Tema 1: **Los números reales**

Luz M. Fernández-Cabrera

Universidad Complutense de Madrid

Septiembre, 2021

1.1 Propiedades de los números

Axiomas de estructura:

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$:

A-1. Asociativas:

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

A-2. Conmutativas:

$$a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

A-3. Neutros:

$$\begin{array}{ll} \exists 0 \in \mathbb{R}: & a + 0 = 0 + a = a \\ \exists 1 \in \mathbb{R}: & a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \end{array}$$

A-4. Opuesto:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \, \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = (-a) + a = 0$$

A-5. Recíproco:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \, a \neq 0, \; \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

A-6. Distributiva:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

De los axiomas anteriores se pueden deducir todas las leyes usuales de la Aritmética:

1) *Simplificación para la suma*

$$a + b = a + c \Longrightarrow b = c$$

Como consecuencia se tiene que 0 es único.

2) *Sustración :* Dados $a, b \in \mathbb{R}$ existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $a + x = b$. Este número se designa por $b - a$ .En particular $0 - a$ se escribe simplemente como $-a$.

3) $b - a = b + (-a)$

4) $-(-a) = a$

5) $a\,(b - c) = ab - ac$

6) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

7) $(-a) \cdot b = -ab$, $(-a)\,(-b) = ab$

8) *Simplificación para la multiplicación*

$$a \cdot b = a \cdot c, a \neq 0 \Longrightarrow b = c$$

Como consecuencia se tiene que 1 es único.

9) *División* : Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ existe un único x tal que $a \cdot x = b$. Este número se designa por $\frac{b}{a}$ .En particular $\frac{1}{a}$ se escribe también como a^{-1}.

10) Si $a \neq 0 \Longrightarrow \frac{b}{a} = b \cdot a^{-1}$

11) Si $a \neq 0 \Longrightarrow \left(a^{-1}\right)^{-1} = a$

12) Si $a \cdot b = 0 \Longrightarrow a = 0$ o $b = 0$

13) Si $b, d \neq 0 \Longrightarrow \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$

14) $\left(\dfrac{a}{b}\right) \cdot \left(\dfrac{c}{d}\right) = \dfrac{ac}{bd}$, si $b, d \neq 0$

15) $\dfrac{a/b}{c/d} = \dfrac{ad}{bc}$, si $b, c, d \neq 0$

Axiomas de orden: $\exists \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, llamados **positivos**, tal que:

A-7. Ley de tricotomía: para todo número a se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones

$$a = 0\ ; \qquad a \in \mathbb{R}^+\ ; \qquad -a \in \mathbb{R}^+$$

A-8: Suma es una operación cerrada:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : a + b \in \mathbb{R}^+$$

A-9: El producto es una operación cerrada:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : a \cdot b \in \mathbb{R}^+$$

Estos axiomas de orden nos permiten definir la relación de orden habitual en $\mathbb{R}$:
Definición :

$$a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$$

Axioma de completitud:

A-10:

$$S \subset \mathbb{R}, S \neq \emptyset, \textit{acotado superiormente} \ \Rightarrow \exists \ \textit{supremo de } S.$$

Por verificar los axiomas 1 al 6, se dice que $(\mathbb{R}, +, .)$ es un *cuerpo conmutativo,* por verificar además los axiomas 7, 8 y 9, es un *cuerpo conmutativo ordenado,* y por verificar el axioma 10, diremos que el conjunto de los números reales tiene estructura de *cuerpo conmutativo, ordenado y completo.*

Los otros conjuntos numéricos que conocemos, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, no cumplen todos los axiomas.

Reglas usuales del Cálculo con desigualdades

16) *Tricotomía:* Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se verifica una y sólo una de las relaciones

$$\text{i) } a = b \quad ; \qquad \text{ii) } a < b \quad ; \qquad \text{iii) } b < a$$

17) Si $a < b \Longrightarrow a + c < b + c$

18) Si $a < b$ y $c > 0 \Longrightarrow ac < bc$

19) Si $a < b$ y $b < c \Longrightarrow a < c$

Otras propiedades son

20) Si $a \neq 0 \Longrightarrow a^2 > 0$

21) $1 > 0$

22) $a < b$ y $c < 0 \Longrightarrow ac > bc$

23) Si $a < b \Longrightarrow -a > -b$

24) Si $ab > 0 \Longrightarrow a$ y b son ambos positivos o ambos negativos

25) Si $a < c$ y $b < d \Longrightarrow a + b < c + d$

Ejercicios con desigualdades

Valor absoluto:

El **valor absoluto** *de un número de define:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Otras definiciones equivalentes a la anterior son

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

y

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Propiedades del valor absoluto:

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ se *se verifican las siguientes propiedades:*

1) $|x| \geq 0$
2) $|-x| = |x|$
3) para $a \geq 0$ se tiene $[|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a]$
4) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualdad triangular)
5) $|x - y| \leq |x| + |y|$
6) $|x - y| \geq |x| - |y|$

Distancia en $\mathbb{R}$:

Una **distancia**, *o métrica, en* $\mathbb{R}$ *es cualquier procedimiento tal que* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, *verifique las condiciones:*

1) $d(a, b) \geq 0$
2) $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
3) $d(a, b) = d(b, a)$
4) $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$.

