

Hoja de ejercicios de MÉTODOS MATEMÁTICOS I curso 2021/22

Tema 3: LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES

1. Determinense si existen: a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x}{1+x}$, b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1}$, c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{|x|}$.
2. Determinense: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3}{x^3+2}$, b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x^3}{x^3-40}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+6x^2-5}{x^4-4x^2-x}$.
3. Determinense: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}$, b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x+x^2}}{x+2}$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-4}{\sqrt{x^4-2}}$.
4. Determinense: a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{|x-2|}$, b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{|x-1|}$.
5. Determinense: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}$.
6. Demuéstrese que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$.
7. Calcúlese el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\pi x + \sqrt{\pi x}} - \sqrt{\pi x} \right)$.

8. La función $f(x)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5-x}{3}, & \text{si } x < -1, \\ \frac{2}{x}, & \text{si } x \geq -1, \end{cases}$$

Estudia la continuidad de $f(x)$.

9. Dada la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$ y $f(0) = k$, determínese el valor de k para que la función sea continua en $x = 0$.
10. Determinense si la siguiente función es continua

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

11. Construye una función continua que verifique $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ si $|x| \geq 2$ y $f(x) = 1$ si $|x| < 1$.
12. Estúdiese la continuidad de las funciones

$$h(x) = \frac{x-|x|}{x}, \quad g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

13. Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} x+a, & x \leq 0 \\ \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

halla el valor de a para que sea continua.

14. ¿Puede asegurarse que la función $f(x) = \frac{x^2-5x+7}{x^3-x^2+x-1}$ está acotada en el intervalo $[0; 2]$?
15. Demuestra que el polinomio $P(x) = 2x^4 - 14x^2 + 14x - 1$ tiene cuatro raíces reales.
16. Probar que la ecuación $x^{15} + \frac{x^4-17x+13}{(x^2-1)^2} = 0$ tiene al menos una solución.
17. Compruébese que la ecuación $\cos^2 x = 2 - x^2$ tiene solución real en el intervalo $[0; 2\pi]$.
18. Demuéstrese que la ecuación $e^{-x^2} = 2x$ tiene al menos una solución real.