Tema 1.1. Cálculo matricial y sistemas de ecuaciones lineales

ÁLGEBRA LINEAL

DMATIC, ETSI Informáticos
Universidad Politécnica de Madrid

Índice

Se denota por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices de orden (tamaño) $m \times n$ cuyos elementos son números reales.

- **Matriz fila (vector fila)** es una matriz de orden $1 \times n$. **Ej.** $A = (1 \;\; 7 \;\; -6 \;\; 21)$
- **Matriz columna (vector columna)** es una matriz de orden $m \times 1$. **Ej.** $A = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$
- **Matriz rectangular** es una matriz de orden $m \times n$ con $m \neq n$. **Ej.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$
- **Matriz identidad** es una matriz cuyos elementos son $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$

  Ej. $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **Matriz nula** es una matriz cuyos elementos son $a_{ij} = 0$. **Ej.** La matriz nula de orden 2×3 es $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- **Matriz triangular superior** es una matriz $n \times n$ tal que $a_{ij} = 0$ cuando $i > j$.

  Ej. $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **Matriz triangular inferior** es una matriz $n \times n$ tal que $a_{ij} = 0$ cuando $i < j$.

  Ej. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

- **Matriz diagonal** es una matriz $n \times n$ tal que $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$. **Ej.**

  $A = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}.$

- **Matriz idempotente** es una matriz que verifica $A^2 = A$. **Ej.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices del mismo orden $m \times n$. Se define la **suma de A y B** como la matriz $m \times n$ definida por

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Propiedades de la suma de matrices

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$ **(asociativa)**.
2. $A + B = B + A$ **(conmutativa)**.
3. $A + 0 = A$, esto es, la matriz nula 0 de orden $m \times n$ es el **elemento neutro**.
4. $A + (-A) = 0$, donde $-A = (-a_{ij})$, esto es, la **matriz opuesta de A** es $-A$.

El conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ con la operación suma tiene estructura algebraica de **grupo abeliano.**

Se define la **multiplicación de A por un número real α** como

$$\alpha \cdot A = (\alpha a_{ij})$$

Notación: Abreviaremos $\alpha \cdot A$ por αA

Propiedades de la multiplicación escalar

Sean α y β números reales y $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se tiene

- (i) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ **(asociativa)**
- (ii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ **(distributiva respecto a la suma de matrices)**
- (iii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ **(distributiva respecto a la suma de escalares)**
- (iv) $1A = A$ **(identidad de la multiplicación escalar)**.
- (v) $0A = \mathbb{0}$ y $\alpha\mathbb{0} = \mathbb{0}$ **(propiedades multiplicativas del cero)**

Sean $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$ y $B = (b_{ij})$ de orden $n \times p$. Se define el **producto $A \cdot B$** como la matriz C de orden $m \times p$ siguiente:

$$C = A \cdot B = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

Propiedades de la multiplicación matricial

Sean A de orden $m \times n$, B y $\widetilde{B}$ de orden $n \times p$ y C de orden $p \times q$.

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ **(asociativa)**
2. $A \cdot (B + \widetilde{B}) = A \cdot B + A \cdot \widetilde{B}$ y $(B + \widetilde{B}) \cdot C = B \cdot C + \widetilde{B} \cdot C$ **(distributivas del producto respecto a la suma de matrices)**
3. $I_m A = A$ y $A I_n = A$ **(identidad multiplicativa matricial)**
4. $AB \neq BA$ en general **(no es conmutativo)**.
5. $A0 = 0$ y $0A = 0$

Matriz traspuesta

Sean $A = (a_{ij})$ matriz de orden $m \times n$. La **matriz traspuesta de A**, la cual se denotará por A^t, es la matriz de orden $n \times m$ definida por

$$A^t = (b_{ij}), \quad b_{ij} = a_{ji}$$

La matriz traspuesta A^t se obtiene cambiando en la matriz A las filas por columnas (o cambiando en A las columnas por filas).

Propiedades de la traspuesta

(i) $(A \cdot B)^t = A^t + B^t$.

(ii) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$, donde α es un número real.

(iii) $(A + B)^t = B^t \cdot A^t$.

(iv) $(A^t)^t = A$.

Una matriz A es **simétrica** si cumple $A = A^t$. **Ej.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 6 \\ -7 & 0 & 9 \\ 6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ es simétrica.

El conjunto de matrices cuadradas $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ lo escribiremos como $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se dice que una matriz $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es **inversa de A** si cumple

$$AX = XA = I_n$$

Se dice que A es **regular** si existe una matriz inversa de A. En otro caso, diremos que A es **singular**.

