

Manual de Mecánica Clásica

Artemio González López

Madrid, enero de 2014

Editor:

Artemio González López

Departamento de Física Teórica II

Facultad de Ciencias Físicas

Avenida Complutense s/n

Ciudad Universitaria

28040 Madrid

© El autor

ISBN-10: 84-695-2651-0

ISBN-13: 978-84-695-2651-4

Impreso en Madrid

Índice general

1	Mecánica newtoniana	1
1.1	Sistemas de coordenadas. Cinemática	1
1.2	Leyes de Newton. Sistemas de referencia inerciales. Principio de relatividad de Galileo.	4
1.2.1	Leyes de Newton	4
1.2.2	Sistemas de referencia inerciales	6
1.2.3	Principio de relatividad de Galileo	7
1.3	Leyes de conservación. Fuerzas conservativas. Fuerza electromagnética.	9
1.3.1	Leyes de conservación	9
1.3.2	Fuerzas conservativas	10
1.3.3	Fuerzas gravitatoria y electrostática	12
1.3.4	Fuerza electromagnética	13
1.4	Movimiento de una partícula en un potencial unidimensional.	18
1.4.1	Equilibrios. Período de las pequeñas oscilaciones	26
1.5	Dinámica de un sistema de partículas. Leyes de conservación	29
1.5.1	Dinámica de un sistema de partículas	29
1.5.2	Leyes de conservación	30
2	Movimiento en un campo de fuerzas central	35
2.1	Problema de dos cuerpos. Reducción al problema equivalente de un cuerpo	35
2.2	Constantes del movimiento. Ley horaria y ecuación de las trayectorias. Órbitas acotadas	36
2.2.1	Constantes del movimiento	36
2.2.2	Ley horaria y ecuación de las trayectorias	37
2.2.3	Órbitas acotadas	43
2.3	El problema de Kepler. Movimiento planetario	46
2.3.1	El problema de Kepler	46
2.3.2	Movimiento planetario	48
2.4	Dispersión en un campo de fuerzas central. Fórmula de Rutherford	50
2.4.1	Sección eficaz diferencial de dispersión	50
2.4.2	Dispersión por un potencial central	53
2.4.3	Fórmula de Rutherford	57
3	Formulaciones lagrangiana y hamiltoniana de la Mecánica	61
3.1	Introducción al cálculo variacional	61
3.1.1	Problema fundamental del cálculo de variaciones	61
3.1.2	Ecuaciones de Euler–Lagrange	62
3.2	Principio de Hamilton en sistemas sin ligaduras	69
3.2.1	Principio de Hamilton para una partícula	69
3.2.2	Principio de Hamilton para un sistema de partículas	70
3.2.3	Covariancia de la formulación lagrangiana	71
3.2.4	Lagrangiano de una partícula cargada en un campo electromagnético	72
3.3	Sistemas con ligaduras	73

3.3.1	Movimiento de una partícula sobre una superficie	73
3.3.2	Sistema de N partículas con ligaduras	76
3.4	Leyes de conservación	78
3.5	Formulación hamiltoniana de la Mecánica	82
3.5.1	Ecuaciones canónicas de Hamilton	82
3.5.2	Leyes de conservación	84
3.5.3	Corchetes de Poisson	87
4	Movimiento en un sistema de referencia no inercial	93
4.1	Velocidad angular de un sistema de ejes respecto de otro	93
4.2	Derivadas temporales en los sistemas fijo y móvil	95
4.3	Dinámica en un sistema de referencia no inercial	96
4.4	Movimiento con respecto a la superficie terrestre	97
4.5	El péndulo de Foucault	103
5	El sólido rígido	107
5.1	Momento angular y energía cinética de un sólido rígido	107
5.1.1	Grados de libertad	107
5.1.2	Momento angular y energía cinética	108
5.2	Tensor de inercia	111
5.2.1	Definición y propiedades elementales	111
5.2.2	Teorema de Steiner	112
5.2.3	Ejes principales de inercia	114
5.3	Ecuaciones del movimiento de un sólido rígido	117
5.3.1	Ecuaciones del movimiento de un sólido rígido en un sistema inercial	117
5.3.2	Ecuaciones de Euler	119
5.4	Movimiento inercial de un trompo simétrico	120
5.5	Ángulos de Euler	124
5.6	El trompo de Lagrange	126
6	Relatividad especial	133
6.1	Principios de la Relatividad especial	133
6.2	Transformaciones de Lorentz	136
6.2.1	Deducción de las ecuaciones de la transformación	136
6.2.2	Ley de adición de velocidades relativista	138
6.2.3	Intervalo	139
6.2.4	Propiedades de las transformaciones de Lorentz	142
6.3	Consecuencias físicas de las transformaciones de Lorentz	144
6.3.1	Dilatación del tiempo	144
6.3.2	Contracción de Lorentz–Fitzgerald	147
6.3.3	Efecto Doppler relativista	149
6.4	Cuadrivelocidad y cuádrimomento. Energía cinética relativista	152
6.5	Conservación del cuádrimomento. Energía relativista	154
6.6	Partículas de masa nula. Efecto Compton	156
6.6.1	Efecto Compton	157
6.7	Colisiones relativistas	158
6.7.1	Sistema centro de momentos	158
6.7.2	Energía umbral	159
6.8	Dinámica relativista	161
6.9	Movimiento hiperbólico	163

Capítulo 1

Mecánica newtoniana

1.1 Sistemas de coordenadas. Cinemática

Vector de posición de una partícula que se mueve en el espacio ordinario ($\mathbb{R}^3$):

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \equiv \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i ,$$

donde $\mathbf{e}_i$ es el i -ésimo vector unitario coordinado en un sistema de coordenadas *cartesianas* ortogonales:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0) , \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0) , \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1) .$$

Velocidad y aceleración:

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} , \quad \mathbf{a} \equiv \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} ,$$

donde el punto indica derivada respecto del *tiempo* t . En coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i , \quad \mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i ,$$

donde (al ser los vectores coordinados $\mathbf{e}_i$ *constantes*)

$$v_i = \dot{x}_i , \quad a_i = \ddot{x}_i .$$

Notación:

$$r = |\mathbf{r}| , \quad v = |\mathbf{v}| .$$

Ejercicio. Probar que si $\mathbf{v} \neq 0$ se tiene

$$\dot{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{v} .$$

En particular, si v es constante los vectores velocidad y aceleración son ortogonales.

Ejercicio. Probar que $\mathbf{r} \dot{\mathbf{r}} = r \dot{r}$.

Coordenadas esféricas:

$$\mathbf{r} = r(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) ,$$

donde

$$r \geq 0 , \quad 0 \leq \theta \leq \pi , \quad 0 \leq \varphi < 2\pi .$$

Ahora los vectores unitarios coordenados *no* son constantes, sino que dependen de la *posición* de la partícula (i.e., de las coordenadas esféricas (r, θ, φ)):

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right|^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) = \frac{\mathbf{r}}{r}, \\ \mathbf{e}_\theta = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right|^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta), \\ \mathbf{e}_\varphi = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right|^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0). \end{cases}$$

Las coordenadas esféricas son *ortogonales*, pues se comprueba fácilmente que

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0.$$

De estas relaciones se sigue también que los vectores $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$ forman un *sistema ortonormal* en cada punto. Este sistema está *positivamente orientado*, ya que

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\varphi,$$

o, equivalentemente,

$$(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta) \cdot \mathbf{e}_\varphi = 1.$$

Velocidad y aceleración en coordenadas esféricas.

Calculemos en primer lugar las derivadas temporales de los vectores coordenados unitarios. Nótese que, al ser

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha = 1 \quad (\alpha = r, \theta, \varphi),$$

derivando respecto del tiempo se obtiene

$$\dot{\mathbf{e}}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha = 0.$$

Al ser los vectores $\mathbf{e}_\alpha$ mutuamente ortogonales, $\dot{\mathbf{e}}_r$ ha de ser una combinación lineal de $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_\varphi$, y así sucesivamente para las restantes coordenadas. Más precisamente, aplicando la *regla de la cadena* se obtiene:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_r = \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \sin \theta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r + \cos \theta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = -(\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \dot{\varphi} = -\dot{\varphi} (\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta). \end{cases} \quad (1.1)$$

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores se obtiene sin dificultad:

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi. \quad (1.2)$$

Por tanto

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi,$$

siendo

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r\sin\theta\dot{\varphi} \quad (1.3)$$

las componentes del vector velocidad en coordenadas esféricas. Nótese que, al ser los vectores unitarios coordenados *ortonormales*,

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2 = \dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2). \quad (1.4)$$

Del mismo modo, derivando la ecuación (1.2) respecto de t y aplicando las relaciones (1.1) se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}(\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \sin\theta\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi) + (r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\mathbf{e}_r + \cos\theta\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi) \\ &\quad + (r\sin\theta\ddot{\varphi} + \sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi - r\sin\theta\dot{\varphi}^2(\sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta) \\ &= a_r\mathbf{e}_r + a_\theta\mathbf{e}_\theta + a_\varphi\mathbf{e}_\varphi,\end{aligned}$$

donde las componentes de la aceleración en coordenadas esféricas están dadas por

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2, \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2, \\ a_\varphi = r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Ejemplo 1.1. *Movimiento plano en coordenadas polares.*

Supongamos que la partícula se mueve en el plano Oxy , es decir que $\theta(t) = \pi/2$ para todo t . En tal caso $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = v_\theta = a_\theta = 0$, (r, φ) son *coordenadas polares* en el plano del movimiento, y las fórmulas (1.3)-(1.5) se reducen a las siguientes:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}.$$

En particular, si el movimiento es *circular* ($r(t) = R$ para todo t) se obtienen las fórmulas familiares

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = R\dot{\varphi}, \quad a_r = -R\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = R\ddot{\varphi}.$$

Nótese, en particular, que aunque la componente radial de la velocidad es idénticamente nula, hay una aceleración radial negativa $-R\dot{\varphi}^2 = -v^2/R$ (*aceleración centrípeta*). $\square$

Coordenadas cilíndricas.

$$\mathbf{r} = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z),$$

siendo

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Repitiendo el cálculo anterior se obtiene:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right|^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \\ \mathbf{e}_\varphi = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right|^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \\ \mathbf{e}_z = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right|^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (0, 0, 1). \end{cases}$$

Nótese que de nuevo

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_z,$$

y por tanto las coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) son también ortonormales y están positivamente orientadas. Derivando respecto de t las ecuaciones de los vectores unitarios coordenados se obtiene inmediatamente

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\mathbf{e}_\rho, \quad \dot{\mathbf{e}}_z = 0.$$

Al ser ahora

$$\mathbf{r} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z, \quad (1.6)$$

derivando dos veces respecto de t y procediendo como antes se obtienen fácilmente las siguientes fórmulas para las componentes de la velocidad y la aceleración en coordenadas cilíndricas:

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}; \quad a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z}. \quad (1.7)$$

De nuevo, de la ortonormalidad de los vectores $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$ se deduce que

$$v^2 = v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 .$$

Ejercicio. Discutir la relación entre las fórmulas anteriores y las del Ejemplo 1.1.

Ejercicio. Probar que si los vectores $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ forman un sistema ortonormal positivamente orientado entonces se tiene

$$\mathbf{n}_\alpha \times \mathbf{n}_\beta = \pm \mathbf{n}_\gamma ,$$

donde α, β y γ son distintos dos a dos, y el signo “+” corresponde al caso en que (α, β, γ) es una permutación *cíclica* de $(1, 2, 3)$. Introduciendo el *tensor completamente antisimétrico de Levi-Civita*

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 1, & (\alpha, \beta, \gamma) \text{ permutación par de } (1, 2, 3) \\ -1, & (\alpha, \beta, \gamma) \text{ permutación impar de } (1, 2, 3) \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

las relaciones anteriores se pueden escribir en la forma equivalente

$$\mathbf{n}_\alpha \times \mathbf{n}_\beta = \sum_{\gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{n}_\gamma .$$

Velocidad angular.

Consideremos de nuevo una partícula que se mueve en una circunferencia de radio R . Escojamos como eje x_3 la recta perpendicular al plano del movimiento que pasa por el centro de la circunferencia, y tomemos como origen de coordenadas cualquier punto del eje x_3 . El movimiento de la partícula en coordenadas cilíndricas está descrito por las ecuaciones

$$\rho = R, \quad \varphi = \alpha(t), \quad z = h ,$$

siendo h constante (coordenada z del centro de la circunferencia) y $\alpha(t)$ una función arbitraria del tiempo. De las ecs. (1.7) se sigue que

$$\mathbf{v} = R\dot{\alpha}(t) \mathbf{e}_\varphi ,$$

y de la ec. (1.6) se deduce que

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{r} = \mathbf{e}_z \times (\rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z) = \rho \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho = \rho \mathbf{e}_\varphi = R \mathbf{e}_\varphi .$$

Por tanto en este caso

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} ,$$

donde el vector

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\alpha}(t) \mathbf{e}_z$$

se denomina **velocidad angular** de la partícula. La velocidad angular es por tanto un *vector* cuya dirección es la del eje de giro, y cuyo módulo es el *valor absoluto* $|\dot{\alpha}(t)|$ de la velocidad angular de rotación. Nótese también que la rotación alrededor del eje z es “a izquierdas” (resp. “a derechas”) si $\dot{\alpha}(t) > 0$ (resp. $\dot{\alpha}(t) < 0$).

1.2 Leyes de Newton. Sistemas de referencia inerciales. Principio de relatividad de Galileo.

1.2.1 Leyes de Newton

El **momento** (o cantidad de movimiento) de una partícula se define por

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}} , \tag{1.8}$$

donde m es la **masa** de la partícula. En Mecánica clásica se considera que la masa es un parámetro positivo constante (en particular, independiente de la velocidad) característico de cada partícula. En la notación y terminología actuales, las dos primeras leyes de Newton afirman que:

I. *En ausencia de fuerzas, el momento (y, por tanto, la velocidad) de la partícula permanece constante.*

II. *Si $\mathbf{F}$ es la fuerza que actúa sobre la partícula, entonces*

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (1.9)$$

Al ser la masa de la partícula independiente de la velocidad, esta última ecuación es equivalente a

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}}. \quad (1.10)$$

Comentarios.

- Tal como las hemos formulado, la primera ley es un caso particular de la segunda, ya que si $\mathbf{F} = 0$ entonces $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$ implica que $\mathbf{p}$, y por tanto $\mathbf{v}$, han de ser constantes.
- Las dos primeras leyes de Newton (o, por lo que acabamos de comentar, las ecs. (1.9)-(1.10)) constituyen el fundamento de la Mecánica clásica. Estas leyes se cumplen con gran exactitud para movimientos con *velocidades pequeñas* en comparación con la velocidad de la luz, y a *escala macroscópica*¹. Es decir, *no* rigen las interacciones a escala atómica y subatómica (entre partículas elementales, átomos, núcleos atómicos, moléculas, etc.), gobernadas por la *Mecánica cuántica*. Tampoco son válidas para el movimiento en campos gravitatorios intensos, regido por la teoría de la *relatividad general* de Einstein. En realidad, tanto la Mecánica cuántica (o incluso la *teoría cuántica de campos*, que combina la Mecánica cuántica con la teoría especial de la relatividad) como la Relatividad general tampoco son universalmente válidas, sino que más bien se aplican a situaciones físicas distintas. De hecho, no existe hoy en día una teoría consistente, aplicable a *todos* los fenómenos físicos, que unifique la Mecánica cuántica con la teoría general de la relatividad.
- La segunda ley de Newton proporciona una definición operacional de la masa. En efecto, si sometemos a dos partículas distintas (denotadas por 1 y 2) a la misma fuerza $\mathbf{F}$, según (1.10) sus aceleraciones tienen la misma dirección y sentido, y el cociente de sus módulos verifica:

$$\frac{|\mathbf{a}_1|}{|\mathbf{a}_2|} = \frac{m_2}{m_1}.$$

De esta forma se puede medir en principio el cociente m_2/m_1 para cualquier par de partículas.

- La práctica totalidad de las fuerzas que aparecen en Mecánica clásica dependen a lo sumo del tiempo, la posición y la velocidad, y son por tanto *independientes de la aceleración* (y de las derivadas de la posición de orden superior a 2)². La segunda ley de Newton (1.10) puede escribirse por tanto en la forma

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \quad (1.11)$$

siendo $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ la fuerza ejercida sobre la partícula. Esta ecuación es en realidad un *sistema de 3 ecuaciones diferenciales de 2º orden*

$$\ddot{x}_i = \frac{1}{m} F_i(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.12)$$

¹Más precisamente, si la *acción* típica del sistema en estudio, definida como el producto de la energía por el tiempo típicos, es mucho mayor que la constante de Planck $\hbar \simeq 6,62606957 \times 10^{-34}$ J s.

²La única excepción de cierta importancia es la fuerza ejercida sobre una partícula cargada acelerada por su propio campo electromagnético, denominada *fuerza de Abraham-Lorentz-Dirac*, proporcional a $\dot{\mathbf{a}}$.

para las tres coordenadas de la partícula $x_i(t)$. Si la función $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ es de clase C^1 , las ecuaciones (1.11) (o (1.12)) con condiciones iniciales arbitrarias

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}_0 \quad (1.13)$$

tienen (localmente) una *solución única*. En otras palabras, *la posición y la velocidad de la partícula en un cierto instante t_0 determinan su trayectoria $\mathbf{r}(t)$ en cualquier otro instante t* . La Mecánica clásica es por tanto una teoría esencialmente *determinista*.

- La tercera ley de Newton (o **ley de la acción y la reacción**) afirma que si la partícula 2 ejerce sobre la partícula 1 una fuerza $\mathbf{F}_{12}$, entonces la partícula 1 ejerce sobre la 2 una fuerza $\mathbf{F}_{21}$ igual y de signo contrario:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}. \quad (1.14)$$

Una versión más restrictiva de la tercera ley de Newton establece que, además, la fuerza $\mathbf{F}_{12}$ (y, por tanto, $\mathbf{F}_{21}$) ha de ser paralela al vector $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, es decir a la recta que une ambas partículas:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \parallel \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (1.15)$$

Es importante tener en cuenta que la tercera ley de Newton —en cualquiera de sus dos versiones (1.14) y (1.15)— *no* tiene carácter fundamental, ya que (por ejemplo) en general *no* la verifica la fuerza electromagnética entre dos cargas en movimiento. Sí la cumplen —de hecho, en su versión más restrictiva (1.15)— las fuerzas gravitatoria y electrostática (ver más adelante), así como la mayor parte de las fuerzas macroscópicas de naturaleza no electromagnética que ocurren en problemas mecánicos ordinarios, como por ejemplo la tensión.

1.2.2 Sistemas de referencia inerciales

Es evidente que la primera ley de Newton *no* puede cumplirse en *todos* los sistemas de referencia. En efecto, sean S y S' dos sistemas de referencia con los ejes paralelos, y denotemos por $\mathbf{R}(t)$ las coordenadas del origen de S' respecto del sistema de referencia S en el tiempo t . Supongamos que las coordenadas de una partícula respecto del sistema de referencia S en cada instante t están dadas por un cierto vector $\mathbf{r}(t)$, de forma que la velocidad de la partícula (respecto de S) es $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$. En Mecánica newtoniana se supone que el tiempo tiene carácter universal³, de modo que (una vez fijada la unidad de tiempo) la relación entre los tiempos t y t' de un mismo suceso medidos en los sistemas S y S' es simplemente

$$t' = t - t_0,$$

con t_0 constante. Desde el punto de vista del sistema S' , por tanto, en el instante $t' = t - t_0$ las coordenadas de la partícula estarán dadas por el vector

$$\mathbf{r}'(t') = \mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t) \equiv \mathbf{r}(t' + t_0) - \mathbf{R}(t' + t_0).$$

Por tanto la velocidad de dicha partícula respecto del sistema de referencia S' en el instante t' está dada por

$$\mathbf{v}'(t') \equiv \frac{d\mathbf{r}'(t')}{dt'} = \dot{\mathbf{r}}(t' + t_0) - \dot{\mathbf{R}}(t' + t_0) \equiv \mathbf{v}(t' + t_0) - \dot{\mathbf{R}}(t' + t_0),$$

donde como siempre el punto denota derivada respecto de t . Supongamos que la partícula es **libre**, es decir que no está sometida a fuerza alguna. Si en el sistema S se cumple la primera ley de Newton, entonces $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0$ para todo t . Pero, en virtud de la ecuación anterior, en el sistema S' se tendrá

$$\mathbf{v}'(t') = \mathbf{v}_0 - \dot{\mathbf{R}}(t' + t_0),$$

que *no* es constante a menos que $\dot{\mathbf{R}}$ lo sea. Nótese que $\dot{\mathbf{R}}$ es constante si y solo si $\ddot{\mathbf{R}} = 0$; por tanto, la primera ley de Newton se cumplirá en el sistema de referencia S' (suponiendo que se cumple en S , y que los ejes de S y S' son paralelos) si y solo si su origen de coordenadas se mueve *sin aceleración* con respecto al de S .

³Veremos al final del curso que este postulado *no* se cumple en la teoría especial de la Relatividad.

Definición 1.2. Un sistema de referencia es **inercial** si en dicho sistema se cumple la primera ley de Newton.

Por lo visto anteriormente, las dos primeras leyes de Newton pueden formularse de manera más precisa y lógicamente satisfactoria de la forma siguiente:

I. *Existe una clase de sistemas de referencia (los sistemas inerciales) respecto de los cuales las partículas libres se mueven siempre con velocidad constante.*

II. *En un sistema inercial, la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida sobre una partícula es igual a la variación de su momento $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$.*

Queda por tanto claro que:

1. Las dos primeras leyes de Newton son lógicamente independientes (en particular, la primera *define* la clase de sistemas de referencia para los que la segunda es válida).
2. Ambas leyes no son *axiomas* más o menos arbitrarios, sino hechos *comprobables* (y *comprobados*) *experimentalmente* (de hecho, válidos solo *aproximadamente* en un cierto rango de velocidades y fuerzas).
3. La relación (1.10) entre la fuerza y la aceleración (en general) *solo es válida en un sistema inercial*.

• ¿Qué sistemas de referencia conocidos son inerciales? Newton y Galileo observaron que un sistema de referencia para el cual las estrellas lejanas están en reposo es (con gran aproximación) inercial. Más recientemente, se ha comprobado que un sistema de referencia respecto del cual la radiación de fondo cósmica de microondas (reliquia del *big bang*) aparece isótropa es inercial.

1.2.3 Principio de relatividad de Galileo

Sea S un sistema inercial, y consideremos otro sistema de referencia S' cuyo origen tiene coordenadas $\mathbf{R}(t)$ respecto de S en cada instante t (siendo t el tiempo medido en S). Supondremos también que en el instante t los ejes de S' están relacionados con los de S por una transformación lineal (invertible) $A(t)^{-1}$. Nos preguntamos cómo deben ser $A(t)$ y $\mathbf{R}(t)$ para que el sistema S' sea también inercial.

Para responder a esta pregunta, nótese que si $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t$ denota las coordenadas respecto de S de una partícula libre en el instante t , las coordenadas de dicha partícula respecto de S' en $t' = t - t_0$ están dadas por⁴

$$\mathbf{r}'(t') = A(t) \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t)) = A(t) \cdot (\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t - \mathbf{R}(t)), \quad t \equiv t' + t_0.$$

Derivando dos veces respecto de t' se obtiene

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'(t')}{dt'^2} = \ddot{A}(t) \mathbf{r}_0 + [t \ddot{A}(t) + 2\dot{A}(t)] \mathbf{v}_0 - [\ddot{A}(t) \mathbf{R}(t) + 2\dot{A}(t) \dot{\mathbf{R}}(t) + A(t) \ddot{\mathbf{R}}(t)].$$

Si el sistema de referencia S' es también inercial, el miembro derecho de esta igualdad ha de anularse idénticamente para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^3$, lo que conduce a las relaciones

$$\ddot{A}(t) = t \ddot{A}(t) + 2\dot{A}(t) = 0, \quad \ddot{A}(t) \mathbf{R}(t) + 2\dot{A}(t) \dot{\mathbf{R}}(t) + A(t) \ddot{\mathbf{R}}(t) = 0$$

⁴En efecto, sean (c_1, c_2, c_3) las coordenadas de un vector respecto de los ejes $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de S en el instante t , y denotemos por (c'_1, c'_2, c'_3) las coordenadas del mismo vector respecto de los ejes $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ de S' en dicho instante. Entonces

$$\sum_{i=1}^3 c_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 c_i A(t) \cdot \mathbf{e}'_i = \sum_{i,k=1}^3 c_i A_{ki}(t) \mathbf{e}'_k \implies c'_k = \sum_{i=1}^3 A_{ki}(t) c_i,$$

o, en notación vectorial, $\mathbf{c}' = A(t) \mathbf{c}$.

o, equivalentemente,

$$\dot{A}(t) = 0, \quad \ddot{\mathbf{R}}(t) = 0.$$

En otras palabras, para que S' sea un sistema inercial la transformación lineal $A(t)$ que relaciona los ejes de S y S' ha de ser *constante*, y el origen de S' debe moverse con *velocidad constante* respecto de S , es decir

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t,$$

con $\mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0$ vectores constantes. De hecho, supondremos a partir de ahora que tanto las coordenadas de S como las de S' son cartesianas ortogonales (es decir, tanto los ejes de S como los de S' forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$). En tal caso, la matriz A ha de ser *ortogonal*, es decir ha de verificar

$$A^T = A^{-1}.$$

La transformación que relaciona las coordenadas espacio-temporales $(t, \mathbf{r})$ y $(t', \mathbf{r}')$ de un mismo suceso en los dos sistemas inerciales S y S' es por tanto

$$t' = t - t_0, \quad \mathbf{r}' = A \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_0 - \mathbf{V}_0 t); \quad \mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0 \in \mathbb{R}^3, \quad A \in O(3, \mathbb{R}), \quad (1.16)$$

donde $O(3, \mathbb{R})$ denota el conjunto de las matrices ortogonales de orden 3 con elementos de matriz reales⁵.

Definición 1.3. El cambio de coordenadas $(t, \mathbf{r}) \mapsto (t', \mathbf{r}')$ definido por la ec. (1.16) se denomina **transformación de Galileo**.

- Es fácil comprobar que la composición de dos transformaciones de Galileo y el inverso de una transformación de Galileo son transformaciones de Galileo. Desde el punto de vista matemático, esto significa que el conjunto de todas las transformaciones de Galileo forma un *grupo*⁶, llamado **grupo de Galileo**.
- Las coordenadas espacio-temporales $(t, \mathbf{r})$ y $(t', \mathbf{r}')$ de un mismo suceso en dos sistemas inerciales S y S' cualesquiera han de estar relacionados por una transformación de Galileo (1.16) apropiada. Del mismo modo, dado un sistema inercial cualquiera los demás sistemas inerciales se obtienen a partir de este aplicando una transformación de Galileo arbitraria.

En virtud de la ec. (1.16), la aceleración en el sistema de referencia S' está dada por

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2}(t') = A \cdot \ddot{\mathbf{r}},$$

y de (1.10) se sigue entonces que

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2} = \mathbf{F}'\left(t', \mathbf{r}', \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}\right), \quad (1.17)$$

siendo

$$\mathbf{F}'(t', \mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}') = A \cdot \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \quad \dot{\mathbf{r}}' \equiv \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}. \quad (1.18)$$

En otras palabras, si $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ es la fuerza, medida en el sistema inercial S , que actúa en el instante t sobre una partícula situada en el punto de coordenadas $\mathbf{r}$ con velocidad $\dot{\mathbf{r}}$, la correspondiente fuerza medida en el sistema inercial S' está dada por la ec. (1.18). Esta ecuación es por tanto la *ley de transformación de*

⁵El determinante de una matriz ortogonal A ha de ser igual a ± 1 , ya que

$$A^T A = \mathbb{1} \implies (\det A)^2 = 1.$$

De hecho, si los ejes de S y S' tienen la misma *orientación*, es decir si $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = (\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2) \cdot \mathbf{e}'_3$, entonces $\det A = 1$ (ya que $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = \det A (\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2) \cdot \mathbf{e}'_3$). En tal caso $A \in SO(3, \mathbb{R})$, el grupo de las matrices ortogonales reales 3×3 de determinante igual a 1. Normalmente solo consideraremos sistemas de referencia *positivamente orientados*, en que $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = 1$ (es decir, $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$), de modo que la matriz A en (1.16) será siempre de determinante 1.

⁶Recuérdese que un *grupo* es un conjunto G provisto de un producto (aplicación $G \times G \rightarrow G$) asociativo, con elemento unidad y tal que todo elemento de G posee inverso.

la fuerza bajo la transformación de Galileo (1.16). Nótese, en particular, que dicha ley depende solo de la relación entre los dos sistemas inerciales S y S' , y es por tanto *independiente de las propiedades de la partícula considerada* (es decir de su masa, carga eléctrica, etc.).

Por otra parte, de las ecs. (1.17)-(1.18) se deduce que la segunda ley de Newton —que, como hemos visto, es la ley fundamental de la Mecánica— mantiene en el sistema inercial S' la misma *forma* que en el sistema inercial original S . En otras palabras, *las leyes de la Mecánica tienen la misma forma en todos los sistemas inerciales* (**principio de relatividad de Galileo**).

- ¿Qué ocurre con la segunda ley de Newton en un sistema *no* inercial? Veremos más adelante que la fuerza medida en un sistema no inercial difiere de la medida en un sistema inercial en varios términos *proporcionales a la masa de la partícula considerada*, llamados **fuerzas ficticias**⁷. En otras palabras, las leyes de la Física asumen su forma más sencilla (es decir, *sin* fuerzas ficticias) solo en los sistemas inerciales.

1.3 Leyes de conservación. Fuerzas conservativas. Fuerza electromagnética.

1.3.1 Leyes de conservación

La primera ley de Newton (1.8) puede interpretarse como una **ley de conservación del momento**: en ausencia de fuerzas, el momento lineal $\mathbf{p}$ de la partícula se conserva (es decir, permanece constante). Definamos a continuación el **momento angular** respecto del origen de coordenadas

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}, \quad (1.19)$$

y el **par** de la fuerza $\mathbf{F}$ (también respecto del origen de coordenadas)

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (1.20)$$

Derivando respecto de t la definición del momento angular y aplicando la segunda ley de Newton se obtiene fácilmente la importante identidad

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}.$$

De esta ecuación se deduce inmediatamente la **ley de conservación del momento angular**: si el par de la fuerza que actúa sobre una partícula es nulo, su momento angular se conserva. Nótese que en tal caso, al ser $\mathbf{r}$ perpendicular al vector constante $\mathbf{L}$, *el movimiento de la partícula tiene lugar en el plano normal a $\mathbf{L}$ que pasa por el origen*.

- De la definición (1.20) se sigue que $\mathbf{N} = 0$ si y solo si la fuerza $\mathbf{F}$ es paralela al vector de posición de la partícula, es decir (suponiendo que $\mathbf{F}$ solo depende de t , $\mathbf{r}$ y $\dot{\mathbf{r}}$):

$$\mathbf{F} = g(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r}, \quad (1.21)$$

siendo g una función escalar arbitraria. Este tipo de fuerza se denomina **central**.

Consideremos a continuación la **energía cinética** de la partícula, definida por

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2. \quad (1.22)$$

Multiplicando la segunda ley de Newton (1.10) por el vector $\dot{\mathbf{r}}$ se obtiene:

$$\frac{dT}{dt} = m\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}}. \quad (1.23)$$

⁷Un ejemplo de tales fuerzas es la *fuerza centrífuga* que aparece en un sistema cuyos ejes están en rotación respecto de los de un sistema inercial.

En particular, *la energía cinética se conserva si la fuerza $\mathbf{F}$ es perpendicular a la velocidad $\dot{\mathbf{r}}$ en todo instante*. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, con la *fuerza magnética* que actúa sobre una partícula cargada (cf. la ec. (1.34)).

Supongamos que la fuerza que actúa sobre la partícula es **conservativa**, es decir se obtiene a partir de un **potencial** $V(\mathbf{r})$ mediante la fórmula

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \equiv -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \equiv -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}. \quad (1.24)$$

En tal caso

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}} \equiv -\frac{dV(\mathbf{r})}{dt},$$

y la ecuación (1.23) se escribe

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0.$$

La ecuación anterior es la **ley de conservación de la energía**: *si la fuerza que actúa sobre la partícula es conservativa* (es decir, deriva de un potencial $V(\mathbf{r})$ a través de la ecuación (1.24)) *se conserva la energía total*

$$E \equiv T + V = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}). \quad (1.25)$$

• Diremos que una fuerza *dependiente del tiempo* $\mathbf{F}(t, \mathbf{r})$ es **irrotacional** si $\nabla \times \mathbf{F}(t, \mathbf{r}) = 0$ para todo $(t, \mathbf{r})$, donde $\nabla \times \mathbf{F}$ es el **rotacional** de $\mathbf{F}$, cuyas componentes están dadas por

$$(\nabla \times \mathbf{F})_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial F_j}{\partial x_k} - \frac{\partial F_k}{\partial x_j}, \quad (i, j, k) \text{ perm. cíclica de } (1, 2, 3).$$

Puede probarse $\mathbf{F}$ es irrotacional si y solo si existe (localmente) una función *dependiente del tiempo* $V(t, \mathbf{r})$ tal que $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}) = -\frac{\partial V(t, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}$. Si $\mathbf{F}$ es irrotacional, derivando la definición (1.25) de la energía se obtiene

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = m\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Vemos, por tanto, que si la fuerza es irrotacional pero depende explícitamente del tiempo *no* se conserva la energía.

1.3.2 Fuerzas conservativas

Como ya vimos en el apartado anterior, una fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ es conservativa si es el gradiente de una función $-V(\mathbf{r})$. Nótese que (en un abierto *conexo*) el potencial $V(\mathbf{r})$ está determinado por la fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ a menos de una constante arbitraria, ya que

$$\nabla V_1 = \nabla V_2 \iff \nabla(V_1 - V_2) = 0 \implies V_1 - V_2 = \text{const}.$$

Se puede probar que el carácter conservativo de una fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ (independiente del tiempo y la velocidad) es *equivalente* a cualquiera de las tres condiciones siguientes⁸:

I. La fuerza $\mathbf{F}$ es **irrotacional**:

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0.$$

⁸Con más propiedad, este resultado es válido si la fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ es de clase C^1 en un abierto *simplemente conexo* de $\mathbb{R}^3$ (por ejemplo, en todo $\mathbb{R}^3$, en el interior de una esfera, de un paralelepípedo, de un cilindro, etc.). Por el contrario, el abierto comprendido entre dos cilindros infinitos con el mismo eje no es simplemente conexo.

II. El **trabajo** realizado por la fuerza $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva cerrada *cualquiera* C es nulo:

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

III. El trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}$ a lo largo de *cualquier* curva que une dos puntos fijos $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ es *independiente de la curva*:

$$\int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r},$$

siendo C_1 y C_2 dos curvas cualesquiera con los mismos extremos $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$.

- La *necesidad* de las condiciones (I)–(III) anteriores es evidente. En efecto, la condición (I) es consecuencia de la identidad

$$\nabla \times \nabla V(\mathbf{r}) = 0.$$

Por otra parte, el trabajo realizado por una fuerza *conservativa* $\mathbf{F} = -\nabla V$ a lo largo de una curva cualquiera C con extremos $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ está dado por

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C dV = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2), \quad (1.26)$$

y es por tanto independiente de la curva considerada (condición (III)). En particular, si la curva es cerrada entonces $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, y por tanto el trabajo se anula en este caso (condición (II)).

- De la ec. (1.26) se sigue que el trabajo realizado por una fuerza conservativa es igual a la *disminución* de la energía potencial de la partícula al pasar del punto inicial $\mathbf{r}_1$ al punto final $\mathbf{r}_2$. En virtud de la ley conservación de la energía total, dicho trabajo es también igual al *aumento* de la energía cinética de la partícula al moverse de $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$.
- Un caso particular de fuerza conservativa de enorme interés en la práctica es el de una *fuerza central* independiente del tiempo y la velocidad, que podemos expresar en la forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1.27)$$

En efecto, teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial g(r)}{\partial \mathbf{r}} = g'(r) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}} = g'(r) \frac{\mathbf{r}}{r},$$

es claro que la fuerza (1.27) deriva del potencial

$$V(r) = - \int f(r) dr, \quad (1.28)$$

dependiente solo del módulo de $\mathbf{r}$.

Ejercicio. Probar que la fuerza central (1.21) es conservativa si y solo si la función $g(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ depende solo de r . *Ayuda:* el rotacional de $\mathbf{F}$ en coordenadas esféricas está dado por

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & rF_\theta & r \sin \theta F_\varphi \end{vmatrix}.$$

1.3.3 Fuerzas gravitatoria y electrostática

Según la **ley de la gravitación universal de Newton**, la fuerza gravitatoria ejercida por una partícula de masa M fija en el origen de coordenadas sobre otra partícula de masa m situada en el punto $\mathbf{r}$ es de la forma (1.27), con f inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al origen:

$$f(r) = -\frac{GMm}{r^2}, \quad (1.29)$$

siendo

$$G \simeq 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ Kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

la llamada *constante de la gravitación universal*. En virtud de la ec. (1.28), el potencial correspondiente a la fuerza gravitatoria está dado (salvo una constante arbitraria) por

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}. \quad (1.30)$$

- Nótese que, al ser $GMm > 0$, la fuerza gravitatoria es siempre *atractiva*.
- La aceleración de la partícula de masa m causada por la fuerza de atracción gravitatoria (1.27)-(1.29) es

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r},$$

independiente de la masa m . Este hecho no trivial, observado por primera vez por Galileo Galilei, se debe a que la masa que aparece en la ley de la gravitación universal de Newton (**masa gravitatoria**) coincide⁹ con la masa que aparece en la segunda ley de Newton (**masa inercial**). La igualdad entre ambas masas (el llamado **principio de equivalencia**, en el que se fundamenta la teoría general de la Relatividad) se ha comprobado con gran exactitud (menos de una parte en 10^{12}) en distintos experimentos.

Análogamente, la fuerza eléctrica ejercida por una carga Q fija en el origen sobre una partícula de carga q situada en el punto $\mathbf{r}$ es también de la forma (1.27), donde ahora

$$f(r) = k \frac{qQ}{r^2}. \quad (1.31)$$

En el sistema SI de unidades, la constante k tiene el valor

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} c^2 \text{ m F}^{-1},$$

siendo

$$\epsilon_0 = 8,854\,187\,817 \dots \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$$

la *permitividad del vacío* y

$$c = 2,997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

la velocidad de la luz en el vacío¹⁰. De la ecuación (1.31) se sigue que la fuerza eléctrica es atractiva si las cargas q y Q son de signos opuestos, y repulsiva en caso contrario. De nuevo, la fuerza eléctrica es conservativa, siendo su potencial (a menos de una constante aditiva)

$$V(r) = k \frac{qQ}{r}$$

inversamente proporcional a la distancia entre las cargas.

⁹Evidentemente, basta con que ambas masas sean proporcionales, siendo la constante de proporcionalidad universal (es decir, la misma para todas las partículas).

¹⁰Recuérdese que en el sistema SI los valores de c y ϵ_0 son por *definición* exactos.

Más generalmente, si en un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ hay una distribución de masas se define su **potencial gravitatorio** $\Phi(\mathbf{r})$ por

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \int_U \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}',$$

siendo $\rho(\mathbf{r}')$ la densidad de masa en el punto $\mathbf{r}'$. La fuerza gravitatoria ejercida por dicha distribución sobre una partícula de masa m situada en el punto $\mathbf{r}$ es entonces

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -m \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}, \quad (1.32)$$

y por tanto deriva del potencial $V(\mathbf{r}) = m\Phi(\mathbf{r})$. De nuevo, en este caso la aceleración de la partícula es

$$\mathbf{a} = -\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}},$$

independiente de su masa m . Nótese sin embargo que, en general, la fuerza (1.32) *no* es central.

Análogamente, el potencial eléctrico creado por una distribución *estática* de cargas contenida en el abierto U está dado por

$$\Phi(\mathbf{r}) = k \int_U \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}',$$

siendo ahora $\rho(\mathbf{r}')$ la densidad de carga eléctrica en el punto $\mathbf{r}'$. La fuerza ejercida por dicha distribución sobre una partícula de carga q situada en el punto $\mathbf{r}$ es en este caso

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -q \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \equiv q\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (1.33)$$

siendo por definición $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}$ el **campo eléctrico** creado por la distribución de cargas en el punto $\mathbf{r}$. De nuevo, la fuerza electrostática (1.33) es evidentemente conservativa, con potencial $V(\mathbf{r}) = q\Phi(\mathbf{r})$, pero en general no central.

Ejercicio. Aplicando el teorema de Gauss a una esfera centrada en el origen, probar la identidad

$$\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}),$$

siendo $\delta(\mathbf{r})$ la **delta de Dirac**. Deducir que tanto el potencial gravitatorio como el electrostático verifican la **ecuación de Poisson**

$$\Delta \Phi = 4\pi\alpha\rho,$$

con $\alpha = G$ para el potencial gravitatorio y $\alpha = -k$ para el eléctrico. En particular, el potencial gravitatorio (resp. electrostático) verifica la **ecuación de Laplace** $\Delta \Phi = 0$ en cualquier región del espacio en que no haya masas (resp. cargas).

1.3.4 Fuerza electromagnética

Consideremos una partícula de carga q que se mueve en el seno de un campo eléctrico $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ y magnético $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$. En tal caso la **fuerza electromagnética** (llamada también **fuerza de Lorentz**) que actúa sobre la partícula está dada por

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = q(\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r})). \quad (1.34)$$

Como es sabido, los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ verifican las **ecuaciones de Maxwell**

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{cases}$$

siendo

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$$

la *permeabilidad del vacío* y $\mathbf{J}$ la densidad de corriente. De la segunda y la tercera ecuaciones de Maxwell se sigue que podemos expresar $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ a través de un **potencial escalar** $\Phi(t, \mathbf{r})$ y un **potencial vector** $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ mediante las ecuaciones

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Es importante observar que los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ *no* determinan unívocamente los potenciales Φ y $\mathbf{A}$. En efecto, es fácil ver que los potenciales

$$\hat{\Phi} = \Phi - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}}, \quad (1.35)$$

donde $f(t, \mathbf{r})$ es una función escalar arbitraria¹¹, generan exactamente el mismo campo electromagnético que los potenciales Φ y $\mathbf{A}$ de partida. Se puede demostrar que siempre es posible elegir la función f de modo que los nuevos potenciales $\hat{\Phi}$ y $\hat{\mathbf{A}}$ verifiquen la condición

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} = 0, \quad (1.36)$$

llamada *gauge de Lorentz*. Si los potenciales Φ y $\mathbf{A}$ satisfacen el gauge de Lorentz, es inmediato comprobar que las ecuaciones de Maxwell son equivalentes a las dos ecuaciones siguientes para Φ y $\mathbf{A}$:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

En particular, el potencial escalar y cada componente del potencial vector verifican la **ecuación de ondas**

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

en el vacío (es decir, en cualquier región del espacio que no contenga cargas eléctricas ni corrientes).