En los números reales suele tomarse como distancia habitual la dada por el valor absoluto:

$$d(a, b) = |b - a|\,,$$

se llama *distancia euclídea* .

Ejercicios de desigualdades con valor absoluto

Distintos conjuntos numéricos:

Los números naturales

El conjunto de los números naturales es el conjunto infinito $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.
Verifica las propiedades: asociativa y conmutativa para la suma; asociativa, conmutativa y neutro para el producto; y distributiva del producto respecto de la suma.
La relación $a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{N}$ origina un orden estricto y sus elementos forman una cadena.

Este conjunto tiene una propiedad muy especial: es **inductivo**
Definición : Un conjunto de números se dice que es inductivo si tiene las siguientes propiedades
a) 1 pertenece al conjunto
b) si x pertenece al conjunto entonces $x + 1$ tambien pertenece al conjunto

Esta propiedad constituye la base para un razonamiento que los matemáticos denominan "demostración por inducción" y que veremos más adelante.

Los números enteros

El conjunto de los números enteros es $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
Verifica las propiedades de $\mathbb{N}$ y además las propiedades de *neutro* y *opuesto* para la suma.

Una ecuación tan sencilla como $2x = 5$ no tiene solución en los enteros.

Los números racionales

Son el conjunto infinito $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : q, p \in \mathbb{Z} \quad y \quad q \neq 0\}$ donde es preciso tener en cuenta la relación de equivalencia entre fracciones. Cumplen las propiedades de los enteros y además la propiedad de elemento *inverso* para todos los números racionales salvo el cero.
Entre las propiedades de los racionales se encuentra
"si a y b son racionales entonces $\frac{a+b}{2}$ tambén lo es y además está entre a y b".

Esta propiedad nos indica que entre dos racionales hay infinidad de racionales y que por lo tanto no podemos hablar del número racional inmediatamente superior.

Existen ecuaciones que no tienen solución en $\mathbb{Q}$, como $x^2 = 2$. La recta no está "llena" en el sentido de que hay más puntos que números racionales.

Los números racionales se pueden expresar con una representación decimal finita o infinita periódica. El número racional de la forma

$$r = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + ... + \frac{a_n}{10^n}$$

donde $a \in \mathbb{Z}^+$ y $a_1, ..., a_n$ son enteros entre 0 y 9, se escribe normalmente de la forma

$$r = a, a_1 a_2 .... a_n$$

y se dice que es su representación decimal. Pero no todos los números racionales se pueden expresar con una representación decimal finita, por ejemplo $\frac{1}{3}$. En estos casos tenemos la representación decimal infinita periódica

$$\frac{1}{3} = 3\frac{1/10}{1-1/10} = 3\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ... + \frac{3}{10^n} + ... = 0,333...$$

Y en general, para cualquier número de infinitos decimales con periodicidad tenemos

$$a, a_1 a_2 ... a_n \underbrace{b_1..b_s}\underbrace{b_1..b_s} ... = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + .. + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_1..b_s}{(10^s)^k}$$

Ejercicio Expresa como cociente de números enteros:
a) $7,345$ b) $21,\widehat{37}$ c) $30,108\widehat{4}$ d) $0,0973\widehat{28}$

Los números irracionales

Los números reales que no son racionales se denominan irracionales. Por ejemplo $\sqrt{2}$, π, e , e^{π}. En general no es fácil probar que un número es irracional, pero si lo es para $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ..es decir, cualquier entero que no sea un cuadrado perfecto.

TEOREMA $\sqrt{2}$ no es un número racional.

DEMOSTRACIÓN.- Si fuese $x = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, podría escribirse $x = \frac{p}{q}$ fracción irreducible, es decir, sin factores comunes. En estas condiciones

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad p^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad p^2 \text{ es par} \quad \Rightarrow \quad p \text{ es par},$$

por lo que, si es $p = 2k$, resultaría

$$(2k)^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad 2k^2 = q^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 \text{ es par} \quad \Rightarrow \quad q \text{ es par},$$

contradicción, pues no tenían factores comunes.

Números reales

Los números reales son los números decimales

$$\mathbb{R} = \{a, a_1a_2a_3... \ : \ a \in \mathbb{Z} \wedge a_i \in \{0, 1, 2, ..., 9\}\}.$$

Si el número de decimales es finito o es periódico, se trata de un número racional, mientras que en caso contrario es un irracional, como son $\sqrt{2}$, π, e. Estos irracionales pueden ser *algebraicos* o *trascendentes*, según que sean solución de alguna ecuación algebraica (con coeficientes enteros), o que no lo sea. La ecuación $x^5 + 7 = 0$ tiene por solución $x = \sqrt[5]{-7} = -\sqrt[5]{7}$, por lo que este número es algebraico, mientras que π y e son trascendentes.

Sin embargo existen ecuaciones sencillas, como $x^2 + 1 = 0$, que no tienen solución.