Propiedades de la inversa

(i) La inversa de A, si existe, es única, y se denota por A^{-1}.
(ii) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, siendo $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ regulares.
(iii) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, siendo $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ regular.
(iv) $(A^{-1})^{-1} = A$, siendo $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ regular.

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

1. Permutar dos filas (col.) de A: $F_i \leftrightarrow F_j$
2. Multiplicar una fila (col.) de A por un número real no nulo: $F_i \leftarrow \alpha F_i$
3. Reemplazar una fila (col.) por la suma de sí misma y un múltiplo de otra fila (col.): $F_i \leftarrow F_i + \alpha F_j$

Ejemplo 1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftarrow \frac{-1}{2} F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} := A'$$

Sea $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matriz identidad de orden n.

1. La matriz que se obtiene permutando las filas i-ésima y j-ésima de I_n se designa por E_{ij}.
2. La matriz que se obtiene multiplicando la fila i-ésima de I_n por un número real no nulo α se designa por $E_i(\alpha)$.
3. La matriz que se obtiene al remplazar la fila i-ésima de I_n por la suma de sí misma y la fila j-ésima multiplicada por un número β se designa por $E_{ij}(\beta)$.

Propiedades

Las matrices elementales son regulares y sus inversas son matrices elementales:

- $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$.
- $E_i(\alpha)^{-1} = E_i\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$.
- $E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$.

Ejemplo 2

Sea $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Las siguientes son matrices elementales:

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_1\left(\frac{-1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{21}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- E_{13} se obtiene al permutar las filas primera y tercera en I_3,
- $E_1\left(\frac{-1}{2}\right)$ se obtiene al multiplicar la fila 1 de I_3 por $\frac{-1}{2}$,
- $E_{21}(3)$ se obtiene al remplazar fila 2 de I_3 por la suma de la fila 2 y la fila 1 multiplicada por 3.

Si A es una matriz $3 \times n$, el producto $E_{13}A$ es igual a la matriz que se obtiene al permutar las filas primera y tercera en A.

Si A es la matriz del ejemplo 1, $E_{21}(3)E_1\left(\frac{-1}{2}\right)E_{13}A$ es igual a la matriz A' dada en el Ejemplo 1.

Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ está en **forma escalonada por filas** si verifica:

(i) Las k primeras filas son no nulas ($0 \leq k \leq m$).

(ii) El primer elemento no nulo de la fila i-ésima se encuentra a la derecha del primero no nulo de la fila $(i-1)$-ésima.

(iii) Las $(m-k)$ últimas filas son nulas.

Teorema 1

Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ puede transformarse en una matriz escalonada por filas mediante operaciones elementales por filas.

Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ está en **forma escalonada reducida por filas** si está en forma escalonada por filas y además los primeros elementos distintos de cero en las filas no nulas son 1 y encima de éstos hay ceros.

Teorema 2

Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ puede transformarse mediante operaciones elementales por filas en una matriz escalonada reducida por filas. Además esta forma es única.

Si A es cuadrada y regular, entonces su forma escalonada reducida es la matriz identidad.

Ejemplo 3

Halla la forma escalonada reducida de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{F_2 \leftarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \leftarrow F_3 - 3F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow \frac{1}{2} F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} := A'$$

Partimos de una matriz A de tamaño $m \times n$ y de la matriz identidad I_m de orden m:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

Mediante operaciones elementales por filas transformamos la matriz de la izquierda en una matriz A' en forma escalonada (escalonada reducida) y la matriz de la derecha en una matriz P que satisface la relación $PA = A'$.

Ejemplo 4

Si A y A' son las matrices del Ejemplo 1, entonces $A' = PA$, donde $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la cual se obtiene aplicando el procedimiento descrito. Se verifica $P = E_{21}(3)E_1\left(\frac{-1}{2}\right)E_{13}$.

Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ está en **forma escalonada por columnas** si verifica:

(i) Las k primeras columnas son no nulas $(0 \leq k \leq m)$.

(ii) El primer elemento no nulo de la columna i-ésima se encuentra más abajo que el de la columna $(i-1)$-ésima.

(iii) Las $(m-k)$ últimas columnas son nulas.

Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ está en **forma escalonada reducida por columnas** si está en forma escalonada por columnas y además los primeros elementos distintos de cero en las columnas no nulas son 1 y en la fila de éstos hay ceros.

Ejemplo 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Todas las matrices están en una forma escalonada por columnas y la matriz C está en la forma escalonada reducida.

Cálculo de inversa por el método de Gauss-Jordan

Partimos de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ regular y de la matriz identidad I_n:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

Mediante operaciones elementales transformamos la matriz de la izquierda en la matriz identidad y la matriz de la derecha en la inversa de A.

Ejemplo 6

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow (1/2) F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Luego

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango de una matriz A es el número de filas no nulas de una forma escalonada de A.

Ejemplo 7

Halla el rango de la matriz A por reducción.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las trasformaciones realizadas son:

$$(a)\ \begin{array}{l} F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \leftarrow F_3 - 3F_1 \\ F_4 \leftarrow F_4 - 2F_1 \end{array} \qquad (b)\ F_3 \leftarrow F_3 - F_2$$

A la vista de la matriz escalonada obtenida se concluye que $\mathrm{rg}(A) = 2$.

Sea A una matriz cuadrada. Si $A = E_1 \cdots E_n A'$, donde E_i es matriz elemental para $i = 1, \ldots, n$, entonces $|A| = |E_1| \cdots |E_n||A'|$.

Notación: $\det A = |A|$.

Propiedades

Determinantes de las matrices elementales:

- $|E_{ij}| = -1$.
- $|E_i(\alpha)| = \alpha |I_n| = \alpha$.
- $|E_{ij}(\alpha)| = |I_n| = 1$.

Ejemplo 8

Halla el determinante de $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, utilizando una forma escalonada.

Se tiene

$$E_{13}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad E_{32}\left(\frac{-1}{2}\right) E_{13}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} := A'$$

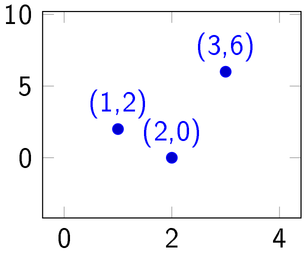
Así, $|A'| = \left|E_{32}\left(\frac{-1}{2}\right) E_{13}A\right|$. Como $|E_{13}| = -1$, $\left|E_{32}\left(\frac{-1}{2}\right)\right| = 1$ y $|A'| = 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 = 14$, se deduce que

$$|A| = -14$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Representación matricial del sistema
- Teorema de Rouché-Frobenius
- Resolución de sistemas: Método de eliminación de Gauss. Método de eliminación de Gauss-Jordan
- Estructura de las soluciones de un sistema

Hallar el polinomio $p(x) = a + bx + cx^2$ cuya gráfica pasa por los puntos del plano $(1, 2), (2, 0)$ y $(3, 6)$.



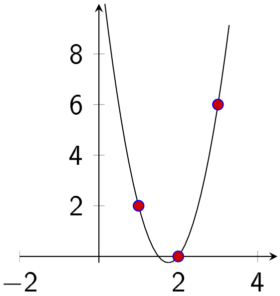
$$p(1) = 2 \Rightarrow a + b + c = 2$$
$$p(2) = 0 \Rightarrow a + 2b + 4c = 0$$
$$p(3) = 6 \Rightarrow a + 3b + 9c = 6$$

Forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \text{donde (a)} \begin{array}{l} F_2 \leftarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \leftarrow F_3 - F_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(b) } F_3 \leftarrow (1/2)F_3 \\ \text{(c) } F_3 \leftarrow F_3 - F_2 \end{array}$$



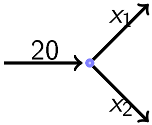
Sistema equivalente:

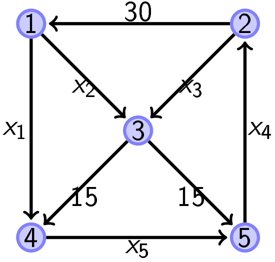
$$\begin{array}{lcl} a+b+c=2 & & a=12 \\ b+3c=-2 & \Rightarrow & b=-14 \\ c=4 & & c=4 \end{array}$$

$$\boxed{p(x) = 12 - 14x + 4x^2}$$

Análisis de redes

El tráfico en puntos de intersección de carreteras se puede modelizar mediante una red formada por nodos (puntos de intersección) y arcos (sentido de circulación por el tramo de carretera entre dos nodos). Se asume que el flujo total de vehículos que llega a un nodo es igual al flujo total de vehículos que sale de dicho nodo. Por, ejemplo $x_1 + x_2 = 20$ en:





$$
\left\{
\begin{array}{rrrrrcr}
x_1 & +x_2 & & & & = & 30 \\
& & x_3 & -x_4 & & = & -30 \\
& x_2 & +x_3 & & & = & 30 \\
x_1 & & & & -x_5 & = & -15 \\
& & & -x_4 & +x_5 & = & -15
\end{array}
\right.
$$

Un sistema de m ecuaciones con n incógnitas y coeficientes reales es un conjunto de relaciones

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Notación matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- $A \stackrel{\text{def}}{=}$ **matriz de coeficientes** del sistema.
- $(A|\vec{b}) \stackrel{\text{def}}{=}$ **matriz ampliada** del sistema.
- **Sistema compatible:** Si tiene solución.
- **Sistema incompatible:** Si no tiene solución.

Teorema 3 (Teorema de Rouché-Frobenius)

Dado $A\vec{x} = \vec{b}$ *con* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y* $\vec{b}$ *un vector columna* $m \times 1$. *Se verifica:*

(i) *Si* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|\vec{b}) = n \Rightarrow$ *el sistema es* ***compatible determinado*** *(el sistema tiene una única solución)*

(ii) *Si* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|\vec{b}) < n \Rightarrow$ *el sistema es* ***compatible indeterminado*** *(el sistema tiene infinitas soluciones que dependen de* $n - \mathrm{rg}(A)$ *parámetros)*

(iii) *Si* $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A|\vec{b}) \Rightarrow$ *el sistema es* ***incompatible*** *(el sistema no tiene ninguna solución)*

Fig.: Una única solución

Fig.: Infinitas soluciones

Fig.: No tiene solución

Si $A\vec{x} = \vec{b}$ es un sistema con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\vec{b}$ un vector columna $n \times 1$ tal que A es **regular** entonces el sistema tiene una única solución

$$x_i = \frac{|A^{(1)}, \ldots, A^{(i-1)}, \vec{b}, A^{(i+1)}, \ldots, A^{(n)})|}{|A|},$$

donde $A^{(j)}$ es la columna j-ésima de A, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Sea $A\vec{x} = \vec{b}$ un sistema con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\vec{b}$ un vector columna $m \times 1$.

Sistemas equivalentes: Dos sistemas se dice que son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Teorema 4

Si $(A'|\vec{b}')$ es una forma escalonada por filas de $(A|\vec{b}) \Rightarrow A'\vec{x} = \vec{b}'$ es equivalente a $A\vec{x} = \vec{b}$.

- El método de eliminación de Gauss (Gauss-Jordan) consiste en convertir el sistema inicial en otro equivalente que está en forma escalonada por filas (forma escalonada reducida por filas), que denotaremos por $A'\vec{x} = \vec{b}'$.
- El sistema reducido se resuelve por el método de sustitución regresiva, esto es, despejando la última incógnita y realizando substituciones hacia atrás en las nuevas ecuaciones del sistema.

Estructura de las soluciones de un sistema homogéneo

Todo sistema homogéneo

$$A\vec{x} = \vec{0} \qquad \text{(H)}$$

es compatible ya que posee la solución trivial $\vec{0}$

Si el sistema tiene una solución distinta de la trivial, entonces tiene infinitas soluciones ya que se verifica:

- Si $\vec{u}$ es solución de (H) $\Rightarrow c\vec{u}$ es solución de (H) $\forall c \in \mathbb{R}$.
- Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son soluciones de (H) $\Rightarrow \vec{u} + \vec{v}$ es solución de (H).

Además, si $k = n - \mathrm{rg}(A)$, entonces existen k vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ linealmente independientes de manera que todas las soluciones de (H) son de la forma

$$\vec{x} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_k\vec{u}_k$$

con $c_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, k$.

Estructura de las soluciones de un sistema completo

Sea

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad\qquad (C)$$

Si $\vec{x}_p$ es una solución particular de (C), entonces todas sus soluciones son de la forma $\vec{x}_p + \vec{u}$, donde $\vec{u}$ es solución de su sistema homogéneo asociado $A\vec{x} = \vec{0}$.
Sea $k = n - \mathrm{rg}(A)$, entonces todas las soluciones de (C) son de la forma

$$\vec{x} = \vec{x}_p + c_1\,\vec{u}_1 + c_2\,\vec{u}_2 + \cdots + c_k\,\vec{u}_k$$

con $c_j \in \mathbb{R}$, $A\vec{u}_j = \vec{0}$ para $j = 1, \ldots, k$, y los vectores$\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ son linealmente independientes.