Ejercicio. Probar que la fuerza de Lorentz (1.34) es conservativa si y solo si $\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ (es decir, si el campo electromagnético es de tipo puramente electrostático).

- Supongamos que tanto el campo eléctrico como el magnético son *estáticos*, es decir

$$\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B} \equiv \mathbf{B}(\mathbf{r}).$$

En particular, la segunda ecuación de Maxwell se reduce en este caso a $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$, de donde se sigue que

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}.$$

Utilizando esta ecuación y la ley de Lorentz se obtiene

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} = -q \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -q \frac{d\Phi}{dt} \implies \frac{d}{dt}(T + q\Phi) = 0.$$

Por tanto en este caso, aun cuando la fuerza de Lorentz *no* es conservativa a menos que $\mathbf{B} = 0$, se conserva la función

$$T + q\Phi(\mathbf{r}),$$

que podemos interpretar como la energía electro-mecánica de la partícula. Para interpretar físicamente este resultado basta notar que la fuerza magnética *no* realiza trabajo, al ser perpendicular a la velocidad y por tanto al desplazamiento $d\mathbf{r}$, por lo que no contribuye a la energía de la partícula.

¹¹La ecuación (1.35) se denomina *transformación de gauge* de los potenciales electromagnéticos. Puede probarse que si los potenciales $(\Phi, \mathbf{A})$ y $(\hat{\Phi}, \hat{\mathbf{A}})$ generan el mismo campo electromagnético (en un abierto simplemente conexo) entonces están relacionados por una transformación de gauge.

Ejemplo 1.4. Un electrón de masa m y carga $-e$ se mueve en un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_2$ y un campo magnético también uniforme $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_3$ (con $E > 0$, $B > 0$). Calculemos la trayectoria del electrón suponiendo que $\mathbf{r}(0) = 0$ y $\mathbf{v}(0) = v_0\mathbf{e}_1$, con $v_0 > 0$.

Teniendo en cuenta la ec. (1.34), las ecuaciones del movimiento son en este caso

$$m\ddot{x}_1 = -eB\dot{x}_2, \quad m\ddot{x}_2 = -eE + eB\dot{x}_1, \quad m\ddot{x}_3 = 0. \quad (1.37)$$

De la última ecuación y el dato inicial $x_3(0) = \dot{x}_3(0) = 0$ se sigue inmediatamente que $x_3(t) = 0$ para todo t . Las ecuaciones para x_1 y x_2 se pueden expresar en forma más sencilla utilizando las variables adimensionales

$$\tau = \frac{eB}{m}t, \quad x = \frac{eB^2}{mE}x_1, \quad y = \frac{eB^2}{mE}x_2.$$

En efecto, sustituyendo en (1.37) se obtiene

$$x'' = -y', \quad y'' = x' - 1,$$

donde la prima denota derivada respecto de τ . Las condiciones iniciales en términos de las nuevas variables son

$$x(0) = y(0) = 0, \quad x'(0) = \frac{eB^2}{mE}\dot{x}_1(0)\frac{dt}{d\tau} = \frac{Bv_0}{E} \equiv 1 + a, \quad y'(0) = 0.$$

La integración de las ecuaciones del movimiento no ofrece dificultad, al tratarse de un sistema lineal de segundo orden en (x, y) con coeficientes constantes. En este caso, lo más sencillo es introducir la variable compleja $z = x + iy$, en términos de la cual las ecuaciones del movimiento se reducen a la ecuación diferencial ordinaria

$$z'' = x'' + iy'' = -y' + ix' - i = i(z' - 1),$$

o equivalentemente

$$w'' = iw', \quad w \equiv z - \tau.$$

La solución de esta ecuación diferencial lineal de primer orden en w' , con la condición inicial

$$w'(0) = z'(0) - 1 = x'(0) + iy'(0) - 1 = a$$

es inmediata:

$$w' = ae^{i\tau}.$$

Integrando una vez más y teniendo en cuenta la condición inicial

$$w(0) = z(0) = 0$$

se obtiene inmediatamente

$$w = ia(1 - e^{i\tau}) \implies z = \tau + ia(1 - e^{i\tau}).$$

Separando la parte real e imaginaria de z se obtiene finalmente

$$x = \operatorname{Re} z = \tau + a \sin \tau, \quad y = \operatorname{Im} z = a(1 - \cos \tau). \quad (1.38)$$

En términos de las variables originales (“físicas”),

$$x_1 = \frac{Et}{B} + \frac{1}{\omega} \left(v_0 - \frac{E}{B} \right) \sin(\omega t), \quad x_2 = \frac{1}{\omega} \left(v_0 - \frac{E}{B} \right) [1 - \cos(\omega t)], \quad \omega \equiv \frac{eB}{m}.$$

Las ecs. (1.38) son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del electrón. Las propiedades cualitativas de dicha trayectoria dependen del parámetro

$$a \equiv \frac{Bv_0}{E} - 1;$$

nótese que $a > -1$, al ser E , B y v_0 positivos por hipótesis.

i) Si $|a| < 1$, es decir

$$0 < v_0 < \frac{2E}{B},$$

se tiene

$$x' = 1 + a \cos \tau > 0,$$

y por tanto x es una función creciente de τ . En particular, si $a = 0$, es decir si

$$v_0 = \frac{E}{B},$$

la trayectoria es el eje x recorrido con velocidad constante ($x(\tau) = \tau$ ó, en las coordenadas iniciales, $x_1(t) = Et/B$). En general, $0 \leq y \leq 2a$ (si $a > 0$) ó $2a \leq y \leq 0$ (si $a < 0$) para todo τ , con

$$y = 0 \iff \tau = 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \implies x = 2n\pi,$$

mientras que

$$y = 2a \iff \tau = (2n + 1)\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \implies x = (2n + 1)\pi.$$

En los puntos en que y alcanza sus valores extremos 0 y $2a$ la velocidad del electrón está dirigida en la dirección del eje x , ya que para $\tau = k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) se tiene

$$y'(k\pi) = a \sin(k\pi) = 0.$$

En particular, en dichos puntos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = 0.$$

La trayectoria del electrón tiene por tanto el aspecto cualitativo de la Fig. 1.1 (arriba).

ii) Por otro lado, si $a = 1$, es decir si

$$v_0 = \frac{2E}{B},$$

entonces $x'(\tau) = 1 + \cos \tau \geq 0$, con

$$x'(\tau) = 0 \iff \tau = (2n + 1)\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \implies x = (2n + 1)\pi, \quad y = 2.$$

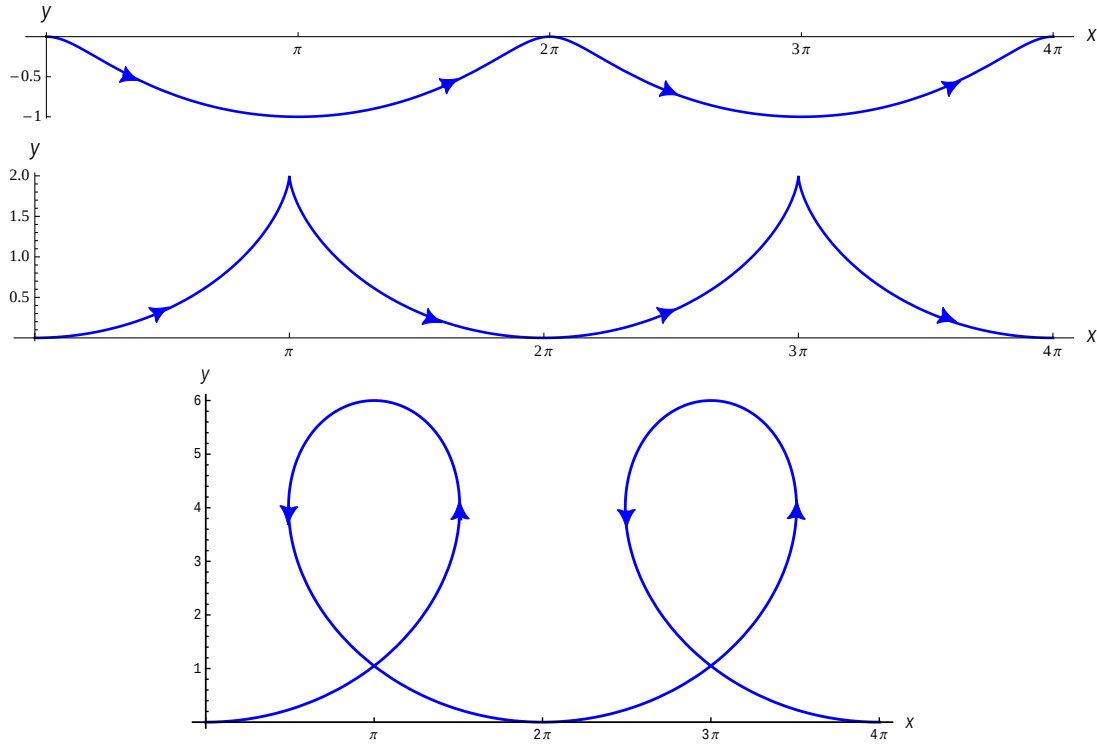


Figura 1.1: De arriba a abajo: trayectoria del electrón del Ejemplo 1.4 para $v_0 = E/(2B)$, $v_0 = 2E/B$ y $v_0 = 4E/B$.

Nótese que para $\tau = (2n + 1)\pi$ (con $n \in \mathbb{Z}$) se anula también $y' = \sin \tau$. Como puede observarse en la Fig. 1.1 (centro), la trayectoria presenta una cúspide en los puntos $((2n + 1)\pi, 2)$ (con $n \in \mathbb{Z}$), correspondientes a $\tau = (2n + 1)\pi$, ya que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{\sin \tau}{1 + \cos \tau} = \frac{2 \sin(\tau/2) \cos(\tau/2)}{2 \cos^2(\tau/2)} = \tan(\tau/2) \xrightarrow{\tau \rightarrow (2n+1)\pi^\mp} \pm \infty.$$

En estos puntos de cúspide la velocidad del electrón se anula, ya que (como acabamos de ver) en este caso

$$x'((2n + 1)\pi) = y'((2n + 1)\pi) = 0.$$

La trayectoria en este caso es una *cicloide*.

iii) Finalmente, si $a > 1$, es decir si

$$v_0 > \frac{2E}{B},$$

entonces x ya no es una función monótona de τ . Más precisamente,

$$x'(\tau) \geq 0 \iff [2n\pi - \arccos(-1/a), 2n\pi + \arccos(-1/a)], \quad n \in \mathbb{Z},$$

mientras que

$$x'(\tau) < 0 \iff (2n\pi + \arccos(-1/a), 2(n+1)\pi - \arccos(-1/a)], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

También es inmediato comprobar que la trayectoria es simétrica respecto de las rectas verticales $x = (2k + 1)\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ (cf. la Fig. (1.1) (abajo)). $\square$

Ejercicio. Repetir el problema anterior suponiendo que el campo es puramente magnético ($E = 0$). Probar que la partícula recorre una circunferencia con frecuencia constante $\omega = eB/m$, llamada *frecuencia de ciclotrón*.

1.4 Movimiento de una partícula en un potencial unidimensional.

En esta sección estudiaremos el movimiento de una partícula en una dimensión, sometida a una fuerza independiente del tiempo y la velocidad $F(x)$. Una fuerza de este tipo es siempre *conservativa*, ya que $F(x) = -V'(x)$ con

$$V(x) = - \int F(x) \, dx .$$

En este caso, la ley de conservación de la energía (1.25) se reduce a la ecuación

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = E , \quad (1.39)$$

siendo la constante $E \in \mathbb{R}$ el valor de la energía de la partícula. Recíprocamente, derivando la ec. (1.39) respecto de t se obtiene

$$\dot{x}(m\ddot{x} - F(x)) = 0 .$$

Por tanto, si $\dot{x} \neq 0$ la ec. (1.39) es equivalente a la ecuación del movimiento de la partícula $m\ddot{x} = F(x)$.

- Las **posiciones de equilibrio** (o **equilibrios**) son los puntos $x_0 \in \mathbb{R}$ tales que la ecuación del movimiento posee la solución constante $x(t) = x_0$. En tal caso $\ddot{x}(t) = 0$ para todo t , por lo que sustituyendo en la ecuación del movimiento se obtiene

$$F(x(t)) = F(x_0) = -V'(x_0) = 0 .$$

Por tanto los equilibrios son los puntos en que la fuerza que actúa sobre la partícula es nula. Desde el punto de vista matemático, *las posiciones de equilibrio son los puntos críticos del potencial $V(x)$* , es decir las soluciones de la ecuación

$$V'(x) = 0 .$$

Nótese que, en virtud del *teorema de existencia y unicidad* de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, si x_0 es un equilibrio la *única* solución de la ecuación del movimiento que satisface las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = 0$ es la solución constante $x(t) = x_0$. En otras palabras, si en un cierto instante la partícula se halla en un equilibrio *con velocidad nula* permanece en dicho equilibrio indefinidamente.

- De la ec. (1.39) se sigue inmediatamente que *para una dada energía E el movimiento de la partícula solo puede tener lugar en la región definida por la desigualdad*

$$V(x) \leq E ,$$

que denominaremos **región accesible** (para esa energía E). En general, dicha región es una *unión de intervalos cerrados disjuntos*, algunos de los cuales pueden ser infinitos por la derecha o por la izquierda (incluido el caso límite en que la región accesible es toda la recta real), o incluso reducirse a puntos aislados. De particular interés son los puntos x_i que limitan dichos intervalos, es decir las soluciones de la ecuación $V(x) = E$. Cuando la partícula pasa por uno de dichos puntos su velocidad se anula, ya que

$$x(t) = x_i \implies \dot{x}(t) = 0 \quad (1.40)$$

en virtud de la ley de conservación de la energía (1.39). Diremos que el punto x_i es un **punto de retroceso** de la trayectoria si, además, verifica la condición $V'(x_i) \neq 0$, es decir si

$$V(x_i) = E , \quad V'(x_i) \neq 0 .$$

En otras palabras, los puntos de retroceso son los extremos de los intervalos cerrados disjuntos en que se subdivide la región accesible, *excluyendo los equilibrios*.

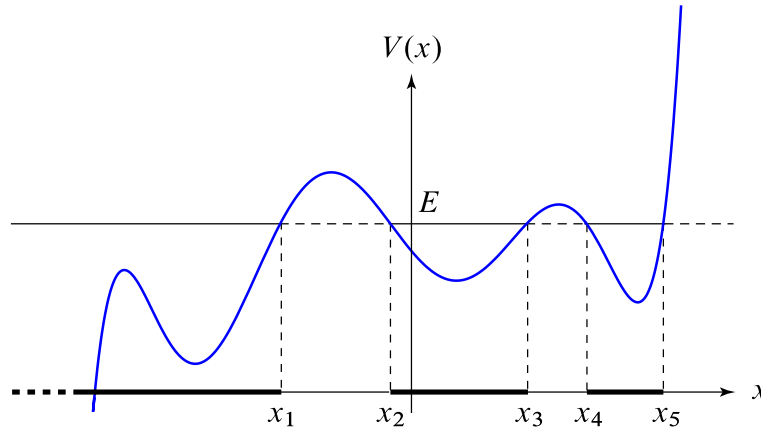


Figura 1.2: Potencial unidimensional $V(x)$ con 5 puntos de retroceso x_i para una cierta energía E . La región accesible consta en este caso de los tres intervalos $(-\infty, x_1]$, $[x_2, x_3]$ y $[x_4, x_5]$.

- La ec. (1.39) —o, equivalentemente, la ecuación del movimiento— es *invariante* bajo la *traslación temporal* $t \mapsto t + t_0$, para todo $t_0 \in \mathbb{R}$, ya que el tiempo t no aparece explícitamente en ella. Por este motivo, si $x(t)$ es una solución de (1.39) también lo será $x(t + t_0)$, para todo $t_0 \in \mathbb{R}$.
- La ec. (1.39) (así como la ecuación del movimiento) es también invariante bajo la *inversión temporal* $t \mapsto -t$. Por tanto, si $x(t)$ es una solución de (1.39) también lo será $x(-t)$.

La ley de conservación de la energía (1.39) permite hallar fácilmente la solución general de la ecuación del movimiento en forma implícita. En efecto, despejando $\dot{x}$ en (1.39) se obtiene

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}. \quad (1.41)$$

Cada una de estas *dos* ecuaciones (correspondientes a los dos signos delante del radical) es una ecuación diferencial de primer orden de *variables separables*, que se integra fácilmente separando variables:

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = \pm(t - t_0), \quad (1.42)$$

con t_0 una constante arbitraria (que sin pérdida de generalidad se puede tomar igual a cero, en virtud del penúltimo comentario anterior). El comportamiento de las soluciones depende crucialmente de la región accesible, como estudiaremos con más detalle a continuación.

I) En efecto, consideremos en primer lugar el caso en que uno de los intervalos cerrados disjuntos en que se subdivide la región accesible es el intervalo acotado $[x_0, x_1]$, de modo que

$$E = V(x_0) = V(x_1).$$

Supondremos además que los extremos de dicho intervalo son puntos de retroceso, es decir

$$V'(x_i) \neq 0, \quad i = 0, 1$$

(cf. la Fig. 1.3). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x(0) = x_0$, de modo que $\dot{x}(0) = 0$. En tal caso $\dot{x} > 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeño, ya que en caso contrario la partícula entraría en la región prohibida a la izquierda de x_0 . Por ello debemos tomar el signo “+” en (1.42), obteniendo¹²

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{ds}{\sqrt{E - V(s)}} \equiv \theta(x) \quad (1.43)$$

¹²La integral que aparece en la fórmula siguiente es impropia en el límite inferior $s = x_0$. Sin embargo, al ser $V'(x_0) \neq 0$ por hipótesis, el integrando se comporta como $(s - x_0)^{-1/2}$ en las proximidades de $s = x_0$, y la integral es por tanto convergente.

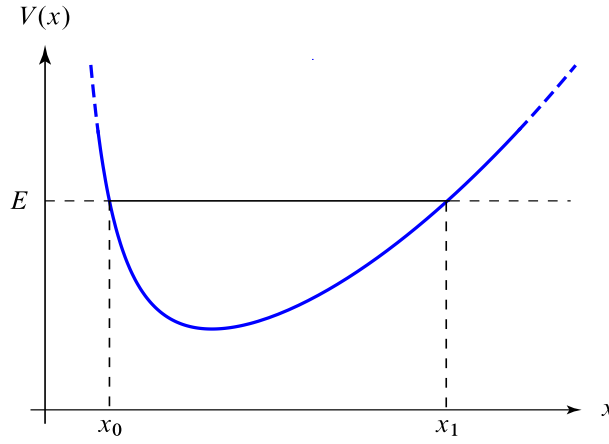


Figura 1.3: Potencial unidimensional con dos puntos de retroceso consecutivos x_0, x_1 que delimitan un intervalo accesible $[x_0, x_1]$ (para una cierta energía E).

(cf. la Fig. 1.4). Por tanto la partícula llegará al punto x_1 en un tiempo $\tau/2$, donde por definición

$$\tau = 2\theta(x_1) = \sqrt{2m} \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{\sqrt{E - V(s)}}. \quad (1.44)$$

Nótese que, al ser

$$\theta'(x) = \frac{\sqrt{m/2}}{\sqrt{E - V(x)}} > 0, \quad x_0 < x < x_1,$$

la función θ es monótona creciente, y por tanto invertible, en el intervalo $[x_0, x_1]$. Por tanto la ley del movimiento de la partícula para $0 \leq t \leq \tau/2$ está dada por

$$x = \theta^{-1}(t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2}.$$

Para $t > \tau/2$ (con $t - (\tau/2)$ suficientemente pequeño), la velocidad pasa a ser negativa, ya que de lo contrario la partícula alcanzaría la región prohibida a la derecha de x_1 . Utilizando de nuevo la ec. (1.42), esta vez con el signo “−”, y la condición inicial $x(\tau/2) = x_1$ obtenemos

$$t = \frac{\tau}{2} - \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^x \frac{ds}{\sqrt{E - V(s)}} = \tau - \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{ds}{\sqrt{E - V(s)}} = \tau - \theta(x). \quad (1.45)$$

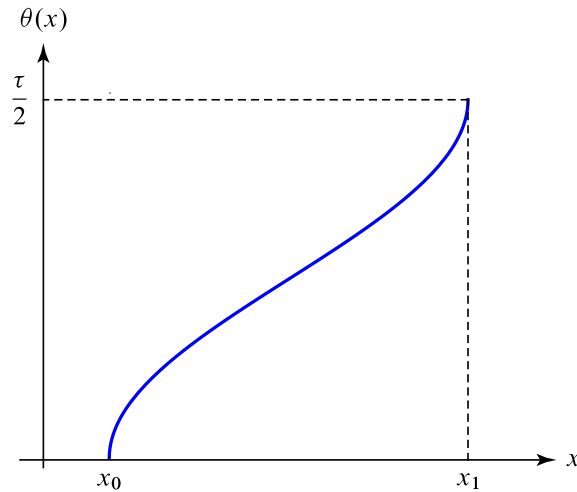


Figura 1.4: Función $\theta(x)$ definida por la ec. (1.43).

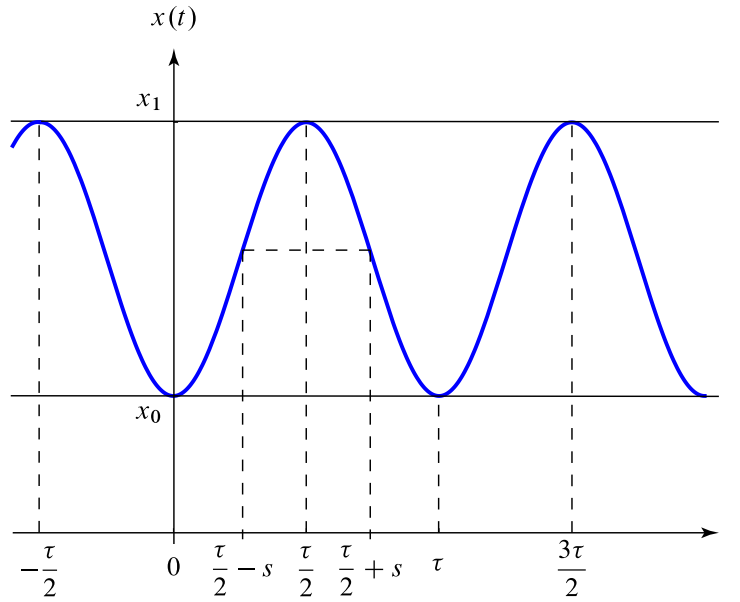


Figura 1.5: Movimiento de una partícula en un potencial unidimensional entre dos puntos de retroceso consecutivos x_0, x_1 que delimitan un intervalo accesible.

Por tanto, la partícula alcanzará de nuevo el punto x_0 en el tiempo τ . Nótese que de la ec. (1.45) se sigue que

$$x = \theta^{-1}(\tau - t), \quad \frac{\tau}{2} \leq t \leq \tau.$$

Por tanto la ley del movimiento de la partícula en el intervalo $0 \leq t \leq \tau$, dada implícitamente por las ecs. (1.43)-(1.45), puede expresarse por medio de la función inversa θ^{-1} mediante las ecuaciones

$$x(t) = \begin{cases} \theta^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2}; \\ \theta^{-1}(\tau - t), & \frac{\tau}{2} \leq t \leq \tau. \end{cases} \quad (1.46)$$

En particular, nótese que la función $x(t)$ es simétrica respecto del instante $t = \tau/2$, ya que

$$x\left(\frac{\tau}{2} - s\right) = x\left(\frac{\tau}{2} + s\right) = \theta^{-1}\left(\frac{\tau}{2} - s\right), \quad 0 \leq s \leq \frac{\tau}{2}.$$

La solución de las ecuaciones del movimiento válida para todo t es la *extensión periódica con período* τ de la función $x(t)$ definida en $[0, \tau]$ por la ecuación (1.46) (cf. la Fig. 1.5). En otras palabras, si $k\tau \leq t \leq (k+1)\tau$ con $k \in \mathbb{Z}$ entonces

$$x(t) = x(t - k\tau), \quad (1.47)$$

donde el miembro derecho se calcula utilizando (1.46). En efecto, esta función es solución de la ecuación del movimiento por la invariancia de dicha ecuación bajo traslaciones temporales, y empalma de forma suave en los puntos $t = k\tau$ (con $k \in \mathbb{Z}$) en que $x = x_0$ y $\dot{x} = 0$ (cf. la Fig. 1.5). Por tanto en este caso *el movimiento es periódico, con período τ dado por la ec. (1.44)*.

Ejercicio. Probar que la ley del movimiento $x(t)$ dada por las ecs. (1.46)-(1.47) es simétrica respecto de $t = 0$, es decir que $x(t) = x(-t)$.

Solución. La función $f(t) \equiv x(-t)$ es solución de la ecuación del movimiento, por la invariancia de dicha ecuación bajo inversión temporal. En $t = 0$, la solución $f(t)$ satisface las *mismas* condiciones iniciales que $x(t)$, ya que

$$f(0) = x(0) = x_0, \quad f'(0) = -x'(0) = 0.$$

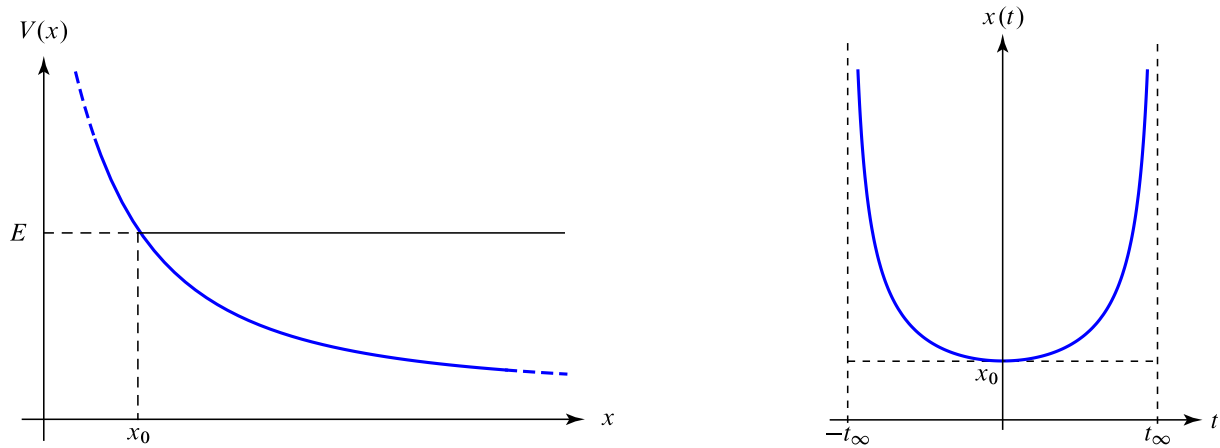


Figura 1.6: Izda.: potencial unidimensional con intervalo accesible semiinfinito por la derecha $[x_0, \infty)$ para una cierta energía E . Drcha.: ley del movimiento $x(t)$ (suponiendo que t_∞ es finito).

Por el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales de segundo orden, $f(t) \equiv x(-t) = x(t)$ para todo t .

II) Consideremos a continuación el caso en que uno de los intervalos disjuntos en que se subdivide la región accesible es el intervalo semiinfinito por la derecha¹³ $[x_0, \infty)$. Supondremos de nuevo que el extremo de dicho intervalo es un punto de retroceso, es decir que $V'(x_0) \neq 0$ (cf. la Fig. 1.6). Si la partícula se encuentra en el punto x_0 para $t = 0$ entonces $\dot{x}(t) > 0$ para $t > 0$, y la relación entre el tiempo t y la posición x está dada por la ecuación (1.43) para $t > 0$. De hecho, la partícula alcanza el infinito (por la derecha) en el tiempo

$$t_\infty = \theta(\infty) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{E - V(s)}},$$

que es finito o infinito según que la integral del miembro derecho sea convergente o divergente. Por ejemplo, si $V(x) \sim -x^a$ con $a > 0$ para $x \rightarrow \infty$ entonces t_∞ es finito si $a > 2$, e infinito si $0 < a < 2$. Teniendo en cuenta la definición (1.43) de la función $\theta(x)$, el movimiento de la partícula para $0 \leq t \leq t_\infty$ puede expresarse por la ecuación

$$x = \theta^{-1}(t), \quad 0 \leq t \leq t_\infty,$$

siendo $x(t_\infty) = \infty$. Por otra parte, para $-t_\infty \leq t \leq 0$ se tiene

$$x = \theta^{-1}(-t), \quad -t_\infty \leq t \leq 0,$$

siendo de nuevo $x(-t_\infty) = \infty$. En efecto, la función anterior es solución de la ecuación del movimiento (por la invariancia de dicha ecuación bajo la inversión temporal $t \mapsto -t$), y satisface las condiciones iniciales correctas en $t = 0$:

$$x(0) = \theta^{-1}(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

(esta última es consecuencia de la primera, al ser x_0 un punto de retroceso). (Otra forma de llegar a la misma conclusión es observar que si $t < 0$ es suficientemente pequeño entonces $\dot{x}(t) < 0$ para que la partícula no entre en la región prohibida a la izquierda de x_0 . Por tanto debemos tomar el signo “−” en la solución general (1.41), lo que conduce inmediatamente a la ecuación

$$t = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{ds}{\sqrt{E - V(s)}} = -\theta(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \theta^{-1}(-t)$$

¹³El caso en que la región accesible contiene el intervalo semiinfinito por la izquierda $(-\infty, x_0]$ se trata de forma análoga.

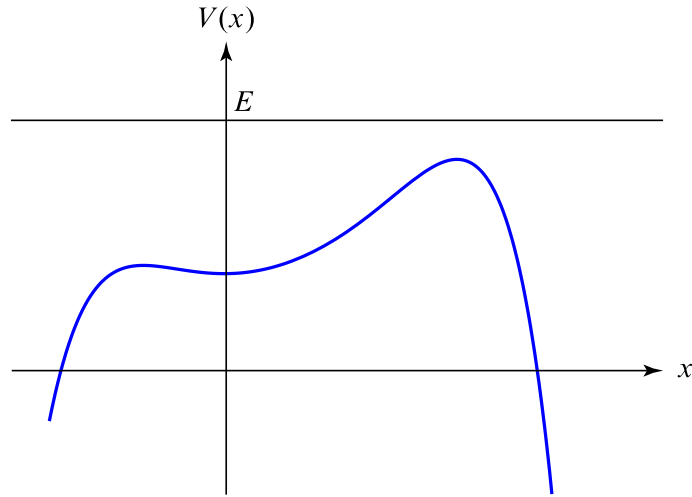


Figura 1.7: Potencial unidimensional con $E > V(x)$ para todo x (para una cierta energía E).

en virtud de la condición inicial $x(0) = x_0$.) En otras palabras, en este caso la ley del movimiento es

$$x = \theta^{-1}(|t|), \quad -t_\infty \leq t \leq t_\infty.$$

Nótese, en particular, que (como ya ocurría en el caso anterior) $x(t) = x(-t)$.

III) Estudiemos, finalmente, el caso en que para una cierta energía E la región accesible es toda la recta real. (Evidentemente, esto solo puede ocurrir si el potencial V está acotado superiormente.) Supondremos, además, que $E > V(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que no hay puntos de equilibrio con energía E (cf. la Fig. 1.7). Si (por ejemplo) $\dot{x}(0) > 0$, entonces $\dot{x}(t) > 0$ para todo t , dado que la velocidad no puede anularse en este caso en virtud de la ley de conservación de la energía. Por tanto debe tomarse el signo “+” en (1.41) para todo t , lo que conduce a la relación

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{ds}{\sqrt{E - V(s)}} = \theta(x),$$

donde $\theta(x)$ es la función definida en (1.43) con $x_0 = x(0)$. La partícula alcanza $\pm\infty$ en los instantes

$$t_{\pm\infty} = \theta(\pm\infty) = \int_{x_0}^{\pm\infty} \frac{ds}{\sqrt{E - V(s)}}$$

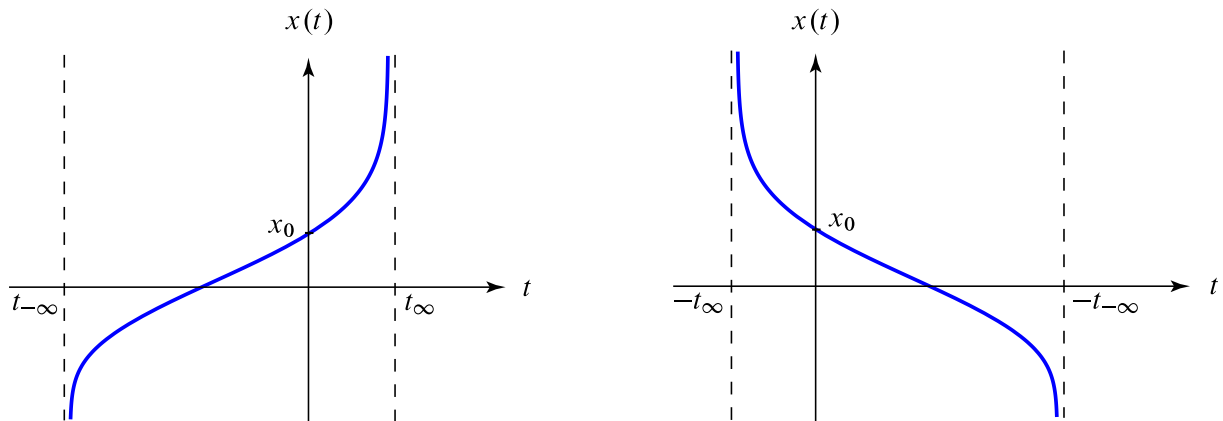


Figura 1.8: Ley del movimiento para el potencial de la Fig. 1.7 (y energía E) en los casos $\dot{x}(0) > 0$ (izda.) o $\dot{x}(0) < 0$ (drcha.), en el caso en que $t_{\pm\infty}$ es finito.

(que, de nuevo, pueden ser finitos o infinitos según la integral correspondiente converja o diverja), y la ley horaria del movimiento es por tanto

$$x = \theta^{-1}(t), \quad t_{-\infty} \leq t \leq t_{\infty}.$$

Análogamente, si $\dot{x}(0) < 0$ entonces

$$x = \theta^{-1}(-t), \quad -t_{\infty} \leq t \leq -t_{-\infty},$$

donde ahora $x(-t_{\pm\infty}) = \pm\infty$ (cf. la Fig. 1.8).

Ejemplo 1.5. Consideremos el potencial

$$V(x) = k \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4a^2} \right), \quad k, a > 0,$$

representado en la Fig. 1.9. Derivando respecto de x se obtiene

$$V'(x) = kx \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) = 0 \iff x = 0, \pm a.$$

Por tanto los equilibrios son en este caso los puntos $x = 0$ (mínimo relativo de V) y $x = \pm a$ (máximos de V). La región accesible, y por tanto el tipo de trayectoria, depende del valor de la energía E de la forma siguiente:

- i) Si $E < 0$, la región accesible es la unión de los dos intervalos semiinfinitos $(-\infty, -c]$ y $[c, \infty)$, siendo c la única raíz positiva de la ecuación $V(x) = E$. Por tanto en este caso la trayectoria es *no acotada* (por la derecha si $x(0) > c$, por la izquierda si $x(0) < -c$).
- ii) Si $E = 0$, la región accesible es la unión de los intervalos semiinfinitos $(-\infty, -\sqrt{2}a]$ y $[\sqrt{2}a, \infty)$ junto con el origen, que como sabemos es uno de los equilibrios. En particular, si $x(0) = 0$ entonces $x(t) = 0$ para todo t (solución de equilibrio), mientras que si $|x(0)| \geq \sqrt{2}a$ la trayectoria es *no acotada*.
- iii) Si $0 < E < ka^2/4$ (donde $ka^2/4 = V(\pm a)$ es el valor máximo del potencial), la región accesible es la unión de los tres intervalos $(-\infty, -c_2]$, $[-c_1, c_1]$ y $[c_2, \infty)$, siendo $c_1 < c_2$ las dos raíces positivas de la ecuación $V(x) = E$. Por tanto en este caso la trayectoria de la partícula es *no acotada* (por la izquierda o la derecha) si $|x(0)| \geq c_2$, mientras que si $|x(0)| \leq c_1$ el movimiento es *periódico*, con amplitud c_1 .
- iv) Si $E > ka^2/4$, entonces $V(x) < E$ para todo x , y por tanto la región accesible (y la trayectoria) es *toda la recta real*.

Hemos dejado para el final el caso más interesante, en que $E = ka^2/4$. Al ser $V(x) \leq ka^2/4$ para todo x la región accesible es toda la recta real, y por tanto podría parecer que la trayectoria de la partícula es también toda la recta real. Sin embargo esta conclusión es *errónea*, ya que la región accesible contiene en este caso los dos equilibrios $x = \pm a$. Si (por ejemplo) la partícula parte de un punto $x_0 \neq \pm a$ en $t = 0$ *no* puede alcanzar el punto $\pm a$ en un tiempo *finito*. En efecto, si $x(t_0) = \pm a$ para un cierto tiempo $t_0 \in \mathbb{R}$, sustituyendo en la ec. (1.39) y teniendo en cuenta que $V(\pm a) = ka^2/4 = E$ se obtiene $\dot{x}(t_0) = 0$. Pero, por el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de 2º orden, la *única* solución de la ecuación del movimiento que cumple las condiciones iniciales $x(t_0) = \pm a$ y $\dot{x}(t_0) = 0$ es la solución constante $x(t) = \pm a$ para todo t . Por tanto en este caso las posibles trayectorias de la partícula son los intervalos *abiertos* $(-\infty, a)$, $(-a, a)$ y (a, ∞) , junto con los dos equilibrios $\pm a$. En particular, si $|x(0)| < a$ la trayectoria de la partícula permanece en el intervalo $(-a, a)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (y, por tanto, es *acotada*), pero *no* es periódica, sino que verifica $x(\pm\infty) = \pm a$ si $\dot{x}(0) > 0$ ó $x(\pm\infty) = \mp a$ si $\dot{x}(0) < 0$. (¿Por qué no puede ser $\dot{x}(0) = 0$?)

En este caso concreto, es posible integrar explícitamente la ecuación del movimiento para $E = ka^2/4$. En efecto, sustituyendo este valor de la energía en la ec. (1.41) se obtiene

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{k}{2ma^2}} (x^2 - a^2).$$

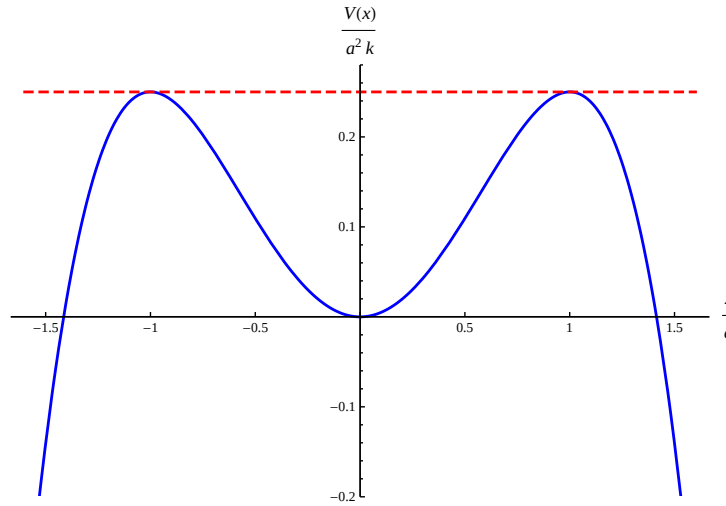


Figura 1.9: Potencial del Ejemplo 1.5 (línea azul) y energía $E = ka^2/4$ (línea roja de trazo discontinuo).

Separando variables e integrando se obtiene

$$\pm \sqrt{\frac{2k}{m}} t = \int \frac{2a}{x^2 - a^2} dx = \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \implies \left| \frac{x-a}{x+a} \right| = e^{\pm 2\omega t}, \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{2m}},$$

donde sin pérdida de generalidad hemos tomado la constante de integración igual a cero. Si en el instante inicial la partícula se halla en uno de los intervalos $(-\infty, -a)$ ó (a, ∞) entonces

$$\left| \frac{x-a}{x+a} \right| = \frac{x-a}{x+a},$$

y por tanto

$$x = a \frac{1 + e^{\pm 2\omega t}}{1 - e^{\pm 2\omega t}} = \mp a \coth(\omega t).$$

La expresión anterior define, en realidad, varias soluciones. Por ejemplo, si inicialmente la partícula se haya en la región $x > a$ con velocidad positiva (resp. negativa) entonces debemos tomar el signo “−” (resp. “+”) en dicha expresión, y la solución asociada está por tanto definida para $t < 0$ (resp. $t > 0$). Esta solución corresponde a un movimiento que alcanza el infinito positivo (resp. llega del infinito positivo) en un tiempo finito y tiende al punto $x = a$ para $t \rightarrow -\infty$ (resp. $t \rightarrow +\infty$).

Análogamente, si la partícula se encuentra inicialmente en el intervalo $(-a, a)$ entonces

$$\left| \frac{x-a}{x+a} \right| = \frac{a-x}{x+a},$$

y por tanto

$$x = a \frac{1 - e^{\pm 2\omega t}}{1 + e^{\pm 2\omega t}} = \mp a \tanh(\omega t).$$

La solución correspondiente al signo “+” (resp. “−”) tiene siempre velocidad positiva (resp. negativa), y tiende a $\pm a$ para $t \rightarrow \pm\infty$ (resp. $t \rightarrow \mp\infty$).

Para visualizar los distintos tipos de trayectorias descritas por la partícula y entender cualitativamente sus propiedades, es útil representar el momento $p = \dot{x}/m$ como función de la posición para distintos valores de la energía E , lo que se conoce como el **mapa de fases** del sistema. De la ley de conservación de la energía se sigue que la ecuación de las trayectorias en el mapa de fases es

$$\frac{p^2}{2m} + V(x) = E,$$

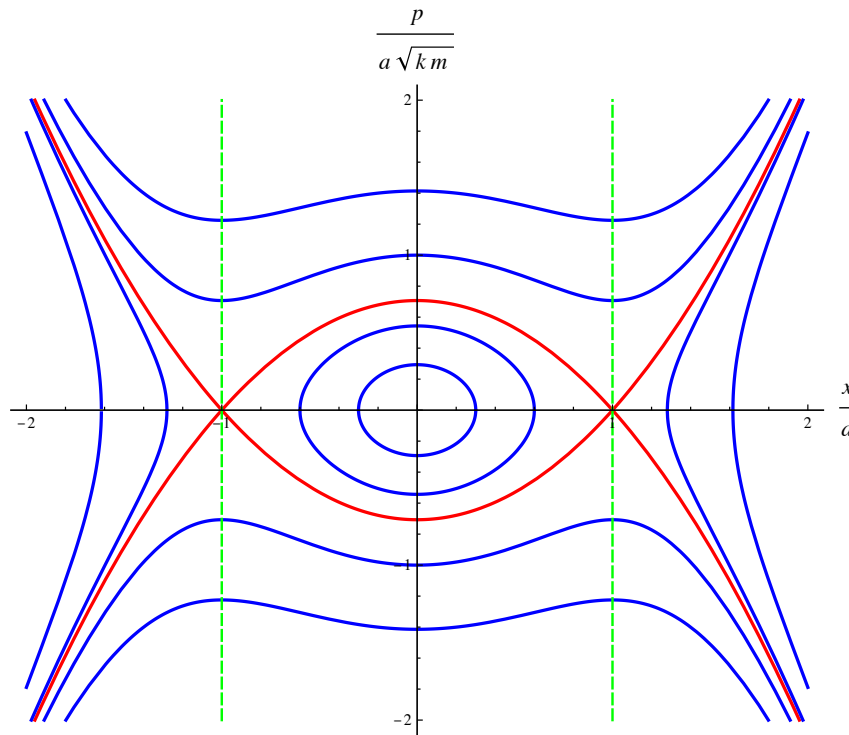


Figura 1.10: Mapa de fases para el potencial del Ejemplo 1.5 (la línea roja es la trayectoria de energía $E = ka^2/4$).

que en este problema se reduce a

$$\frac{p^2}{2m} + k \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4a^2} \right) = E.$$

Las correspondientes trayectorias (que evidentemente son simétricas respecto de ambos ejes) se representan en la Fig. 1.10. Nótese que la(s) trayectoria(s) de energía igual a la energía crítica $E = ka^2/4$ tiene(n) por ecuación

$$p = \pm \sqrt{\frac{mk}{2a^2}} \sqrt{x^4 - 2a^2 x^2 + a^4} = \pm \sqrt{\frac{mk}{2a^2}} (x^2 - a^2); \quad (1.48)$$

se trata, por tanto, de dos parábolas cuyo eje es la recta $x = 0$ que se cortan en los equilibrios $(\pm a, 0)$. Estas trayectorias separan el mapa de fases en 5 regiones disjuntas, de forma que las trayectorias tienen propiedades cualitativamente distintas (están o no acotadas, llegan o no a $x = \pm\infty$, etc.) según la región en que están contenidas. Por esta motivo, las trayectorias (1.48) se denominan *separatrices*. $\square$

1.4.1 Equilibrios. Período de las pequeñas oscilaciones

Intuitivamente, un equilibrio x_0 es **estable** si cualquier pequeña perturbación de las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ conduce a una solución $x(t)$ de la ecuación del movimiento que permanece próxima a x_0 (y con velocidad próxima a 0) en todo instante $t > 0$. En el ejemplo anterior, es claro que el equilibrio $x = 0$ es *estable*, mientras que los equilibrios $x = \pm a$ son ambos *inestables*. En efecto, es evidente que si perturbamos ligeramente la condición inicial $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ asociada al primero de dichos equilibrios, es decir, consideramos movimientos de la partícula con $|x(0)|$ y $|\dot{x}(0)|$ suficientemente pequeños, la energía será ligeramente positiva pero mucho menor que el valor límite $ka^2/4$, y por tanto el movimiento de la partícula será periódico y con amplitud próxima a cero. Por el contrario, una pequeña perturbación del dato inicial $x(0) = \pm a$, $\dot{x}(0) = 0$ tal que (por ejemplo)

$x(0) = \pm a$ y $|\dot{x}(0)| > 0$ corresponde a un movimiento de energía superior a la energía crítica $ka^2/4$ por pequeño que sea $|\dot{x}(0)|$, y por tanto $x(t) \rightarrow \pm\infty$ para $t \rightarrow \infty$.

En general, *un equilibrio es estable si y solo si es un mínimo relativo del potencial*. Para justificar heurísticamente esta afirmación, supongamos que x_0 es un punto crítico del potencial, es decir $V'(x_0) = 0$, y que el desarrollo en serie de Taylor de V alrededor de x_0 es de la forma

$$V(x) = V(x_0) + a(x - x_0)^n + O((x - x_0)^{n+1}),$$

con $a = V^{(n)}(x_0)/n! \neq 0$, de modo que

$$F(x) = -na(x - x_0)^{n-1} + O((x - x_0)^n),$$

Entonces V tiene un mínimo relativo en x_0 si y solo si n es par y $a > 0$. En tal caso $F(x)$ tiene signo opuesto a $x - x_0$ —es decir, *apunta siempre hacia el equilibrio* x_0 — en las proximidades de dicho punto. Por el contrario, si n es par y $a < 0$ (en cuyo caso x_0 es un *máximo relativo* del potencial) en las proximidades de x_0 la fuerza $F(x)$ apunta en dirección *contraria* a x_0 . Por último, si n es impar (es decir, si x_0 es un *punto de inflexión* del potencial) entonces $F(x)$ apunta en dirección contraria a x_0 si $a(x - x_0) < 0$.

Supongamos que el equilibrio x_0 es estable y que $n = 2$ en la discusión anterior, o equivalentemente (al ser $a = V''(x_0)/2$)

$$V'(x_0) = 0, \quad V''(x_0) > 0.$$

Si $|x - x_0| \ll 1$ la ecuación del movimiento es aproximadamente

$$\ddot{x} = \frac{F(x)}{m} = -\frac{V'(x)}{m} \simeq -\frac{V''(x_0)}{m}(x - x_0),$$

que puede escribirse como

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0,$$

siendo

$$\xi \equiv x - x_0, \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}}.$$

Como es sabido, la solución general de esta ecuación es

$$\xi = A \cos(\omega t + \alpha),$$

con $\alpha \in [0, 2\pi)$ y $A \geq 0$ constantes arbitrarias (con $A \ll 1$ para que esté justificada la hipótesis de que $|x - x_0| = |\xi| \ll 1$). Por tanto el movimiento de la partícula cerca del equilibrio x_0 verifica

$$x(t) \simeq x_0 + A \cos(\omega t + \alpha).$$

En otras palabras, la partícula realiza *pequeñas oscilaciones* de amplitud A alrededor de x_0 , con período

$$\tau \simeq \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{V''(x_0)}}.$$

Por ejemplo, el período de las pequeñas oscilaciones de la partícula del Ejemplo 1.5 alrededor del origen es

$$\tau \simeq 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (1.49)$$

Nótese, sin embargo, que esta aproximación solo es correcta si la amplitud de las oscilaciones es pequeña. La fórmula exacta para el período τ , válida cualquiera que sea la amplitud, es la ec. (1.44).

Ejemplo 1.6. En el Ejemplo 1.5, el período de las oscilaciones de amplitud $0 < A < a$ alrededor del origen es

$$\tau = \sqrt{2m} \int_{-A}^A \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}},$$

siendo

$$E = V(A) = \frac{k}{4a^2} (2a^2 A^2 - A^4).$$

Sustituyendo este valor de E en la expresión anterior para τ y operando se obtiene

$$\tau = 4\sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2) \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}(1+s^2)\right)}}, \quad \varepsilon \equiv \frac{A}{a} \in (0, 1).$$

Nótese que cuando ε tiende a 1, es decir A tiende a a , el período ha de tender a infinito, ya que para $A = a$ la partícula emplea un tiempo infinito en alcanzar los equilibrios $x = \pm a$. Si ε es pequeño, teniendo en cuenta que

$$\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}(1+s^2)\right)^{-1/2} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{4}(1+s^2) + O(\varepsilon^4)$$

y sustituyendo en la fórmula para el período τ se obtiene el desarrollo más preciso

$$\begin{aligned} \tau &= 4\sqrt{\frac{m}{k}} \left(\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} + \frac{\varepsilon^2}{4} \int_0^1 \frac{1+s^2}{\sqrt{1-s^2}} ds + O(\varepsilon^4) \right) \\ &= 4\sqrt{\frac{m}{k}} \left[\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} + \frac{\varepsilon^2}{4} \left(2 \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} - \int_0^1 \sqrt{1-s^2} ds \right) + O(\varepsilon^4) \right] \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \left(1 + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \right). \end{aligned} \quad (1.50)$$

En este caso, el valor *exacto* del período se puede expresar en este caso a través de la *integral elíptica completa de primera especie*

$$K(\alpha) \equiv \int_0^{\pi/2} (1 - \alpha \sin^2 t)^{-1/2} dt$$

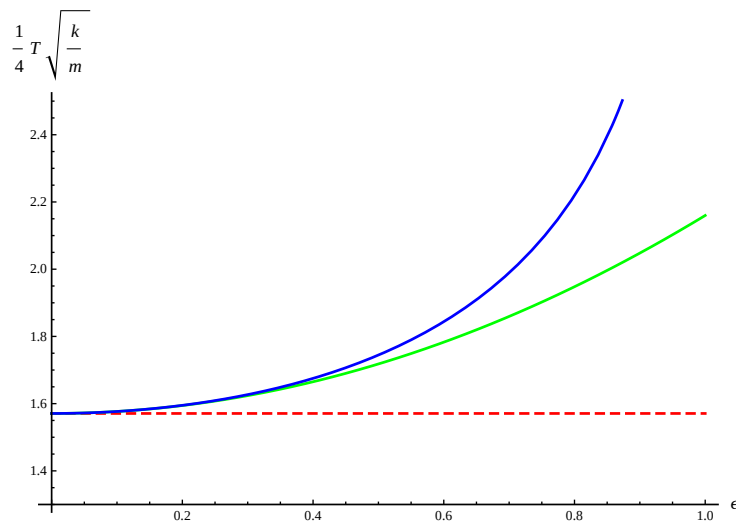


Figura 1.11: Período de las oscilaciones alrededor del origen para el potencial del Ejemplo 1.5 en función del parámetro $\varepsilon = A/a$ (línea azul) frente a sus aproximaciones (1.49) (línea roja de trazo discontinuo) y (1.50) (línea verde).

sin más que efectuar el cambio de variable $x = \sin t$:

$$\tau = 4\sqrt{\frac{m}{k}} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)^{-1/2} K\left(\frac{\varepsilon^2}{2 - \varepsilon^2}\right).$$

Ejercicio. Hallar la dependencia en la amplitud del período de las oscilaciones alrededor de $x = 0$ de una partícula de masa m que se mueve sometida al potencial $V(x) = k|x|^n$, con $k > 0$ y $n \in \mathbb{N}$.

1.5 Dinámica de un sistema de partículas. Leyes de conservación

1.5.1 Dinámica de un sistema de partículas

Estudiaremos en este apartado el movimiento de un sistema de N partículas, denotando por m_i la masa de la i -ésima partícula y por $\mathbf{r}_i$ sus coordenadas en un cierto sistema inercial. Sea $\mathbf{F}_{ij}$ la fuerza que ejerce la partícula j sobre la partícula i (en particular, $\mathbf{F}_{ii} = 0$), y $\mathbf{F}_i^{(e)}$ la fuerza externa que actúa sobre la partícula i . La segunda ley de Newton aplicada al movimiento de la i -ésima partícula del sistema afirma que

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{(e)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.51)$$

donde el sumatorio del miembro derecho representa la fuerza interna ejercida sobre la partícula i por las restantes partículas del sistema. Estas N ecuaciones vectoriales son en realidad un sistema de $3N$ ecuaciones diferenciales de segundo orden en las incógnitas $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$. Por el teorema de existencia y unicidad para este tipo de sistemas, si el miembro derecho de (1.51) es una función de clase C^1 en las variables $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N)$ en un cierto abierto $A \subset \mathbb{R}^{6N}$ para todo t fijo entonces las ecuaciones (1.51) tienen (localmente) una *única* solución que verifica cualquier condición inicial

$$\mathbf{r}_1(t_0) = \mathbf{r}_{10}, \dots, \mathbf{r}_N(t_0) = \mathbf{r}_{N0}, \dot{\mathbf{r}}_1(t_0) = \mathbf{v}_{10}, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N(t_0) = \mathbf{v}_{N0},$$

con $(\mathbf{r}_{10}, \dots, \mathbf{r}_{N0}, \mathbf{v}_{10}, \dots, \mathbf{v}_{N0}) \in A$. En otras palabras, *las trayectorias de las partículas del sistema quedan determinadas por sus posiciones y velocidades en cualquier instante*. En este sentido, la Mecánica newtoniana es *completamente determinista*.

Sumando respecto de i la ec.(1.51) se obtiene

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i,j=1}^N \mathbf{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)}. \quad (1.52)$$

Si se cumple (como supondremos en toda esta sección) la *tercera ley de Newton*, las fuerzas internas verifican la condición

$$\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0,$$

que sumada respecto de i, j proporciona inmediatamente

$$0 = \sum_{i,j=1}^N \mathbf{F}_{ij} + \sum_{i,j=1}^N \mathbf{F}_{ji} = 2 \sum_{i,j=1}^N \mathbf{F}_{ij},$$

donde en el último paso hemos tenido en cuenta que los índices de suma son mudos (i.e., $\sum_{i,j=1}^N \mathbf{F}_{ji} =$

$\sum_{i,j=1}^N \mathbf{F}_{ij}$). Denotando por

$$\mathbf{F}^{(e)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)}$$

la **fuerza externa** total que actúa sobre el sistema, la ec. (1.52) se puede escribir en la forma más concisa

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}^{(e)}. \quad (1.53)$$

Definamos a continuación el **centro de masas** del sistema como el punto de coordenadas

$$\mathbf{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i, \quad (1.54)$$

siendo

$$M = \sum_{i=1}^N m_i$$

la masa total del sistema. En otras palabras, el centro de masas (que generalmente abreviaremos por CM) es la media de las coordenadas de las partículas ponderadas por sus masas. En términos del CM, la ec. (1.53) adopta la forma sencilla

$$M \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{(e)}. \quad (1.55)$$

Por tanto *el centro de masas se mueve como una partícula de masa M sobre la que actúa la fuerza externa ejercida sobre el sistema*. Nótese, por tanto, que el movimiento del centro de masas es *independiente de las fuerzas internas del sistema*. En particular, si la fuerza externa es nula entonces $\ddot{\mathbf{R}} = 0$, y por tanto *en ausencia de fuerzas externas el centro de masas se mueve con velocidad constante*.

1.5.2 Leyes de conservación

Consideremos en primer lugar el **momento** total del sistema, definido como la suma de los momentos de cada una de las partículas que lo componen:

$$\mathbf{P} \equiv \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i = M \dot{\mathbf{R}}. \quad (1.56)$$

De esta igualdad se sigue que *el momento total del sistema coincide con el momento de su centro de masas considerado como una partícula de masa M* . La ec. (1.55) puede escribirse entonces en la forma

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{(e)}.$$

Vemos, por tanto, que *en ausencia de fuerzas externas se conserva el momento del sistema*.

Consideremos a continuación el **momento angular** del sistema (respecto del origen de coordenadas), definido como la suma de los momentos angulares de las N partículas que lo componen:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (1.57)$$

Si $\mathbf{r}'_i$ denota las coordenadas de la partícula i respecto del centro de masas, es decir

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i, \quad (1.58)$$

sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i) = M \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \times \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}'_i + \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \dot{\mathbf{R}} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{r}}'_i. \quad (1.59)$$

Por otra parte, de la ec. (1.58) y la definición (1.54) del centro de masas se sigue fácilmente que

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \equiv M \mathbf{R} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = M \mathbf{R} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \implies \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = 0, \quad (1.60)$$

y por tanto el segundo y el tercer término del miembro derecho de (1.59) se anulan idénticamente. En definitiva,

$$\mathbf{L} = M \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{r}}'_i. \quad (1.61)$$

En otras palabras, *el momento angular del sistema es la suma del momento angular de su centro de masas y el momento angular interno* (último término del miembro derecho de la ec. (1.61)) debido al movimiento de las partículas del sistema alrededor del centro de masas.

Ejemplo 1.7. Supongamos que el sistema se desplaza como un todo con velocidad (no necesariamente uniforme) $\mathbf{v}(t)$, es decir

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}(t), \quad i = 1, \dots, N.$$

En este caso

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}(t),$$

y por tanto el momento angular interno es nulo:

$$\dot{\mathbf{r}}'_i = \dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{R}} = 0, \quad i = 1, \dots, N \implies \mathbf{L} = M \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} \equiv M \mathbf{R} \times \mathbf{v}.$$

□

En virtud de la ec. (1.57), la derivada temporal del momento angular está dada por

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i,j=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}.$$

De nuevo, es fácil ver que el último término se anula si se cumple la tercera ley de Newton *en sentido fuerte*, es decir si

$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij} \parallel \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \quad i \neq j, \quad (1.62)$$

ya que

$$\sum_{i,j=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i,j=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} + \sum_{i,j=1}^N \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i,j=1}^N \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i,j=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} = - \sum_{i,j=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}.$$

Por tanto en este caso se obtiene

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} \equiv \mathbf{N}^{(e)}, \quad (1.63)$$

siendo por definición $\mathbf{N}^{(e)}$ el **par total de las fuerzas externas**. En otras palabras, si se cumple la tercera ley de Newton en sentido fuerte (1.62) *la derivada temporal del momento angular es igual al par total de las fuerzas externas*. En particular (cuando se verifica (1.62)), *si el par total de las fuerzas externas es nulo el momento angular del sistema se conserva*.

- El par total de las fuerzas externas *no* coincide en general con el par de la fuerza externa aplicada en el centro de masas, ya que en general

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} \neq \mathbf{R} \times \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)}.$$

Estudiemos, a continuación, la **energía cinética** del sistema

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2. \quad (1.64)$$

Utilizando de nuevo la descomposición (1.58) y la identidad (1.60) se obtiene fácilmente:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2. \quad (1.65)$$

donde el último término es la energía cinética del sistema debida a su movimiento respecto del centro de masas. Por tanto *la energía cinética del sistema es la suma de la energía cinética del centro de masas y la energía cinética debida al movimiento respecto del centro de masas.*

Al igual que en el caso de una partícula tratado en la Sección 1.3.2, *si la fuerza que actúa sobre cada partícula del sistema es **conservativa**, es decir si existe una función escalar $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ tal que*

$$\mathbf{F}_i \equiv \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.66)$$

entonces se conserva la energía total del sistema

$$E = T + V.$$

En efecto, si las fuerzas que actúan sobre el sistema son conservativas se verifica

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i + \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{F}_i + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \right) \dot{\mathbf{r}}_i = 0.$$

Supongamos que existen ciertas funciones $V_i(\mathbf{r}_i)$, $V_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ (con $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq N$) tales que $V_{ij} = V_{ji}$ y

$$\mathbf{F}_i^{(e)} = -\frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad \mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i}; \quad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (1.67a)$$

Entonces el sistema es conservativo, y el potencial (a menos de una constante) está dado por

$$V = \sum_{i=1}^N V_i(\mathbf{r}_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} V_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j). \quad (1.67b)$$

En efecto, es inmediato comprobar que las ecuaciones (1.67) implican la relación más general (1.66):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} &= \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \sum_{1 \leq j < k \leq N} V_{jk}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} + \sum_{\substack{k=1 \\ k > i}}^N \frac{\partial V_{ik}}{\partial \mathbf{r}_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j < i}}^N \frac{\partial V_{ji}}{\partial \mathbf{r}_i} \\ &\equiv \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} + \sum_{\substack{j=1 \\ j > i}}^N \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j < i}}^N \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left(\mathbf{F}_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} \right) = 0, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que (por definición) $\mathbf{F}_{ii} = 0$ y $V_{ji} = V_{ij}$.

- Nótese que, en virtud de la tercera ley de Newton,

$$\mathbf{F}_{ji} = -\frac{\partial V_{ji}}{\partial \mathbf{r}_j} \equiv -\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_j} = -\mathbf{F}_{ij} = \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i},$$

por lo que la función $V_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ ha de verificar el sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_j} = 0.$$

Puede probarse que la solución general de este sistema es una función arbitraria de la diferencia $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, y por tanto

$$V_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = U_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad \text{con } U_{ij} = U_{ji}. \quad (1.68)$$

Sustituyendo en (1.67b) se obtiene la siguiente fórmula más explícita para el potencial V :

$$V = \sum_{i=1}^N V_i(\mathbf{r}_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} U_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (1.69)$$

De hecho, en la mayor parte de los sistemas físicos conservativos de interés el potencial es de la forma (1.69). Obsérvese, por último, que

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \mathbf{r}_{ij}} = -\frac{\partial U_{ij}}{\partial \mathbf{r}_j}, \quad \mathbf{r}_{ij} \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j.$$

Capítulo 2

Movimiento en un campo de fuerzas central

2.1 Problema de dos cuerpos. Reducción al problema equivalente de un cuerpo

Estudiaremos en esta sección el movimiento de dos partículas de masas m_1 y m_2 no sometidas a fuerzas externas. Si $\mathbf{F}_{12}$ denota la fuerza que ejerce la segunda partícula sobre la primera, en virtud de la tercera ley de Newton la primera partícula ejerce sobre la segunda una fuerza $-\mathbf{F}_{12}$, y las ecuaciones del movimiento del sistema son por tanto

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2) \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mathbf{F}_{12}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2) \end{cases} \quad (2.1)$$

Es conveniente reescribir estas ecuaciones en términos de las variables

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad (2.2)$$

(cf. Fig. 2.1) siendo $M \equiv m_1 + m_2$ la masa total del sistema. Como vimos en la Sección 1.5.1, al no

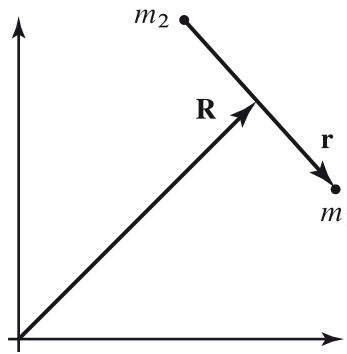


Figura 2.1: Coordenadas $\mathbf{R}$ y $\mathbf{r}$ en el problema de dos cuerpos.

haber fuerzas externas el centro de masas $\mathbf{R}$ se mueve sin aceleración, es decir $\ddot{\mathbf{R}} = 0$. En cuanto a la **coordenada relativa** $\mathbf{r}$, utilizando las ecs. (2.1) se obtiene inmediatamente la ec.

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12},$$

siendo

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.3)$$

la llamada **masa reducida** del sistema. Si la fuerza entre las dos partículas satisface la condición

$$\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2), \quad (2.4)$$

es decir, si $\mathbf{F}_{12}$ depende solo de las coordenadas y velocidades *relativas* de las partículas (y posiblemente del tiempo), la ecuación del movimiento de la coordenada $\mathbf{r}$ se convierte en

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \quad (2.5)$$

En otras palabras, si la fuerza $\mathbf{F}_{12}$ es de la forma (2.4) la coordenada relativa $\mathbf{r}$ se mueve como una partícula de masa μ sometida a la fuerza $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$. En particular, en este caso la solución de las ecuaciones del movimiento (2.1) se reduce a la integración de la ecuación (2.5). Por tanto *si $\mathbf{F}_{12}$ es de la forma (2.4) el problema de dos cuerpos (2.1) es equivalente al problema de un cuerpo (2.5).*

• Una vez resuelta la ec. (2.5), el movimiento de las coordenadas $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ se obtiene despejando estas variables en la ec. (2.2), es decir

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M} \mathbf{r}.$$

Al ser $\ddot{\mathbf{R}} = 0$, si trasladamos el origen de coordenadas al centro de masas el sistema de referencia resultante, llamado **sistema centro de masas**, sigue siendo inercial. En dicho sistema las ecuaciones anteriores se reducen a las más sencillas

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{M} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{M} \mathbf{r}.$$

En muchas aplicaciones, la masa m_2 es mucho mayor que m_1 . En tal caso, $m_1/M \simeq 0$, $m_2/M \simeq 1$, y por tanto (en el sistema centro de masas)

$$\mathbf{r}_1 \simeq \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 \simeq 0.$$

En otras palabras, en este caso la partícula masiva está aproximadamente fija en el origen (que coincide con el CM), y la coordenada relativa $\mathbf{r}$ coincide aproximadamente con el radio vector de la partícula ligera.

2.2 Constantes del movimiento. Ley horaria y ecuación de las trayectorias. Órbitas acotadas

2.2.1 Constantes del movimiento

El ejemplo más importante de una fuerza que satisface la condición (2.4) es el de una *fuerza central* de la forma

$$\mathbf{F}_{12} = f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

En tal caso, la ecuación (2.5) se convierte en

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (2.6)$$

que es la ecuación del movimiento de una partícula de masa μ sometida a la fuerza central

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (2.7)$$

Estudiaremos en esta sección cómo hallar la solución general de la ec. (2.6) considerando $\mathbf{r}$ como el vector de posición de una partícula de masa μ , y analizaremos las propiedades cualitativas de sus trayectorias.

Como se vio en la Sección 1.3.2, la fuerza (2.7) es *conservativa*, ya que se cumple

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V(r)}{\partial \mathbf{r}}, \quad \text{con } V(r) = -\int f(r) dr.$$

Se conserva por tanto la energía total de la partícula

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 + V(r).$$

Además, al ser la fuerza (2.7) *central* se conserva también el momento angular $\mathbf{L} = \mu\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$, y *el movimiento tiene lugar en el plano perpendicular a $\mathbf{L}$ que pasa por el origen de coordenadas*¹ (centro de la fuerza). Escojamos las coordenadas de modo que dicho plano sea el plano $z = 0$, e introduzcamos coordenadas polares (r, θ) mediante la ecuación

$$\mathbf{r} = r(\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad (r > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi).$$

Los vectores unitarios coordenados son

$$\mathbf{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0) = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0),$$

y por tanto

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta, \quad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r,$$

de donde se siguen fácilmente las fórmulas (cf. el Ejemplo 1.1)

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}; \quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}.$$

Las ecuaciones del movimiento en coordenadas polares son por tanto

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{f(r)}{\mu} \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

2.2.2 Ley horaria y ecuación de las trayectorias

Para determinar la **trayectoria** descrita por la partícula (i.e., r como función de θ) y la **ley horaria** del movimiento (i.e., r y θ como funciones de t) resulta más sencillo recurrir a las leyes de conservación de la energía y el momento angular, como veremos a continuación. En efecto, el momento angular de la partícula está dado por

$$\mathbf{L} = \mu\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mu r\mathbf{e}_r \times (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) = \mu r^2\dot{\theta}\mathbf{e}_z,$$

de modo que

$$\mu r^2\dot{\theta} = L_z = \text{const.}$$

Si $L_z \neq 0$, cambiando (si fuera preciso) la orientación del eje z de modo que tenga el mismo sentido que el momento angular $\mathbf{L}$ podemos conseguir que $L_z = |\mathbf{L}|$. Por tanto a partir de ahora supondremos, sin pérdida de generalidad, que

$$L_z = |\mathbf{L}| \equiv L, \quad (2.9)$$

de donde se sigue que

$$\mu r^2\dot{\theta} = L \geq 0. \quad (2.10)$$

¹*Stricto sensu*, esto solo es cierto si $\mathbf{L} \neq 0$. Si $\mathbf{L} = 0$, la trayectoria es una recta que pasa por el origen, que es un caso particular (degenerado) de movimiento en un plano por el origen. En efecto, si $\mathbf{r} \neq 0$ el vector velocidad es paralelo a $\mathbf{r}$, y en consecuencia $v_\theta = r\dot{\theta}$ y $v_\varphi = r\sin\theta\dot{\varphi}$ son nulas. Por tanto o bien la partícula permanece en el origen para todo t (caso degenerado de una recta por el origen), o bien los ángulos θ y φ son constantes, y por lo tanto la trayectoria es una línea recta que pasa por el origen.

En particular, obsérvese que con este convenio para la elección del eje z , se tiene

$$\dot{\theta}(t) \geq 0 \quad \forall t.$$

Nótese también que la segunda ecuación del movimiento (2.8) no es más que la derivada respecto de t de la ecuación (2.10) (dividida por r).

Una consecuencia inmediata de la conservación del momento angular es la llamada ley de las áreas, formulada por primera vez por Kepler a principios del siglo XVII. En efecto, el área $A(\theta)$ barrida por el vector de posición de la partícula al moverse entre dos puntos de su trayectoria con coordenadas polares $(r(\theta_0), \theta_0)$ y $(r(\theta), \theta)$ está dada por

$$A(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} r^2(\alpha) d\alpha$$

(cf. la Fig. 2.2). Como

$$\dot{A} = \frac{dA}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{2\mu} \quad (2.11)$$

es constante, *la partícula barre al moverse áreas iguales en tiempos iguales (ley de las áreas)*. Nótese que esta propiedad es válida para *cualquier* fuerza central $f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\mathbf{e}_r$, más general incluso que (2.7).

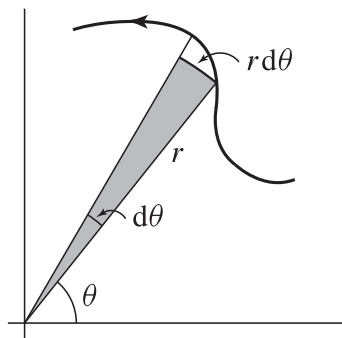


Figura 2.2: Área infinitesimal barrida por el radio vector.

Utilizando la ley de conservación del momento angular en la de la energía se obtiene inmediatamente

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 + V(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\theta}^2 + V(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r). \quad (2.12)$$

En otras palabras,

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U(r) = E, \quad (2.13)$$

donde el **potencial efectivo** $U(r)$ está dado por

$$U(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}, \quad (2.14)$$

y depende por tanto del momento angular. Nótese que la fuerza efectiva generada por el último término de (2.14) es

$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{L^2}{2\mu r^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{L^2}{2\mu r^2} \right) \mathbf{e}_r = \frac{L^2}{\mu r^3} \mathbf{e}_r = \mu r \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_r = \frac{\mu v_{\theta}^2}{r} \mathbf{e}_r,$$

que puede interpretarse como una *fuerza centrífuga*. De nuevo, es fácil ver que la primera ecuación del movimiento (2.8) es la derivada respecto de t de (2.12) (dividida por $\dot{r}$). En otras palabras, *las leyes*

de conservación de la energía y del momento angular se obtienen al integrar una vez respecto de t las ecuaciones del movimiento (2.8).

Las ecs. (2.10)-(2.13) proporcionan inmediatamente la ecuación de la trayectoria y la ley horaria del movimiento *en forma implícita*. En efecto, la ley horaria del movimiento se halla sin más que integrar la ec. (2.13) (después de separar variables) y utilizar la conservación del momento angular:

$$t = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U(r)}}, \quad \theta = \frac{L}{\mu} \int \frac{dt}{r^2(t)}, \quad (2.15)$$

donde se entiende que en la segunda ecuación ha de sustituirse el valor de $r(t)$ obtenido de la primera. (Veremos más adelante, sin embargo, que estas ecuaciones *no* son casi nunca la forma más sencilla de calcular la ley horaria del movimiento.)

En cuanto a ecuación de la trayectoria, de la ec. (2.13) se sigue que

$$\frac{\mu}{2} \dot{\theta}^2 r'^2(\theta) + U(r) = E,$$

donde hemos indicado con una prima la derivada respecto de θ . Sustituyendo en esta ecuación el valor de θ en función de L obtenido de (2.10) se obtiene

$$\frac{L^2}{2\mu} \left(\frac{r'}{r^2} \right)^2 + U(r) = E,$$

ecuación que se simplifica considerablemente introduciendo la variable dependiente

$$u = \frac{1}{r}.$$

En efecto, en términos de la variable u la ecuación anterior se reduce a

$$u'^2 = \frac{2\mu}{L^2} (E - U(1/u)), \quad (2.16)$$

cuya integración proporciona la ecuación de la trayectoria²:

$$\theta = \pm \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int^{1/r} \frac{du}{\sqrt{E - U(1/u)}}. \quad (2.17)$$

En la práctica, para hallar la ecuación de la trayectoria algunas veces es más sencillo derivar la ec. (2.16) respecto de θ , obteniendo así una ecuación de segundo orden que puede ser más fácil de integrar que (2.16). En efecto, procediendo de esta forma se obtiene

$$2u'u'' = \frac{2\mu}{L^2 u^2} \frac{dU}{dr} u',$$

y por tanto, teniendo en cuenta la definición de U (ec. (2.14)),

$$u'' = \frac{\mu}{L^2 u^2} \frac{dU}{dr} = \frac{\mu}{L^2 u^2} \left(\frac{dV}{dr} - \frac{L^2}{\mu} u^3 \right),$$

es decir

$$u'' + u = -\frac{\mu}{L^2 u^2} f(1/u). \quad (2.18)$$

La ecuación anterior se conoce como **ecuación de Binet**. Esta ecuación, escrita en la forma,

$$f(r) = -\frac{L^2}{\mu r^2} (u'' + u),$$

se usa frecuentemente para calcular la ley de fuerzas $f(r)$ si se conoce la ecuación de la trayectoria $r = r(\theta)$.

²Si $L = 0$ la ecuación (2.16) no es válida. Sin embargo, en este caso de (2.10) se deduce que la trayectoria es la recta por el origen $\theta = \text{const.}$, de acuerdo con la ec. (2.17). Por tanto, esta última ecuación es válida también para $L = 0$.

Ejemplo 2.1. Hallemos la ecuación de las trayectorias de una partícula de masa μ que se mueve sometida a la fuerza central $\mathbf{F} = \frac{k}{r^3} \mathbf{e}_r$.

En este caso $f(1/u) = ku^3$, y por tanto la ecuación de Binet se reduce a

$$u'' + Cu = 0, \quad C \equiv 1 + \frac{k\mu}{L^2}.$$

Las soluciones de esta ecuación dependen del signo de la constante C . En efecto:

I) $C < 0$

En este —que solo puede ocurrir si $k < 0$, es decir si la fuerza es *atractiva*— la solución general de la ecuación de Binet es

$$u = a e^{\gamma\theta} + b e^{-\gamma\theta} \iff r = (a e^{\gamma\theta} + b e^{-\gamma\theta})^{-1} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

donde

$$\gamma \equiv \sqrt{|C|}.$$

Es fácil ver que si a y b son ambos positivos la solución anterior se puede expresar en la forma

$$r = A \operatorname{sech}(\gamma(\theta - \theta_0)) \quad (A > 0), \quad (2.19)$$

si a ó b se anula entonces

$$r = e^{\pm\gamma(\theta - \theta_0)}, \quad (2.20)$$

mientras que si a y b tienen signos opuestos se tiene³

$$r = A \operatorname{csch}(\gamma(\theta - \theta_0)) \quad (A \neq 0). \quad (2.21)$$

Las trayectorias (2.19) son acotadas ($r \leq A$), mientras que las de tipo (2.20) y (2.21) no lo son (en el primer caso $r \rightarrow \infty$ para $\theta \rightarrow \pm\infty$, mientras que en el segundo $r \rightarrow \infty$ para $\theta \rightarrow \theta_0$). También es fácil comprobar que cualquiera de estas tres trayectorias es de tipo *espiral*, ya que el ángulo θ puede tomar valores arbitrariamente grandes en valor absoluto, y r no es una función periódica de θ .

II) $C = 0$

En este caso $k = -L^2/\mu < 0$, y la solución de la ecuación de Binet es por tanto

$$u = a + b\theta \iff r = \frac{1}{a + b\theta} \quad (a, b \in \mathbb{R}). \quad (2.22)$$

Si $b \neq 0$ estas trayectorias son no acotadas ($r \rightarrow \infty$ para $\theta \rightarrow -a/b$) y de tipo *espiral*, mientras que si $b = 0$ la trayectoria es una circunferencia.

III) $C > 0$

En este caso (que se verifica, en particular, si $k > 0$) la ecuación de la trayectoria es

$$u = \frac{1}{A} \cos(\gamma(\theta - \theta_0)) \iff r = A \sec(\gamma(\theta - \theta_0)) \quad (A > 0, \quad 0 \leq \theta_0 < 2\pi). \quad (2.23)$$

Estas trayectorias son no acotadas pero no son de tipo *espiral*, ya que (al ser $r > 0$) el ángulo θ varía entre $\theta_0 - \frac{\pi}{2\gamma}$ y $\theta_0 + \frac{\pi}{2\gamma}$.

□

³Más concretamente, en cualquiera de los dos casos (2.19) o (2.21) los parámetros A y θ_0 están dados por

$$\theta_0 = \frac{\log |b/a|}{2\gamma}, \quad A = \frac{\operatorname{sgn} a}{2\sqrt{|ab|}}.$$

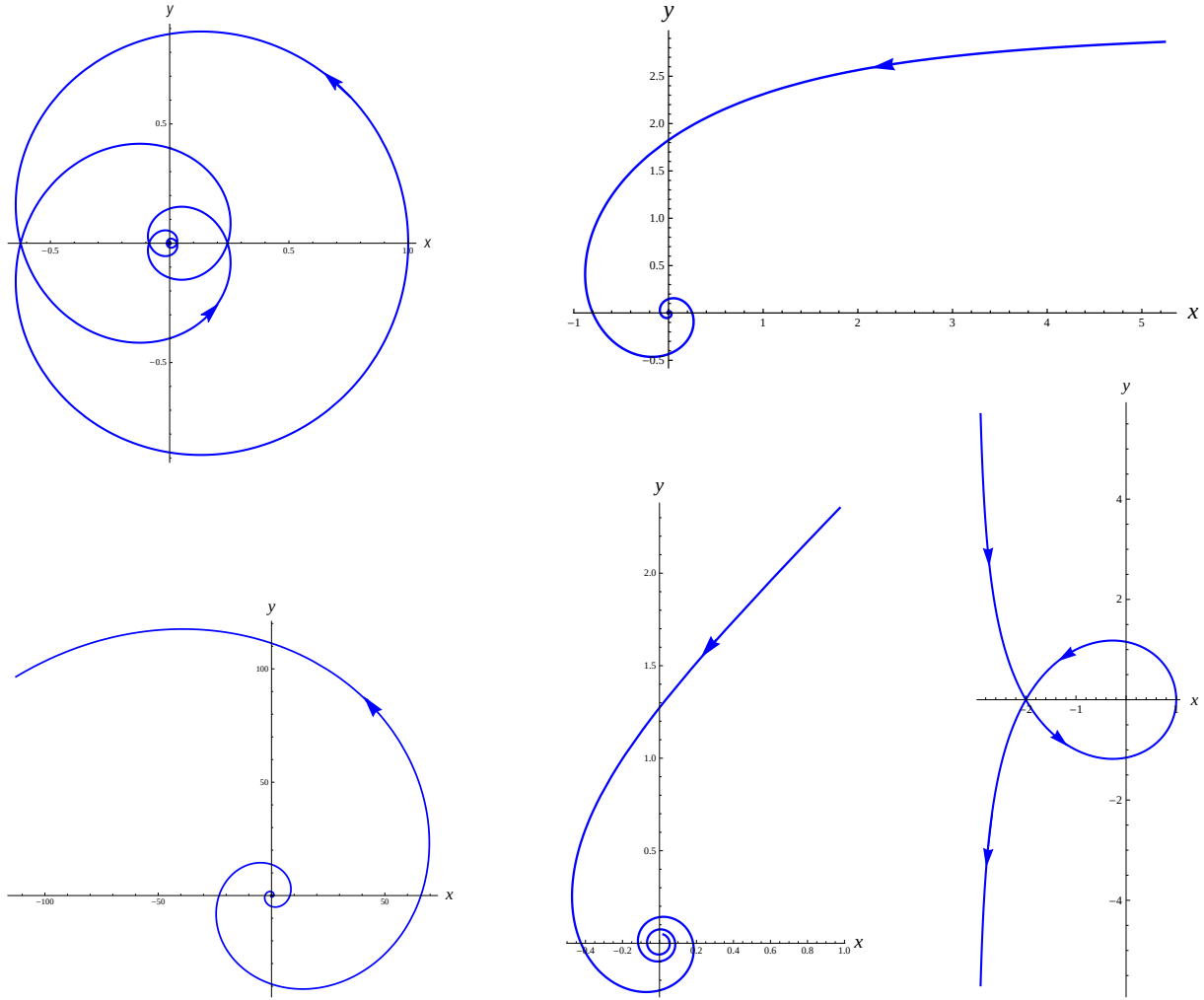


Figura 2.3: Trayectorias de una partícula en el campo central $\mathbf{F} = k\mathbf{e}_r/r^3$: de izquierda a derecha y de arriba a abajo, $r = \text{sech}(\theta/3)$, $r = \text{csch}(\theta/3)$, $r = e^{\theta/3}$, $r = (\theta - \frac{\pi}{4})^{-1}$, $r = \sec(\theta/3)$. (El sentido de recorrido indicado corresponde al caso en que $L_z > 0$, y por tanto $\dot{\theta} > 0$.)

- Si $C \leq 0$ (y, por tanto, $k < 0$), las trayectorias que acabamos de calcular se denominan genéricamente *espirales de Cotes*.