Números complejos

Son el conjunto $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$, donde i es la unidad imaginaria y vale $i = \sqrt{-1}$.

Este conjunto numérico tiene estructura de *cuerpo* conmutativo, conteniendo a los reales, $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$, en el doble sentido de conjunto y estructura.

Sin embargo el cuerpo complejo no es un cuerpo ordenado, los axiomas de orden no se verifican,

Los complejos se representan en el plano, el número $a + bi$ se representa por el par ordenado (a, b) en el plano. Además éstos llenan el plano, es decir, hay tantos números complejos como puntos en el plano.

El *Teorema fundamental del Álgebra* asegura que toda ecuación polinómica en $\mathbb{C}$, de grado n, tiene exactamente n raíces, contando la multiplicidad.

Conjuntos acotados. Propiedad del supremo

Sea S un subconjunto de números reales $S \subset \mathbb{R}, S \neq \emptyset$, y
sean a, b, α, β números reales.

Definiciones (Cotas):
Diremos que a es una cota superior de S si y sólo si $\forall x \in S, x \leq a$.
Diremos que b es una cota inferior de S si y sólo si $\forall x \in S, x \geq b$.

Definiciones (Supremo e ínfimo):
Diremos que a es el supremo, o extremo superior, de S si y sólo si es la menor de las cotas superiores de S.
Diremos que es el ínfimo, o extremo inferior de S si y sólo si es la mayor de las cotas inferiores de S.
Escribiremos $\sup S$ e $\inf S$ para indicarlos. Naturalmente el supremo y el ínfimo son únicos, cuando existen.

Definiciones (Máximo y mínimo):
Diremos que α es el máximo de S si y sólo si $\alpha = \sup S$ y $\alpha \in S$.
Diremos que β es el mínimo de S si y sólo si $\beta = \inf S$ y $\beta \in S$.
Escribiremos $\max S$ y $\min S$ para indicarlos.

Axioma 10: axioma del supremo, o de completitud, o de continuidad

$$S \subset \mathbb{R}, S \neq \emptyset, \text{ acotado superiormente } \Rightarrow \exists \sup S.$$

Nociones de Topología

En los números reales se toma como distancia habitual la dada por el valor absoluto:

$$d(a,b) = |b-a|\,,$$

llamada *distancia euclídea* .

Entornos:

Si a y δ son números reales con $\delta > 0$, llamamos *entorno abierto* de centro a y radio δ al siguiente subconjunto de números reales

$$E_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} : d(x,a) < \delta\}\,,$$

llamamos *entorno cerrado*

$$\overline{E}_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} : d(x,a) \leq \delta\}\,,$$

Puntos interiores, exteriores y frontera:

Sean $M \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, se dice que *el punto a es* **interior** *al conjunto M cuando existe un entorno de centro el punto a totalmente contenido en M.* Se representa por $int(M)$ o por $\overset{\circ}{M}$.

Se dice que *el punto a es* **exterior** *al conjunto M cuando existe un entorno de centro el punto a totalmente contenido en el complementario de M.* Se representa por $ext(M)$.

Se dice que *el punto a es un punto* **frontera** *del conjunto M cuando todo entorno de centro el punto a contiene puntos de M y puntos del complementario de M.* Se representa por $fr(M)$.

Para cualquier conjunto M se tiene que

$$\mathbb{R} = int(M) \cup ext(M) \cup fr(M)$$

siendo estos tres conjuntos disjuntos.

Conjuntos abiertos y cerrados:

Se dice que el conjunto $M \subset \mathbb{R}$ *es* **abierto** *si y sólo si todos sus puntos son interiores a* M

Se dice que el conjunto $M \subset \mathbb{R}$ *es* **cerrado** *si y sólo el conjunto complementario,* $\mathbb{R} \setminus M$*, es abierto.*

Principio de inducción matemática

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } P(1), \text{ y} \\ P(k) \Rightarrow P(k+1)\end{array}\right\} \text{ entonces } \forall n \in \mathbb{N} \text{ es } P(n).$$

En este método de demostración hemos de comprobar la propiedad para el valor 1, u otro valor donde la fórmula comienza a tener validez, y demostrar que cada vez que la propiedad se cumpla para un número, también se cumplirá para el siguiente, así este principio nos garantiza que la fórmula se cumple para todos los naturales.

EJEMPLO Vamos a demostar por inducción la fórmula de la suma de los primeros $n+1$ términos de una progresión geométrica con razón $r \neq 1$. Esta fórmula es

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Para $n = 1$ es $1 + r = \dfrac{1 - r^2}{1 - r}$, que es válida.
Supongamos que la fórmula fuese cierta para el número k, es decir, que se tiene

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^k = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r};$$

veamos que, entonces, también es cierta para el número $k+1$, en efecto:

$$\begin{aligned} 1 + r + r^2 + \ldots + r^k + r^{k+1} &= (1 + r + r^2 + \ldots + r^k) + r^{k+1} = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r} + r^{k+1} = \\ &= \frac{1 - r^{k+1} + r^{k+1} - r^{k+2}}{1 - r} = \frac{1 - r^{k+2}}{1 - r}, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración.