{3}3\hat{z} = 4\hat{z} \qquad ; \qquad \vec{E}_{T2} = \vec{E}_{T1} = 5\hat{x} - 2\hat{y}$$

$$\boxed{\vec{E_2} = 5\hat{x} - 2\hat{y} + 4\hat{z} \quad kV/m}$$

b) *Sean* α_1 *y* α_2 *los ángulos de* $\vec{E_1}$ *y* $\vec{E_2}$ *con la normal a la interfaz* ($\hat{z}$)*, y sean* θ_1 *y* θ_2 *los ángulos que forman con la interfaz (el plano* $z = 0$*). Estos ángulos cumplen la relación:*

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 90 - \alpha_1 \\ \theta_2 &= 90 - \alpha_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \arccos\left(\frac{\vec{E_1}\cdot\hat{z}}{|\vec{E_1}|\cdot 1}\right) = \arccos\left(\frac{(5\hat{z} - 2\hat{y} + 3\hat{z})\cdot\hat{z}}{\sqrt{5^2 + (-1)1^2 + 3^2(1)}}\right) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{38}}\right) = 60'88^o \\ \alpha_2 &= \arccos\left(\frac{\vec{E_2}\cdot(-\hat{z})}{|\vec{E_2}|\cdot 1}\right) = \arccos\left(\frac{(5\hat{z} - 2\hat{y} + 4\hat{z})\cdot\hat{z}}{\sqrt{5^2 + 2^2 + 4^2(1)}}\right) = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{45}}\right) = 53'4^o \end{aligned}$$

$$\boxed{\theta_1 = 29'12^o, \qquad \theta_2 = 36'6^o}$$

EJ. 1. 9. El plano xz, es decir el plano cuyo vector director es $\hat{y}$, es una superficie de separación entre dos medios. El medio 1 caracterizado por $y < 0$ tiene una constante de permitividad relativa $\epsilon_{r1} = 2'1$ y el 2, para $y > 0$ la permitividad es $\epsilon_{r2} = 1'5$. En el medio 1 hay un campo eléctrico dado por $\vec{E} = 6\hat{y}$.

Calcular el campo $\vec{E}_2$
SOLUCIÓN:
Se trata de dos medios semiconductores separados por la superficie xz. Las condiciones de contorno dicen que las componentes normales del campo $\vec{D}$ se conservan y lo mismo con las tangenciales de $\vec{E}$:

$$D_{N1} = D_{N2} \qquad y \qquad E_{T1} = E_{T2}$$

Se pasa del campo $\vec{E}_1$ al $\vec{D}_1$ sabiendo que están relacionados por $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ en donde, en este caso, $\epsilon = \epsilon_{r1}\epsilon_0$. Además $\vec{D}_{T1} = 0$ porque $\vec{E}_{T1} = 0$.

$$\vec{D}_1 = \epsilon_1\vec{E}_1 \Rightarrow \vec{D}_1 = 2'1 \cdot 8'854 \cdot 10^{-12} \cdot 6\hat{y} = 1'12 \cdot 10^{-10}\hat{y} \qquad C/m^2$$

Por otro lado:

$$E_{T1} = E_{T2} \Rightarrow \frac{D_{T1}}{\epsilon_1} = \frac{D_{T2}}{\epsilon_2} \Rightarrow D_{T2} = 0$$

ya que no hay componente tangencial de ninguno de los dos campos en el medio 1. Entonces:

$$\vec{D}_2 = 1'12 \cdot 10^{-10}\hat{y} \qquad C/m^2$$

y por lo tanto:

$$\boxed{\vec{E}_2 = \frac{\vec{D}_2}{\epsilon_2} = \frac{1'12 \cdot 10^{-10}\hat{y}}{1'5 \cdot 8'854 \cdot 10^{-12}} = 8'43\hat{y} \qquad V/m}$$

Un campo (cualquier de los dos $\vec{E}$ o $\vec{D}$) en un medio sin componente tangencial (o normal), tampoco la tiene en el otro medio. La única diferencia entre ellas es el módulo de esta.

EJ. 1. 10. Se tiene una línea infinita de carga, de densidad lineal de carga, ρ_L C/m, colocada en el eje z, y una carga puntual Q colocada en el punto $(0, a, b)$ con $a > 0$ y $b > 0$

a) Calcular el campo eléctrico total en el punto $P(0, a, 0)$

SOLUCIÓN:

a) El campo en el punto P es la superposición de los campos generados por la línea infinita ($\vec{E}_L$ y por la carga el punto $\vec{E}_Q$): El campo generado por la línea en el eje y viene dado por la expresión teórica expresada en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{E}_L = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 a}\hat{\rho}$$

en donde a es la distancia de la línea al punto de campo. Es conveniente pasar este campo a coordenadas cartesianas para facilitar su suma con el generado por la carga. En el punto en el que se ha calculado se ve que cae en el eje y, con lo que:

$$\vec{E}_L = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 a}\hat{y}$$

El campo generado por la carga Q es:

$$\vec{E}_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2}(-\hat{z})$$

El campo total es:

$$\boxed{\vec{E}_T = \vec{E}_L + \vec{E}_Q = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 a}\ \hat{y} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2}\ \hat{z} \qquad V/m}$$

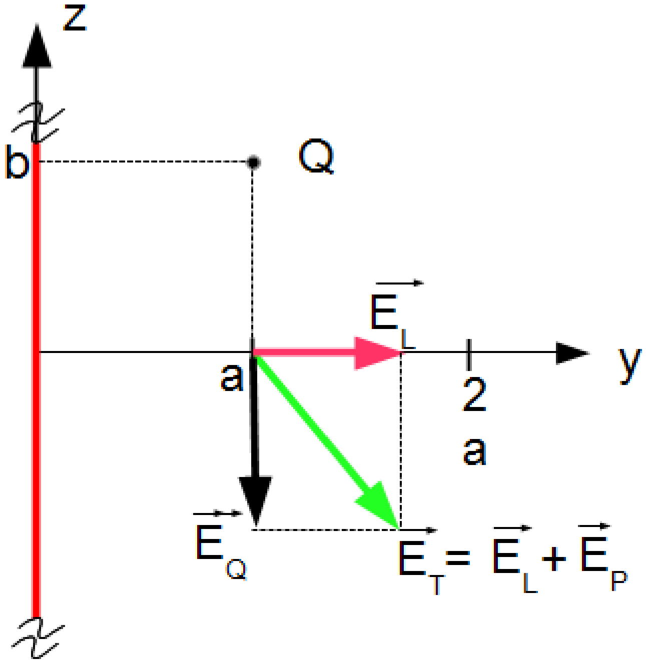
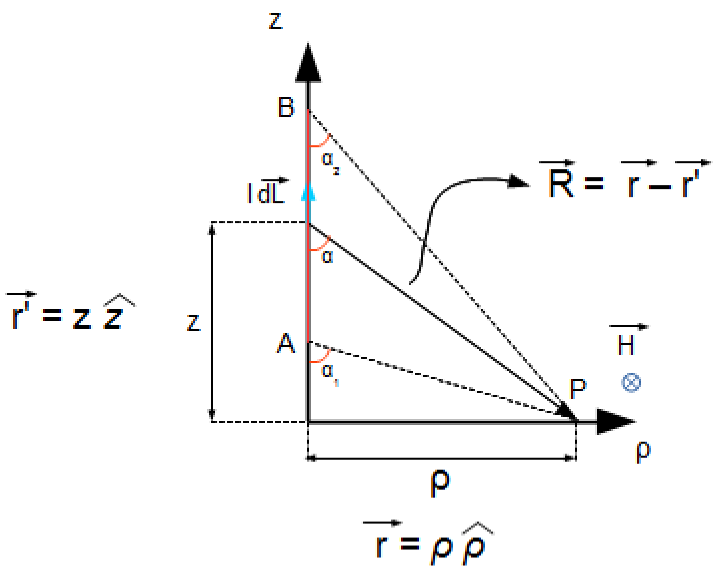


Figura 4: Campos generados por la línea y la carga

2. Electrostática. Campo magnético

EJ. 2. 1. Calcular el campo magnético generado por una corriente lineal estacionaria (contenida en un conductor de longitud finita AB) en un punto P del espacio.
SOLUCIÓN:
Se elige el sistema de referencia cilíndrico colocando la línea de corriente sobre el eje z. El punto P en el que



se va a calcular el campo está a una distancia ρ de la corriente. En la figura se representan los ángulos que subtienden el conductor: α_1 y α_2. El diferencial de campo $d\vec{H}$ creado por un diferencial de corriente en el punto P es:

$$d\vec{H} = \frac{Id\vec{L} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

En ella $d\vec{L} = dz\hat{z}$ y $\vec{R} = \rho\hat{\rho} - z\hat{z}$, de manera que:

$$d\vec{L} \times \vec{r} = \rho\, dz\hat{\varphi}$$

Y por tanto:

$$\vec{H} = \int_{z_A}^{z_B} \frac{I\rho dz}{4\pi[\rho^2 + z^2]^{3/2}}\, \hat{\varphi}$$

Sabiendo que $z = \rho\, cotg(\alpha)$, $dz = -\rho\, cosec^2(\alpha)\, d\alpha$:

$$\vec{H} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho^2\ cosec^2\alpha\ d\alpha}{\rho^3 cosec^3\alpha} \hat{\varphi} = -\frac{\hat{\varphi}}{4\pi\rho} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha\ d\alpha$$

La solución es:

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi\ \rho}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\ \hat{\varphi} \qquad A/m$$

Esta solución es válida para cualquier longitud del tramo de corriente y para cualquier punto P. Se ve que el campo magnético siempre está en la dirección del eje $\hat{\varphi}$, es decir rodeando al eje que contiene la corriente.
Un caso especial es aquel en que el conductor es semiinfinito con respecto a P, es decir, el punto A está $O(0,0,0)$ y B en $(0,0,\text{ínf})$; $\alpha_1 = 90^o$ y $\alpha_2 = 0^o$, y entonces la ecuación que hemos obtenido queda:

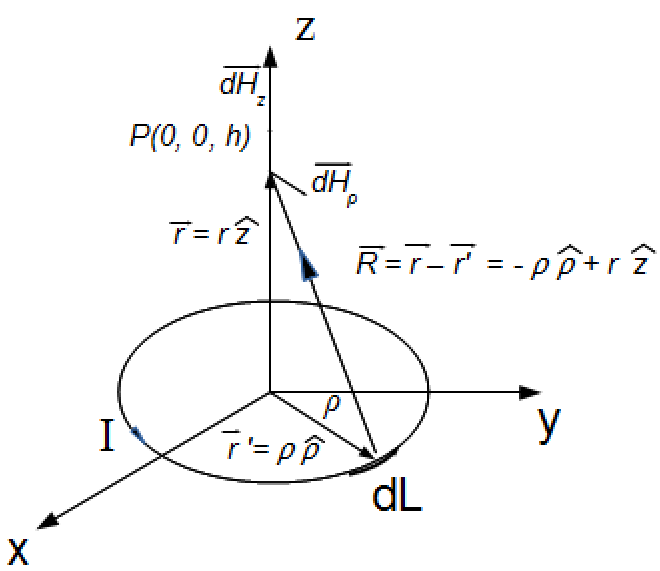
$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi\ \rho}\hat{\varphi} \quad A/m$$

Otro caso especial es cuando el conductor es de longitud infinita. En este caso $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_1 = 180^o$, quedando la solución:

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\ \rho}\hat{\varphi} \quad A/m$$

Que es el obtenido en la exposición teórica en cualquier libro o clase.

EJ. 2. 2. Un anillo circular definido por la ecuación $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$ transporta una corriente de 10 amperios según $\hat{\varphi}$. Calcular el campo magnético ($\vec{H}$) en los puntos $(0,0,4)$ y $(0,0,-4)$
SOLUCIÓN:
En la figura se representa el diferencial de campo $d\vec{H}$ generado por un diferencial de longitud de anillo $d\vec{L}$.



Suponiendo que la corriente es uniforme en todo el anillo, la corriente en este caso es $Id\vec{L}$. Según la ley de Biot y Savart, este diferencial de campo es:

$$d\vec{H} = \frac{Id\vec{L} \times \vec{R}}{4\pi R^3}$$

En esta expresión $d\vec{L} = \rho d\varphi\hat{\varphi}$, $\vec{R} = (0,0,h) - (x,y,0) = -\rho\hat{\rho} + h\hat{z}$ y,

$$d\vec{L} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\varphi} & \hat{z} \\ 0 & \rho d\varphi & 0 \\ -\rho & 0 & h \end{vmatrix} = \rho h\, d\varphi \hat{\rho} + \rho^2 d\varphi \hat{z}$$

Por lo tanto, el diferencial de campo magnética queda:

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi\left[\rho^2 + h^2\right]^{3/2}} (\rho h\, d\varphi\hat{\varphi} + \rho^2\, d\varphi\hat{z}) = dH_\rho\hat{\rho} + dH_z\hat{z}$$

en donde se pone de manifiesto que tiene componentes en $\hat{\varphi}$ y en $\hat{z}$. Dada la geometría de la fuente de campo (el anillo), sucede que para cada dI hay otro simétrico que genera el mismo diferencial de campo pero con la componente en ρ igual en módulo pero de signo contrario con lo que se cancelan. El resultado es que, una vez incluido toda la contribución del anillo, el campo resultante $\vec{H}$ solo tiene componente z.

$$\vec{H} = \int_0^{2\pi} \frac{I\rho^2\, d\varphi\hat{z}}{4\pi[\rho^2 + h^2]^{3/2}} = \frac{I\rho^2\hat{z}}{4\pi[\rho^2 + h^2]^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{I\rho^2\hat{z}}{2[\rho^2 + h^2]^{3/2}}$$

Por lo tanto, el campo en el punto $P(0,0,4)$, es decir, $z = 4$, y con $I = 10\,A$ y $h = 4$ (extraído de la ecuación que define el anillo):

$$\vec{H} = \frac{10 \cdot 4^2\ \hat{z}}{2\,(9+16)^{3/2}} = 0'36\ \hat{z} \quad A/m$$

Y finalmente, el campo en el punto $P(0,0,-4)$

$$\vec{H}(0,0,-4) = \vec{H}(0,0,4) = 0'36\ \hat{z} \quad A/m$$

EJ. 2. 3. En la región A definida por $x < 0$ la permeabilidad magnética es $\mu_A = 5\ \mu H/m$ y en la B, ($x < 0$), $\mu_B = 20\mu H/m$. Si hay una densidad de corriente $\vec{K} = 150\hat{y} - 200\hat{z}\ A/m$ en $x = 0$ y si en el medio A existe este campo magnético: $\vec{H}_A = 300\hat{x} - 400\hat{y} + 500\hat{z}\ A/m$, calcular:

a) Módulo de la componente tangencial de $\vec{H}$ en el medio A
b) Módulo de la componente normal de $\vec{H}$ en el medio A
c) Módulo de la componente tangencial de $\vec{H}$ en el medio B
d) Módulo de la componente normal de $\vec{H}$ en el medio B

SOLUCIÓN:

a) *$\vec{H}_{TA}$ es la componente del vector $\vec{H}_A$ que es perpendicular a la superficie que separa las dos regiones. Cómo ésta es el plano yz, se trata de la parte del vector que es paralela a esta superficie. Lo forman las componentes en y y z: $\vec{H}_{TA} = -400\hat{y} + 500\hat{z}$, y su módulo:*

$$\boxed{|\vec{H}_{TA}| = H_N = \sqrt{(-400)^2 + 500^2} = 640'31 \qquad A/m}$$

b) *Análogamente, $\vec{H}_{NA}$, es la parte del vector $\vec{H}_A$ que es perpendicular al plano yz, es decir, su componente en x, $\vec{H}_{NA} = 300\hat{x}$. Por tanto:*

$$\boxed{|\vec{H}_{NA}| = H_x = 300 \qquad A/m}$$

c) *Pasamos a buscar el campo magnético en el medio B. Hay que usar las expresiones que relacionan las componentes tangenciales y normales entre un medio y el otro. Para las tangenciales:*

$$(\vec{H}_{TA} - \vec{H}_{TB}) = \hat{n}_{AB} \times \vec{K}$$

En donde $\hat{n}_{AB}$ es el vector unitario que va del medio A al B, en este caso: $\hat{n}_{AB} = \hat{x}$. Calculamos e igualamos cada miembro de la ecuación por separado:
Primer miembro, llamamos H_{TAy} a la componente en $\hat{y}$ de la tangencial de $\vec{H}$ en el medio A, y de igual manera H_{TAz}, H_{TBy} y H_{TBz}:

$$\vec{H}_{TA} - \vec{H}_{TB} = [-400\hat{y} + 500\hat{z}] - [H_{TBy}\hat{y} + H_{TBz}\hat{z}] = (-400 + H_{TBy})\hat{y} + (500 + H_{TBz}\hat{z})$$

Segundo miembro:

$$\hat{x} \times \vec{K} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & -200 \end{vmatrix} = 200\hat{y} + 150\hat{z}$$

Igualamos las componentes de $\hat{y}$ y $\hat{z}$:

$$\begin{aligned} -400 + H_{TBy} &= 200 \\ 500 + H_{TBz} &= 150 \end{aligned}$$

De donde: $H_{TBy} = 600$ y $H_{TBz} = -350$, y por tanto el módulo de la componente tangencial de $\vec{H}_B$ es:ç

$$\vec{H}_{TB} = 600\hat{y} - 350\hat{z} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{H_{TB} = \sqrt{600^2 + (-350)^2} = 694'6 \qquad A/m}$$

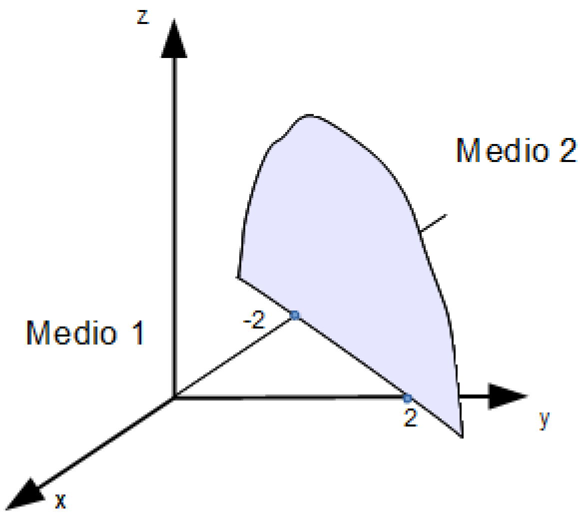
d) *Las componentes normales están relacionadas por la expresión:*

$$B_{NA} = B_{NB} \quad \Rightarrow \quad \mu_A H_{NA} = \mu_B H_{NB} \quad \Rightarrow \quad H_{NB} = \frac{\mu_A}{\mu_B} H_{NA}$$

Con lo que:

$$\boxed{H_{NB} = \frac{5}{20} 300 = 75 \ A/m}$$

EJ. 2. 4. Dado el campo $\vec{H}_1 = -2\hat{x} + 6\hat{y} + 4\hat{z} \quad A/m$ en la región 1: $y - x - 2 \leq 0$, en la que $\mu = 5\mu_0$, calcular $\vec{B}_1$ en ella, y $\vec{B}_2$ y $\vec{H}_2$ en la región 2, complementaria de la 1, es decir, $y - x - 2 \geq 0$, sabiendo que en esta segunda $\mu = 2\mu_0$
SOLUCIÓN:



La superficie que define la frontera entre los dos medios es un plano infinito perpendicular al plano coordenado xy y que corta a éste en una recta de ecuación $y-x-2 = 0$, o en forma explícita $y = x+2$. Para averiguar a qué lado está cada región se prueba con un punto, por ejemplo el $(0,0,0)$:

$$y - x - 2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 - 0 - 2 \leq 0 \quad \Rightarrow \text{ se cumple}$$

Por tanto la zona a la izquierda de la recta, que es donde está el $(0,0,0)$, es la región 1 y a la derecha, hacia $x \to \infty$ e $y \to \infty$ la región 2.

a)

$$\vec{B}_1 = \mu_1 \vec{H}_1 = \mu_0 \mu_r (-2\hat{x} + 6\hat{y} + 4\hat{z}) = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5(-2\hat{x} + 6\hat{y} + 4\hat{z})$$

$$\boxed{\vec{B}_1 = -12'6\hat{x} + 37'7\hat{y} + 25'1\hat{z} \qquad \mu T}$$

b) Para calcular los campos en el medio 2 es necesario trabajar con las componentes normales y tangenciales de alguno de los campos del medio 1. Se toma, por ejemplo, el campo $\vec{H}_1$, su componente normal se extrae a partir de razonamientos geométricos:

$$\vec{H}_{N1} = \left(\vec{H}_1 \cdot \hat{n}_{12}\right) \hat{n}_{12}$$

El vector $\hat{n}_{12}$ se calcula tomando un vector perpendicular al plano de separación de los medios y que apunte del medio 1 al 2. Por inspección de la gráfica se ve que cualquier vector que tenga su componente x negativa y y de mismo valor absoluto es correcto. Por ejemplo el vector $(2,2)$. Como no tiene módulo uno se normaliza:

$$\hat{n}_{12} = \frac{(-2\hat{x} + 2\hat{y})}{\sqrt{|-2\hat{x} + 2\hat{y}|}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{x} + \hat{y})$$

$$\left(\vec{H}_1 \cdot \hat{n}_{12}\right) = \frac{8}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{H}_{N1} = -4\hat{x} + 4\hat{y}$$

$$\vec{H}_{T1} = \vec{H}_1 - \vec{H}_{N1} = (-2\hat{x} + 6\hat{y} + 4\hat{z}) - (-4\hat{x} + 4\hat{y}) = 2\hat{x} + 2\hat{y} + 4\hat{z} \qquad A/m$$

En este caso, como no hay una densidad de corriente $\vec{K}$ que circule por la superficie, sucede que las componentes tangenciales de los campos magnéticos $\vec{H}$ en ambos medios son iguales: $\vec{H}_{T1} = \vec{H}_{T2}$
Y en lo que respecta a la componente normal, se usa la relación que establece que las componentes normales del campo $\vec{B}$ son continuas y que $\vec{B} = \mu \vec{H}$:

$$\vec{B}_{N1} = \vec{B}_{N2} \quad \Rightarrow \quad \mu_1 \vec{H}_{N1} = \mu_2 \vec{H}_{N2} \quad \Rightarrow \vec{H}_{N2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \vec{H}_{N1} \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_{N2} = \frac{5\mu_0}{2\mu_0}(-4\hat{x} + 4\hat{y})$$

$$\vec{H}_{N2} = -10\hat{x} + 10\hat{y} \qquad A/m$$

El campo $\vec{H}_2$ se calcula sumando las componentes normal y tangencial en el medio 2:

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_{T2} + \vec{H}_{N2} = (2\hat{x} + 2\hat{y} + 4\hat{z}) + (-10\hat{x} + 10\hat{y}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{H}_2 = -8\hat{x} + 12\hat{y} + 4\hat{z} \quad A/m}$$

Y finalmente, $\vec{B}_2 = \mu_2 \vec{H}_2$

$$\vec{B}_2 = \mu \vec{H}_2 = 2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}(-8\hat{x} + 12\hat{y} + 4\hat{z}) \quad \boxed{\vec{B}_2 = -20'11\hat{x} + 30'16\hat{y} + 10'5\hat{z} \quad \mu T}$$