Nótese que la energía de la partícula puede obtenerse de la ec. (2.16), que utilizando la definición (2.14) de U se convierte en

$$E = \frac{L^2}{2\mu} (u'^2 + u^2) + V(1/u). \quad (2.24)$$

De esta ecuación se sigue inmediatamente que la velocidad está dada por

$$v = \frac{L}{\mu} \sqrt{u'^2 + u^2}. \quad (2.25)$$

Ambas fórmulas pueden también obtenerse directamente, teniendo en cuenta que

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \dot{\theta}^2 (r'^2 + r^2) = \frac{L^2}{\mu^2 r^4} \left(\frac{u'^2}{u^2} + \frac{1}{u^2} \right) = \frac{L^2}{\mu^2} (u'^2 + u^2).$$

En el Ejemplo 2.1 podemos tomar

$$V(r) = - \int f(r) dr = -k \int \frac{dr}{r^3} = \frac{k}{2r^2},$$

y por tanto

$$E = \frac{L^2}{2\mu} (u'^2 + u^2) + \frac{k}{2} u^2 = \frac{L^2}{2\mu} (u'^2 + C u^2)$$

Por ejemplo, para las trayectorias (2.19) se comprueba fácilmente que

$$E = -\frac{L^2|C|}{2\mu A^2} < 0,$$

mientras que para las de tipos (2.21) y (2.23) se tiene

$$E = \frac{L^2|C|}{2\mu A^2} > 0.$$

También es inmediato comprobar que la energía de las trayectorias (2.22) es

$$E = \frac{L^2 b^2}{2\mu},$$

mientras que las trayectorias (2.20) tienen energía $E = 0$. Estos resultados concuerdan con el hecho de que las trayectorias (2.19) son *acotadas*, mientras que (2.21) y (2.23) no lo son. En efecto, nótese que, al ser en este caso

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0,$$

si la partícula alcanza el infinito necesariamente ha de cumplirse que

$$E = \frac{1}{2} \mu v_\infty^2 \geq 0.$$

• En general, si se conoce la ecuación de la trayectoria de la partícula es posible hallar la ley horaria del movimiento en forma implícita. En efecto, supongamos que la ecuación de la trayectoria es $r = r(\theta)$. De la ley de conservación del momento angular se deduce entonces que

$$t = \frac{\mu}{L} \int r^2(\theta) d\theta, \quad (2.26)$$

ecuación que proporciona t como función de θ . Invirtiendo esta relación obtenemos $\theta(t)$, mientras que la coordenada radial está dada por

$$r = r(\theta(t)).$$

Ejemplo 2.2. Hallemos cuál es la fuerza central necesaria para que una partícula describa la espiral $r = a\theta$. Para ello basta introducir $u = 1/(a\theta)$ en la ecuación de Binet, obteniéndose así

$$f(r) = -\frac{L^2}{\mu r^2} (u'' + u) = -\frac{L^2}{\mu a r^2} \left(\frac{2}{\theta^3} + \frac{1}{\theta} \right) = -\frac{L^2}{\mu a r^2} \left(\frac{2a^3}{r^3} + \frac{a}{r} \right) = -\frac{L^2}{\mu a^3} \left(\frac{2a^5}{r^5} + \frac{a^3}{r^3} \right).$$

El movimiento de la coordenada θ se determina fácilmente utilizando la ec. (2.26):

$$t = \frac{\mu}{L} \int a^2 \theta^2 d\theta = \frac{\mu a^2}{3L} (\theta^3 - \theta_0^3) \implies \theta = \left(\frac{3L}{\mu a^2} t + \theta_0^3 \right)^{1/3},$$

con $\theta_0 = \theta(0)$ de donde se sigue que

$$r = a\theta = a \left(\frac{3L}{\mu a^2} t + \theta_0^3 \right)^{1/3}.$$

La energía de esta trayectoria se calcula sin dificultad utilizando la ec. (2.24). En efecto,

$$V(r) = \frac{L^2}{\mu a^3} \int \left(\frac{2a^5}{r^5} + \frac{a^3}{r^3} \right) dr = -\frac{L^2}{2\mu a^2} \left(\frac{a^4}{r^4} + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

a menos de una constante arbitraria que hemos tomado igual a cero para que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0.$$

Sustituyendo en la ec. (2.24) se obtiene

$$E = \frac{L^2}{2\mu} (u'^2 + u^2) - \frac{L^2}{2\mu} (a^2 u^4 + u^2) = \frac{L^2}{2\mu} (u'^2 - a^2 u^4) = 0.$$

Por la ley de conservación de la energía, la partícula llega al infinito con velocidad nula. La velocidad de la partícula en cualquier punto de su trayectoria se puede calcular fácilmente utilizando la ec. (2.25), o también directamente:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \dot{\theta}^2 (a^2 + r^2) = a^2 \dot{\theta}^2 (1 + \theta^2) \implies v = a \dot{\theta} \sqrt{1 + \theta^2} = \frac{L}{\mu r^2} \sqrt{r^2 + a^2}.$$

De esta última ecuación también se sigue que, como ya sabíamos, $v \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$. $\square$

2.2.3 Órbitas acotadas

Como acabamos de ver en el apartado anterior, el movimiento de la coordenada radial r está determinado por la ley de conservación de la energía (2.13)-(2.14). Formalmente, esta es la ecuación del movimiento de una partícula de masa μ sometida al potencial unidimensional $U(r)$ (donde, a diferencia de lo visto en el apartado 1.4, r solo puede tomar valores no negativos). Son por tanto válidas muchas de las consideraciones hechas en dicho apartado. Fundamentalmente, de la ec. (2.13) se deduce que el movimiento solo puede tener lugar para valores de r que satisfacen la desigualdad

$$U(r) \equiv V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} \leq E. \quad (2.27)$$

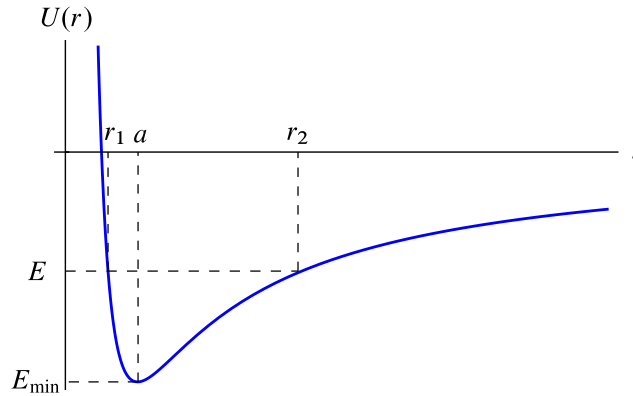


Figura 2.4: Potencial efectivo $U(r)$ para el potencial de Kepler $V(r) = -k/r$ (con $k > 0$).

Ejemplo 2.3. Para el **potencial de Kepler**

$$V(r) = -k/r, \quad \text{con } k > 0,$$

el potencial efectivo $U(r)$ tiene el aspecto de la Fig. 2.4. En efecto, $U(r)$ se comporta en este caso como $L^2/(2\mu r^2)$ para $r \rightarrow 0$ y como $-k/r$ para $r \rightarrow \infty$, siendo

$$U'(r) = \frac{k}{r^2} - \frac{L^2}{\mu r^3} = 0 \iff r = \frac{L^2}{k\mu} \equiv a.$$

Por tanto U es decreciente para $0 < r < a$ y creciente para $r > a$, y alcanza su valor mínimo en $r = a$. La energía de la partícula ha de ser mayor o igual que el valor mínimo de U , dado por

$$U(a) = -\frac{k^2\mu}{2L^2} \equiv E_{\min},$$

De la Fig. 2.4 se sigue que las trayectorias de energía $E \geq 0$ son *no acotadas*, ya que en este caso la desigualdad (2.27) implica que $r \in [r_0, \infty)$, donde $r_0 > 0$ es la única raíz de la ecuación $U(r) = E$. Por tanto en este caso la partícula “llega” del infinito, alcanza una distancia mínima al origen igual a r_0 (que es un punto de retroceso) y vuelve al infinito. Por el contrario, si $E_{\min} < E < 0$ entonces $r_1 \leq r \leq r_2$, siendo $r_1 < r_2$ las dos raíces de la ecuación $U(r) = E$ (cf. la Fig. 2.4), que de nuevo son puntos de retroceso. Por tanto en este caso la trayectoria es *acotada*. Por último, si $E = E_{\min}$ entonces la trayectoria es la *circunferencia* $r = a$ (cf. la Fig. 2.4). $\square$

De particular interés son las *órbitas acotadas*, en las que la coordenada radial se mueve entre dos puntos de retroceso $0 < r_1 < r_2$. En este caso, los puntos de la trayectoria que están a la distancia mínima r_1 del origen reciben el nombre de **periápsides** (**perigeos**, **perihelios** o **periastrós** si el centro de la fuerza es respectivamente la Tierra, el Sol o un astro cualquiera), mientras que aquellos en que la distancia al origen alcanza su valor máximo r_2 se denominan **apoápsides** (**apogeos**, **afelios** o **apoastros**, si el centro de atracción es la Tierra, el Sol o un astro). Ambos tipos de puntos reciben conjuntamente el nombre de **ápsides** (o *puntos apsidales*).

Como se vio en el apartado 1.4, el movimiento de la coordenada radial es en este caso *periódico* en el tiempo, con período (dependiente de la energía en general)

$$\tau = \sqrt{2\mu} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{E - U(r)}}. \quad (2.28)$$

Sin embargo, *esto no quiere decir que el movimiento de la partícula sea periódico*. En efecto, cuando la coordenada radial varía entre r_1 y r_2 disminuye $u = 1/r$, y por tanto (al ser $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{du} \dot{u} > 0$) debemos tomar el signo “−” en la ec. (2.17). Tomando (sin pérdida de generalidad) $\theta(r_1) = 0$ se obtiene

$$\theta = -\frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{1/r_1}^{1/r} \frac{du}{\sqrt{E - U(1/u)}} = \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{1/r}^{1/r_1} \frac{du}{\sqrt{E - U(1/u)}} \equiv \theta_1(r). \quad (2.29)$$

En particular, cuando $r = r_2$ la coordenada θ ha aumentado en

$$\Delta\theta_{12} = \theta_1(r_2) = \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{1/r_2}^{1/r_1} \frac{du}{\sqrt{E - U(1/u)}}. \quad (2.30)$$

Por el contrario, cuando r varía entre r_2 y r_1 aumenta u , y por tanto hay que tomar el signo “+” en la ec. (2.17). En otras palabras,

$$\theta = \Delta\theta_{12} + \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{1/r_2}^{1/r} \frac{du}{\sqrt{E - U(1/u)}} = 2\Delta\theta_{12} - \theta_1(r) \equiv \theta_2(r). \quad (2.31)$$

Cuando la coordenada r vuelve de nuevo a tomar el valor r_1 la variación de la coordenada angular θ es

$$\Delta\theta = \theta_2(r_1) = 2\Delta\theta_{12} - \theta_1(r_1) = 2\Delta\theta_{12}.$$

El **desplazamiento del periápside** $\Delta\theta$ es por tanto igual a

$$\Delta\theta = \sqrt{\frac{2L^2}{\mu}} \int_{1/r_2}^{1/r_1} \frac{du}{\sqrt{E - U(1/u)}}. \quad (2.32)$$

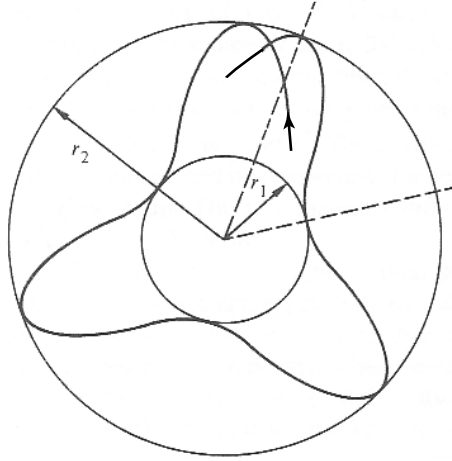


Figura 2.5: Desplazamiento del periápside en una órbita acotada (adaptado del libro de Goldstein, Poole y Safko).

En general, $\Delta\theta$ no es un múltiplo de 2π , y por tanto la partícula *no* regresa al punto de partida cuando la coordenada r vuelve a tomar el valor r_1 (cf. la Fig. (2.5)). La condición necesaria y suficiente para que el movimiento sea *periódico* es que tras n períodos completos de la coordenada r el incremento de la coordenada θ , que evidentemente es igual a $n\Delta\theta$, sea igual a un múltiplo entero $2m\pi$ de 2π . En otras palabras, la *trayectoria acotada con $r_1 \leq r \leq r_2$ es periódica si y solo si el desplazamiento del periápside (2.32) es un múltiplo racional de 2π* . Obsérvese también que, según la discusión anterior, la *órbita acotada que hemos considerado corresponde a un movimiento periódico si y solo si es cerrada*.

- Otra consecuencia importante de la discusión anterior es que *la órbita es simétrica respecto de la línea que une el centro con un ápside*. En efecto, la órbita será simétrica (por ejemplo) respecto de la línea que une el centro con el apoápside si y solo si

$$\theta_2(r) - \Delta\theta_{12} = \Delta\theta_{12} - \theta_1(r),$$

lo que se comprueba fácilmente a partir de la ecuación (2.31). De hecho, por un argumento totalmente análogo se demuestra que el resultado anterior es válido también para trayectorias *no acotadas*, i.e., en este caso *la trayectoria es simétrica respecto de la línea que une el origen de coordenadas con el periápside*.

- Los únicos potenciales centrales para los que *todas* las órbitas acotadas son cerradas son el armónico ($V(r) = \frac{1}{2}kr^2$) y el de Kepler ($V(r) = k/r$) (teorema de Bertrand).

Ejemplo 2.4. Para el potencial armónico $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$, con $k > 0$, el potencial efectivo $U(r)$ tiene el aspecto de la Fig. 2.6. Por tanto en este caso todas las órbitas son acotadas. El desplazamiento del periápside de una cualquiera de estas órbitas está dado por

$$\Delta\theta = \sqrt{\frac{2L^2}{\mu}} \int_{1/r_2}^{1/r_1} \frac{du}{\sqrt{E - \frac{L^2}{2\mu}u^2 - \frac{k}{2u^2}}} = \sqrt{\frac{2L^2}{\mu}} \int_{1/r_2}^{1/r_1} \frac{u du}{\sqrt{-\frac{L^2}{2\mu}u^4 + Eu^2 - \frac{k}{2}}},$$

siendo $u_1 > u_2$ las dos raíces de la ecuación $-\frac{L^2}{2\mu}u^4 + Eu^2 - \frac{k}{2} = 0$. Efectuando el cambio de variable $s = u^2$ la integral se puede expresar en la forma

$$\Delta\theta = \int_{s_2}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{p(s)}},$$

donde

$$p(s) = -s^4 + \frac{2\mu E}{L^2}s - \frac{k\mu}{L^2} = -\left(s - \frac{\mu E}{L^2}\right)^2 + \frac{\mu^2 E^2}{L^4}\left(1 - \frac{kL^2}{\mu E^2}\right)$$

y $s_1 > s_2$ son las dos raíces de la ecuación $p(s) = 0$ (evidentemente, $s_i = u_i^2$). Efectuando a continuación el cambio de variable

$$s = \frac{\mu E}{L^2} + \frac{\mu E}{L^2} \left(1 - \frac{kL^2}{\mu E^2}\right)^{1/2} \sin \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

se obtiene finalmente

$$\Delta\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi = \pi.$$

Al ser $\Delta\theta$ un múltiplo racional de 2π , todas las órbitas son cerradas en este caso (en concordancia con el teorema de Bertrand).

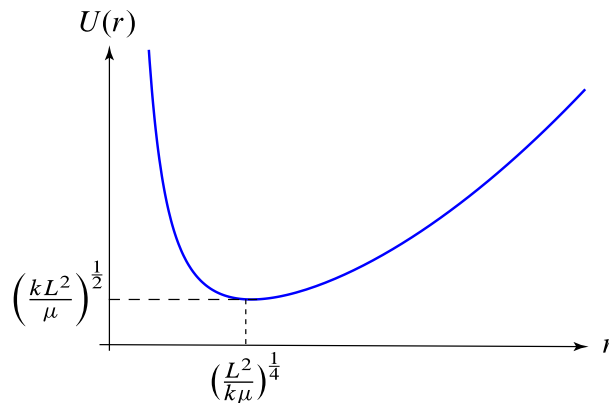


Figura 2.6: Potencial efectivo $U(r)$ para el potencial armónico $V(r) = kr^2/2$ (con $k > 0$).

Ejercicio. Probar que todas las órbitas del potencial armónico $V(r) = kr^2/2$ (con $k > 0$) son elipses centradas en el origen de coordenadas, y calcular el período del movimiento.

Ejercicio. Si aplicamos la ecuación de Binet a una circunferencia de radio a centrada en el origen obtenemos que la fuerza ha de ser inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al origen:

$$f(r) = -\frac{L^2}{a\mu} \frac{1}{r^2}.$$

¿Es correcto este resultado?

Solución. El resultado es claramente *falso*, ya que cualquier potencial V cuyo correspondiente potencial efectivo U tenga algún punto crítico r_0 admite una órbita circular $r = r_0$ con energía $U(r_0)$ (cf. la ec. (2.13)). Por ejemplo, esto es lo que ocurre con el potencial armónico del ejercicio anterior, para cualquier valor del momento angular L . Por tanto la ecuación de Binet *no* es aplicable a órbitas circulares centradas en el origen. Este resultado no es sorprendente, ya que para pasar de la ecuación (2.16) —equivalente a la ley de conservación de la energía (2.13)— a la ecuación de Binet es necesario dividir por u' , lo que no es lícito si $u \equiv 1/r$ es constante.

2.3 El problema de Kepler. Movimiento planetario

2.3.1 El problema de Kepler

Estudiaremos en esta sección el **problema de Kepler**, es decir el movimiento de dos cuerpos de masas m_1 y m_2 sometidos a su atracción gravitatoria mutua

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = -\frac{k(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3},$$

donde la constante k es igual a

$$k = Gm_1m_2 \equiv GM\mu > 0.$$

Por tanto en este caso

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{k}{r^2} \mathbf{e}_r \implies f(r) = -\frac{k}{r^2}, \quad V(r) = -\frac{k}{r},$$

y el problema equivalente de un cuerpo es

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -k \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

que suele escribirse también en la forma

$$\ddot{\mathbf{r}} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

La ecuación de las órbitas se determina fácilmente a partir de la ecuación de Binet, que para este potencial es particularmente simple:

$$u'' + u = \frac{\mu k}{L^2}.$$

La solución general de esta ecuación se puede expresar en la forma

$$u = \frac{\mu k}{L^2} (1 + e \cos(\theta - \theta_0)),$$

con e y θ_0 constantes de integración; nótese que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $e \geq 0$, ya que si $e < 0$ bastaría sustituir θ_0 por $\pi + \theta_0$ en la ecuación anterior. Además, escogiendo a continuación el eje x adecuadamente puede tomarse la constante θ_0 igual a 0. En tal caso la ecuación de las órbitas del problema de Kepler se reduce a

$$r = \frac{\alpha}{1 + e \cos \theta}, \quad \alpha = \frac{L^2}{\mu k}. \quad (2.33)$$

El parámetro e se puede relacionar con la energía de la órbita utilizando la ecuación (2.24):

$$E = \frac{L^2}{2\mu} (u'^2 + u^2) - ku = \frac{\mu k^2}{2L^2} [e^2 \sin^2 \theta + (1 + e \cos \theta)^2 - 2(1 + e \cos \theta)] = \frac{\mu k^2}{2L^2} (e^2 - 1).$$

Por tanto (al ser $e \geq 0$)

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}. \quad (2.34)$$

• Las órbitas del problema de Kepler son **secciones cónicas**. En efecto, a partir de la ecuación (2.33) se obtiene

$$r = \alpha - ex \implies x^2 + y^2 = \alpha^2 - 2\alpha ex + e^2 x^2 \implies (1 - e^2)x^2 + y^2 + 2\alpha ex = \alpha^2,$$

que es una ecuación de segundo grado en (x, y) . El tipo de cónica depende del valor de $1 - e^2$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} e > 1 & \implies \text{hipérbola} \\ e = 1 & \implies \text{parábola} \\ 0 < e < 1 & \implies \text{elipse} \\ e = 0 & \implies \text{circunferencia.} \end{array} \right.$$

En términos de la energía (cf. la ec. (2.34)),

$$\left\{ \begin{array}{ll} E > 0 & \implies \text{hipérbola} \\ E = 0 & \implies \text{parábola} \\ -\frac{\mu k^2}{2L^2} < E < 0 & \implies \text{elipse} \\ E = -\frac{\mu k^2}{2L^2} & \implies \text{circunferencia,} \end{array} \right.$$

donde $-\mu k^2/(2L^2)$ es la mínima energía que puede tener una partícula de masa μ que describe la órbita (2.33). Nótese, en particular, que este resultado concuerda con la discusión cualitativa del ejemplo 2.3. Obsérvese también que en el potencial de Kepler *todas las órbitas acotadas son cerradas* (y, por tanto, *periódicas*), como afirmaba el teorema de Bertrand.

2.3.2 Movimiento planetario

El caso más interesante es el de las órbitas elípticas (incluyendo, como caso particular, la circunferencia) en que $0 \leq e < 1$ ó $E < 0$, pues es el que se da en el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Reescribamos en este caso la ecuación cartesiana de la órbita como

$$(1 - e^2) \left(x + \frac{\alpha e}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = \alpha^2 + \frac{\alpha^2 e^2}{1 - e^2} = \frac{\alpha^2}{1 - e^2},$$

que es la ecuación de una elipse con centro en el punto

$$\left(-\frac{\alpha e}{1 - e^2}, 0 \right) \quad (2.35)$$

y semiejes mayor y menor respectivamente dados por

$$a = \frac{\alpha}{1 - e^2}, \quad b = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (2.36)$$

Recordemos que la *semidistancia focal* c y la *excentricidad* ε de una elipse de semiejes $a > b$ están dadas por

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \varepsilon = \frac{c}{a}. \quad (2.37)$$

Utilizando las expresiones anteriores de a y b se obtiene fácilmente

$$c = \frac{\alpha}{1 - e^2} \sqrt{1 - (1 - e^2)} = \frac{\alpha e}{1 - e^2} = ea \implies e = \varepsilon.$$

Por tanto la constante e que aparece al integrar la ecuación de las órbitas es la *excentricidad* de la elipse, y la ec. (2.34) relaciona la energía de la partícula con la excentricidad de su órbita. Las ecuaciones anteriores también determinan la posición de los *focos* de la elipse, que por definición son los dos puntos en el semieje mayor (es decir, en el eje x) a distancia c del centro. En efecto, de las ecs. (2.35)–(2.37) se sigue que el centro de la elipse tiene coordenadas $(-c, 0)$, y por tanto los focos son los puntos $(-2c, 0)$ y $(0, 0)$. En particular, esto prueba que uno de los focos de la elipse está en el origen de coordenadas, es decir en el centro de atracción gravitatorio. Por tanto *las órbitas acotadas en el movimiento planetario son elipses, uno de cuyos focos es el Sol* (primera ley de Kepler).

• De la ec. (2.36) y de la expresión de la excentricidad en función de la energía se sigue que la energía de una órbita elíptica es

$$E = -\frac{\mu k^2}{2L^2} (1 - e^2) = -\frac{k(1 - e^2)}{2\alpha} = -\frac{k}{2a}.$$

Vemos, por tanto, que la energía solo depende del semieje mayor de la órbita (es decir, es independiente de la excentricidad).

- El período τ de las órbitas elípticas en el movimiento planetario se determina fácilmente utilizando la ley de las áreas (2.11), teniendo en cuenta que el área de la elipse es igual a πab :

$$\frac{L\tau}{2\mu} = \pi ab = \pi\sqrt{\alpha} a^{3/2} \implies \tau = \frac{2\pi\mu}{L} \sqrt{\alpha} a^{3/2} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} a^{3/2}. \quad (2.38)$$

En función de la energía, el período está dado por

$$\tau = \pi k \sqrt{\frac{\mu}{2}} |E|^{-3/2}.$$

Nótese que en el movimiento planetario la fórmula para el período puede expresarse en la forma

$$\tau = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \simeq \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM_{\odot}}},$$

siendo $M_{\odot}$ la masa del Sol. Por tanto, el período de los planetas solo depende del semieje mayor de sus órbitas, y es proporcional a la potencia $3/2$ de dicho semieje (*tercera ley de Kepler*).

- Denotemos por p y p' respectivamente la distancia del perihelio y del afelio de la elipse al origen de coordenadas. De la ecuación de la órbita (2.33) se sigue fácilmente que la partícula se halla en el perihelio (resp. en el afelio) para $\theta = 0$ (resp. $\theta = \pi$), y por tanto

$$p = \frac{\alpha}{1+e} = a(1-e), \quad p' = \frac{\alpha}{1-e} = a(1+e).$$

- También se calcula fácilmente la velocidad en cualquier punto de la órbita, sin más que aplicar la ley de conservación de la energía:

$$v^2 = \frac{2}{\mu} (E - V(r)) = \frac{k}{\mu} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) = \frac{k^2}{L^2} (1 + e^2 + 2e \cos \theta).$$

Nótese que la velocidad es máxima en el perihelio ($\theta = 0$) y es mínima en el afelio ($\theta = \pi$), siendo sus valores respectivamente

$$v_p = \frac{k}{L} (1+e), \quad v_{p'} = \frac{k}{L} (1-e).$$

En particular, el cociente

$$\frac{v_p}{v_{p'}} = \frac{1+e}{1-e}$$

solo depende de la excentricidad. Es también interesante muchas veces expresar la velocidad v_p en términos de p , en lugar de L . Para ello basta tener en cuenta que

$$\alpha = \frac{L^2}{k\mu} = p(1+e) \implies L = \sqrt{k\mu p(1+e)},$$

y por tanto

$$v_p = \sqrt{\frac{k}{\mu p}} (1+e).$$

Ejemplo 2.5. ¿Cuál es la distancia media de un planeta al Sol? Por definición, dicha distancia es igual a

$$\langle r \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} r(t) dt.$$

Teniendo en cuenta que

$$dt = \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \frac{\mu}{L} r^2 d\theta,$$

la distancia buscada es

$$\langle r \rangle = \frac{\mu}{\tau L} \int_0^{2\pi} r^3 d\theta = \frac{\mu \alpha^3}{\tau L} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^3}.$$

Utilizando las ecs. (2.33), (2.36) y (2.38) se obtiene

$$\frac{\mu \alpha^3}{\tau L} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k\mu}{L^2}} (1 - e^2)^3 a^{3/2} = \frac{(1 - e^2)^3 a^{3/2}}{2\pi \sqrt{\alpha}} = \frac{a(1 - e^2)^{5/2}}{2\pi}$$

y por tanto

$$\langle r \rangle = a(1 - e^2)^{5/2} I(e), \quad I(e) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^3}.$$

La integral $I(e)$ se puede calcular utilizando el teorema de los residuos, siendo su valor

$$I(e) = \frac{e^2 + 2}{2(1 - e^2)^{5/2}}.$$

En definitiva, la distancia media pedida es igual a

$$\langle r \rangle = \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) a.$$

2.4 Dispersión en un campo de fuerzas central. Fórmula de Rutherford

2.4.1 Sección eficaz diferencial de dispersión

En un experimento ideal de **dispersión** (*scattering*, en inglés), se lanza una partícula de masa m_1 (proyectil) contra un blanco de masa m_2 . Se supone que el proyectil y el blanco forman un *sistema aislado*, y que la fuerza $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ es *conservativa*⁴, i.e.,

$$\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1},$$

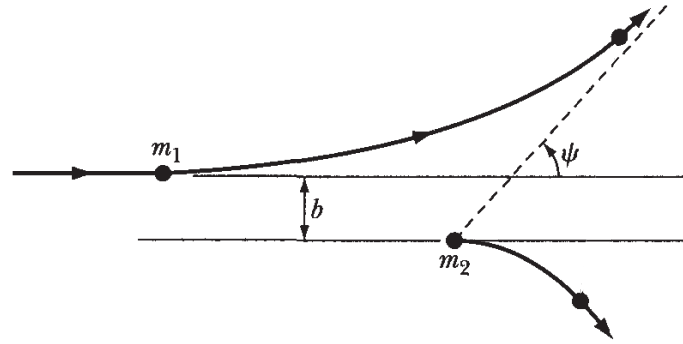
y tiende a cero si $r \equiv |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow \infty$. En otras palabras, el potencial de interacción V es aproximadamente constante si $r \gg 1$, y por tanto podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.39)$$

Se supone que el proyectil está a una distancia muy grande del blanco para $t \rightarrow -\infty$, por lo que $\mathbf{F}_{12} \simeq 0$ y tanto el blanco como el proyectil se mueven con velocidad aproximadamente constante. En el **sistema del laboratorio** el blanco está (inicialmente) en reposo en el origen de coordenadas, mientras que el proyectil se mueve con velocidad $\mathbf{u}_1 = u\mathbf{e}_1$. Conforme t aumenta el proyectil interacciona con el blanco y es desviado por éste, hasta que para $t \rightarrow \infty$ la separación entre el proyectil y el blanco tiende a infinito, $\mathbf{F}_{12}$ es de nuevo aproximadamente nula, y ambas partículas se mueven de nuevo con velocidades aproximadamente constantes (cf. la Fig. 2.7).

Sea ψ el ángulo que forma la velocidad final $\mathbf{v}_1$ del proyectil con la velocidad inicial $\mathbf{u}_1$ (es decir, con el eje x), que se denomina **ángulo de deflexión**. Para una cierta velocidad inicial u , la velocidad final $\mathbf{v}_1$

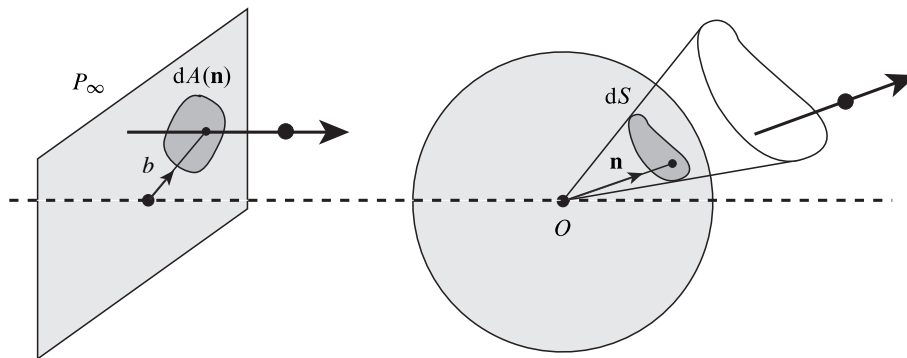
⁴Como se demostró en la Sección 1.5.2, si $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ se sigue que el potencial V solo puede depender de $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ a través de $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.


 Figura 2.7: Experimento ideal de dispersión de una partícula de masa m_1 por un blanco de masa m_2 .

depende únicamente de la posición inicial (para $t \rightarrow -\infty$) del proyectil en un plano P_∞ perpendicular al eje x a distancia muy grande (idealmente infinita) del origen de coordenadas. Dicha posición quedará determinada por sus *coordenadas polares*, es decir por la distancia inicial b del proyectil al eje x , llamada **parámetro de impacto**, y por su *ángulo azimutal* ϕ alrededor de este eje. En particular, si el potencial de interacción es *central* el ángulo ψ solo puede depender del parámetro de impacto b . Recíprocamente, de la velocidad final $\mathbf{v}_1$ podemos inferir la posición inicial del proyectil en el plano P_∞ , es decir el parámetro de impacto b y el ángulo azimutal ϕ . En realidad, en un experimento de dispersión lo que se observa no es la velocidad final $\mathbf{v}_1$ sino solo su *dirección* $\mathbf{v}_1/v_1 \equiv \mathbf{n}$. Dicha dirección es un vector *unitario* adimensional, es decir un punto de la *esfera unidad* S^2 , determinado por el ángulo ψ que forma el vector $\mathbf{v}_1$ con el eje x y por su ángulo azimutal β alrededor de este eje. De hecho, si la masa del blanco es mucho mayor que la del proyectil entonces el blanco se mueve con velocidad aproximadamente constante para todo t , y por tanto el sistema del laboratorio es un *sistema inercial*. En dicho sistema la ley de conservación de la energía aplicada en $t = \pm\infty$ implica que

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 \implies v_1 = u.$$

Supongamos que la dirección $\mathbf{n}$ de la velocidad final del proyectil está en un diferencial de ángulo sólido dS centrado en el vector unitario $\mathbf{n}$. Sea $dA(\mathbf{n})$ el área de la región infinitesimal del plano P_∞ correspondiente a las posiciones iniciales del proyectil que dan como resultado una velocidad $\mathbf{v}_1$ cuya dirección está en dS (cf. la Fig. 2.8). Por definición, el cociente


 Figura 2.8: Definición de $\sigma(\mathbf{n})$.

$$\sigma(\mathbf{n}) = \frac{dA(\mathbf{n})}{dS} \quad (2.40)$$

se denomina **sección eficaz diferencial de dispersión** (*differential scattering cross section*, en inglés) para esa dirección $\mathbf{n}$. Nótese, en particular, que $\sigma(\mathbf{n})$ tiene dimensiones de área, al ser dS adimensional.

Si se repite un número muy elevado de veces el experimento de dispersión, variando aleatoriamente el parámetro de impacto y el ángulo azimutal⁵ alrededor del eje x y manteniendo la velocidad de los proyectiles igual a $u\mathbf{e}_1$, la probabilidad de que la dirección de la velocidad final del proyectil esté en un cierto ángulo sólido $dS(\mathbf{n})$ es proporcional al área $dA(\mathbf{n})$ correspondiente a dicho ángulo sólido. En la práctica, en lugar de repetir el experimento aleatoriamente se lanza un **haz de partículas** de la misma masa m y velocidad $u\mathbf{e}_1$, y se mide el número de partículas dispersadas en un determinado ángulo sólido. Si denotamos por ν el número de proyectiles por unidad de superficie transversal a la velocidad inicial $\mathbf{u}_1$, entonces el número de partículas $dN(\mathbf{n})$ dispersadas en el ángulo sólido dS centrado en $\mathbf{n}$ es igual al número de partículas del haz que atraviesan la superficie $dA(\mathbf{n})$, es decir

$$dN(\mathbf{n}) = \nu dA(\mathbf{n}) \equiv \nu \sigma(\mathbf{n}) dS ,$$

y por tanto

$$\sigma(\mathbf{n}) = \frac{1}{\nu} \frac{dN(\mathbf{n})}{dS} . \quad (2.41)$$

Como $dN(\mathbf{n})$ es, en principio, medible en un experimento de dispersión, la ecuación anterior permi-

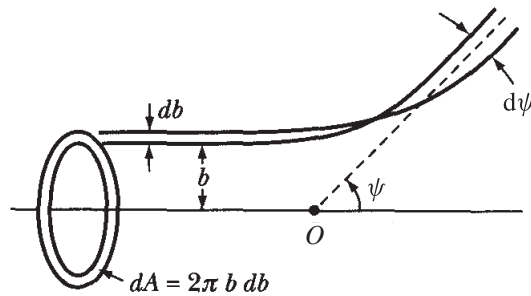


Figura 2.9: Sección eficaz de dispersión cuando la fuerza de interacción entre la partícula y el blanco es central.

te calcular *experimentalmente* $\sigma(\mathbf{n})$. Por otra parte, si se conoce el potencial $V(\mathbf{r})$ se puede calcular el miembro derecho de la ecuación (2.40), lo que proporciona un valor *teórico* de la sección eficaz diferencial de dispersión $\sigma(\mathbf{n})$. La comparación de este valor teórico con el obtenido en un experimento de dispersión permite entonces comprobar experimentalmente si el potencial de interacción coincide con la función $V(\mathbf{r})$.

Teniendo en cuenta que $dA = b db d\phi$ y $dS = \sin \psi d\psi d\beta$, la ec. (2.40) se puede escribir en la forma

$$b |db| d\phi = \sigma(\psi, \beta) \sin \psi |d\psi| d\beta ,$$

donde el valor absoluto se introduce para tener en cuenta que $db/d\psi$ puede ser *negativo* (por ejemplo, si el potencial es *repulsivo*). Cuando el potencial de interacción es *central* los ángulos azimutales ϕ y β son *iguales* (ya que el movimiento tiene lugar en el plano determinado por la velocidad $u\mathbf{e}_1$ y el vector de posición de la partícula $\mathbf{r}_1$ cuando parte del plano P_∞), y dA , y por tanto σ , solo depende de ψ . Integrando la ecuación anterior respecto de ϕ y β entre 0 y 2π se obtiene entonces

$$2\pi b |db| = 2\pi \sigma(\psi) \sin \psi |d\psi| \implies \sigma(\psi) = \frac{b}{\sin \psi} \left| \frac{db}{d\psi} \right| . \quad (2.42)$$

Por tanto el número de partículas dispersadas en la dirección $(\psi, \psi + d\psi)$ es igual a

$$2\pi \nu \sin \psi \sigma(\psi) |d\psi| .$$

⁵Si el potencial de interacción tiene alcance finito (es decir, si $V(\mathbf{r}) = 0$ para r suficientemente grande), se sobreentiende que el parámetro de impacto y el ángulo azimutal se escogen de forma que la partícula sea dispersada.

Se define la **sección eficaz total de dispersión** mediante

$$\sigma_{\text{tot}} = \int_{S^2} \sigma(\mathbf{n}) dS,$$

donde la integral está extendida a la superficie de la esfera unidad S^2 (es decir, a todas las posibles direcciones de la velocidad final de las partículas dispersadas). Si $\sigma(\mathbf{n})$ no depende del ángulo azimutal ϕ , al ser $dS = \sin \psi d\psi d\phi$ la expresión anterior se reduce a

$$\sigma_{\text{tot}} = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\psi) \sin \psi d\psi.$$

De la definición (2.40) de sección eficaz de dispersión se sigue que σ_{tot} es el área total en el plano P_∞ (transversal a la dirección de la velocidad inicial $\mathbf{u}_1$) atravesada por los proyectiles que son dispersados. En otras palabras, el número total de proyectiles dispersados por el blanco es igual a $n\sigma_{\text{tot}}$. Para potenciales con alcance infinito, es evidente que σ_{tot} es infinita, ya que todo proyectil es dispersado en alguna medida por el blanco.

2.4.2 Dispersión por un potencial central

Estudiaremos en esta subsección la dispersión de una partícula de masa m por un campo de fuerzas central *repulsivo* con potencial $V(r)$ (cf. la Fig. 2.10). Por lo visto anteriormente, el problema estudiado es equivalente al de la dispersión de una partícula de masa m por un blanco de masa $m_2 = \infty$ situado en el origen de coordenadas (centro de la fuerza), siendo la fuerza $\mathbf{F}_{12}$ igual a

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{\partial V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{\partial \mathbf{r}_1}.$$

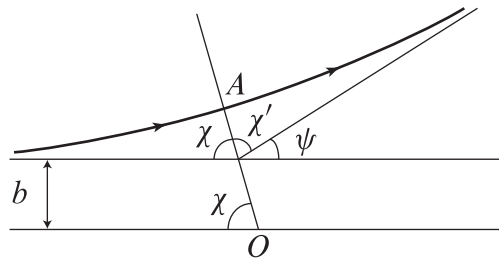


Figura 2.10: Dispersión de una partícula por un potencial central repulsivo (O es el origen de coordenadas, y A el periapside).

En la Fig. 2.10 se observa que los ángulos χ y χ' son iguales, ya que la órbita es *simétrica* respecto de la línea que une el centro de la fuerza con el periapside A . Por tanto, el ángulo de deflexión está dado por

$$\psi = \pi - 2\chi. \quad (2.43)$$

Por otra parte, el ángulo χ es la diferencia entre las coordenadas angulares del punto de la órbita con $x \rightarrow -\infty$ ($\theta = \pi$) y el periapside A ($\theta = \pi - \chi$). Si denotamos por r_0 la distancia del periapside A al origen, de la ecuación (2.17) (con el signo “-”, ya que en este caso $s = 1/r$ disminuye al aumentar el ángulo θ) se sigue que⁶

$$\chi = \int_0^{1/r_0} \frac{ds}{\sqrt{\frac{2m}{L^2}(E - V(1/s)) - s^2}}.$$

⁶En la mayor parte de los libros de texto se adopta el convenio de que el proyectil se mueva de izquierda a derecha en el sistema del laboratorio, como se ha hecho en estas notas (cf. la Fig. (2.10)). En tal caso es evidente que L_z y $\dot{\theta}$ son negativos, y por tanto no se cumple el convenio de la Sección 2.2.2 (cf. la ec. (2.10)). Siguen siendo válidas, sin embargo, todas las fórmulas obtenidas en las secciones anteriores, sin más que cambiar L por $-L$. De hecho, como las ecuaciones que utilizaremos en esta sección solo dependen de L^2 , no será preciso realizar modificación alguna.

Nótese que el periápside es un punto de retroceso, y por tanto r_0 es la (única) raíz de la ecuación

$$\frac{2m}{L^2}(E - V(r)) - \frac{1}{r^2} = 0.$$

Por otra parte, de la ec. (2.39) y de la ley de conservación de la energía se obtiene

$$E = \frac{1}{2}mu^2, \quad (2.44)$$

mientras que la ley de conservación del momento angular proporciona

$$\mathbf{L} = (b\mathbf{e}_2) \times (m\mathbf{u}\mathbf{e}_1) \implies L = mub = \sqrt{2mE}b. \quad (2.45)$$

Efectuando el cambio de variable $x = bs$ en la ecuación para χ se obtiene por tanto la expresión más compacta

$$\chi = \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 - \frac{V(b/x)}{E}}}, \quad (2.46)$$

donde $x_0 = b/r_0$ es la raíz positiva de la ecuación

$$1 - x^2 - \frac{V(b/x)}{E} = 0.$$

También es interesante observar que la integral (2.46) está extendida a todos los valores de x tales que

$$1 - x^2 - \frac{V(b/x)}{E} \geq 0.$$

Nota. Para un potencial central *atractivo* $V(r)$ el ángulo de deflexión está dado por $\psi = 2\chi - \pi$, donde χ se calcula de nuevo mediante la ec. (2.46). En efecto, de la Fig. 2.11 se sigue que en este caso

$$\psi = \pi - 2(\pi - \chi) = 2\chi - \pi.$$

Es importante observar que cuando el potencial es atractivo el valor de ψ puede ser superior a π , ya que las órbitas pueden rodear una o varias veces el origen. Cuando esto ocurre, el cálculo de la sección eficaz diferencial de dispersión se vuelve considerablemente más complicado. Este es el caso, por ejemplo, del potencial $-k/(2r^2)$ con $k < 0$ (para ciertos valores del parámetro de impacto). Por el contrario, para el potencial kepleriano atractivo $-k/r$ el ángulo de deflexión siempre está comprendido entre 0 y π , ya que las órbitas de energía positiva son en este caso ramas de hipérbola.

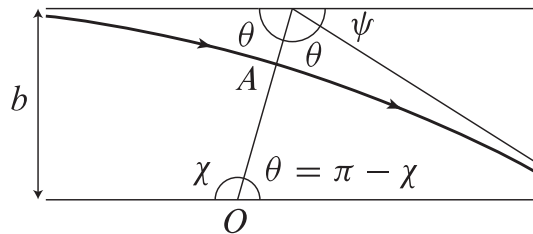


Figura 2.11: Dispersión por un potencial central atractivo (O es el origen de coordenadas y A el periápside).

Ejercicio. Calcular la distancia mínima al origen alcanzada por las partículas dispersadas por un potencial central repulsivo $V(r)$.

Solución. La mínima distancia al origen r_0 alcanzada por una partícula con parámetro de impacto b es la coordenada del único punto de retroceso de su órbita, determinada por la ecuación

$$U(r_0) = E \iff V(r_0) + \frac{L^2}{2mr_0^2} = V(r_0) + \frac{mu^2b^2}{2r_0^2} = \frac{1}{2}mu^2.$$

Si el potencial es repulsivo, es intuitivamente claro que el mínimo valor de r_0 lo alcanzan las partículas con parámetro de impacto $b = 0$. Esto también se comprueba fácilmente utilizando la fórmula anterior, ya que si d es el valor de r_0 correspondiente a $b = 0$ se tiene

$$V(d) = \frac{1}{2}mu^2 > V(r_0) \implies d < r_0,$$

al ser V decreciente (repulsivo). Por tanto la mínima distancia al origen para un potencial central repulsivo $V(r)$ se determina por la ecuación

$$V(d) = \frac{1}{2}mu^2. \quad (2.47)$$

Dicha distancia depende solo de u —es decir, de la energía del haz dispersado— y, de nuevo por el carácter repulsivo del potencial, disminuye al aumentar dicha energía.

Ejemplo 2.6. Hallemos la sección eficaz de dispersión por el campo central $f(r) = k/r^3$, con $k > 0$.

En este caso $V(r) = k/(2r^2)$, y por tanto el ángulo χ está dado por

$$\chi = \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - \gamma^2 x^2}},$$

donde

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{k}{2b^2E}} = \sqrt{1 + \frac{k}{mu^2b^2}}, \quad x_0 = 1/\gamma.$$

Efectuando el cambio de variable $\gamma x = \xi$ se obtiene

$$\chi = \frac{1}{\gamma} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi}{2\gamma} \implies \psi = \pi - 2\chi = \pi \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right).$$

La sección eficaz de dispersión $\sigma(\psi)$ se calcula fácilmente utilizando la fórmula (2.42). En efecto, de la ecuación anterior para ψ se obtiene

$$\gamma^2 = \frac{\pi^2}{(\pi - \psi)^2} = 1 + \frac{k}{mu^2b^2} \implies b^2 = \frac{k}{mu^2} \frac{(\pi - \psi)^2}{\psi(2\pi - \psi)},$$

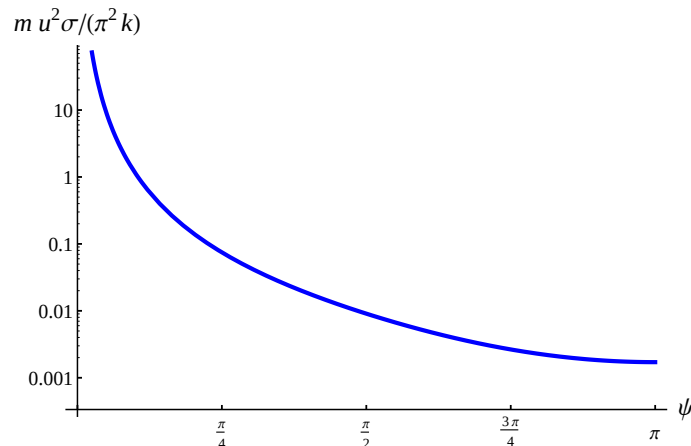


Figura 2.12: Sección eficaz de dispersión por el potencial central $V(r) = k/(2r^2)$ (nótese que la escala del eje vertical es logarítmica).

y por tanto

$$\sigma(\psi) = \frac{1}{2} \csc \psi \left| \frac{db^2}{d\psi} \right| = \frac{k}{2mu^2} \csc \psi \left| \frac{-2\psi(2\pi - \psi)(\pi - \psi) - 2(\pi - \psi)^3}{\psi^2(2\pi - \psi)^2} \right| = \frac{\pi^2 k}{mu^2} \frac{(\pi - \psi) \csc \psi}{\psi^2(2\pi - \psi)^2}$$

(cf. la Fig. 2.12). En este caso la distancia mínima al origen se determina por la ecuación

$$\frac{1}{2} mu^2 = V(d) = \frac{k}{2d^2} \implies d = \sqrt{\frac{k}{mu^2}},$$

y por tanto

$$\sigma(\psi) = (\pi d)^2 \frac{(\pi - \psi) \csc \psi}{\psi^2(2\pi - \psi)^2}.$$

Nótese que para $\psi \rightarrow 0$ la sección eficaz diferencial de dispersión es divergente, ya que

$$\sigma(\psi) \underset{\psi \rightarrow 0}{\simeq} \frac{\pi d^2}{4\psi^3},$$

mientras que para $\psi \rightarrow \pi$ se tiene

$$\sigma(\psi) \underset{\psi \rightarrow \pi}{\simeq} \frac{d^2}{\pi^2}.$$

Ejercicio. Hallar $\sigma(\psi)$ para el potencial del ejemplo anterior utilizando la ecuación de sus órbitas (cf. el Ejemplo 2.1).

Ejemplo 2.7. Calculemos la sección eficaz de dispersión de una partícula de masa m por una esfera impenetrable de radio a , fija en el origen de coordenadas.

Evidentemente, si $b > a$ las partículas no son dispersadas, por lo que supondremos que $b \leq a$. En tal caso el potencial está dado formalmente por

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r < a \\ 0, & r > a, \end{cases}$$

y por tanto

$$V(b/x) = \begin{cases} \infty, & x > b/a \\ 0, & x < b/a. \end{cases}$$

Al ser $b \leq a$, teniendo en cuenta que la distancia mínima al origen es obviamente $r_0 = a$ y que $V(b/x) = 0$ para $0 \leq x < b/a$, la ecuación (2.46) proporciona

$$\chi = \int_0^{b/a} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen(b/a) \implies b = a \sen \chi = a \sen \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2} \right) = a \cos(\psi/2).$$

De la ec. (2.42) se sigue entonces que

$$\sigma(\psi) = \frac{a \cos(\psi/2)}{\sen \psi} \cdot \frac{a}{2} \sen(\psi/2) = \frac{a^2}{4},$$

independiente de ψ . Por tanto en este caso la sección total de dispersión está dada por

$$\sigma_{\text{tot}} = 2\pi \frac{a^2}{4} \int_0^\pi \sen \psi \, d\psi = \pi a^2,$$

de acuerdo con el hecho de que los proyectiles que viajan a distancia mayor que a del eje x no son dispersados.

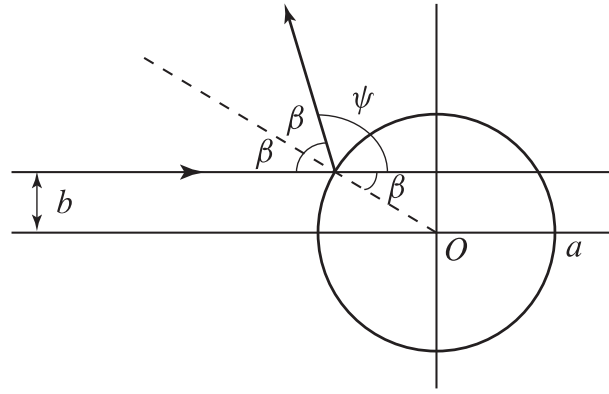


Figura 2.13: Dispersión de una partícula por una esfera impenetrable de masa infinita.

Otro método: De la Fig. 2.13 se sigue que⁷

$$\psi = \pi - 2\beta, \quad b = a \sin \beta = a \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2} \right) = a \cos(\psi/2),$$

que es la ecuación hallada anteriormente para b en función del ángulo de deflexión ψ . □

2.4.3 Fórmula de Rutherford

Consideremos a continuación la dispersión de una partícula de masa m por un potencial kepleriano repulsivo $V(r) = k/r$, con $k > 0$. Este es, por ejemplo, el potencial de interacción entre dos cargas puntuales q_1 y q_2 del mismo signo, siendo en este caso $k = q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0)$. La trayectoria seguida por la partícula se puede obtener a partir de la ecuación (2.33), cambiando k por $-k$:

$$r = \frac{-\beta}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}; \quad \beta = \frac{L^2}{mk}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} > 1,$$

donde la energía y el momento angular están dados en función de m y b por las ecs. (2.44) y (2.45). Tomando $\theta_0 = \pi$ se obtiene la expresión más sencilla

$$r = \frac{\beta}{e \cos \theta - 1}$$

que es una (rama de) hipérbola cuyo eje es la recta $y = 0$. Como $r \geq 0$, el ángulo θ en la ecuación anterior ha de variar entre $-\arccos(1/e)$ y $\arccos(1/e)$. Por tanto las asíntotas de la hipérbola forman un ángulo $\arccos(1/e)$ con el eje x , que en este caso es la línea que une el origen con el periápside (el punto $(\beta/(e-1), 0)$, correspondiente a $\theta = 0$); cf. la Fig. 2.14. Por consiguiente

$$\chi = \arccos(1/e) \implies \frac{1}{e} = \cos \chi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2} \right) = \sin(\psi/2),$$

de donde se sigue que

$$e^2 - 1 = \csc^2(\psi/2) - 1 = \cot^2(\psi/2) = \frac{2EL^2}{mk^2}.$$

⁷En efecto, al ser central el potencial la fuerza ejercida por la esfera cuando la partícula choca contra ella está dirigida según la normal a dicha esfera en el punto en que tiene lugar la colisión. Por tanto la única componente de la velocidad del proyectil $\mathbf{v}$ que cambia tras la colisión es la normal a la esfera. Además, por la ley de conservación de la energía se conserva $\mathbf{v}^2 = v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2$, y por tanto $v_{\perp}^2$. De esto se sigue que $v_{\perp}$ cambia de signo tras la colisión, lo cual es equivalente a la igualdad de los ángulos formados por la velocidad del proyectil con la normal a la esfera antes y después de la colisión.

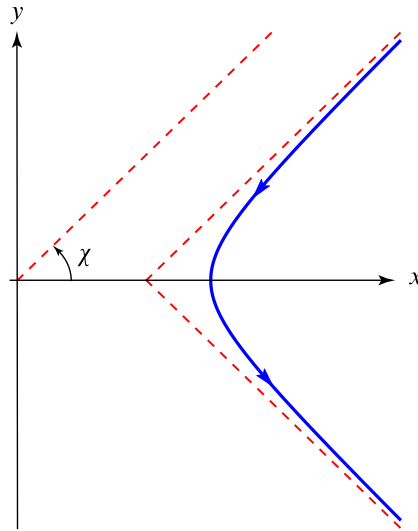


Figura 2.14: Trayectoria de una partícula en el potencial kepleriano $V(r) = k/r$, con $k > 0$.

De las expresiones (2.44) y (2.45) se obtiene

$$\frac{2EL^2}{mk^2} = \frac{m^2u^4b^2}{k^2} \implies b^2 = \frac{k^2}{m^2u^4} \cot^2(\psi/2).$$

Al ser $\cot(\psi/2) \geq 0$ (ya que $0 \leq \psi \leq \pi$), de la expresión anterior se sigue finalmente la relación

$$b = \frac{k}{mu^2} \cot(\psi/2). \quad (2.48)$$

Sustituyendo esta expresión en la ec. (2.42) se llega fácilmente a la expresión

$$\sigma(\psi) = \frac{k^2}{m^2u^4} \frac{\cot(\psi/2)}{\sin \psi} \cdot \frac{1}{2} \csc^2(\psi/2) = \frac{k^2}{4m^2u^4} \csc^4(\psi/2), \quad (2.49)$$

que es la famosa **fórmula de Rutherford** (cf. la Fig. 2.15). La distancia mínima al origen alcanzada por las partículas dispersadas por el potencial kepleriano repulsivo está dada por la ecuación (2.47), es decir

$$\frac{k}{d} = \frac{1}{2} mu^2 \implies d = \frac{2k}{mu^2}.$$

En función de esta distancia, la sección eficaz diferencial de dispersión se expresa mediante la fórmula

$$\sigma(\psi) = \frac{d^2}{16} \csc^4(\psi/2).$$

El comportamiento asintótico de $\sigma(\psi)$ está dado en este caso por

$$\sigma(\psi) \underset{\psi \rightarrow 0}{\simeq} \frac{d^2}{\psi^4}, \quad \sigma(\psi) \underset{\psi \rightarrow \pi}{\simeq} \frac{d^2}{16}.$$

Ejercicio. Deducir la relación (2.48) utilizando las ecs. (2.43)-(2.46).

Solución. En este caso

$$1 - x^2 - \frac{V(b/x)}{E} = 1 - \frac{kx}{bE} - x^2 = 1 - \frac{2kx}{mu^2b} - x^2 = 1 + \frac{k^2}{m^2u^4b^2} - \left(x + \frac{k}{mu^2b}\right)^2,$$

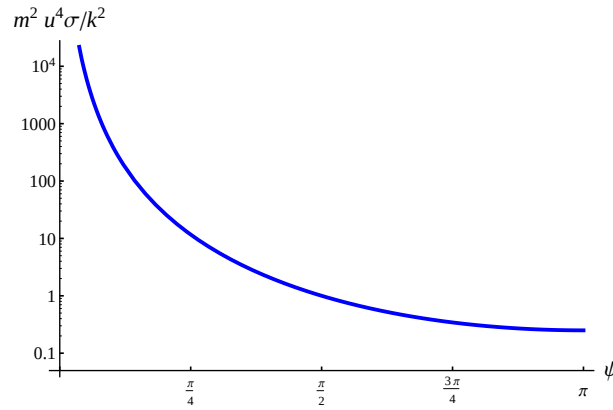


Figura 2.15: Sección eficaz de dispersión por el potencial $V(r) = k/r$, con $k > 0$ (la escala del eje vertical es logarítmica).

por lo que es conveniente efectuar el cambio de variable

$$x + \frac{k}{mu^2b} = \sqrt{1 + \frac{k^2}{m^2u^4b^2}} \xi$$

en la integral (2.46). Entonces

$$1 - x^2 - \frac{V(b/x)}{E} = \left(1 + \frac{k^2}{m^2u^4b^2}\right)(1 - \xi^2),$$

y por tanto

$$\chi = \int_{\xi_0}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi}{2} - \arcsen \xi_0,$$

siendo ξ_0 el valor de ξ para $x = 0$:

$$\xi_0 = \frac{k/(mu^2b)}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{m^2u^4b^2}}}.$$

(Nótese que el límite superior de la integral, correspondiente al valor $x = x_0$, no es más que la raíz positiva de la ecuación $1 - \xi^2 = 0$.) Utilizando ahora la ec. (2.43) se obtiene

$$\begin{aligned} \psi = 2 \arcsen \xi_0 &\implies \xi_0 = \sen(\psi/2) \implies \frac{k^2}{m^2u^4b^2} = \left(1 + \frac{k^2}{m^2u^4b^2}\right) \sen^2(\psi/2) \\ &\implies \frac{k^2}{m^2u^4b^2} = \tan^2(\psi/2) \implies b = \frac{k}{mu^2} \cot(\psi/2), \end{aligned}$$

al ser $\psi \in [0, \pi]$.

Ejercicio. Probar que para el potencial kepleriano *atractivo* $V(r) = -k/r$, con $k > 0$, la sección eficaz diferencial de dispersión también está dada por la fórmula de Rutherford (2.49).

Solución. En primer lugar, para el potencial kepleriano atractivo las órbitas de energía positiva son ramas de hipérbola (cf. la Sección 2.3.1), y por tanto no rodean el origen. Por consiguiente podemos aplicar las ecs. (2.42)-(2.46), teniendo en cuenta que, al ser el potencial atractivo, el ángulo de deflexión ψ es igual a $2\chi - \pi$. De la ecuación de la órbita (2.33) se sigue que este caso $\chi = \arccos(-1/e)$, y por tanto

$$-\frac{1}{e} = \cos \chi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\psi}{2}\right) = -\sen(\psi/2) \implies \frac{1}{e} = \sen(\psi/2),$$

como antes. El resto del cálculo es idéntico, ya que la fórmula para la excentricidad depende de k^2 , y por tanto

$$e^2 - 1 = \frac{m^2 u^4 b^2}{k^2} \implies b = \frac{k}{mu^2} \cot(\psi/2),$$

como en el caso repulsivo.

Ejemplo 2.8. ¿Cuál es la sección total de dispersión *hacia atrás* $\sigma_{\text{tot}}^{(b)}$ en la dispersión de una partícula por el potencial $V(r) = k/r$ (con $k > 0$)?

Por definición de sección eficaz de dispersión, $\sigma_{\text{tot}}^{(b)}$ es el área de la región del plano P_∞ de donde proceden los proyectiles que son dispersados hacia atrás. Si un proyectil es dispersado hacia atrás, su ángulo de deflexión ψ varía entre $\pi/2$ y π . De la ec. (2.48) se sigue entonces que el parámetro de impacto b de los proyectiles dispersados hacia atrás está comprendido entre k/mu^2 (correspondiente a $\psi = \pi/2$) y 0 (correspondiente a $\psi = \pi$). En otras palabras, son dispersados “hacia atrás” los proyectiles que parten a distancia menor o igual que k/mu^2 del eje x en el plano P_∞ . Por tanto la sección eficaz pedida será igual al área de una circunferencia de radio k/mu^2 , es decir a

$$\sigma_{\text{tot}}^{(b)} = \frac{\pi k^2}{m^2 u^4}.$$

Evidentemente, el mismo resultado se obtiene utilizando la fórmula de Rutherford:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot}}^{(b)} &= 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \psi \sigma(\psi) d\psi = \frac{\pi k^2}{m^2 u^4} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos(\psi/2)}{\sin^3(\psi/2)} d\psi = \frac{2\pi k^2}{m^2 u^4} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha} d\alpha \\ &= -\frac{\pi k^2}{m^2 u^4} \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi k^2}{m^2 u^4}. \end{aligned}$$

El resultado anterior fue de gran importancia en la historia de la Física. En efecto, a principios del siglo XX se creía que la carga positiva del núcleo atómico estaba distribuida uniformemente (este es el llamado “modelo del pudding de pasas” de J. J. Thomson). Para comprobar esta hipótesis, Ernest Rutherford ideó un experimento que consistía en lanzar un haz de partículas α (núcleos de He^{++}) contra una lámina muy fina (para evitar colisiones múltiples) de átomos de oro. Al ser la masa de las partículas α mucho mayor que la de los electrones —que, según el modelo de Thomson, se moverían en el fondo uniforme de la carga positiva de los núcleos—, dichas partículas no deberían ser apenas dispersadas. En 1909 Hans Geiger y Ernest Marsden realizaron este experimento bajo la dirección de Ernest Rutherford, y para su sorpresa hallaron que un número pequeño pero no nulo de partículas α eran dispersadas incluso en ángulos próximos a 180° . Rutherford, Geiger y Marsden dedujeron correctamente que este hecho era debido a las colisiones individuales de las partículas α con las cargas positivas de los núcleos de Au, que, al contrario de lo predicho por el modelo de Thomson, deberían estar concentradas en una región muy pequeña. De hecho, el valor teórico hallado anteriormente para $\sigma_{\text{tot}}^{(b)}$ permite hallar una cota superior al radio a del núcleo de Au. En efecto, si ν es la densidad de partículas α del haz por unidad de superficie transversal entonces el número de partículas α dispersadas hacia atrás está dado por

$$N^{(b)} = \nu \sigma_{\text{tot}}^{(b)} = \frac{\pi \nu k^2}{m^2 u^4} = \frac{\pi \nu}{4} d^2 \implies d = \sqrt{\frac{4N^{(b)}}{\pi \nu}}.$$

Como la distancia d de máximo acercamiento de las partículas α al núcleo de Au ha de ser mayor o igual que su radio a , de la fórmula anterior obtenemos la acotación

$$a \leq \sqrt{\frac{4N^{(b)}}{\pi \nu}}.$$

Capítulo 3

Formulaciones lagrangiana y hamiltoniana de la Mecánica

3.1 Introducción al cálculo variacional

3.1.1 Problema fundamental del cálculo de variaciones

El problema fundamental del **cálculo de variaciones** (en su versión más sencilla) es el de hallar los extremos de una función de la forma

$$F[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x)) dx \quad \left(' = \frac{d}{dx} \right), \quad (3.1)$$

donde $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^2 y la función $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ debe cumplir las condiciones

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \quad (3.2)$$

con y_1, y_2 *fijos*. Desde el punto de vista matemático,

$$F : C^2([x_1, x_2]) \rightarrow \mathbb{R}$$

es una función cuyo dominio es el espacio $C^2([x_1, x_2])$ de funciones escalares $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 (derivables dos veces con continuidad) en el intervalo $[x_1, x_2]$ que satisfacen la condición (3.2). En otras palabras, a cada función $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$, que podemos identificar con su **gráfica**

$$\{(x, y(x)) : x_1 \leq x \leq x_2\} \subset \mathbb{R}^2,$$

la aplicación F le asocia el número dado por el miembro derecho de (3.1). Una función de este tipo, cuyo dominio es un conjunto de funciones, recibe el nombre de **funcional**. A la función f que aparece en la ec. (3.1) se le denomina **densidad** del correspondiente funcional F .

Ejemplo 3.1. ¿Cuál es la curva plana de menor longitud que une dos puntos dados?

Denotemos dichos puntos por (x_i, y_i) ($i = 1, 2$), y supongamos que $x_1 \neq x_2$ (lo que siempre es posible escogiendo adecuadamente las coordenadas). Si nos restringimos, por sencillez, a curvas que sean la gráfica de funciones $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ entonces el problema propuesto es el de hallar el mínimo del *funcional longitud*

$$\ell[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

con la condición (3.2).

Ejemplo 3.2. *Problema de la braquistócrona.* Una partícula de masas m se mueve en un plano vertical a lo largo de una curva de extremos fijos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , con $x_1 < x_2$ e $y_1 > y_2$. ¿Para qué curva es *mínimo* el tiempo que emplea la partícula en recorrer la distancia entre ambos puntos?

Como la fuerza de reacción de la curva sobre la partícula es perpendicular a dicha curva, y por tanto no realiza trabajo, se conserva la energía:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = E.$$

Si la curva es la gráfica de una función $y(x)$, el diferencial de tiempo a lo largo de dicha curva está dado por

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - mgy(x))}}.$$

Por tanto el problema propuesto es el de hallar el mínimo del funcional (proporcional al tiempo de recorrido)

$$\tau[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{y_0 - y(x)}} dx \quad \left(y_0 \equiv \frac{E}{mg} \right) \quad (3.3)$$

con la condición (3.2). Nótese que de la conservación de la energía se sigue que $y \leq y_0$, y que $y_0 = y_1$ si la partícula está inicialmente en reposo.

Ejemplo 3.3. *Principio de Fermat.* ¿Cuál es la trayectoria seguida por un rayo luminoso al pasar de un punto (x_1, y_1) a otro punto (x_2, y_2) en un medio óptico plano con índice de refracción $n(x, y)$?

Según el **principio de Fermat** (en la aproximación de la Óptica geométrica), la trayectoria del rayo luminoso que une los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es la curva para la cual el tiempo empleado por la luz en recorrer la distancia entre ambos puntos es *mínimo*. Supongamos, de nuevo, que $x_1 \neq x_2$ y que la trayectoria es la gráfica de una función $y(x)$. Por definición de índice de refracción, la velocidad de la luz en un punto (x, y) del medio está dada por

$$v(x, y) = \frac{c}{n(x, y)},$$

siendo c la velocidad de la luz en el vacío. Como

$$dt = \frac{ds}{v(x, y)} = n(x, y) \frac{ds}{c},$$

el problema propuesto es equivalente al de determinar el mínimo del funcional (proporcional al tiempo de recorrido)

$$\ell[y] = \int_{x_1}^{x_2} n(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx, \quad (3.4)$$

de nuevo con la condición (3.2). El funcional (3.4), que tiene dimensiones de longitud, se denomina *longitud óptica*. Obsérvese que si el índice de refracción es *constante* ℓ es proporcional al funcional longitud del primer ejemplo, y por tanto el camino seguido por la luz es la curva de menor longitud que une los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) . Nótese también que si el índice de refracción es proporcional a $(y_0 - y)^{-1/2}$ la trayectoria seguida por la luz es la braquistócrona del ejemplo anterior.

3.1.2 Ecuaciones de Euler–Lagrange

Para resolver el problema fundamental del cálculo de variaciones formulado en la subsección anterior procederemos esencialmente del mismo modo que se hace en Análisis real para determinar los extremos de una función ordinaria $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La idea es que en ambos casos los extremos son los puntos (funciones en este caso) para los cuales se anula en primer orden la variación sufrida por la función cuando incrementamos infinitesimalmente su argumento.

Más precisamente, supongamos que $y(x)$ es un extremo (máximo o mínimo) del funcional (3.1) con la condición (3.2). Sea $\eta(x)$ una función cualquiera (de clase C^2) que cumple

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0, \quad (3.5)$$

de modo que para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ la función $y_\varepsilon \equiv y + \varepsilon\eta$ satisface las condiciones (3.2). Las funciones $y_\varepsilon(x)$ (con $\varepsilon \in \mathbb{R}$) forman una **familia uniparamétrica** que contiene al extremo $y(x)$ para $\varepsilon = 0$. Más informalmente, si ε es pequeño podemos pensar en las funciones $y_\varepsilon(x)$ como pequeñas **variaciones** del extremo $y(x)$. En cualquier caso, si restringimos el funcional F a estas funciones obtenemos una *función de una variable*

$$g(\varepsilon) \equiv F[y_\varepsilon] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x) + \varepsilon\eta(x), y'(x) + \varepsilon\eta'(x)) dx$$

que tiene un extremo en $\varepsilon = 0$. Sabemos que una condición *necesaria* (aunque en general no suficiente) para que esto ocurra es que $g'(0) = 0$. Calculando la derivada $g'(\varepsilon)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} g'(\varepsilon) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(x, y(x) + \varepsilon\eta(x), y'(x) + \varepsilon\eta'(x)) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x) + \varepsilon\eta(x), y'(x) + \varepsilon\eta'(x)) \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x) + \varepsilon\eta(x), y'(x) + \varepsilon\eta'(x)) \eta'(x) \right] dx \end{aligned}$$

y por tanto

$$g'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \eta'(x) \right] dx.$$

Por consiguiente, si la función $y(x)$ es un extremo del funcional F con las condiciones (3.2) debe satisfacer

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \eta'(x) \right] dx = 0 \quad (3.6)$$

para *cualquier* función $\eta(x)$ que cumpla (3.5). La ecuación (3.6) se puede simplificar integrando por partes el último sumando, ya que

$$\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \eta'(x) dx \\ &= \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \right) dx \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \right) dx, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la condición (3.5). Utilizando esta última ecuación en (3.6) se obtiene finalmente

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \right) \right] \eta(x) dx = 0. \quad (3.7)$$

Como dicha condición ha de verificarse para *cualquier* función η que cumpla (3.5), el término entre paréntesis ha de anularse idénticamente en el intervalo $[x_1, x_2]$, es decir *el extremo $y(x)$ ha de satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \right) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad \forall x \in [x_1, x_2]. \quad (3.8)$$

• Es importante recordar que la ecuación de Euler-Lagrange (3.8) es una condición *necesaria*, pero en general *no* suficiente, para que $y(x)$ sea un extremo del funcional F . Hablando con más precisión, las

soluciones de dicha ecuación son los *puntos críticos* de F (del mismo modo que los puntos en que se anula la derivada de una función $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son los puntos críticos de dicha función). Por este motivo, a las funciones $y(x)$ que satisfacen la ec. (3.8) se les denomina **extremales** del funcional (3.1).

- Si (como estamos suponiendo) la función f es de clase C^2 , la ec. (3.8) se puede escribir en la forma equivalente

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

En particular, si se cumple la condición

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \neq 0$$

la ecuación anterior es una *ecuación diferencial ordinaria de 2º orden* en la función incógnita y . Para hallar los extremales del funcional F , se deben añadir a dicha ecuación las *condiciones de contorno* (3.2).

- Multiplicando el miembro izquierdo de la ecuación de Euler–Lagrange (3.8) por y' se obtiene

$$y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - y' \frac{\partial f}{\partial y} - y'' \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f \right) + \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Por tanto, la ecuación de Euler–Lagrange se puede escribir en la forma equivalente

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f \right) + \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (3.9)$$

En particular, si f no depende explícitamente de x (es decir, si es función únicamente de y e y'), se conserva la función entre paréntesis en el miembro izquierdo de (3.9):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \implies h \equiv y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = \text{const.} \quad (3.10)$$

Se dice en tal caso que la función h es una **integral primera** de la ecuación de Euler–Lagrange (3.8), ya que cuando h se conserva dicha ecuación de *segundo* orden es equivalente a la ecuación de *primer* orden (3.10).

- Del mismo modo, si f no depende de y de la ec. de Euler–Lagrange se sigue que se conserva la derivada de f respecto de y' :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{const.} \quad (3.11)$$

Ejemplo 3.4. Los problemas enunciados en los Ejemplos 3.1–3.2 se resuelven fácilmente utilizando la ecuación de Euler–Lagrange. En efecto, en el caso del funcional longitud la ec. (3.11) proporciona

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{const.} \implies y' = \text{const.}$$

Por tanto $y(x) = ax + b$, donde las constantes a y b han de elegirse de modo que se cumplan las condiciones (3.2). En consecuencia, la curva de mínima¹ longitud es la línea recta.

En cuanto al funcional (3.3), la ec. (3.10) proporciona

$$\left(\frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - \sqrt{1 + y'^2} \right) (y_0 - y)^{-1/2} = -(1 + y'^2)^{-1/2} (y_0 - y)^{-1/2} = \text{const.}$$

Elevando al cuadrado se obtiene

$$y' = \pm \sqrt{\frac{2k^2}{y_0 - y} - 1} = \pm \sqrt{\frac{2k^2 - y_0 + y}{y_0 - y}},$$

¹Stricto sensu, sólo hemos probado que la línea recta es un *extremal* del funcional longitud.

y por tanto

$$x - x_0 = \pm \int \sqrt{\frac{y_0 - y}{2k^2 - y_0 + y}} dy,$$

con x_0 constante. Efectuando el cambio de variable

$$y_0 - y = 2k^2 \sin^2 \theta$$

se obtiene

$$x - x_0 = \mp 4k^2 \int \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{\cos \theta} d\theta = \mp 4k^2 \int \sin^2 \theta d\theta = \mp 2k^2 \int (1 - \cos 2\theta) d\theta = \mp k^2 (2\theta - \sin 2\theta).$$

Las ecuaciones paramétricas de la curva buscada son por tanto

$$x = x_0 \mp k^2 (2\theta - \sin 2\theta), \quad y = y_0 - 2k^2 \sin^2 \theta = y_0 - k^2 (1 - \cos 2\theta),$$

Estas son las ecuaciones de una *cicloide* descrita por una circunferencia de radio k , donde las constantes x_0 y k deben de nuevo determinarse imponiendo que se cumplan las condiciones (3.2).

Ejemplo 3.5. La ecuación de Euler–Lagrange para el funcional (3.4) se escribe

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{n(x, y) y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) - \sqrt{1 + y'^2} \frac{\partial n(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Esta ecuación se puede expresar en una forma más compacta teniendo en cuenta que

$$\frac{d}{ds} = \left(\frac{ds}{dx} \right)^{-1} \frac{d}{dx} = (1 + y'^2)^{-1/2} \frac{d}{dx},$$

donde s es la longitud de arco a lo largo de la trayectoria del rayo luminoso. De esta forma obtenemos la ecuación

$$\frac{d}{ds} \left(n(x, y) \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial n(x, y)}{\partial y}.$$

En particular, si el índice de refracción no depende de la coordenada y la ecuación anterior proporciona

$$n(x) \frac{dy}{ds} = k \implies \frac{n^2(x) y'^2}{1 + y'^2} = k^2 \implies y' = \pm \frac{k}{\sqrt{n^2(x) - k^2}}.$$

Por tanto en este caso la ecuación de la trayectoria es

$$y = y_0 \pm k \int \frac{dx}{\sqrt{n^2(x) - k^2}}.$$

En particular, si

$$n(x) = \frac{n_0}{x} \quad (n_0 > 0, \quad x > 0)$$

entonces

$$y - y_0 = \pm k \int \frac{x}{\sqrt{n_0^2 - k^2 x^2}} dx = \mp \frac{1}{k} \sqrt{n_0^2 - k^2 x^2} \implies x^2 + (y - y_0)^2 = \frac{n_0^2}{k^2}.$$

Por tanto las trayectorias de los rayos de luz son en este caso arcos de *circunferencia* con centro en el eje y . $\square$

Estudiaremos a continuación una versión más general del problema fundamental del cálculo de variaciones, en que el funcional F depende de n funciones $y_1, \dots, y_n$ de una variable real x . Equivalentemente (y más ventajosamente desde el punto de vista notacional), F depende de una única función vectorial $\mathbf{y} \equiv (y_1, \dots, y_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Más precisamente, consideremos el funcional

$$F[\mathbf{y}] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x)) dx \quad (3.12)$$

cuyo dominio son las funciones $\mathbf{y} : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^2 en el intervalo $[x_1, x_2]$ que satisfacen las condiciones análogas a (3.2):

$$\mathbf{y}(x_1) = \mathbf{y}_1, \quad \mathbf{y}(x_2) = \mathbf{y}_2, \quad (3.13)$$

para ciertos vectores fijos $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^n$.

Al igual que antes, para determinar los extremos de dicho funcional efectuamos una variación

$$\mathbf{y}_\varepsilon(x) = \mathbf{y}(x) + \varepsilon \boldsymbol{\eta}(x)$$

alrededor de un extremo $\mathbf{y}(x)$, donde la función vectorial $\boldsymbol{\eta} \equiv (\eta_1, \dots, \eta_n)$ ha de satisfacer

$$\boldsymbol{\eta}(x_1) = \boldsymbol{\eta}(x_2) = 0 \quad (3.14)$$

para que $\mathbf{y}_\varepsilon$ cumpla las condiciones (3.13) para todo ε . Restringiendo el funcional F a la variación $\mathbf{y}_\varepsilon$ obtenemos, como antes, la función de una variable

$$g(\varepsilon) \equiv F[\mathbf{y}_\varepsilon] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \mathbf{y}_\varepsilon(x), \mathbf{y}'_\varepsilon(x)) dx,$$

cuya derivada en $\varepsilon = 0$ debe anularse. Calculando dicha derivada e integrando por partes teniendo en cuenta las condiciones (3.14) se obtiene fácilmente la expresión

$$g'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial y_i}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x)) - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x)) \right] \eta_i(x) dx. \quad (3.15)$$

Como esta expresión debe anularse cualesquiera que sean las funciones η_i que cumplan las condiciones (3.14), concluimos que los extremos del funcional (3.12) deben satisfacer las n **ecuaciones de Euler–Lagrange**

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.16)$$

De nuevo, dichas ecuaciones son sólo condiciones *necesarias* para que la función $\mathbf{y}(x)$ sea un extremo del funcional F . Por este motivo a las soluciones de (3.16), que son los *puntos críticos* del funcional (3.12), se les denomina de nuevo **extremales** de dicho funcional.

- Desarrollando las ecuaciones (3.16) se obtiene

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial y'_i \partial y'_j} y''_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y'_i} y'_j + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Por tanto, si el *hessiano* de la función f respecto de las variables y'_i no se anula idénticamente, es decir si

$$\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'_i \partial y'_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0,$$

las ecuaciones de Euler–Lagrange (3.16) son un *sistema de n ecuaciones de 2º orden en las n funciones y_i ($i = 1, \dots, n$)*, al que deben añadirse las $2n$ condiciones de contorno (3.13).

- ¿Qué ocurre si f no depende de la variable independiente x ? Multiplicando el miembro izquierdo de la ec. de Euler–Lagrange (3.16) por y'_i y sumando en i se obtiene

$$\sum_{i=1}^n y'_i \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} - \sum_{i=1}^n y'_i \frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^n y'_i \frac{\partial f}{\partial y'_i} - f \right) + \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Por tanto, si f no depende explícitamente de x se conserva la función

$$h \equiv \sum_{i=1}^n y'_i \frac{\partial f}{\partial y'_i} - f.$$

También es evidente que si f es independiente de la variable y_i se conserva la derivada de f respecto de y'_i :

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial y'_i} = \text{const.}$$

- Si llamamos

$$\delta \mathbf{y}(x) = \varepsilon \boldsymbol{\eta}(x)$$

a la **variación** de la función $\mathbf{y}(x)$ (donde la función vectorial $\boldsymbol{\eta}$ cumple las condiciones (3.14)) entonces

$$\delta F[\mathbf{y}] \equiv \varepsilon \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} F[\mathbf{y}_\varepsilon] = g'(0)\varepsilon$$

es la variación del funcional F a primer orden en ε . De la ec. (3.15) se deduce que podemos escribir dicha variación en la forma compacta

$$\delta F[\mathbf{y}] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta f}{\delta \mathbf{y}}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x)) \cdot \delta \mathbf{y}(x) dx, \quad (3.17)$$

siendo por definición

$$\frac{\delta f}{\delta \mathbf{y}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}'}. \quad (3.18)$$

La función (vectorial, de n componentes) $\frac{\delta f}{\delta \mathbf{y}}(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}')$ se denomina **derivada variacional** de la densidad f . En particular, con esta notación las ecuaciones de Euler–Lagrange (3.16) del funcional (3.12) expresan simplemente la anulación de la derivada variacional de su densidad f :

$$\delta F[\mathbf{y}] = 0 \iff \frac{\delta f}{\delta \mathbf{y}} = 0. \quad (3.19)$$

- Consideremos dos funcionales de la forma (3.12) con densidades f_1 y f_2 que difieren en la **derivada total** respecto de x de una función $g(x, \mathbf{y})$:

$$f_2(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') = f_1(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') + \frac{d}{dx} g(x, \mathbf{y}), \quad \frac{d}{dx} g(x, \mathbf{y}) \equiv \frac{\partial g(x, \mathbf{y})}{\partial x} + \frac{\partial g(x, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{y}'.$$

Entonces

$$F_2[\mathbf{y}] - F_1[\mathbf{y}] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dg(x, \mathbf{y})}{dx} dx = g(x_1, \mathbf{y}(x_1)) - g(x_2, \mathbf{y}(x_2)) = g(x_1, \mathbf{y}_1) - g(x_2, \mathbf{y}_2),$$

en virtud de las condiciones (3.13) que deben satisfacer las funciones $\mathbf{y}(x)$. Por tanto los funcionales F_1 y F_2 difieren en una constante, y en consecuencia tienen los mismos extremales. Por consiguiente

las ecuaciones de Euler–Lagrange de las densidades f_1 y f_2 han de ser *equivalentes*, ya que tienen las mismas soluciones. De hecho, dichas ecuaciones son *idénticas*, ya que

$$\frac{\partial}{\partial y_i'} \frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial y_i} \implies \frac{\delta}{\delta y_i} \frac{dg}{dx} = \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{dg}{dx} - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y_i'} \left(\frac{dg}{dx} \right) = \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{dg}{dx} - \frac{d}{dx} \frac{\partial g}{\partial y_i} = 0,$$

y por tanto (al ser la derivada variacional obviamente *lineal*)

$$\frac{\delta f_2}{\delta \mathbf{y}} = \frac{\delta f_1}{\delta \mathbf{y}} + \frac{\delta}{\delta \mathbf{y}} \frac{dg}{dx} = \frac{\delta f_1}{\delta \mathbf{y}}.$$

En otras palabras, *dos densidades que difieren en una derivada total dan lugar a las mismas ecuaciones de Euler–Lagrange*.

Ejemplo 3.6. Hallemos la ecuación de las trayectorias seguidas por la luz en un medio óptico de índice de refracción $n(\mathbf{r})$.

Según el principio de Fermat, la trayectoria del rayo luminoso que une dos puntos $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathbb{R}^3$ ha de minimizar el tiempo empleado por la luz en recorrer la distancia entre ambos puntos. Si u es un parámetro cualquiera a lo largo de dicha trayectoria y $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ se tiene

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{\mathbf{r}'^2(u)},$$

donde la prima indica derivada respecto de u . Por tanto la trayectoria buscada ha de minimizar el funcional longitud óptica (proporcional al tiempo de recorrido)

$$\ell[\mathbf{r}] = \int_{u_1}^{u_2} n(\mathbf{r}(u)) \sqrt{\mathbf{r}'^2(u)} du$$

con las condiciones

$$\mathbf{r}(u_1) = \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}(u_2) = \mathbf{r}_2;$$

nótese que en este ejemplo u juega el papel de x y $\mathbf{r}$ el de $\mathbf{y}$. Las ecuaciones de Euler–Lagrange de este funcional son por tanto

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\partial}{\partial x_i'} \left(n \sqrt{\mathbf{r}'^2} \right) \right) - \sqrt{\mathbf{r}'^2} \frac{\partial n}{\partial x_i} = \frac{d}{du} \left(\frac{n x_i'}{\sqrt{\mathbf{r}'^2}} \right) - \sqrt{\mathbf{r}'^2} \frac{\partial n}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}'^2}} \frac{d}{du} = \frac{d}{ds},$$

las ecuaciones anteriores se pueden escribir en la forma más geométrica siguiente:

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}.$$

Por ejemplo, si el índice de refracción depende sólo de r (es decir, si el medio óptico es *esféricamente simétrico*) entonces

$$\frac{d}{ds} \left(\mathbf{r} \times n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \mathbf{r} \times \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} = n'(r) \mathbf{r} \times \frac{\mathbf{r}}{r} = 0,$$

y por tanto *la trayectoria del rayo luminoso está contenida en un plano que pasa por el origen de coordenadas*.

3.2 Principio de Hamilton en sistemas sin ligaduras

3.2.1 Principio de Hamilton para una partícula

Consideremos, en primer lugar, el movimiento de una partícula de masa m sometida a una fuerza *irrotacional*

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}) = -\frac{\partial V(t, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}. \quad (3.20)$$

Las ecuaciones de Newton son en este caso

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.21)$$

donde de nuevo hemos denotado por x_i a la i -ésima componente del vector de posición. Nos preguntamos si las ecs. (3.21) son las ecuaciones de Euler-Lagrange de algún funcional

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) dt.$$

(Nótese, de nuevo, que en este caso t juega el papel de x , $\mathbf{r}$ el de $\mathbf{y}$ y L el de f .) Aunque es fácil responder afirmativamente a esta pregunta simplemente por inspección, se puede proceder del siguiente modo. Escribiendo las ecuaciones (3.21) en la forma

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}_i) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

vemos que basta hallar una función $L(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ que verifique las ecuaciones

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}; \quad i = 1, 2, 3.$$

Integrando primero las tres ecuaciones para $\frac{\partial L}{\partial x_i}$ se obtiene

$$L = -V + g(t, \dot{\mathbf{r}}),$$

y sustituyendo a continuación en las restantes ecuaciones queda

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

lo que determina la función g :

$$g = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + h(t).$$

Por tanto la función más sencilla con la propiedad buscada es

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - V(t, \mathbf{r}) \equiv T - V(t, \mathbf{r}). \quad (3.22)$$

La función L recibe el nombre de **lagrangiano** del sistema. Hemos probado por tanto el llamado **principio de Hamilton** en su versión más sencilla:

*La trayectoria seguida por una partícula de masa m sometida a la fuerza (3.20) que se desplaza de un punto $\mathbf{r}_1$ en el instante t_1 a otro punto $\mathbf{r}_2$ en el instante t_2 es un **extremal** del funcional*

$$S[\mathbf{r}] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) dt \quad (3.23)$$

con las condiciones

$$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}_2.$$

El funcional (3.23) recibe el nombre de **acción**. Nótese que la acción tiene dimensiones de energía $\times$ tiempo, ya que L (al igual que T o V) tiene dimensiones de energía.

3.2.2 Principio de Hamilton para un sistema de partículas

El principio de Hamilton se extiende sin dificultad a un sistema de N partículas, siempre que la fuerza total $\mathbf{F}_i$ que actúe sobre cada partícula sea irrotacional:

$$\mathbf{F}_i(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = -\frac{\partial V(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.24)$$

En otras palabras, es fácil comprobar que las ecuaciones de Newton del sistema:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\frac{\partial V(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad i = 1, \dots, N,$$

son las ecuaciones de Euler–Lagrange de la acción

$$S[\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t), \dot{\mathbf{r}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{r}}_N(t)) dt, \quad (3.25)$$

siendo en este caso el lagrangiano

$$L(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) = T - V(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (3.26)$$

En efecto, agrupando las tres ecuaciones de Euler–Lagrange correspondientes a la coordenada $\mathbf{r}_i$ se obtiene

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i) + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i,$$

que es la ecuación del movimiento de la i -ésima partícula.

Se verifica por tanto la siguiente versión más general del principio de Hamilton:

La trayectoria seguida por un sistema de N partículas sometidas a la fuerza (3.24) es un extremal de la acción (3.25) con las condiciones

$$\mathbf{r}_1(t_1) = \mathbf{r}_{1,1}, \dots, \mathbf{r}_N(t_1) = \mathbf{r}_{N,1}, \quad \mathbf{r}_1(t_2) = \mathbf{r}_{1,2}, \dots, \mathbf{r}_N(t_2) = \mathbf{r}_{N,2}.$$

- El principio variacional de Hamilton se suele denominar también **principio de mínima acción**, ya que en la práctica totalidad de los casos de interés las trayectorias de un sistema mecánico resultan ser *mínimos* de la acción (al menos *localmente*).

- Del principio de Hamilton y de las leyes de conservación de las ecuaciones de Euler–Lagrange discutidas en la subsección anterior se deduce que si el lagrangiano (3.26) no depende del tiempo se conserva la función

$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - L = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - L = 2T - (T - V) = T + V,$$

que no es otra cosa que la *energía* del sistema. Este resultado concuerda con el obtenido en la Sección 1.5.2, ya que L es independiente del tiempo si y sólo si el potencial V no depende de t , en cuyo caso la fuerza (3.24) que actúa sobre el sistema es no sólo irrotacional sino, de hecho, *conservativa*.

- Del mismo modo, si el lagrangiano L no depende (por ejemplo) de la coordenada x de la partícula i , es decir si $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$, entonces se conserva $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \text{const.}$$

Nótese que este resultado no es más que la ley de conservación de la componente x del momento de la partícula i , ya que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i.$$

Evidentemente, el mismo resultado es válido para las coordenadas y_i o z_i .

3.2.3 Covariancia de la formulación lagrangiana

Una de las grandes ventajas de la formulación lagrangiana de la Mecánica es su **covariancia** bajo cambios de coordenadas. Más concretamente, consideremos de nuevo el movimiento de una partícula de masa m sometida a una fuerza irrotacional, cuyas ecuaciones del movimiento son los extremales de la acción (3.23). Si expresamos el lagrangiano L en un sistema de *coordenadas curvilíneas* $(q_1, q_2, q_3) \equiv \mathbf{q}$, es decir si

$$L(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = L_q(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

entonces la *acción* de una trayectoria cualquiera $\mathbf{r}(t)$ de la partícula, que en las coordenadas q_i estará dada por la función $\mathbf{q}(t)$, se puede expresar en la forma

$$S[\mathbf{r}] = \int_{t_1}^{t_2} L_q(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt,$$

que a partir de ahora escribiremos abreviadamente como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L_q(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt.$$

Por el principio de Hamilton, las ecuaciones de la trayectoria en el sistema de coordenadas curvilíneas (q_1, q_2, q_3) son las ecuaciones de Euler–Lagrange correspondientes al lagrangiano L_q , es decir

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_q}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L_q}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.27)$$

Ejemplo 3.7. Ecuaciones del movimiento en coordenadas esféricas.

La energía cinética de una partícula de masa m en coordenadas esféricas (r, θ, φ) es

$$\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$$

(cf. la ec. (1.4)). Por tanto el lagrangiano en dichas coordenadas (que llamaremos por sencillez L , en lugar de L_q) está dado por

$$L = T - V(t, r, \theta, \varphi) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - V(t, r, \theta, \varphi).$$

Las ecuaciones del movimiento de la partícula en coordenadas esféricas son por consiguiente

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - m r (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + \frac{\partial V}{\partial r} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = m \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - m r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

Si el potencial V no depende de la coordenada azimutal φ entonces se conserva

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi},$$

que es la componente z del momento angular. En efecto,

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= r \mathbf{e}_r \times m(\dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi) = m r^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_\varphi - m r^2 \sin \theta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{e}_z = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta \\ \implies L_z &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_z = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Si, además, el potencial tampoco depende de θ , entonces la fuerza es *central* (aunque no necesariamente conservativa), y por lo tanto el movimiento tiene lugar en un plano que pasa por el origen. Para deducir este resultado a partir de las ecuaciones de Euler–Lagrange (3.28), supongamos, por sencillez, que el momento angular de la partícula no es nulo, y tomemos el eje z de modo que para $t = 0$ los vectores $\mathbf{r}$ y $\dot{\mathbf{r}}$ sean perpendiculares a dicho eje. Entonces $\theta(0) = \pi/2$, y

$$z = r \cos \theta \implies \dot{z} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \implies \dot{z}(0) = 0 = -r(0) \dot{\theta}(0) \implies \dot{\theta}(0) = 0.$$

Por tanto

$$\theta(0) = \pi/2, \quad \dot{\theta}(0) = 0 \implies \theta(t) = \frac{\pi}{2}, \quad \forall t,$$

lo que demuestra que *el movimiento tiene lugar en el plano* $\theta = \pi/2$. En efecto, sustituyendo $\theta = \pi/2$ en las ecuaciones del movimiento quedan sendas ecuaciones en r y φ únicamente:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V(t, r)}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0. \quad (3.29)$$

Por el teorema de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, la solución de las ecuaciones del movimiento que satisface las condiciones iniciales

$$\theta(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\theta}(0) = 0,$$

junto con

$$r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = \dot{r}_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0 \quad (3.30)$$

es $\theta = \pi/2$, junto con la solución $(r(t), \varphi(t))$ de (3.29)–(3.30). Nótese también que utilizando la conservación de la componente z del momento angular las ecuaciones (3.29) se reducen a

$$mr^2\dot{\varphi} = \text{const.} \equiv \ell, \quad m\ddot{r} - \frac{\ell^2}{mr^3} + \frac{\partial V(t, r)}{\partial r} = 0.$$

Por último, si el potencial V no depende de t , es decir si V es función sólo de (r, θ, φ) , se conserva la función

$$H = \dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - L = 2T - (T - V) = T + V,$$

que no es otra cosa que la *energía* del sistema.

Ejercicio. Comparar las ecuaciones (3.28) con la 2ª ley de Newton escrita en coordenadas esféricas (cf. las ecs. (1.5)).

Solución. Basta tener en cuenta que

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi.$$

3.2.4 Lagrangiano de una partícula cargada en un campo electromagnético

Deduciremos a continuación la formulación lagrangiana de las ecuaciones del movimiento de una partícula de masa m y carga e en un campo electromagnético de potenciales $\Phi(t, \mathbf{r})$ y $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$. Como vimos en el Capítulo 1, las ecuaciones del movimiento son

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + e \dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A}).$$

Como²

$$-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) - \frac{d\mathbf{A}}{dt},$$

podemos reescribir las ecuaciones del movimiento en la forma

$$\frac{d}{dt} (m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A}) + e \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\Phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) = 0$$

Estas ecuaciones son las ecuaciones de Euler–Lagrange de un lagrangiano $L(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ si

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A}, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = e \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - \Phi).$$

Integrando la segunda ecuación obtenemos

$$L = e(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - \Phi) + g(t, \dot{\mathbf{r}}),$$

y sustituyendo en la primera queda

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} \implies g = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2,$$

a menos de una función arbitraria de t . Hemos obtenido por tanto el siguiente resultado:

Las ecuaciones del movimiento de una partícula de masa m y carga e en un campo electromagnético de potenciales $\Phi(t, \mathbf{r})$ y $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ son las ecuaciones de Euler–Lagrange del lagrangiano

$$L(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - e\Phi(t, \mathbf{r}) + e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{r}). \quad (3.31)$$

Nótese que podemos escribir el lagrangiano anterior como

$$L = T - U,$$

donde el potencial U está dado por

$$U(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = e[\Phi(t, \mathbf{r}) - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{r})] \quad (3.32)$$

y por tanto *depende de la velocidad*.

3.3 Sistemas con ligaduras

3.3.1 Movimiento de una partícula sobre una superficie

El caso más sencillo de sistema mecánico con ligaduras es el de una partícula de masa m sometida a una fuerza externa irrotacional con potencial $V(t, \mathbf{r})$ cuyas coordenadas $\mathbf{r}$ satisfacen en cada instante la **ligadura** (restricción)

$$\phi(t, \mathbf{r}) = 0. \quad (3.33)$$

En particular, si ϕ no depende de t entonces la partícula está obligada a moverse en la superficie de ecuación $\phi(\mathbf{r}) = 0$. A pesar de que la fuerza externa es irrotacional, es preciso tener en cuenta la **fuerza de reacción** $\mathbf{F}^{(\ell)}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ que ejerce la superficie de ligadura (3.33) en cada instante, por lo que las ecuaciones de Newton son en este caso

$$m\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\partial V(t, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{F}^{(\ell)}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \quad (3.34)$$

²Por definición, $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$ es el *vector* definido por

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \dot{x}_i.$$

¿Son estas ecuaciones del movimiento las ecuaciones de Euler–Lagrange de algún funcional?

Para responder a esta pregunta, introduzcamos dos *coordenadas independientes* $(q_1, q_2) = \mathbf{q}$ en la superficie (3.33). Por ejemplo, si

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \mathbf{r}^2 - a(t)^2, \quad (3.35)$$

que es la ecuación de una esfera de centro el origen y radio variable $a(t) \geq 0$, podemos utilizar las coordenadas esféricas $q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$. De esta forma se puede especificar la posición de la partícula en cada instante t mediante el valor $\mathbf{q}(t)$ que toman las **coordenadas generalizadas** q_i en dicho instante. Indicaremos (con un ligero abuso de notación) la relación entre las coordenadas generalizadas q_i y las coordenadas cartesianas $\mathbf{r}$ en la forma general

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t, \mathbf{q}); \quad (3.36)$$

por ejemplo, en el caso de la ligadura (3.35) la función $\mathbf{r}(t, \mathbf{q}) \equiv \mathbf{r}(t, \theta, \varphi)$ está dada por

$$\mathbf{r}(t, \theta, \varphi) = a(t)(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

Nótese que las tres coordenadas cartesianas x_i *no* son independientes, puesto que están ligadas por la relación (3.33), mientras que las dos coordenadas generalizadas q_i sí los son. Vamos a suponer que las ligaduras son **ideales**, es decir que *la fuerza de ligadura en cada instante t es perpendicular a la correspondiente superficie instantánea de ligadura* $\phi(t, \mathbf{r}) = 0$. Para formular analíticamente esta condición, nótese que los dos vectores

$$\frac{\partial \mathbf{r}(t, \mathbf{q})}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2,$$

son *tangentes a la superficie de ligadura* en el punto de coordenadas $\mathbf{q}$ en cada instante t , y de hecho forman una *base* de dicho plano tangente. Por tanto *la ligadura es ideal si la fuerza de ligadura verifica la condición*

$$\mathbf{F}^{(\ell)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.37)$$

Proyectando la ecuación del movimiento (3.34) sobre el plano tangente a la superficie de ligadura se obtienen entonces las dos ecuaciones

$$m\ddot{\mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

o equivalentemente

$$m\ddot{\mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.38)$$

Derivando la relación (3.36) respecto de t , q_i y $\dot{q}_i$ se obtienen las identidades³

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \implies \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial q_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad (3.39)$$

y por tanto

$$\ddot{\mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) - \dot{\mathbf{r}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{\mathbf{r}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 \right). \quad (3.40)$$

Por consiguiente las ecuaciones (3.38) se pueden escribir en la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - V \right) = 0, \quad i = 1, 2,$$

³Utilizamos de nuevo la notación

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \equiv \sum_{j=1,2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \equiv \sum_{j=1,2} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j.$$

o bien, teniendo en cuenta que V no depende de $\dot{\mathbf{q}}$,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (T - V) - \frac{\partial}{\partial q_i} (T - V) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.41)$$

Estas son las dos ecuaciones de Euler–Lagrange del lagrangiano $L = T - V$, donde *se sobreentiende que la energía cinética T y la potencial V han de expresarse en función de $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ utilizando la relación (3.36) y su derivada respecto de t (cf. la ec. (3.39))*. El cálculo anterior demuestra por tanto el siguiente resultado fundamental:

El principio de Hamilton sigue siendo válido en este caso si la ligadura es ideal —i.e., si la fuerza de ligadura $\mathbf{F}^{(\ell)}$ satisface la condición (3.37)— y el lagrangiano $L = T - V$ se expresa en función de las coordenadas generalizadas q_i y sus derivadas. En otras palabras:

La trayectoria $\mathbf{q}(t)$ seguida por la partícula entre dos puntos de coordenadas generalizadas $\mathbf{q}_1$ (en el instante t_1) y $\mathbf{q}_2$ (en el instante t_2) es un extremal de la acción

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt$$

sujeta a las condiciones $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}_2$, donde el lagrangiano L está dado por

$$L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(t, \mathbf{r}(t, \mathbf{q})) = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \mathbf{r}(t, \mathbf{q})}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}(t, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right)^2 - V(t, \mathbf{r}(t, \mathbf{q})).$$

Nota. A partir de ahora, escribiremos de forma abreviada (con un ligero abuso de notación) $V(t, \mathbf{q})$ en lugar de $V(t, \mathbf{r}(t, \mathbf{q}))$.

- Si la condición de ligadura (3.33) es *independiente de t* —que es el caso más común en la práctica—, la fuerza de ligadura ha de ser *perpendicular* a la superficie de ligadura

$$\phi(\mathbf{r}) = 0$$

en todo punto de la misma. Por otra parte, como las trayectorias de la partícula están contenidas en la superficie de ligadura su velocidad $\dot{\mathbf{r}}$ es *tangente* a dicha superficie en cada instante. Por tanto la condición de ligadura ideal implica en este caso que⁴

$$\mathbf{F}^{(\ell)}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = 0, \quad \forall t, \quad (3.42)$$

y en consecuencia *el trabajo W_{12} realizado por la fuerza de ligadura cuando la partícula se desplaza entre dos puntos cualesquiera $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ y $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$ es nulo:*

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}^{(\ell)}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = 0. \quad (3.43)$$

Recíprocamente, si la fuerza de ligadura cumple esta última condición para *toda* trayectoria $\mathbf{r}(t)$ entonces se verifica la ec. (3.42), lo que implica que la fuerza de ligadura es perpendicular a la superficie en cada punto (ya que cualquier vector tangente a dicha superficie puede considerarse como el vector velocidad de una trayectoria de la partícula). En resumen, hemos demostrado el siguiente resultado, que es un caso particular del llamado **principio de los trabajos virtuales**:

Cuando la condición de ligadura es independiente del tiempo, la ligadura es ideal —y, por tanto, se verifica el principio de Hamilton— si y sólo si la fuerza de ligadura no realiza trabajo a lo largo de cualquier trayectoria de la partícula.

- El principio de los trabajos virtuales se puede generalizar al caso en que la ligadura depende explícitamente de t sustituyendo en su enunciado las trayectorias de la partícula por los llamados *desplazamientos virtuales*, que son por definición curvas enteramente contenidas en la superficie de ligadura en un instante fijo t cualquiera.

⁴Si la ligadura es independiente del tiempo, la fuerza de ligadura no puede depender *explícitamente* de t , y es por tanto función únicamente de $\mathbf{r}$ y $\dot{\mathbf{r}}$.

3.3.2 Sistema de N partículas con ligaduras

Consideremos a continuación el caso más general de un sistema de N partículas sobre las que actúa la fuerza irrotacional (3.24), sujetas además a las $l < 3N$ ligaduras independientes⁵

$$\phi_i(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = 0, \quad i = 1, \dots, l. \quad (3.44)$$

Este tipo de ligaduras, en las que no intervienen las velocidades de las partículas, se denominan *holónomas*. El vector

$$\mathbf{x} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$$

que representa el estado del sistema ha de moverse por tanto en cada instante t sobre la superficie de $\mathbb{R}^{3N}$ —*variedad*, en lenguaje más matemático— especificada por las ecuaciones (3.44). Como dicha variedad tiene dimensión $3N - l \equiv n$, se pueden introducir en ella n coordenadas independientes $(q_1, \dots, q_n) \equiv \mathbf{q}$, en términos de las cuales las coordenadas cartesianas $\mathbf{x}$ se expresarán mediante una cierta función $\mathbf{x}(t, \mathbf{q})$:

$$\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(t, \mathbf{q}).$$

En otras palabras, *el estado del sistema en cada instante está unívocamente determinado por el valor de las n coordenadas q_i en dicho instante, que reciben el nombre de **coordenadas generalizadas***. Se dice entonces que el sistema posee n **grados de libertad**. En particular, la trayectoria del sistema queda especificada por una curva $\mathbf{q}(t)$ en el espacio $\mathbb{R}^n$ en que varían las coordenadas generalizadas q_i , llamado **espacio de configuración** del sistema. Es importante notar que, mientras que las coordenadas *cartesianas* $\mathbf{x}$ de las partículas no son independientes (ya que están ligadas por las relaciones (3.44)), las coordenadas *generalizadas* $\mathbf{q}$ sí lo son.

De nuevo, *supondremos que las ligaduras son **ideales***, es decir que la fuerza de ligadura que actúa sobre las partículas

$$\mathbf{F}^{(\ell)}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \equiv (\mathbf{F}_1^{(\ell)}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \dots, \mathbf{F}_N^{(\ell)}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})) \in \mathbb{R}^{3N}$$

es *ortogonal a la variedad de ligadura en cada instante*. Matemáticamente, al ser los n vectores

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t, \mathbf{q})}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

una base del espacio tangente a la variedad de ligadura en cada punto, la condición anterior se expresa mediante las relaciones

$$\mathbf{F}^{(\ell)} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.45)$$

Como en el caso de una partícula visto en la subsección anterior, cuando las ligaduras (3.44) son *independientes del tiempo* la condición anterior es equivalente al *principio de los trabajos virtuales*, según el cual *las fuerzas de ligadura no realizan trabajo a lo largo de cualquier trayectoria del sistema*, es decir

$$\mathbf{F}^{(\ell)}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \cdot \dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(\ell)}(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = 0.$$

En estas condiciones —es decir, si las ligaduras son *ideales* y las restantes fuerzas que actúan sobre el sistema son irrotacionales—, procediendo como en la subsección anterior se puede demostrar que *sigue siendo válido el principio de Hamilton*:

La trayectoria $\mathbf{q}(t)$ de un sistema de partículas sujeto a ligaduras holónomas ideales entre dos estados $\mathbf{q}_1$ (en $t = t_1$) y $\mathbf{q}_2$ (en $t = t_2$) es un extremal de la acción

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt$$

con las condiciones $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}_2$, donde el lagrangiano $L = T - V$ ha de expresarse en términos de las coordenadas generalizadas $\mathbf{q}$ y sus derivadas.

⁵Matemáticamente, la independencia de las ligaduras (3.44) es equivalente a la condición de que el rango de la matriz jacobiana de la función $\phi \equiv (\phi_1, \dots, \phi_l)$ respecto de las $3N$ variables $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ sea igual a l en todo punto.

Ejercicio. Demostrar en detalle el resultado anterior.

Demostración. Las ecuaciones del movimiento del sistema se pueden escribir en forma vectorial como sigue:

$$(m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1, \dots, m_N \ddot{\mathbf{r}}_N) + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{F}^{(\ell)}.$$

Proyectando en la dirección del vector $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}$ y teniendo en cuenta (3.45) se obtiene

$$(m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1, \dots, m_N \ddot{\mathbf{r}}_N) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^N m_j \ddot{\mathbf{r}}_j \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

De las ecuaciones (3.40) (con $\mathbf{r}_j$ en lugar de $\mathbf{r}$) se sigue entonces que

$$\sum_{j=1}^N m_j \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_j^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_j^2 \right) \right] + \frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} (T - V) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Como V no depende de $\dot{\mathbf{q}}$, las ecuaciones anteriores se pueden escribir en la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Estas son, efectivamente, las ecuaciones de Euler–Lagrange del lagrangiano $L = T - V$. $\square$

Por lo que acabamos de ver, para hallar las ecuaciones del movimiento de un sistema mecánico de N partículas sujeto a l ligaduras holónomas ideales (siendo las fuerzas restantes irrotacionales) basta proceder de la forma siguiente:

1. Introducir $n = 3N - l$ coordenadas generalizadas independientes $(q_1, \dots, q_n) \equiv \mathbf{q}$ en la variedad de las ligaduras (3.44).
2. Expresar la energía cinética

$$T = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$$

y la potencial V en términos de $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, obteniendo así dos funciones $T(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $V(t, \mathbf{q})$.

3. Las ecuaciones del movimiento del sistema en las coordenadas generalizadas q_i son las ecuaciones de Euler–Lagrange del lagrangiano

$$L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(t, \mathbf{q}),$$

es decir

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

• Una de las ventajas de la formulación lagrangiana en sistemas con ligaduras es que, como acabamos de ver, *no es necesario conocer las fuerzas de ligadura para hallar las ecuaciones del movimiento*. De hecho, *una vez halladas estas ecuaciones* las fuerzas de ligadura pueden calcularse mediante la fórmula

$$\mathbf{F}_i^{(\ell)} = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i},$$

que no es otra cosa que la segunda ley de Newton aplicada a la partícula i .

3.4 Leyes de conservación

Consideremos a continuación un sistema mecánico de lagrangiano $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, siendo $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ n coordenadas generalizadas. Llamaremos **momento canónico conjugado** de la coordenada q_i a la derivada parcial de L respecto de la correspondiente **velocidad generalizada** $\dot{q}_i$:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (3.46)$$

La ecuación de Euler–Lagrange de la coordenada q_i es entonces

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (3.47)$$

Diremos que la coordenada q_i es **cíclica** (o **ignorable**) si L no depende de dicha coordenada, es decir si

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

De la ec. (3.47) se sigue entonces la siguiente ley de conservación: *si la coordenada q_i es cíclica, se conserva el momento canónico conjugado correspondiente a dicha coordenada.*

Por otra parte, si L no depende de t hemos visto en la Sección 3.1.2 que se conserva la función

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L, \quad (3.48)$$

que utilizando la definición de los momentos conjugados p_i podemos escribir como

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \equiv H. \quad (3.49)$$

La función H recibe el nombre de **hamiltoniano** del sistema. En muchos sistemas mecánicos la energía cinética es una *forma cuadrática* en las velocidades generalizadas, es decir es de la forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, \mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad \text{con } a_{ij} = a_{ji},$$

y $L = T - V(t, \mathbf{q})$. Un sistema mecánico de este tipo se denomina **natural**. La mayor parte de los sistemas vistos hasta ahora —con la importante excepción del lagrangiano de una partícula cargada en un campo electromagnético (3.31)— son naturales. En un sistema mecánico natural, los momentos generalizados están dados por

$$p_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t, \mathbf{q}) \dot{q}_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

y el hamiltoniano del sistema es simplemente

$$H = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, \mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j - L = 2T - (T - V) = T + V.$$

Por tanto *en un sistema mecánico natural, el hamiltoniano es igual a la energía del sistema*. En particular, en este tipo de sistemas la conservación de H —que ocurrirá si los coeficientes a_{ij} y V son independientes de t — no es otra cosa que la ley de conservación de la energía.

Ejemplo 3.8. Consideremos, en primer lugar, el lagrangiano de una partícula de masa m en coordenadas cartesianas $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$, dado por

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - V(t, \mathbf{r}).$$

En este caso

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i,$$

y por tanto el momento canónico conjugado de la coordenada x_i es la componente i del momento lineal.

Consideremos a continuación el lagrangiano de una partícula de masa m en coordenadas esféricas (r, θ, φ) , dado por

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - V(t, r, \theta, \varphi), \quad (3.50)$$

para el cual

$$p_r = m \dot{r}, \quad p_\theta = m r^2 \dot{\theta}, \quad p_\varphi = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}. \quad (3.51)$$

En este caso la energía cinética (el término entre paréntesis) depende de r y de θ , por lo que p_r y p_θ no se conservan aunque V sea independiente de r o θ . Sin embargo, si V no depende de φ entonces L es independiente de dicha coordenada, y por tanto en este caso se conserva p_φ :

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \implies p_\varphi = \text{const.}$$

Como sabemos, p_φ es la componente z del momento angular de la partícula. Por otra parte, al ser la energía cinética cuadrática en las velocidades generalizadas el hamiltoniano del sistema coincide con la energía $T + V$, como vimos en el Ejemplo 3.7. Por tanto, si L no depende de t —o, lo que es lo mismo, si el potencial V es independiente del tiempo—, se conserva la energía.

Consideremos, por último, el lagrangiano (3.31) de una partícula de masa m y carga e que se mueve en el seno de un campo electromagnético de potenciales $\Phi(t, \mathbf{r})$ y $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$. El momento canónico conjugado correspondiente a la coordenada x_i es ahora

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i + e A_i(t, \mathbf{r}).$$

Nótese, por tanto, que en este caso *el momento canónico y el lineal son en general distintos*. En particular, si L no depende de la coordenada x_i , es decir si

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} = 0,$$

se conserva p_i pero no necesariamente $m \dot{x}_i$. El hamiltoniano del sistema está dado por

$$H = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{x}_i - L = (m \dot{\mathbf{r}} + e \mathbf{A}) \cdot \dot{\mathbf{r}} - L = m \dot{\mathbf{r}}^2 + e \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + e \Phi.$$

Por tanto en este caso H es la suma de la energía cinética y la electrostática de la partícula. Si L no depende de t , es decir si

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0,$$

entonces se conserva H . Aunque el sistema *no* es natural, podemos interpretar también en este caso H como la energía total. En efecto, si $\mathbf{A}$ no depende de t la fuerza eléctrica es *conservativa* (con potencial $e\Phi(\mathbf{r})$), y por tanto H es la suma de la energía cinética y la energía potencial de la fuerza eléctrica. Pero esta es la energía total de la partícula, ya que la fuerza magnética no realiza trabajo al ser siempre perpendicular a la velocidad de la partícula. $\square$

- Las leyes de conservación que hemos estudiado en esta sección son todas ellas un caso particular del llamado **teorema de Nöther**:

Supongamos que la acción de un sistema mecánico con lagrangiano $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es invariante bajo la familia a un parámetro de transformaciones

$$\tilde{t} = t + \varepsilon \delta t(t, \mathbf{q}) + O(\varepsilon^2), \quad \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \varepsilon \delta \mathbf{q}(t, \mathbf{q}) + O(\varepsilon^2),$$

es decir que

$$L\left(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}}\right) d\tilde{t} = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt.$$

Entonces se conserva la función

$$I(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{p} \delta \mathbf{q} - H \delta t.$$

donde $\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$.

Demostración. Escribiendo la condición de invariancia de la acción en la forma equivalente

$$L\left(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}}\right) \frac{d\tilde{t}}{dt} = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

derivando respecto de ε y haciendo $\varepsilon = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} L\left(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}}\right) + L \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{d\tilde{t}}{dt} \\ = \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}} + L \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{d\tilde{t}}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Por otra parte,

$$\frac{d\tilde{t}}{dt} = 1 + \varepsilon \frac{d}{dt} \delta t + O(\varepsilon^2) \implies \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{d}{dt} \delta t,$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}} &= \left(\frac{d\tilde{t}}{dt}\right)^{-1} \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} = \left(\frac{d\tilde{t}}{dt}\right)^{-1} \left(\dot{\mathbf{q}} + \varepsilon \frac{d}{dt} \delta \mathbf{q} + O(\varepsilon^2)\right) \\ &\implies \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{q} - \dot{\mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{q} - \dot{\mathbf{q}} \frac{d}{dt} \delta t. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ec. (3.52) y utilizando las ecuaciones de Euler–Lagrange se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \dot{\mathbf{p}} \delta \mathbf{q} + \mathbf{p} \frac{d}{dt} \delta \mathbf{q} - \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} \frac{d}{dt} \delta t + L \frac{d}{dt} \delta t \\ &= \frac{d}{dt} (\mathbf{p} \delta \mathbf{q} - H \delta t) - \left(\frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{d}{dt} (\mathbf{p} \dot{\mathbf{q}}) \right) \delta t \equiv \frac{d}{dt} (\mathbf{p} \delta \mathbf{q} - H \delta t) + \left(\frac{dH}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \right) \delta t. \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que el último término es nulo en virtud de las ecuaciones de Euler–Lagrange:

$$\frac{dH}{dt} = \dot{\mathbf{p}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{p} \ddot{\mathbf{q}} - \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{p} \ddot{\mathbf{q}} = \left(\dot{\mathbf{p}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

□

Ejemplo 3.9. Consideremos un sistema de N partículas sometidas a una fuerza irrotacional generada por un potencial $V(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ invariante bajo rotaciones alrededor de un eje $\mathbf{n}$. Si tomamos el eje z en la dirección del vector $\mathbf{n}$, el potencial V verifica

$$V(t, \tilde{\mathbf{r}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{r}}_N) = V(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N),$$

siendo

$$\tilde{\mathbf{r}}_i = R(\varepsilon)\mathbf{r}_i, \quad R(\varepsilon) \equiv \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon & 0 \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces el lagrangiano $L = T - V$ del sistema es invariante bajo la transformación

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{\mathbf{r}}_i = R(\varepsilon)\mathbf{r}_i; \quad 1 \leq i \leq N, \quad (3.53)$$

ya que la energía cinética es obviamente invariante bajo cualquier rotación. Como $\tilde{t} = t$, también la acción es invariante bajo la transformación (3.53) ¿Cuál es la cantidad conservada asociada a esta invariancia de la acción? Para responder a esta pregunta, desarrollamos (3.53) respecto de ε obteniendo

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i + \varepsilon A\mathbf{r}_i + O(\varepsilon^2); \quad 1 \leq i \leq N, \quad (3.54)$$

donde

$$A = R'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como

$$A\mathbf{r}_i = (-y_i, x_i, 0) \equiv \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_i \equiv \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i,$$

podemos reescribir las ecuaciones (3.54) en forma vectorial como sigue:

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i + \varepsilon \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i + O(\varepsilon^2); \quad 1 \leq i \leq N.$$

Luego en este caso

$$\delta t = 0, \quad \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i + O(\varepsilon^2); \quad 1 \leq i \leq N,$$

y la cantidad conservada asociada a la invariancia de la acción bajo rotaciones alrededor del eje $\mathbf{n}$ es por tanto

$$I = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \delta \mathbf{r}_i - 0 \cdot H = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i) = \mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \equiv \mathbf{L} \cdot \mathbf{n},$$

siendo $\mathbf{L}$ el momento angular total del sistema.

Ejercicio. Calcular la cantidad conservada $I(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ asociada a la invariancia de la acción bajo las *dilataciones espacio-temporales*

$$\tilde{t} = \lambda^\alpha t, \quad \tilde{\mathbf{q}} = \lambda \mathbf{q} \quad (\lambda > 0, \alpha \in \mathbb{R}). \quad (3.55)$$

Solución. Como en la formulación del teorema de Nöther el parámetro $\varepsilon = 0$ corresponde a la transformación identidad, hacemos $\lambda = e^\varepsilon$ en las ecuaciones (3.55). Desarrollando a primer orden en ε se obtiene entonces

$$\tilde{t} = e^{\alpha\varepsilon} t = t + \varepsilon \alpha t + O(\varepsilon^2), \quad \tilde{\mathbf{q}} = e^\varepsilon \mathbf{q} = \mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{q} + O(\varepsilon)^2.$$

Por tanto

$$\delta t = \alpha t, \quad \delta \mathbf{q} = \mathbf{q},$$

y la cantidad conservada asociada a la invariancia de la acción bajo las transformaciones (3.55) está dada por

$$I(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \alpha t H.$$

Nótese que la acción es invariante bajo las dilataciones (3.55) si el lagrangiano L verifica la condición

$$L\left(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}}\right) d\tilde{t} = L(\lambda^\alpha t, \lambda \mathbf{q}, \lambda^{1-\alpha} \dot{\mathbf{q}}) \lambda^\alpha dt = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt,$$

es decir si se transforma bajo dilataciones como

$$L(\lambda^\alpha t, \lambda \mathbf{q}, \lambda^{1-\alpha} \dot{\mathbf{q}}) = \lambda^{-\alpha} L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

Supongamos, por ejemplo, que el sistema es *natural*. En tal caso la condición anterior se escribe

$$\frac{1}{2} \lambda^{2-2\alpha} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\lambda^\alpha t, \lambda \mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(\lambda^\alpha t, \lambda \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \lambda^{-\alpha} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, \mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j - \lambda^{-\alpha} V(t, \mathbf{q}).$$

Igualando el coeficiente de $\dot{q}_i \dot{q}_j$ en ambos miembros se obtiene

$$\lambda^{2-2\alpha} a_{ij}(\lambda^\alpha t, \lambda \mathbf{q}) = \lambda^{-\alpha} a_{ij}(t, \mathbf{q}) \iff a_{ij}(\lambda^\alpha t, \lambda \mathbf{q}) = \lambda^{\alpha-2} a_{ij}(t, \mathbf{q}),$$

y por tanto

$$V(\lambda^\alpha t, \lambda \mathbf{q}) = \lambda^{-\alpha} V(t, \mathbf{q}).$$

Por ejemplo, si la matriz a_{ij} es constante entonces $\alpha = 2$, y por tanto

$$V(\lambda^2 t, \lambda \mathbf{q}) = \lambda^{-2} V(t, \mathbf{q}).$$

Consideremos, por ejemplo, el caso de una partícula de masa m que se mueve bajo el potencial central $V(r) = k/(2r^2)$, con $k \neq 0$. En este ejemplo se conservan la energía $T + V = E$ y la función

$$I = m \mathbf{r} \dot{\mathbf{r}} - 2Ht \equiv m \mathbf{r} \dot{\mathbf{r}} - 2Et = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m r^2 - E t^2 \right) \equiv \frac{1}{2} c m,$$

con c constante. Integrando respecto de t se obtiene la ley del movimiento de la coordenada r :

$$\frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} m r_0^2 + \frac{1}{2} m c t + E t^2 \implies r = \sqrt{r_0^2 + c t + \frac{2E}{m} t^2},$$

donde $r_0 \equiv r(0)$. El movimiento de la coordenada angular θ (en el plano del movimiento) se obtiene fácilmente integrando la ley de conservación del momento angular:

$$\theta = \theta_0 + \frac{L^2}{m} \int_0^t \frac{dt}{r^2} = \theta_0 + \frac{L^2}{m} \int_0^t \frac{dt}{r_0^2 + c t + \frac{2E}{m} t^2}, \quad \theta_0 \equiv \theta(0).$$

De hecho, esta integral se puede evaluar en términos de funciones trigonométricas, racionales o hiperbólicas, según el discriminante $c^2 - (8E r_0^2/m)$ del polinomio que figura en el denominador sea positivo, cero o negativo (ejercicio). Nótese, para finalizar, que la constante c se puede expresar fácilmente en términos de las condiciones iniciales evaluando la constante del movimiento I en $t = 0$:

$$\frac{1}{2} c m = I = m r \dot{r} - E t^2 \Big|_{t=0} = m r_0 \dot{r}_0 \implies c = 2 r_0 \dot{r}_0, \quad \dot{r}_0 \equiv \dot{r}(0).$$

3.5 Formulación hamiltoniana de la Mecánica

3.5.1 Ecuaciones canónicas de Hamilton

Las ecuaciones de Lagrange de un sistema mecánico:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0, \tag{3.56}$$

aún cuando son más versátiles que las ecuaciones de Newton, adolecen de dos inconvenientes. En primer lugar, *no están en forma normal*, es decir las derivadas segundas $\ddot{q}_i$ no aparecen despejadas en función de $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. En segundo lugar, son ecuaciones de *segundo orden*, por lo que dos soluciones $\mathbf{q}_1(t)$ y $\mathbf{q}_2(t)$

—es decir, dos trayectorias del sistema— pueden intersectarse en el espacio de configuración extendido $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ de las variables $(t, \mathbf{q})$ sin violar el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Ambos inconvenientes se resuelven si se consigue expresar las ecuaciones (3.56) como un *sistema normal de primer orden*. Dado que dichas ecuaciones son de primer orden en los momentos canónicos conjugados p_i , la forma más natural de conseguir este objetivo es utilizar como variables dependientes $\mathbf{q} \equiv (q_1, \dots, q_n)$ y $\mathbf{p} \equiv (p_1, \dots, p_n)$, en términos de las cuales las ecuaciones de Lagrange se escriben

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \dot{\mathbf{q}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (3.57)$$

El problema es que en el miembro derecho de estas ecuaciones aparece $\dot{\mathbf{q}}$, que ha de expresarse como una función de $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ utilizando la relación

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (3.58)$$

Nótese que, por el teorema de la función inversa, para que esto sea posible (al menos localmente) debe cumplirse la condición

$$\det \left(\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0. \quad (3.59)$$

Por ejemplo, puede probarse que dicha condición se cumple automáticamente para un sistema mecánico natural (cf. la Sección 3.4).

Para resolver el problema de expresar el miembro derecho de las ecuaciones (3.57) en términos de $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ es esencial estudiar como depende el lagrangiano L de estas variables. La diferencial de L , considerada como función de las variables $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, está dada por

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} d\dot{\mathbf{q}} \equiv \frac{\partial L}{\partial t} dt + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \mathbf{p} d\dot{\mathbf{q}}. \quad (3.60)$$

Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{p} d\dot{\mathbf{q}} = d(\mathbf{p} \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{p},$$

de (3.60) se obtiene

$$d(\mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} - L) \equiv dH = -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{p}. \quad (3.61)$$

Si en la fórmula anterior sustituimos $\dot{\mathbf{q}}$ por su expresión en términos de las variables $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ el hamiltoniano H se convierte en una función $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$, cuya diferencial es el miembro derecho de (3.61). Las derivadas parciales de $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ respecto de las variables $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ son entonces los coeficientes de dt , $d\mathbf{q}$ y $d\mathbf{p}$ en (3.61), es decir:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.62)$$

Se sobreentiende que en el miembro derecho hay que expresar $\dot{\mathbf{q}}$ en función de $\mathbf{p}$ utilizando la relación (3.58). De las ecs. (3.62) se deduce que las ecuaciones de Lagrange (3.57) son equivalentes al siguiente sistema de primer orden en las variables $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad (3.63)$$

donde ahora $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ son variables independientes y $(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}})$ sus derivadas respecto de t . Las ecuaciones (3.63) son las llamadas **ecuaciones canónicas de Hamilton**.

Nota. En Matemáticas, el paso de las coordenadas y velocidades generalizadas $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ a las variables canónicas $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, donde $\dot{\mathbf{q}}$ y $\mathbf{p}$ están relacionadas a través de (3.58), recibe el nombre de **transformación**

de Legendre. Este tipo de transformaciones son muy usadas, entre otras áreas de la Física, en Termodinámica.

- Para escribir las ecuaciones canónicas de Hamilton de un sistema mecánico con lagrangiano $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ se puede proceder de la siguiente forma:

1. Hallar los momentos canónicos conjugados

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad i = 1, \dots, n.$$

2. Utilizar las ecuaciones anteriores para despejar las velocidades generalizadas $\dot{q}_i$ en función de los momentos canónicos p_j :

$$\dot{q}_i \equiv \dot{q}_i(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.64)$$

3. Calcular el hamiltoniano del sistema

$$H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L,$$

donde se han de utilizar las ecs. (3.64) para expresar $\dot{\mathbf{q}}$ en términos de $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$.

4. Las ecuaciones canónicas de Hamilton se obtiene entonces a partir de las derivadas parciales de H mediante la ec. (3.63). De hecho, las primeras n ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

son en realidad las ecuaciones (3.64), por lo que sólo es necesario hallar las n restantes ecuaciones

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Recuérdese que en un sistema mecánico *natural*

$$\dot{\mathbf{q}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L = T + V.$$

Por tanto, el hamiltoniano de un sistema mecánico natural es la energía $T + V$ expresada en términos de las variables $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$.

3.5.2 Leyes de conservación

De las ecuaciones de Hamilton se sigue que si el Hamiltoniano H es independiente de alguna coordenada q_i se conserva el correspondiente momento conjugado p_i :

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \implies p_i = \text{const.}$$

Del mismo modo, si H es independiente del momento p_i se conserva la coordenada q_i :

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \implies q_i = \text{const.}$$

En este ejemplo se observa ya la gran *simetría* entre las coordenadas generalizadas q_i y sus momentos p_i , que es de hecho una de las importantes ventajas de la formulación hamiltoniana de la Mecánica.

Por otra parte, de las ecuaciones de Hamilton se sigue que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Por tanto, si el hamiltoniano no depende explícitamente de t entonces H se conserva:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \implies H = \text{const.}$$

Nótese que, de la primera ecuación (3.62):

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

se sigue que H se conserva si L es independiente de t , que es la ley de conservación ya deducida en la formulación lagrangiana.

• Una ventaja de la formulación hamiltoniana de la Mecánica sobre la lagrangiana consiste en el hecho siguiente: *si la coordenada q_i es cíclica, es posible eliminar de las ecuaciones de Hamilton el grado de libertad correspondiente a dicha coordenada y a su momento conjugado p_i , reduciendo dichas ecuaciones a un sistema de $2(n-1)$ ecuaciones canónicas.*

Supongamos, en efecto, que

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0,$$

de modo que $p_i(t) = c$ para todo t . Entonces es inmediato comprobar que *las ecuaciones de Hamilton de las restantes coordenadas y momentos son las ecuaciones canónicas del hamiltoniano*

$$H|_{p_i=c} \equiv H(t, q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n, p_1, \dots, p_{i-1}, c, p_{i+1}, \dots, p_n),$$

dependiente sólo de las $2(n-1)$ variables canónicas conjugadas (q_j, p_j) con $j \neq i$. En efecto, si $j \neq i$ se tiene

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \Big|_{p_i=c} = \frac{\partial}{\partial p_j} (H|_{p_i=c}), \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \Big|_{p_i=c} = -\frac{\partial}{\partial q_j} (H|_{p_i=c}).$$

Una vez resueltas dichas ecuaciones, el movimiento de la coordenada cíclica q_i se determina sin más que integrar su correspondiente ecuación de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

es decir

$$q_i(t) = \int \frac{\partial H}{\partial p_i}(t, q_1(t), \dots, q_{i-1}(t), q_{i+1}(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_{i-1}(t), c, p_{i+1}(t), \dots, p_n(t)) dt.$$

Ejemplo 3.10. *Hamiltoniano de una partícula en coordenadas esféricas.*

Como vimos en el Ejemplo 3.7, el lagrangiano de una partícula de masa m en coordenadas esféricas está dado por la ec. (3.50), es decir

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - V(t, r, \theta, \phi).$$

Como la energía cinética es cuadrática en las velocidades generalizadas $(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$, el hamiltoniano es simplemente la energía total

$$T + V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + V(t, r, \theta, \phi),$$

expresada en términos de los momentos canónicos (3.51):

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}.$$

De estas ecuaciones se obtiene

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \theta}, \quad (3.65)$$

de donde se deduce la siguiente expresión para el hamiltoniano:

$$H(t, r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(t, r, \theta, \varphi). \quad (3.66)$$

Las ecuaciones de Hamilton son en este caso las tres ecuaciones (3.65), junto con las restantes tres ecuaciones para las derivadas de los momentos:

$$\begin{cases} \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{mr^3} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right), \\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{p_\varphi^2}{mr^2} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta}, \\ \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Como ya sabíamos, de la última de estas ecuaciones se deduce que p_φ se conserva si el potencial no depende de φ . Análogamente, al ser

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t},$$

si V es independiente de t se conserva H , que coincide con la energía del sistema.

Ejemplo 3.11. *Hamiltoniano de una partícula cargada en un campo electromagnético.*

Como vimos en el Ejemplo 3.8, en este caso el lagrangiano (en coordenadas cartesianas $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$) es

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - e\Phi(t, \mathbf{r}) + e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{r}),$$

los momentos canónicos están dados por

$$p_i = m\dot{x}_i + eA_i(t, \mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3,$$

y el hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + e\Phi(t, \mathbf{r}),$$

donde se entiende que hay que expresar las velocidades en términos de los momentos conjugados. Como

$$\dot{x}_i = \frac{1}{m} (p_i - eA_i(t, \mathbf{r})), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.67)$$

sustituyendo en la fórmula para H se obtiene la expresión

$$H(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(t, \mathbf{r}))^2 + e\Phi(t, \mathbf{r}).$$

Las ecuaciones de Hamilton son las tres ecuaciones (3.67), junto con

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -e \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(t, \mathbf{r}) + \frac{e}{m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(t, \mathbf{r})) \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i}(t, \mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3.$$

El hamiltoniano anterior también se puede calcular fácilmente en *coordenadas esféricas* (r, θ, φ) . En efecto, sabemos que el lagrangiano es *covariante* bajo cambios de coordenadas, por lo que para obtener el lagrangiano de una partícula cargada en coordenadas esféricas basta expresar (3.31) en dichas coordenadas. Como

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} = (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi) \cdot (A_r\mathbf{e}_r + A_\theta\mathbf{e}_\theta + A_\varphi\mathbf{e}_\varphi) = \dot{r}A_r + r\dot{\theta}A_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}A_\varphi,$$

sustituyendo en (3.31) se obtiene

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - e\Phi + e(\dot{r}A_r + r\dot{\theta}A_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}A_\varphi).$$

Los momentos conjugados son ahora

$$p_r = m\dot{r} + eA_r, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta} + eA_\theta, \quad p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi} + eA_\varphi,$$

y por tanto

$$\dot{r} = \frac{1}{m}(p_r - eA_r), \quad r\dot{\theta} = \frac{1}{mr}(p_\theta - eA_\theta), \quad r\sin\theta\dot{\varphi} = \frac{1}{mr\sin\theta}(p_\varphi - eA_\varphi).$$

Sustituyendo en la definición de H obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} H &= \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\varphi}p_\varphi - \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) + e\Phi - e(\dot{r}A_r + r\dot{\theta}A_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}A_\varphi) \\ &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) + e\Phi \\ &= \frac{1}{2m} \left[(p_r - eA_r)^2 + \frac{(p_\theta - eA_\theta)^2}{r^2} + \frac{(p_\varphi - eA_\varphi)^2}{r^2\sin^2\theta} \right] + e\Phi. \end{aligned}$$

3.5.3 Corchetes de Poisson

Llamaremos a partir de ahora **espacio de las fases** (o **espacio fásico**) al espacio $\mathbb{R}^{2n}$ de las variables canónicas $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Dado un punto cualquiera $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ en dicho espacio fásico y un instante inicial t_0 , por el teorema de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden (si el hamiltoniano $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ es de clase C^2 en las variables $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ para todo t) hay una *única* trayectoria $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ del sistema que pasa por dicho punto, es decir que verifica las condiciones $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$, $\mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0$. Consideremos una función cualquiera $f(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$, y estudiemos como varía dicha función cuando $\mathbf{q}$ y $\mathbf{p}$ evolucionan con el tiempo obedeciendo las ecuaciones de Hamilton (3.63) del hamiltoniano $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$. Para ello, basta observar que

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}.$$

Esto sugiere definir el llamado **corchete de Poisson** de dos funciones $f(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ y $g(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ mediante la expresión

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \equiv \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (3.68)$$

Utilizando esta definición, la expresión anterior para $\dot{f}$ se escribe

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}; \quad (3.69)$$

en particular, si f no depende explícitamente de t obtenemos la expresión más sencilla

$$\dot{f} = \{f, H\}.$$

Aplicando la expresión anterior a las coordenadas $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ en el espacio fásico obtenemos la siguiente formulación de las ecuaciones de Hamilton en términos del corchete de Poisson:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Los corchetes de Poisson de las coordenadas y momentos canónicos entre sí son particularmente sencillos:

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.70)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker.

Las siguientes propiedades del corchete de Poisson se obtienen de forma inmediata a partir de su definición:

1. *Antisimetría:* $\{f, g\} = -\{g, f\}$. En particular, $\{f, f\} = 0$.
2. *Bilinealidad:* $\{\lambda f + \mu g, h\} = \lambda \{f, h\} + \mu \{g, h\}$, donde λ, μ son constantes (o, más generalmente, funciones de t). (En virtud de la antisimetría, una propiedad análoga vale para el corchete $\{f, \lambda g + \mu h\}$.)
3. *Regla de Leibniz:* $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$ (y análogamente para $\{f, gh\}$).

Por otra parte, un cálculo largo pero sencillo demuestra que el corchete de Poisson verifica la llamada *identidad de Jacobi*

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0. \quad (3.71)$$

Es inmediato probar (utilizando las propiedades elementales de las derivadas parciales) que

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}.$$

Utilizando esta relación y la identidad de Jacobi se demuestra una importante generalización de este resultado, conocida como *identidad de Jacobi–Poisson*:

$$\frac{d}{dt} \{f, g\} = \{\dot{f}, g\} + \{f, \dot{g}\}. \quad (3.72)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{f, g\} &= \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} + \{\{f, g\}, H\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} - \{\{g, H\}, f\} - \{\{H, f\}, g\} \\ &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \{\{f, H\}, g\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} + \{f, \{g, H\}\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} + \{g, H\} \right\} \\ &= \{\dot{f}, g\} + \{f, \dot{g}\}. \end{aligned}$$

De la identidad de Jacobi–Poisson se sigue inmediatamente el **teorema de Jacobi–Poisson**, de fundamental importancia a la hora de obtener integrales primeras de sistemas hamiltonianos: si $f(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ y $g(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ son dos integrales primeras de las ecuaciones de Hamilton (3.63), también lo es su corchete de Poisson $\{f, g\}$.

Ejemplo 3.12. El hamiltoniano de una partícula de masa m en coordenadas cartesianas es

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(t, \mathbf{r}),$$

donde $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ juega el papel de $\mathbf{q}$. Hallaremos a continuación el corchete de Poisson de dos componentes cualesquiera del momento angular

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (x_2 p_3 - x_3 p_2, x_3 p_1 - x_1 p_3, x_1 p_2 - x_2 p_1)$$

aplicando las distintas propiedades del corchete de Poisson que acabamos de enumerar y los corchetes básicos (3.70). Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\{L_1, L_2\} &= \{x_2 p_3 - x_3 p_2, x_3 p_1 - x_1 p_3\} = \{x_2 p_3, x_3 p_1\} - \{x_2 p_3, x_1 p_3\} - \{x_3 p_2, x_3 p_1\} + \{x_3 p_2, x_1 p_3\} \\ &= -x_2 p_1 + p_2 x_1 \equiv L_3.\end{aligned}$$

Procediendo de esta forma se obtienen las importantes identidades

$$\{L_i, L_j\} = L_k, \quad (i, j, k) \equiv \text{permutación cíclica de } (1, 2, 3).$$

Supongamos que se conservan dos componentes cualesquiera del momento angular, por ejemplo L_1 y L_2 . Por el teorema de Jacobi–Poisson se conservará entonces la restante componente $L_3 = \{L_1, L_2\}$. En otras palabras, *si se conservan dos componentes cualesquiera del momento angular $\mathbf{L}$ se conserva el vector $\mathbf{L}$* . Supongamos a continuación que se conservan la proyección del momento lineal $\mathbf{p}$ (que en este caso coincide con el canónico) a lo largo de una dirección $\mathbf{n}$ y el momento angular. Escogiendo adecuadamente las coordenadas, podemos suponer que se conservan p_1 y $\mathbf{L}$. Pero entonces la identidad

$$\{p_1, L_2\} = \{p_1, x_3 p_1 - x_1 p_3\} = -\{p_1, x_1 p_3\} = p_3$$

implica (por el teorema de Jacobi–Poisson) que también se conserva p_3 . Análogamente, del corchete de Poisson

$$\{p_1, L_3\} = \{p_1, x_1 p_2 - x_2 p_1\} = \{p_1, x_1 p_2\} = -p_2$$

se sigue que se conserva p_2 . Por tanto en este caso se conserva el momento lineal $\mathbf{p}$. $\square$

• Ya hemos visto en la subsección anterior que en la formulación hamiltoniana las variables canónicas $\mathbf{q}$ y $\mathbf{p}$ tienen un estatus idéntico. Es por ello razonable el intentar simplificar las ecuaciones de Hamilton (3.63) mediante cambios de variable generales de la forma

$$\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{p}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}). \quad (3.73)$$

El problema es que, en general, una transformación de este tipo convierte el sistema (3.63) en un sistema de primer orden que *no* es de tipo hamiltoniano, es decir de la forma

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\mathbf{p}}}, \quad \dot{\tilde{\mathbf{p}}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \quad (3.74)$$

para una cierta función $\tilde{H}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$. Se dice por ello que la transformación (3.73) es **canónica** si transforma las ecuaciones de Hamilton de *cualquier* hamiltoniano $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ en las ecuaciones canónicas de otro hamiltoniano $\tilde{H}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$. Un importante resultado en Mecánica hamiltoniana afirma que *la transformación (3.73) es canónica si las variables $\tilde{\mathbf{q}}$ y $\tilde{\mathbf{p}}$ son canónicamente conjugadas, es decir si sus corchetes de Poisson están dados por*

$$\{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\} = \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} = 0, \quad \{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Se demuestra también que siempre es posible encontrar una transformación canónica (3.73) que convierta las ecuaciones de Hamilton (3.63) de *cualquier* hamiltoniano $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ en las ecuaciones de Hamilton del hamiltoniano $\tilde{H} = 0$, es decir en el sistema trivial

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = 0, \quad \dot{\tilde{\mathbf{p}}} = 0.$$

La solución de este sistema es evidentemente

$$\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}_0, \quad \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{p}}_0,$$

con $\tilde{\mathbf{q}}_0, \tilde{\mathbf{p}}_0$ vectores constantes. La solución general de las ecuaciones de Hamilton originales se obtiene entonces invirtiendo las ecuaciones

$$\tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \tilde{\mathbf{q}}_0, \quad \tilde{\mathbf{p}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}_0.$$

• Las relaciones de conmutación fundamentales (3.70) permiten establecer una analogía muy clara entre la Mecánica clásica y la cuántica. En efecto, en Mecánica cuántica las variables dinámicas (q_j, p_j) se reemplazan (en la imagen de Schrödinger) por los *operadores autoadjuntos*

$$Q_j = q_j, \quad P_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_j}$$

cuya actuación sobre una función $\psi(\mathbf{q})$ está dada por

$$(Q_j \psi)(\mathbf{q}) = q_j \psi(\mathbf{q}), \quad (P_j \psi)(\mathbf{q}) = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial q_j}(\mathbf{q}).$$

Los operadores (Q_i, P_j) satisfacen *relaciones de conmutación* totalmente análogas a (3.70):

$$[Q_i, Q_j] = [P_i, P_j] = 0, \quad [Q_i, P_j] = i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial q_j}, q_i \right] = i\hbar \delta_{ij}. \quad (3.75)$$

Cualquier otra función $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ está representada en Mecánica cuántica por un operador autoadjunto $F(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ tal que

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

Este es el llamado *principio de correspondencia* de Bohr. Es importante observar a este respecto que, al ser en general el producto de operadores no conmutativo, el operador F determina la función f , pero no a la inversa. Por ejemplo, es fácil comprobar que

$$F_1(Q, P) = PQ^2P \neq F_2(Q, P) = \frac{1}{2}(Q^2P^2 + P^2Q^2)$$

(de hecho, $F_1 - F_2 = \hbar^2$), y sin embargo $f_1(q, p) = f_2(q, p) = q^2p^2$.

El *conmutador* $[A, B]$ de dos operadores A y B tiene propiedades algebraicas análogas al corchete de Poisson. En efecto, es obviamente antisimétrico y lineal en cada uno de sus argumentos. Además, si A, B y C son tres operadores entonces es inmediato probar que

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B. \quad (3.76)$$

Esta identidad es análoga a la regla de Leibniz satisfecha por el corchete de Poisson, con la única diferencia de que el *orden* en que aparecen los operadores en (3.76) es esencial para su validez. Por último, es inmediato comprobar que el conmutador verifica también la *identidad de Jacobi*

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0.$$

Si $F(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ y $G(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ son dos operadores autoadjuntos que dependen *polinómicamente* de $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ (y no dependen explícitamente de $\hbar$), aplicando repetidas veces la ecuación (3.76) y utilizando al final las relaciones (3.75) se puede expresar el conmutador $[F, G]$ en la forma

$$[F, G] = i\hbar K,$$

siendo $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ un polinomio independiente de $\hbar$. De la identidad de Jacobi (3.71) y la regla de Leibniz satisfechas por el corchete de Poisson se sigue entonces que las correspondientes funciones clásicas $f \equiv F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, $g \equiv G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ y $k \equiv K(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ satisfacen

$$\{f, g\} = k.$$

En otras palabras, el conmutador en Mecánica cuántica determina el corchete de Poisson en Mecánica clásica via la relación

$$\frac{1}{i\hbar} [\cdot, \cdot] \rightarrow \{\cdot, \cdot\}.$$

El paso contrario (de los corchete de Poisson en Mecánica clásica a los conmutadores en Mecánica cuántica) *no es unívoco en general*, ya que como hemos visto distintos operadores autoadjuntos $F(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ pueden dar lugar a la misma función f . Esto es lógico, ya que la Mecánica clásica es el límite (cuando $\hbar \rightarrow 0$) de la Mecánica cuántica, por lo que ésta debe determinar a aquella. Lo contrario, sin embargo, no tiene por qué ocurrir, ya que puede haber teorías distintas con el mismo límite para $\hbar \rightarrow 0$.

Capítulo 4

Movimiento en un sistema de referencia no inercial

4.1 Velocidad angular de un sistema de ejes respecto de otro

Estudiaremos en este capítulo la descripción del movimiento de una partícula en un sistema de referencia no inercial. Consideremos, en primer lugar, dos sistemas de referencia S y S' con el mismo origen de coordenadas, y sean respectivamente $\mathbf{e}_i$ y $\mathbf{e}'_i$ ($i = 1, 2, 3$) los vectores unitarios en la dirección de los ejes de ambos sistemas. Supondremos en este capítulo que el sistema S' es *inercial*, y denotaremos por $O(t)$ la aplicación lineal que relaciona los vectores $\mathbf{e}'_i$ (**ejes fijos**) con los vectores $\mathbf{e}_i$ (**ejes móviles**):

$$\mathbf{e}_i(t) = O(t) \mathbf{e}'_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.1)$$

En lo que sigue identificaremos tácitamente el operador $O(t)$ con su *matriz* en la base $\{\mathbf{e}'_i\}$, cuyas columnas son las coordenadas de los vectores $\mathbf{e}_i(t)$ en dicha base.

Dado que el operador $O(t)$ transforma un sistema ortonormal de vectores positivamente orientado en otro sistema de este tipo, dicho operador es un elemento del **grupo ortogonal especial** $SO(3)$ de las aplicaciones lineales $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (o, equivalentemente, matrices 3×3 reales M) definido por las condiciones

$$M^T M = M M^T = \mathbb{1}, \quad \det M = 1.$$

Un teorema probado por primera vez por Euler afirma que *todo elemento M de $SO(3)$ es una rotación alrededor de un cierto eje $\mathbf{n}$* . El teorema de Euler se demuestra muy fácilmente. En efecto, tomando el determinante de ambos miembros de la identidad

$$M^T(M - \mathbb{1}) = \mathbb{1} - M^T$$

y teniendo en cuenta que

$$\det M = \det M^T = 1, \quad \det(\mathbb{1} - M^T) = \det((\mathbb{1} - M)^T) = \det(\mathbb{1} - M)$$

se obtiene

$$\det(M - \mathbb{1}) = \det(\mathbb{1} - M) = -\det(M - \mathbb{1}) \implies \det(M - \mathbb{1}) = 0.$$

Por tanto $\lambda = 1$ es un *autovalor* de la matriz M , de donde se sigue que existe un vector no nulo $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ tal que $M\mathbf{n} = \mathbf{n}$.

En particular, si el eje de rotación $\mathbf{n}$ coincide con el vector $\mathbf{e}'_3$ y el ángulo de rotación (medido en sentido antihorario) es θ , la matriz M está dada por

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv R_3(\theta).$$

Un cálculo directo demuestra que

$$\frac{dR_3}{d\theta}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

por tanto, si $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ es un vector arbitrario se tiene

$$\left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} R_3(\theta)\mathbf{c} = \frac{dR_3}{d\theta}(0)\mathbf{c} = -c_2\mathbf{e}'_1 + c_1\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}'_3 \times \mathbf{c}.$$

En general, si $R_{\mathbf{n}}(\theta)$ denota la matriz de rotación alrededor del eje $\mathbf{n}$ en un ángulo θ entonces se tiene

$$\left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} R_{\mathbf{n}}(\theta)\mathbf{c} = \frac{dR_{\mathbf{n}}}{d\theta}(0)\mathbf{c} = \mathbf{n} \times \mathbf{c}.$$

Simbólicamente, podemos escribir

$$\frac{dR_{\mathbf{n}}}{d\theta}(0) = \mathbf{n} \times, \quad (4.2)$$

entendiendo que ambos miembros son iguales cuando se aplican a cualquier vector $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. Otra forma de interpretar el resultado anterior es que para θ pequeño se tiene (al ser $R_{\mathbf{n}}(0) = \mathbb{1}$)

$$R_{\mathbf{n}}(\theta)\mathbf{c} = \mathbf{c} + \theta\mathbf{n} \times \mathbf{c} + O(\theta^2).$$

Ejercicio. Probar que $R_{\mathbf{n}}(\theta)\mathbf{r} = \cos \theta \mathbf{r} + (1 - \cos \theta)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + \sin \theta \mathbf{n} \times \mathbf{r}$.

Sea ahora $O(t) \in \text{SO}(3)$ para todo t , y supongamos que O es de clase C^1 (es decir, que los elementos de matriz de O son funciones derivables con continuidad). Nos planteamos entonces el problema de calcular la derivada $\dot{O}(t)$ en todo instante t . Para ello derivamos respecto de t la identidad

$$O(t)O(t)^T = \mathbb{1},$$

obteniendo

$$0 = \dot{O}(t)O(t)^T + O(t)\dot{O}(t)^T = \dot{O}(t)O(t)^T + [\dot{O}(t)O(t)^T]^T.$$

Por tanto

$$\dot{O}(t)O(t)^T = \Omega(t),$$

donde $\Omega(t)$ es una matriz *antisimétrica* de orden 3. Como $O(t)^T = O(t)^{-1}$, de esta relación se sigue que

$$\dot{O}(t) = \Omega(t)O(t). \quad (4.3)$$

La matriz antisimétrica $\Omega(t)$ puede escribirse como

$$\dot{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{pmatrix}$$

para ciertos números reales $\omega_i(t)$. Es entonces inmediato comprobar que si $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ se tiene

$$\dot{\Omega}(t)\mathbf{c} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{c},$$

donde $\boldsymbol{\omega}(t) \in \mathbb{R}^3$ es el vector de componentes $\omega_i(t)$. De la ec. (4.3) y la identidad anterior (con $O(t)\mathbf{c}$ en lugar de $\mathbf{c}$) se deduce finalmente que

$$\dot{O}(t)\mathbf{c} = \boldsymbol{\omega}(t) \times O(t)\mathbf{c}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

El vector $\boldsymbol{\omega}(t) \in \mathbb{R}^3$, que en general depende del tiempo, está determinado por la relación

$$\boldsymbol{\omega}(t) \times = \Omega(t) = \dot{O}(t)O(t)^T \equiv \dot{O}(t)O(t)^{-1},$$

o, equivalentemente,

$$\boldsymbol{\omega}(t_0) \times = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} O(t) O(t_0)^{-1}. \quad (4.5)$$

Aplicando (4.4) a la ec. (4.1) que relaciona los ejes móviles $\mathbf{e}_i \equiv \mathbf{e}_i(t)$ con los fijos $\mathbf{e}'_i$ obtenemos la importante fórmula

$$\dot{\mathbf{e}}_i(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times O(t) \mathbf{e}'_i = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_i(t), \quad (4.6)$$

donde $\dot{\mathbf{e}}_i(t)$ denota la derivada del vector $\mathbf{e}_i(t)$ respecto del sistema inercial (fijo) S' . El vector $\boldsymbol{\omega}(t)$ se denomina **velocidad angular instantánea** del sistema de ejes móviles $\{\mathbf{e}_i\}$ respecto del sistema de ejes fijos $\{\mathbf{e}'_i\}$.

Ejemplo 4.1. Si $O(t)$ es una rotación alrededor de un eje fijo $\mathbf{n}$ en un ángulo variable con el tiempo $\alpha(t)$ entonces

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\alpha}(t) \mathbf{n}.$$

En efecto, utilizando la ecuación (4.5) se obtiene

$$O(t) = R_{\mathbf{n}}(\alpha(t)) \implies O(t) O(t_0)^{-1} = R_{\mathbf{n}}(\alpha(t)) R_{\mathbf{n}}(\alpha(t_0))^{-1} = R_{\mathbf{n}}(\alpha(t) - \alpha(t_0)),$$

y por tanto, en virtud de la ec. (4.2),

$$\boldsymbol{\omega}(t_0) \times = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} R_{\mathbf{n}}(\alpha(t) - \alpha(t_0)) = \dot{\alpha}(t_0) \frac{dR_{\mathbf{n}}}{d\theta}(0) = \dot{\alpha}(t_0) \mathbf{n} \times \implies \boldsymbol{\omega}(t_0) = \dot{\alpha}(t_0) \mathbf{n}.$$

4.2 Derivadas temporales en los sistemas fijo y móvil

Para estudiar la relación entre el sistema inercial S' (**sistema fijo**) y el no inercial S (**sistema móvil**), consideremos cómo se expresa la derivada temporal de un vector variable cualquiera $\mathbf{A}(t)$ en cada uno de estos sistemas. Desarrollemos, para ello, el vector $\mathbf{A}(t)$ en el sistema *móvil* $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\mathbf{A}(t) = \sum_{i=1}^3 A_i(t) \mathbf{e}_i.$$

Para evitar confusiones, denotaremos a partir de ahora por $\left(\frac{d}{dt}\right)_f$ y $\left(\frac{d}{dt}\right)_m$ la derivada temporal respecto de los sistemas fijo y móvil, respectivamente. Derivando la relación anterior en el sistema fijo y utilizando esta última notación se obtiene la identidad

$$\left(\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\right)_f = \sum_{i=1}^3 \dot{A}_i(t) \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^3 A_i(t) \left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}\right)_f, \quad (4.7)$$

donde hemos tenido en cuenta que las funciones $A_i(t)$ son *escalares*, y por lo tanto su derivada respecto de t es la misma en ambos sistemas. Utilizando la ec. (4.6), que en la notación que acabamos de introducir se escribe

$$\left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}\right)_f = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_i, \quad (4.8)$$

la ec. (4.7) se convierte en

$$\left(\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\right)_f = \sum_{i=1}^3 \dot{A}_i(t) \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{A}(t). \quad (4.9)$$

Por otra parte, en el sistema móvil los vectores $\mathbf{e}_i$ se consideran *constantes*, por lo que $\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_m$ está dado simplemente por

$$\left(\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\right)_m = \sum_{i=1}^3 \dot{A}_i(t) \mathbf{e}_i .$$

Comparando esta expresión con la anterior se obtiene la importante relación

$$\left(\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\right)_f = \left(\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\right)_m + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{A}(t) . \quad (4.10)$$

La expresión anterior es válida para *cualquier* vector $\mathbf{A}(t)$ función del tiempo; en particular, si la aplicamos a la velocidad angular instantánea $\boldsymbol{\omega}(t)$ obtenemos

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}(t)}{dt}\right)_f = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}(t)}{dt}\right)_m \equiv \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) . \quad (4.11)$$

4.3 Dinámica en un sistema de referencia no inercial

Consideremos a continuación el caso más general en que el origen de S está desplazado respecto del de S' en un vector $\mathbf{R}(t)$ dependiente de t . Si $\mathbf{r}$ es el vector de posición de una partícula en el sistema no inercial S , su vector de posición en el sistema inercial S' estará dado por

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R} + \mathbf{r} .$$

Derivando esta relación respecto del sistema fijo (inercial) obtenemos

$$\left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_f = \mathbf{V} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_m + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} ,$$

donde

$$\mathbf{V} \equiv \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_f \quad (4.12)$$

es la velocidad del origen de S medida en el sistema inercial S' . Denotando por $\mathbf{v}_f$ y $\mathbf{v}_m$ la velocidad de la partícula en los sistemas fijo y móvil, respectivamente, es decir

$$\mathbf{v}_f = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_f , \quad \mathbf{v}_m = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_m , \quad (4.13)$$

podemos reescribir la expresión anterior en la forma más compacta

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_m + \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} . \quad (4.14)$$

Derivando de nuevo la relación anterior en el sistema fijo obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{v}_f}{dt}\right)_f &= \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_f + \left(\frac{d\mathbf{v}_m}{dt}\right)_m + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_m + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_m + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_f + \left(\frac{d\mathbf{v}_m}{dt}\right)_m + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_m + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) . \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_f}{dt}\right)_f \equiv \left(\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}\right)_f = \mathbf{a}_f , \quad \left(\frac{d\mathbf{v}_m}{dt}\right)_m \equiv \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_m = \mathbf{a}_m$$

son respectivamente la *aceleración* de la partícula en los sistemas fijo y móvil, y llamando

$$\mathbf{A} \equiv \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_f = \left(\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \right)_f$$

a la aceleración del origen del sistema móvil S respecto del fijo S' , obtenemos finalmente la importante relación

$$\mathbf{a}_f = \mathbf{a}_m + \mathbf{A} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_m + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}. \quad (4.15)$$

Teniendo en cuenta esta relación, si la partícula está sometida a una fuerza $\mathbf{F}$ (medida en el sistema *inercial* S'), la ecuación del movimiento de dicha partícula en el sistema móvil S es

$$m\mathbf{a}_m = \mathbf{F} - m\mathbf{A} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_m - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \equiv \mathbf{F} + \mathbf{F}_i. \quad (4.16)$$

Por tanto en el sistema móvil la segunda ley de Newton ha de ser modificada añadiendo a la *fuerza real* $\mathbf{F}$ la *fuerza ficticia*

$$\mathbf{F}_i = -m\mathbf{A} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_m - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}. \quad (4.17)$$

Es importante notar que esta fuerza ficticia es de tipo *inercial*, al ser proporcional a la *masa* de la partícula.

El primer término de la fuerza ficticia $\mathbf{F}_i$ es debido a la *aceleración* del origen del sistema no inercial S , y por tanto desaparece si dicho punto se mueve con *velocidad constante* respecto del sistema inercial S' . Los restantes términos de $\mathbf{F}_i$ se deben a la *rotación de los ejes* del sistema móvil. Mientras que el último de dichos términos desaparece si la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es *constante*, el segundo y el tercer término han de ser tenidos en cuenta aun cuando $\boldsymbol{\omega}$ sea constante. El término $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ es la llamada **fuerza centrífuga**, ya que es un vector contenido en el plano determinado por $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{r}$, perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$ y dirigido “hacia fuera” del eje determinado por el vector $\boldsymbol{\omega}$ (cf. la Fig. 4.1). El término $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_m$ es la

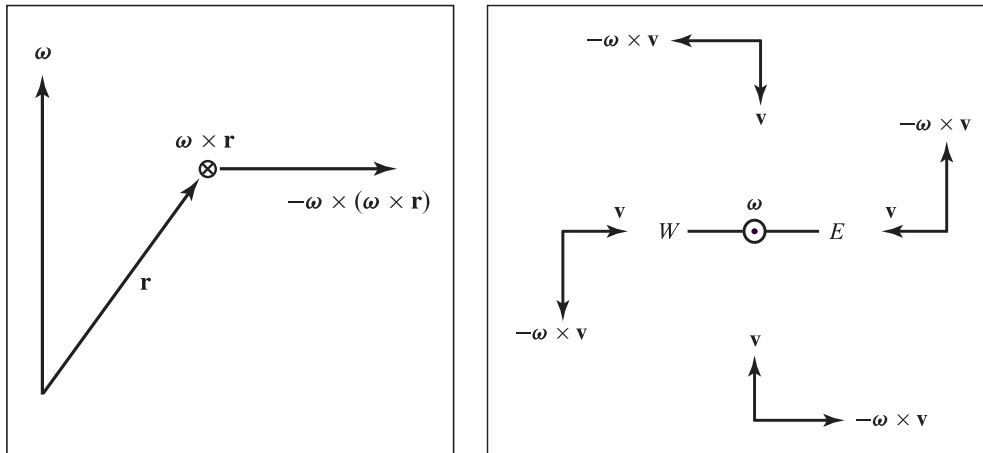


Figura 4.1: Fuerzas centrífuga (izquierda) y de Coriolis (derecha).

denominada **fuerza de Coriolis**, que depende de la velocidad de la partícula (véase de nuevo la Fig. 4.1).

4.4 Movimiento con respecto a la superficie terrestre

Aplicaremos en esta sección la ecuación del movimiento (4.16) obtenida en la sección anterior para estudiar la dinámica de una partícula que se mueve cerca de la superficie terrestre. Despreciaremos el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, y supondremos que la Tierra gira alrededor de su eje norte-sur con velocidad angular constante de módulo

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ día sidéreo}} \simeq \frac{2\pi \text{ rad}}{86164 \text{ s}} \simeq 7,29212 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

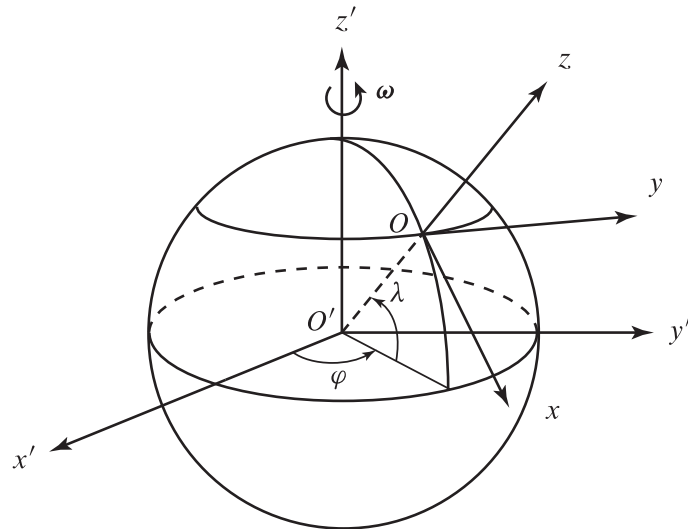


Figura 4.2: Sistema de ejes terrestre.

en sentido oeste-este.

Escojamos un **sistema de ejes terrestre** en la forma indicada en la Fig. 4.2. Más precisamente, el origen de coordenadas O del sistema móvil S está en un punto de la superficie terrestre de *latitud* λ y *longitud* φ , el vector $\mathbf{e}_3$ (eje z) lleva la dirección del vector $\mathbf{R}$ que une el centro de la Tierra con el punto O , el vector $\mathbf{e}_1$ (eje x) es tangente al *meridiano* que pasa por O (en dirección sur), y el vector $\mathbf{e}_2$ (eje y) es entonces tangente al *paralelo* que pasa por O (en dirección este). Como ejes fijos tomamos un sistema de ejes con origen O' en el centro de la Tierra, siendo el vector $\mathbf{e}'_3$ un vector unitario en la dirección sur-norte, de modo que la velocidad angular de la Tierra es

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}'_3.$$

Nótese que los vectores $\mathbf{e}_i$ son (por este orden) los vectores $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ y $\mathbf{e}_r$ del sistema de coordenadas esféricas, siendo $\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \sin \lambda \cos \varphi \mathbf{e}'_1 + \sin \lambda \sin \varphi \mathbf{e}'_2 - \cos \lambda \mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{e}_2 = -\sin \varphi \mathbf{e}'_1 + \cos \varphi \mathbf{e}'_2, \\ \mathbf{e}_3 = \cos \lambda \cos \varphi \mathbf{e}'_1 + \cos \lambda \sin \varphi \mathbf{e}'_2 + \sin \lambda \mathbf{e}'_3. \end{cases}$$

De las ecuaciones anteriores (o simplemente de la Fig. 4.2) se deduce que en el sistema terrestre la velocidad angular de la Tierra está dada por

$$\boldsymbol{\omega} = \omega(-\cos \lambda \mathbf{e}_1 + \sin \lambda \mathbf{e}_3). \quad (4.18)$$

Escribamos a continuación las ecuaciones del movimiento (4.16) en el sistema de ejes terrestre para una partícula de masa m que se mueve en las proximidades del punto O . Supondremos, por el momento, que la única fuerza que actúa sobre dicha partícula es la atracción de la gravedad terrestre $m\mathbf{g}_0$, donde

$$\mathbf{g}_0 = -\frac{GM}{r'^3} \mathbf{r}'$$

y $\mathbf{r}' = \mathbf{R} + \mathbf{r}$ es el vector de posición de la partícula en el sistema fijo. Si la partícula permanece próxima al punto O , podemos sustituir el vector $\mathbf{r}'$ por $\mathbf{R}$, y por tanto tomar

$$\mathbf{g}_0 = -\frac{GM}{R^3} \mathbf{R} = -\frac{GM}{R^2} \mathbf{e}_3 \equiv -g_0 \mathbf{e}_3,$$

siendo

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} \simeq 9,80665 \text{ m s}^{-2}.$$

Escribiendo, por sencillez,

$$\mathbf{v}_m = \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{a}_m = \ddot{\mathbf{r}},$$

las ecuaciones del movimiento de la partícula en el sistema de ejes terrestre son

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}_0 - \mathbf{A} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Esta expresión se puede simplificar teniendo en cuenta que en este caso

$$\mathbf{V} = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_f = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_m + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R},$$

ya que $\mathbf{R} = R\mathbf{e}_3$ es constante en el sistema de ejes terrestre. Por la misma razón (teniendo en cuenta además que $\boldsymbol{\omega}$ es constante),

$$\mathbf{A} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_f = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}).$$

En consecuencia, las ecuaciones del movimiento de la partícula se reducen a

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (4.19a)$$

donde el vector *constante*

$$\mathbf{g} \equiv \mathbf{g}_0 - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \quad (4.19b)$$

es la **gravedad efectiva** en el punto O (es decir, la aceleración experimentada por una partícula instantáneamente en reposo en el punto O de la superficie terrestre). Evidentemente, si además de la gravedad actúa una fuerza externa $\mathbf{F}$ la ecuación del movimiento de la partícula es

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{F}}{m} + \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (4.20)$$

Ejercicio. Demostrar que en un punto de la superficie terrestre de latitud λ la plomada se desvía de la vertical en un ángulo $\delta(\lambda)$ dado por $\tan \delta(\lambda) = \omega^2 R \sin \lambda \cos \lambda / (g_0 - \omega^2 R \cos^2 \lambda)$, siendo R el radio de la Tierra y $g_0 = GM/R^2$ el valor real de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre. Hallar la latitud λ para la que $\delta(\lambda)$ es máximo y el valor máximo de $\delta(\lambda)$.

Solución. Por definición, la dirección de la plomada es la dirección de la que pende una masa en reposo suspendida de un hilo, es decir la dirección opuesta a la tensión $\mathbf{T}$ del hilo. Para hallar dicha dirección basta observar que la ecuación del movimiento de la masa del péndulo se obtiene sustituyendo $\mathbf{F} = \mathbf{T}/m$ en la ec. (4.20), es decir

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{\mathbf{T}}{m}.$$

Cuando la masa está en reposo $\dot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}} = 0$, y por tanto

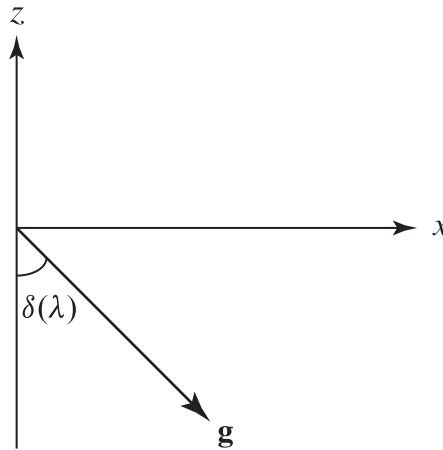
$$\frac{\mathbf{T}}{m} = -\mathbf{g} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \simeq -\mathbf{g}, \quad (4.21)$$

donde hemos despreciado el término $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ al ser

$$|\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})| \leq \omega^2 r \ll |\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})| = \omega^2 R \cos \lambda$$

excepto en las proximidades de los polos ($\lambda = \pm\pi/2$). De la ec. (4.21) se sigue que la dirección de la plomada coincide aproximadamente con la de la gravedad efectiva $\mathbf{g}$. Teniendo en cuenta que $\mathbf{g}_0 = -g_0\mathbf{e}_3$ y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{R} = \omega^2 R \sin \lambda (-\cos \lambda \mathbf{e}_1 + \sin \lambda \mathbf{e}_3) - \omega^2 R \mathbf{e}_3 \\ &= -\omega^2 R \cos \lambda (\sin \lambda \mathbf{e}_1 + \cos \lambda \mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

Figura 4.3: Gravedad efectiva $\mathbf{g}$ (en el hemisferio norte).

se obtiene

$$\mathbf{g} = g_0 (\gamma \sin \lambda \cos \lambda \mathbf{e}_1 - (1 - \gamma \cos^2 \lambda) \mathbf{e}_3), \quad \gamma \equiv \frac{\omega^2 R}{g_0} \simeq 3,45266 \cdot 10^{-3}.$$

El vector $\mathbf{g}$ tiene una componente

$$g_1 = \gamma g_0 \sin \lambda \cos \lambda = \frac{\omega^2 R}{2} \sin 2\lambda$$

en la dirección del vector $\mathbf{e}_1$ (cf. la Fig. 4.3). Por tanto $\mathbf{g}$ se desvía de la vertical (dirección del eje z) hacia el sur en el hemisferio norte ($\lambda > 0$) y hacia el norte en el hemisferio sur ($\lambda < 0$). El ángulo $\delta(\lambda)$ formado por el vector $\mathbf{g}$ con la vertical tiene tangente

$$\tan \delta(\lambda) = \frac{g_1}{|g_3|} = \frac{\gamma \sin \lambda \cos \lambda}{1 - \gamma \cos^2 \lambda} = \frac{\gamma \sin 2\lambda}{2 - \gamma - \gamma \cos 2\lambda}.$$

La derivada respecto de λ de la función $\tan \delta(\lambda)/(2\gamma)$ está dada por

$$\frac{(2 - \gamma - \gamma \cos 2\lambda) \cos 2\lambda - \gamma \sin^2 2\lambda}{(2 - \gamma - \gamma \cos 2\lambda)^2} = \frac{(2 - \gamma) \cos 2\lambda - \gamma}{(2 - \gamma - \gamma \cos 2\lambda)^2}.$$

La desviación $\delta(\lambda)$ será máxima por tanto cuando

$$\cos 2\lambda = \frac{\gamma}{2 - \gamma},$$

y la desviación máxima $\delta_{\max}$ está dada por

$$\tan \delta_{\max} = \operatorname{sgn} \lambda \frac{\gamma \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{(2-\gamma)^2}}}{2 - \gamma - \frac{\gamma^2}{2-\gamma}} = \frac{\gamma \operatorname{sgn} \lambda}{\sqrt{(2-\gamma)^2 - \gamma^2}} = \frac{\gamma \operatorname{sgn} \lambda}{2\sqrt{1-\gamma}} \simeq 1,72932 \cdot 10^{-3} \operatorname{sgn} \lambda,$$

es decir

$$\delta_{\max} \simeq 5,94495' \operatorname{sgn} \lambda.$$

Teniendo en cuenta que γ es del orden de 10^{-3} , el valor de la latitud $\lambda_{\max}$ para el que $\delta(\lambda)$ es máximo se puede calcular de forma aproximada poniendo $\lambda_{\max} = \pm(\frac{\pi}{4} - \varepsilon)$ y desarrollando $\cos 2\lambda_{\max}$ a primer orden en ε :

$$\begin{aligned} \cos 2\lambda_{\max} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\varepsilon\right) = \sin 2\varepsilon \simeq 2\varepsilon = \frac{\gamma}{2 - \gamma} \simeq \frac{\gamma}{2} \\ \Rightarrow \quad \varepsilon &\simeq \frac{\gamma}{4} \simeq 8,63165 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 2,96734'. \quad \square \end{aligned}$$

La ecuación del movimiento (4.19) es *exacta*. De hecho, dicha ecuación es un sistema (inhomogéneo) de ecuaciones *lineales* en las componentes del vector $\mathbf{r}$ con *coeficientes constantes*. Como se verá en el curso de *Métodos Matemáticos I*, este tipo de sistemas en principio se pueden resolver exactamente (por ejemplo, escribiéndolos como un sistema de primer orden en $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ y utilizando la exponencial matricial). En la práctica, es preferible simplificar primero la ec. (4.19) teniendo en cuenta el orden de magnitud de sus distintos sumandos. Más precisamente, el segundo término de (4.19b) es a lo sumo de orden $\gamma \sim 10^{-3}$ respecto del primero, mientras que el último término de (4.19a) es a lo sumo de orden $\gamma r/R$ respecto del primer término de dicha ecuación. Por tanto, si $r \ll R$ la ecuación del movimiento se puede aproximar por

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}_0 - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}. \quad (4.22)$$

Integrando una vez respecto de t obtenemos

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}_0 t - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{c},$$

donde $\mathbf{c}$ es un vector constante en el sistema de ejes terrestre. Aunque el sistema anterior se puede resolver *exactamente* (se trata de un sistema lineal inhomogéneo de primer orden con coeficientes constantes), resulta ventajoso en la práctica aprovechar el hecho de que si la velocidad $|\dot{\mathbf{r}}|$ no es muy grande el primer término del miembro derecho de (4.22) es mucho mayor que el segundo, ya que

$$\frac{g_0}{\omega} \simeq 1,34483 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1}.$$

Esto permite hallar una solución aproximada de (4.22), escrita como una ecuación de primer orden en la velocidad:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g}_0 - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad (4.23)$$

desarrollando $\mathbf{v}$ en potencias de ω :

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_1(t) + \omega \mathbf{v}_2(t) + O(\omega^2),$$

con

$$\mathbf{v}(0) \equiv \mathbf{v}_0 \implies \mathbf{v}_1(0) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}_2(0) = 0.$$

Sustituyendo en (4.23) se obtiene

$$\dot{\mathbf{v}}_1 + \omega \dot{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{g}_0 - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_1 + O(\omega^2),$$

de donde, igualando a cero por separado los términos $O(1)$ y $O(\omega)$, se sigue que

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{g}_0, \quad \omega \dot{\mathbf{v}}_2 = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_1.$$

Resolviendo este sistema primero respecto de $\mathbf{v}_1$ y a continuación respecto de $\mathbf{v}_2$ se obtiene fácilmente

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{g}_0 t + \mathbf{v}_0, \quad \omega \dot{\mathbf{v}}_2 = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 - 2t\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}_0 \implies \omega \mathbf{v}_2 = -2t\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 - t^2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}_0.$$

Por tanto

$$\mathbf{v} \simeq \mathbf{v}_1 + \omega \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}_0 t - 2t\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 - t^2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}_0,$$

e integrando respecto de t queda finalmente

$$\mathbf{r} \simeq \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{g}_0 \frac{t^2}{2} - t^2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 - \frac{t^3}{3}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}_0. \quad (4.24)$$

Ejercicio. Una partícula se lanza verticalmente desde un punto de la superficie terrestre de latitud λ norte hasta alcanzar una altura h . Demostrar que la partícula toca tierra en un punto situado $\frac{4}{3}\sqrt{8h^3/g_0}\omega \cos \lambda$ al oeste del punto inicial. (Considérense solamente alturas h pequeñas y despréciense la resistencia del aire.)

Aplicando la ec. (4.24), con

$$\mathbf{r}_0 = 0, \quad \mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_3 \implies -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 = \omega v_0 (\cos \lambda \mathbf{e}_1 - \sin \lambda \mathbf{e}_3) \times \mathbf{e}_3 = -\omega v_0 \cos \lambda \mathbf{e}_2$$

y, análogamente,

$$-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}_0 = \omega g_0 \cos \lambda \mathbf{e}_2,$$

se obtiene (aproximadamente)

$$\mathbf{r} = v_0 t \mathbf{e}_3 - \frac{g_0}{2} t^2 \mathbf{e}_3 + \left(-\omega v_0 \cos \lambda t^2 + \frac{\omega g_0}{3} t^3 \cos \lambda \right) \mathbf{e}_2.$$

Por tanto la ley horaria de la trayectoria es

$$x = 0, \quad y = \omega v_0 \cos \lambda t^2 \left(\frac{g_0 t}{3 v_0} - 1 \right), \quad z = v_0 t - \frac{g_0}{2} t^2.$$

La partícula toma tierra en el instante $t_0 > 0$ en que $z = 0$, es decir

$$t_0 = \frac{2v_0}{g_0},$$

y el valor de la coordenada y en dicho instante es por tanto

$$y(t_0) = -\frac{4}{3} \frac{\omega v_0^3}{g_0^2} \cos \lambda \leq 0.$$

Vemos, pues, que la partícula se desvía al *oeste*, tanto en el hemisferio norte como en el sur, siendo la desviación máxima en el ecuador ($\lambda = 0$). Para expresar la desviación hallada en función de la altura máxima h alcanzada por la partícula, basta tener en cuenta que dicha altura se obtiene imponiendo que $\dot{z} = 0$:

$$\dot{z} = v_0 - g_0 t = 0 \implies t = \frac{v_0}{g_0} \implies z \equiv h = \frac{v_0^2}{2g_0}.$$

Por tanto

$$y(t_0) = -\frac{4\omega}{3g_0^2} (2g_0 h)^{3/2} \cos \lambda = -\frac{4}{3} \omega \cos \lambda \sqrt{\frac{8h^3}{g_0}}.$$

A título de ejemplo,

$$h = 100 \text{ m}, \quad \lambda = 40^\circ 24' \text{ (latitud de Madrid)} \implies y(t_0) = -6,68758 \text{ cm}.$$

Supongamos, a continuación, que la partícula se suelta sin velocidad a una altura h . En este caso

$$\mathbf{r}_0 = h \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{v}_0 = 0,$$

y sustituyendo en (4.24) se obtiene

$$x = 0, \quad y = \frac{\omega g_0}{3} t^3 \cos \lambda, \quad z = h - \frac{g_0}{2} t^2.$$

Por tanto la partícula toca Tierra en el instante

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g_0}},$$

y su desviación en la dirección del eje y es

$$y(t_0) = \frac{\omega}{3} \cos \lambda \sqrt{\frac{8h^3}{g_0}}.$$

Nótese que en este caso $y(t_0) \geq 0$, y por tanto la desviación es hacia el *este*. □

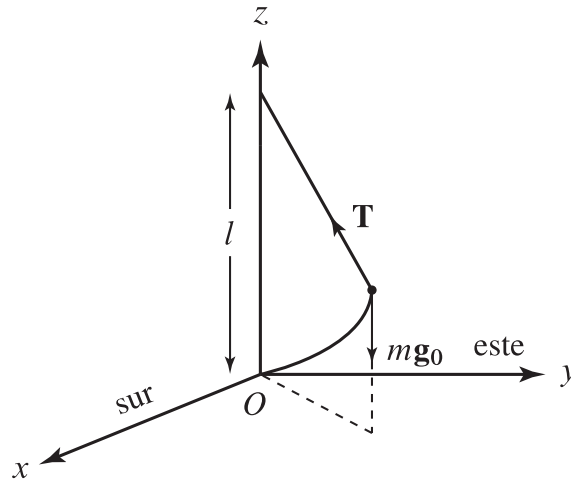


Figura 4.4: Péndulo de Foucault.

4.5 El péndulo de Foucault

En 1851, J.B.L. Foucault demostró experimentalmente la rotación de la Tierra utilizando el péndulo que hoy lleva su nombre, representado en la Fig. 4.4. Se estudian las pequeñas oscilaciones, y se supone por tanto que la longitud l del péndulo es muy grande frente a x, y, z . En este caso la fuerza total que actúa sobre la masa del péndulo es

$$m\mathbf{g}_0 + \mathbf{T},$$

donde la tensión $\mathbf{T}$ del hilo del péndulo está dada por

$$\mathbf{T} = T \frac{l\mathbf{e}_3 - \mathbf{r}}{|l\mathbf{e}_3 - \mathbf{r}|} = T \left(\mathbf{e}_3 - \frac{\mathbf{r}}{l} \right).$$

La ecuación (aproximada) del movimiento es por tanto

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}_0 + \frac{T}{m} \left(\mathbf{e}_3 - \frac{\mathbf{r}}{l} \right) - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}},$$

donde

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \omega \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -\cos \lambda & 0 & \sin \lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \omega [-\dot{y} \sin \lambda \mathbf{e}_1 + (\dot{x} \sin \lambda + \dot{z} \cos \lambda) \mathbf{e}_2 - \dot{y} \cos \lambda \mathbf{e}_3],$$

y por tanto

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{T}{lm}x + 2\omega\dot{y}\sin\lambda \\ \ddot{y} = -\frac{T}{lm}y - 2\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda) \\ \ddot{z} = -g_0 + \frac{T}{m}\left(1 - \frac{z}{l}\right) + 2\omega\dot{y}\cos\lambda. \end{cases} \quad (4.25)$$

Nótese que $z \ll \sqrt{x^2 + y^2}$, ya que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (z - l)^2 = l^2 &\implies l - z = \sqrt{l^2 - x^2 - y^2} = l - \frac{1}{2l}(x^2 + y^2) + O((x^2 + y^2)^2/l^3) \\ &\implies z = O((x^2 + y^2)/l). \end{aligned}$$

Podemos por tanto despreciar en las ecs. (4.25) las cantidades z , $\dot{z}$ y $\ddot{z}$ frente a x , y y sus derivadas. En particular, de la última de estas ecuaciones se sigue que

$$\frac{T}{m} \simeq g_0 - 2\omega \dot{y} \cos \lambda .$$

Sustituyendo en las dos primeras ecuaciones de (4.25) y despreciando términos de segundo orden en x , y y sus derivadas se llega finalmente al siguiente sistema en las coordenadas (x, y) :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha^2 x = 2\omega \dot{y} \sin \lambda \\ \ddot{y} + \alpha^2 y = -2\omega \dot{x} \sin \lambda , \end{cases} \quad (4.26)$$

donde

$$\alpha \equiv \sqrt{\frac{g_0}{l}}$$

es la frecuencia natural del péndulo.

Las ecuaciones anteriores se resuelven fácilmente introduciendo la variable compleja

$$u = x + iy ,$$

en términos de la cual adoptan la forma sencilla

$$\ddot{u} + 2i\Omega \dot{u} + \alpha^2 u = 0 , \quad \text{con } \Omega \equiv \omega \sin \lambda . \quad (4.27)$$

Se trata de una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes y polinomio característico

$$p(s) = s^2 + 2i\Omega s + \alpha^2 ,$$

cuyas raíces son los números complejos

$$s_{\pm} = -i\Omega \pm i\sqrt{\Omega^2 + \alpha^2} .$$

A todos los efectos prácticos, puede despreciarse el término Ω^2 en el radical frente a α^2 , ya que

$$\frac{\Omega^2}{\alpha^2} \leq \frac{\omega^2 l}{g_0} = \frac{l}{1,84422 \cdot 10^9 \text{ m}} .$$

Por tanto

$$s_{\pm} \simeq -i\Omega \pm i\alpha ,$$

y la solución general de (4.27) está dada en excelente aproximación por

$$u = e^{-i\Omega t} (c_1 e^{i\alpha t} + c_2 e^{-i\alpha t}) , \quad (4.28)$$

con c_1, c_2 constantes *complejas*. Hallemos, por ejemplo, la solución de las ecs. (4.26) que verifica las condiciones iniciales

$$x(0) = x_0 > 0 , \quad y(0) = 0 , \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0 ; \quad (4.29)$$

en otras palabras, la masa del péndulo se suelta sin velocidad a una distancia x_0 de la vertical en el plano Oxz . Si no existiera la rotación de la Tierra, las ecuaciones del movimiento (4.26) con las condiciones iniciales (4.29) tendrían la solución

$$x = x_0 \cos(\alpha t) , \quad y = 0 .$$

En otras palabras, el péndulo oscilaría con frecuencia α y amplitud x_0 alrededor de la vertical en el plano Oxz . Cuando $\omega \neq 0$, la solución (4.28) que verifica las condiciones (4.29) se calcula fácilmente teniendo en cuenta que

$$u(0) = x(0) + iy(0) = x_0 , \quad \dot{u}(0) = \dot{x}(0) + i\dot{y}(0) = 0 . \quad (4.30)$$

Imponiendo estas condiciones se obtiene

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_0, \\ i\alpha(c_1 - c_2) - i\Omega(c_1 + c_2) = i\alpha(c_1 - c_2) - i\Omega x_0 = 0 \end{cases} \implies c_1 - c_2 = \frac{\Omega}{\alpha} x_0 \simeq 0,$$

cuya solución aproximada es

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2} x_0.$$

Por tanto la solución de la ec. (4.27) buscada es aproximadamente

$$u = x_0 e^{-i\Omega t} \cos(\alpha t). \quad (4.31)$$

Tomando la parte real y la imaginaria se obtiene la solución de las ecuaciones (4.26) con las condiciones iniciales (4.30):

$$x = \operatorname{Re} u = x_0 \cos(\Omega t) \cos(\alpha t), \quad y = \operatorname{Im} u = -x_0 \sin(\Omega t) \cos(\alpha t). \quad (4.32)$$

Si utilizamos coordenadas polares (r, θ) en el plano Oxy las ecuaciones anteriores proporcionan

$$r = |u| = x_0 |\cos(\alpha t)|, \quad \theta = \arg u = -\Omega t - \frac{\pi}{2} (1 - \operatorname{sgn} \cos(\alpha t)), \quad (4.33)$$

donde el último término en la ecuación de θ se debe a que $\theta = -\Omega t - \pi$ cuando $\cos(\alpha t)$ es negativo, ya que entonces $r = -x_0 \cos(\alpha t)$. En cualquier caso, de (4.32) se sigue que la proyección del vector $\mathbf{r}$ sobre el plano Oxy está dada por

$$x_0 \cos(\alpha t) [\cos(\Omega t) \mathbf{e}_1 - \sin(\Omega t) \mathbf{e}_2] \equiv x_0 \cos(\alpha t) \mathbf{n}(t),$$

siendo

$$\mathbf{n}(t) = \cos(\Omega t) \mathbf{e}_1 - \sin(\Omega t) \mathbf{e}_2 \equiv R_3(-\Omega t) \mathbf{e}_1.$$

Por tanto el plano del péndulo, que está determinada por los vectores $\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{n}(t)$, forma un ángulo de $-\Omega t$ con el plano Oxz . De esta última observación se deduce que en el hemisferio norte, el plano del péndulo gira en sentido horario, es decir, este-sur (ya que $\dot{\theta} = -\Omega = -\omega \sin \lambda < 0$) con velocidad angular

$$\Omega = \omega \sin \lambda.$$

En el hemisferio sur la rotación del plano del péndulo es en sentido *antihorario* (ya que $\sin \lambda < 0$), y en el ecuador ($\lambda = 0$) no se observa. El período de la rotación del plano del péndulo está dado por

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega} \csc \lambda = \csc \lambda \text{ días sidéreos}.$$

Por ejemplo, a una latitud de 30° el período es de 2 días sidéreos, mientras que en Madrid ($\lambda = 40^\circ 24'$) dicho período es de 1,54292 días sidéreos. Obsérvese, por último, que (con las aproximaciones realizadas) el movimiento de la masa del péndulo no es exactamente periódico a menos que la razón α/Ω sea un número racional (cf. la Fig. 4.5).

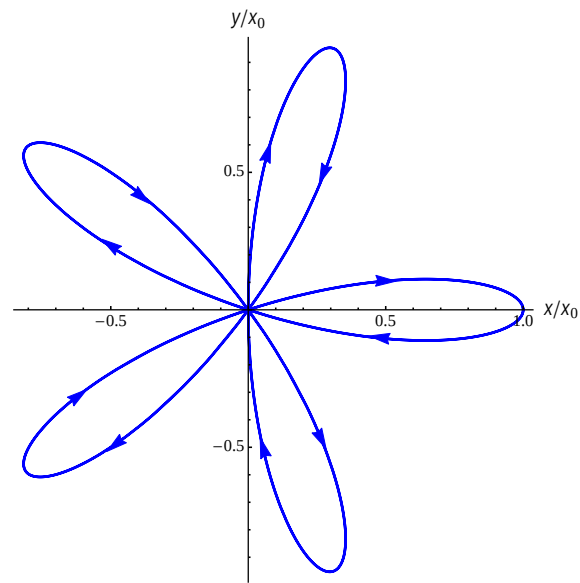


Figura 4.5: Proyección sobre el plano Oxy de la trayectoria seguida por la masa del péndulo si $\alpha/\Omega = 5$.

Capítulo 5

El sólido rígido

5.1 Momento angular y energía cinética de un sólido rígido

5.1.1 Grados de libertad

Un **sólido rígido** es un sistema de partículas de masa m_α ($\alpha = 1, \dots, N$) tal que la *distancia* entre dos partículas cualesquiera del sistema $|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|$ es constante. En otras palabras, un sólido rígido es un sistema mecánico de N partículas sujeto a las $N(N - 1)/2$ ligaduras holónomas independientes del tiempo (¡no todas ellas independientes!)

$$(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta)^2 = l_{\alpha\beta} = \text{const.}, \quad 1 \leq \alpha < \beta \leq N. \quad (5.1)$$

- Supondremos en lo que sigue que se cumple la tercera ley de Newton *en sentido fuerte*, es decir que la fuerza de ligadura $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ que ejerce la partícula β sobre la α satisface

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta} = -\mathbf{F}_{\beta\alpha} \parallel \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta.$$

Es fácil ver que en tal caso las ligaduras (5.1) son *ideales*, es decir se cumple el *principio de los trabajos virtuales*. En efecto, el trabajo realizado por las fuerzas de ligadura en un desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{r}_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, N$) de las partículas del sistema está dado por¹

$$\sum_{\alpha \neq \beta} \mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} (\mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_\alpha + \mathbf{F}_{\beta\alpha} \cdot d\mathbf{r}_\beta) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot (d\mathbf{r}_\alpha - d\mathbf{r}_\beta). \quad (5.2)$$

Por otra parte, derivando las ecuaciones de ligadura se obtiene

$$(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) \cdot (d\mathbf{r}_\alpha - d\mathbf{r}_\beta) = 0, \quad 1 \leq \alpha < \beta \leq N,$$

de donde se sigue (al ser $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ paralela al vector $\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta$) que

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot (d\mathbf{r}_\alpha - d\mathbf{r}_\beta) = 0, \quad 1 \leq \alpha < \beta \leq N.$$

Vemos por tanto que todos los sumandos en la última suma de (5.2) se anulan, y en consecuencia el trabajo realizado por las fuerzas de ligadura es efectivamente cero.

- *Un sólido rígido genérico* (es decir, que contiene tres partículas no colineales en un instante cualquiera) *tiene 6 grados de libertad*.

En efecto, si se conoce la posición de tres partículas no colineales P , Q y R del sólido se puede determinar la de cualquier otra partícula del sólido, ya que su distancia a las otras tres es constante.²

¹En lo que sigue, las sumas sobre índices *griegos* $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ se supondrán extendidas de 1 a N , mientras que los índices de suma *latinos* $i, j, k, \dots$ tomarán los valores de 1, 2, 3.

²Estrictamente hablando, las distancias de un punto A a los tres puntos P , Q y R determinan la posición de A salvo por una reflexión respecto del plano PQR . En otras palabras, si A no está en el plano PQR para determinar completamente la posición de dicho punto es necesario conocer, además de las tres distancias AP , AQ y AR , el *signo* del producto triple $\vec{PA} \cdot (\vec{PQ} \times \vec{PR})$. Pero, por *continuidad*, este signo también es constante.

Para determinar la posición de la partícula P necesitamos 3 coordenadas (por ejemplo, sus coordenadas cartesianas). A continuación podemos fijar el plano PQR mediante 2 coordenadas, por ejemplo las coordenadas esféricas del vector unitario

$$\mathbf{n} = \frac{\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}$$

perpendicular a dicho plano. Por último, para fijar la posición de las partículas Q y R en el plano ABC basta una coordenada, por ejemplo el ángulo que forma la recta PQ con una recta fija en dicho plano. En efecto, la posición de la partícula R está determinada a partir de estos datos y sus distancias a los puntos P y Q , ya que el signo del ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ está fijado por el sentido del vector $\mathbf{n}$.

- Siempre es posible construir un sistema de ejes móviles respecto del cual todas las partículas que componen el sólido están fijas (en reposo). Un sistema de este tipo se obtiene, por ejemplo, tomando como origen el punto P , el eje x en la dirección del vector $\overrightarrow{PQ}$, el eje y en la dirección de la recta del plano PQR perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$, orientada de forma que la coordenada y del punto R sea positiva, y el eje z en la dirección de $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$. En este sistema de ejes los puntos P , Q y R están fijos por construcción. Como cualquier otro punto del sólido está determinado por sus distancias a P , Q y R , de esto se sigue que las coordenadas de cualquier punto del sólido respecto del sistema de ejes que acabamos de definir son constantes. Evidentemente, hay infinitos sistemas de ejes con esta propiedad, obtenidos a partir del que acabamos de construir desplazando el origen en una distancia constante (es decir, situándolo en cualquier punto fijo en el sólido, como por ejemplo el CM) y aplicando a los ejes una rotación constante. Un sistema de ejes (móvil) cualquiera respecto del cual las partículas que componen el sólido están *en reposo* se denomina **sistema de ejes del cuerpo** (*body axes* en inglés).

- En la práctica, para fijar la posición de un sólido rígido se suelen utilizar las tres coordenadas cartesianas de un punto fijo en el sólido —usualmente su *centro de masas* C — junto con la orientación de un sistema de ejes del cuerpo con origen en C respecto de un sistema inercial (sistema de ejes fijos). Dicha orientación —o, equivalentemente, la matriz $O(t) \in \text{SO}(3)$ que relaciona los ejes del sistema fijo (inercial) con los ejes del cuerpo— se puede determinar mediante tres coordenadas independientes. Por ejemplo, basta dar el eje de rotación $\mathbf{n}$ (dos grados de libertad, ya que $|\mathbf{n}| = 1$) y el ángulo de rotación $\theta \in [0, \pi]$ que caracterizan la rotación $O(t)$. En la práctica, la forma más extendida de determinar la matriz $O(t)$ es a través de tres ángulos (los llamados *ángulos de Euler*), que definiremos más adelante.

- Las consideraciones anteriores son más intuitivas si las aplicamos a la *versión continua* de un sólido rígido, que consiste en una distribución continua de masa de densidad $\rho(\mathbf{r})$ en un volumen $B \subset \mathbb{R}^3$ cuya *forma* no varía con el tiempo. Para determinar el estado del sistema basta especificar como se pasa de su posición inicial $B(0)$ a su posición final $B(t)$. Para ello necesitamos una traslación $\mathbf{X}(t)$ que lleve un punto cualquiera $C(0)$ fijo en $B(0)$ (por ejemplo, su centro de masas) a su posición $C(t)$ en el instante t , junto con una rotación $O(t)$ alrededor de un eje que pase por $C(t)$ que lleve $B(0) + \mathbf{X}(t)$ a $B(t)$. Dicha rotación, a su vez, queda determinada por el *sistema de ejes del cuerpo* $\mathbf{e}_i(t) \equiv O(t)\mathbf{e}'_i$, $i = 1, 2, 3$ (siendo $\mathbf{e}'_i$ el i -ésimo vector unitario del sistema inercial), que está fijo en el sólido. Por tanto para fijar la posición del sólido en cada instante t podemos utilizar las tres coordenadas cartesianas del desplazamiento $\mathbf{X}(t)$, junto con los tres parámetros necesarios para especificar la rotación $O(t)$. Como en el caso discreto, esto implica que un sólido rígido continuo posee 6 grados de libertad.

Ejercicio. ¿Cuántos grados de libertad posee un *rotor* (sólido rígido cuyas partículas están en una recta)?

5.1.2 Momento angular y energía cinética

Calculemos a continuación el momento angular del sólido respecto de un sistema inercial cualquiera, al que continuaremos denominando (como en el capítulo anterior) *sistema de ejes fijos*. Sea de nuevo $\mathbf{R}(t)$ el vector que une el origen O' del sistema fijo con el *centro de masas del sólido*, que a partir de ahora tomaremos como origen del sistema de ejes del cuerpo. Si llamamos $\mathbf{r}_\alpha$ y $\mathbf{r}'_\alpha$ a las coordenadas de la

partícula α del sólido respecto del sistema de ejes del cuerpo con origen en el CM (el *sistema móvil* del capítulo anterior) y del sistema fijo, respectivamente, se tiene

$$\mathbf{r}'_{\alpha} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{\alpha} .$$

Como en este caso $\dot{\mathbf{r}}_{\alpha} = 0$ (ya que en el sistema del cuerpo las partículas que constituyen el sólido se hallan en reposo), la ec. (4.14) se convierte en

$$\mathbf{v}'_{\alpha} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha} , \quad (5.3)$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular de los ejes del cuerpo respecto de los ejes fijos, y hemos utilizado la notación

$$\mathbf{v}'_{\alpha} = \left(\frac{d\mathbf{r}'_{\alpha}}{dt} \right)_f , \quad \mathbf{V} = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_f .$$

• Nótese que el vector $\boldsymbol{\omega}(t)$ marca la dirección del **eje instantáneo de rotación** del sólido alrededor de su CM en el instante t .

En efecto, la variación del vector de posición respecto del CM de cualquier partícula del sólido, $\mathbf{r}_{\alpha}$, medida en el sistema fijo es

$$\left(\frac{d\mathbf{r}_{\alpha}}{dt} \right)_f = \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}_{\alpha} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}_{\alpha} . \quad (5.4)$$

Por tanto las partículas del sólido giran *instantáneamente* con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}(t)$ alrededor del eje paralelo al vector $\mathbf{n}(t) = \boldsymbol{\omega}(t)/\omega(t)$ que pasa por el CM.

El momento lineal del sólido está dado por

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} = M \mathbf{V} , \quad (5.5)$$

donde

$$M = \sum_{\alpha} m_{\alpha}$$

es la masa del sólido, y hemos utilizado la identidad

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} = 0 \quad (5.6)$$

(ya que el miembro izquierdo es el vector de posición del CM respecto del propio CM). Nótese que la expresión (5.5) coincide con la ec. (1.56) obtenida en el Capítulo 1.

Hallems a continuación el momento angular del sistema respecto del origen O' del sistema fijo, dado por

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \times \mathbf{v}'_{\alpha} .$$

Sustituyendo la fórmula deducida anteriormente para $\mathbf{v}'_{\alpha}$ y utilizando la identidad (5.6) obtenemos fácilmente

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{R} + \mathbf{r}_{\alpha}) \times (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) = M \mathbf{R} \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \right) + \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \right) \times \mathbf{V} \\ &\quad + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) = M \mathbf{R} \times \mathbf{V} + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) . \end{aligned} \quad (5.7)$$

Nótese que esta expresión es esencialmente la ec. (1.61) obtenida anteriormente, en virtud de la ec. (5.4). El primer término de (5.7) es simplemente el momento angular de una partícula situada en el CM y de

masa igual a la del sólido. Para interpretar el segundo término, nótese en primer lugar que el momento angular del sólido respecto de un punto cualquiera P es por definición

$$\mathbf{L}_P = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{r}'_{\alpha} - \overrightarrow{O'P}) \times \mathbf{v}'_{\alpha},$$

donde $\mathbf{r}'_{\alpha} - \overrightarrow{O'P}$ es el vector de posición de la partícula α respecto del punto P . Aplicando la fórmula para $\mathbf{v}'_{\alpha}$, la identidad (5.6) y la definición del momento angular *respecto del centro de masas* $\mathbf{L}_{\text{CM}}$ se obtiene

$$\mathbf{L}_{\text{CM}} \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{v}'_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}). \quad (5.8)$$

En definitiva,

$$\mathbf{L} = M\mathbf{R} \times \mathbf{V} + \mathbf{L}_{\text{CM}}, \quad \mathbf{L}_{\text{CM}} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}). \quad (5.9)$$

• Es importante advertir que, aunque $\mathbf{L}_{\text{CM}}$ es el momento del sistema respecto del centro de masas, *está calculado en el sistema fijo S'* , ya que las velocidades de las partículas en (5.8) están referidas a dicho sistema.

Procediendo del mismo modo podemos calcular la energía cinética del sólido (respecto del sistema inercial)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha}{}^2.$$

Sustituyendo de nuevo la fórmula para $\mathbf{v}'_{\alpha}$ y utilizando la identidad (5.6) se obtiene la expresión

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2 = \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2 \equiv \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + T_{\text{rot}}, \quad (5.10)$$

que coincide con (1.65) en virtud de (5.4). El primer término es la energía de traslación del CM, mientras que el segundo es la **energía rotacional** del sólido alrededor del CM

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2. \quad (5.11)$$

Utilizando las identidades vectoriales

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2,$$

las ecuaciones (5.9) y (5.11) se pueden escribir en la forma alternativa

$$\mathbf{L}_{\text{CM}} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [r_{\alpha}^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{\alpha}) \mathbf{r}_{\alpha}], \quad T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\omega^2 r_{\alpha}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{\alpha})^2], \quad (5.12)$$

de donde se deduce la importante identidad

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_{\text{CM}}. \quad (5.13)$$

Nótese que en todas las expresiones anteriores los vectores $\mathbf{L}_{\text{CM}}$ y $\boldsymbol{\omega}$, y por tanto la energía rotacional T_{rot} , son en general funciones del tiempo.

5.2 Tensor de inercia

5.2.1 Definición y propiedades elementales

Las expresiones obtenidas en la sección anterior para el momento angular respecto del CM y la energía rotacional de un sólido rígido se pueden simplificar considerablemente mediante la introducción del llamado *tensor de inercia*. Dado que la energía rotacional se expresa en términos de $\mathbf{L}_{\text{CM}}$ mediante la ec. (5.13), basta restringirnos al momento angular. La observación fundamental es que la ec. (5.12) para $\mathbf{L}_{\text{CM}}$ indica claramente que, aunque en general $\mathbf{L}_{\text{CM}}$ *no* es paralelo a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, es una *función lineal* de dicho vector. En otras palabras, podemos escribir

$$\mathbf{L}_{\text{CM}} = I \boldsymbol{\omega}, \quad (5.14)$$

donde $I : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal o, equivalentemente, una matriz 3×3 cuyos elementos de matriz calcularemos a continuación. Para ello basta notar que, si $x_{\alpha i}$ ($i = 1, 2, 3$) denota las componentes del vector $\mathbf{r}_\alpha$, la componente i de $\mathbf{L}_{\text{CM}}$ está dada por

$$\begin{aligned} L_{\text{CM},i} &= \omega_i \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha}^2 - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha i} \sum_j \omega_j x_{\alpha j} = \omega_i \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha}^2 - \sum_j \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha i} x_{\alpha j} \\ &= \sum_j \omega_j \delta_{ij} \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha}^2 - \sum_j \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha i} x_{\alpha j} = \sum_j \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\delta_{ij} r_{\alpha}^2 - x_{\alpha i} x_{\alpha j}). \end{aligned}$$

Se tiene por tanto

$$L_{\text{CM},i} = \sum_j I_{ij} \omega_j, \quad (5.15a)$$

donde el elemento de matriz I_{ij} está dado por

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\delta_{ij} r_{\alpha}^2 - x_{\alpha i} x_{\alpha j}). \quad (5.15b)$$

La aplicación lineal I cuyos elementos de matriz están dados por (5.15b) se denomina **tensor de inercia** del sólido³. Es importante observar que, aunque tanto $\mathbf{L}_{\text{CM}}$ como $\boldsymbol{\omega}$ en general dependen de t , los elementos de matriz (5.15b) del tensor de inercia son *constantes en el sistema de ejes del cuerpo*. En efecto, en el sistema de ejes del cuerpo las coordenadas cartesianas $x_{\alpha i}$ ($i = 1, 2, 3$) de las partículas del sólido no dependen del tiempo. En otras palabras, *en el sistema de ejes del cuerpo el tensor de inercia es una matriz constante característica del sólido*, que solo depende de la elección inicial de dichos ejes.

- De la expresión (5.15b) se sigue inmediatamente que el tensor de inercia es *simétrico*:

$$I_{ij} = I_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Los elementos de matriz diagonales del tensor de inercia están dados por

$$I_{ii} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha j}^2 + x_{\alpha k}^2), \quad i = 1, 2, 3,$$

con (i, j, k) distintos entre sí. En otras palabras,

$$I_{ii} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha i}^2,$$

donde $d_{\alpha i}$ es la distancia de la partícula α al eje i . Por tanto el elemento de matriz I_{ii} es el llamado **momento de inercia** del sólido respecto del eje $\mathbf{e}_i$. Los elementos extradiagonales de I están dados simplemente por

$$I_{ij} = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha i} x_{\alpha j}, \quad 1 \leq i \neq j \leq 3,$$

³La denominación es debida a que en general una aplicación lineal es un tensor una vez covariante y otra contravariante, aunque en coordenadas cartesianas *ortogonales* no hay distinción entre índices covariantes y contravariantes.

es decir son los **productos de inercia** del sólido (con signo negativo). En el caso de un sólido continuo B de densidad $\rho(\mathbf{r})$, hay que reemplazar las expresiones anteriores por sus análogas continuas:

$$I_{ij} = \int_B \rho(\mathbf{r}) (\delta_{ij} r^2 - x_i x_j) d^3 \mathbf{r}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (5.16)$$

o, más detalladamente,

$$I_{ii} = \int_B \rho(\mathbf{r}) (x_j^2 + x_k^2) d^3 \mathbf{r}, \quad i = 1, 2, 3,$$

(con (i, j, k) distintos entre sí) junto con

$$I_{ij} = - \int_B \rho(\mathbf{r}) x_i x_j d^3 \mathbf{r}, \quad 1 \leq i \neq j \leq 3.$$

• En virtud de la identidad (5.13), la energía rotacional del sólido se expresa en términos de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y del tensor de inercia I mediante la fórmula

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (I \boldsymbol{\omega}). \quad (5.17)$$

En otras palabras, T_{rot} es una *forma cuadrática* en las componentes de $\boldsymbol{\omega}$, cuya matriz está dada de nuevo por las expresiones (5.15b). Como $T_{\text{rot}} \geq 0$ para todo $\boldsymbol{\omega}$, dicha forma cuadrática —o, equivalentemente, el tensor de inercia I — es *semidefinida positiva*. Nótese también que, utilizando la notación matricial habitual, podemos escribir la expresión anterior en la forma

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T I \boldsymbol{\omega},$$

si interpretamos $\boldsymbol{\omega}$ como el vector *columna* cuyo i -ésima componente es ω_i e I como la matriz real 3×3 con elementos de matriz (I_{ij}) .

La energía rotacional del sólido se puede expresar también en la forma

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega^2 \mathbf{n} \cdot I \mathbf{n},$$

donde $\mathbf{n} = \boldsymbol{\omega}/\omega$ es la dirección del eje instantáneo de rotación alrededor del CM. Si (por ejemplo) $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$ se tiene

$$\mathbf{n} \cdot I \mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \cdot \sum_i I_{i1} \mathbf{e}_i = I_{11}.$$

Por tanto, en general, $\mathbf{n} \cdot I \mathbf{n}$ es el momento de inercia del sólido respecto del eje instantáneo de rotación, que denotaremos por $I_{\mathbf{n}}$. Se obtiene de esta forma la conocida fórmula

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{\mathbf{n}} \omega^2.$$

5.2.2 Teorema de Steiner

Veamos a continuación como varía el tensor de inercia cuando lo calculamos respecto de un punto cualquiera P fijo en el cuerpo que no necesariamente coincida con el CM. Si denotamos por $\tilde{\mathbf{r}}_\alpha$ el vector de posición de la partícula α respecto del punto P , el tensor de inercia $I^{(P)}$ tomando P como origen está dado por

$$I_{ij}^{(P)} = \sum_\alpha m_\alpha (\delta_{ij} \tilde{\mathbf{r}}_\alpha^2 - \tilde{x}_{\alpha i} \tilde{x}_{\alpha j}). \quad (5.18)$$

Teniendo en cuenta que

$$\tilde{\mathbf{r}}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha + \mathbf{a},$$

donde $\mathbf{a} = \overrightarrow{PC}$, y sustituyendo en la expresión anterior para $I^{(P)}$ se obtiene

$$I_{ij}^{(P)} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\delta_{ij} (\mathbf{r}_{\alpha} + \mathbf{a})^2 - (x_{\alpha i} + a_i)(x_{\alpha j} + a_j)] = I_{ij} + M(\mathbf{a}^2 \delta_{ij} - a_i a_j) \\ + 2\delta_{ij} \mathbf{a} \cdot \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} - a_i \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha j} - a_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha i} .$$

Los últimos tres términos se anulan en virtud de la identidad (5.6), por lo que finalmente queda

$$I_{ij}^{(P)} = I_{ij} + M(\mathbf{a}^2 \delta_{ij} - a_i a_j) , \quad (5.19)$$

identidad conocida como *teorema de Steiner*. Nótese que el segundo sumando de (5.19), al ser invariante bajo el cambio $\mathbf{a} \mapsto -\mathbf{a}$, coincide con el tensor de inercia respecto del CM de una partícula de masa M situada en el nuevo origen P .

Si un punto P fijo en el sólido está fijo en algún sistema inercial, es posible (y de hecho suele ser muy ventajoso) situar el origen O' de dicho sistema en P . En tal caso el vector $\mathbf{R} = \overrightarrow{O'C} \equiv \overrightarrow{PC}$ es constante en el sistema de ejes del cuerpo, ya que sus extremos P y C están ambos fijos en el sólido. Por tanto en este caso la velocidad del CM en el sistema fijo se puede expresar en la forma

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} ,$$

y en consecuencia

$$\mathbf{v}'_{\alpha} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{\alpha} + \mathbf{R}) .$$

El momento angular $\mathbf{L}$ del sólido respecto de $P \equiv O'$ está dado por

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \times \mathbf{v}'_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} + \mathbf{R}) \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{\alpha} + \mathbf{R})) ,$$

es decir se obtiene reemplazando $\mathbf{r}_{\alpha}$ por $\mathbf{r}_{\alpha} + \mathbf{R}$ en la expresión (5.9) de $\mathbf{L}_{\text{CM}}$. En otras palabras,

$$\mathbf{L} = I' \boldsymbol{\omega} ,$$

donde I' se obtiene a partir de I reemplazando $\mathbf{r}_{\alpha}$ por $\mathbf{r}_{\alpha} + \mathbf{R}$. La aplicación lineal I' no es otra cosa que (5.18) con $\mathbf{a} = \mathbf{R}$, es decir el tensor de inercia del sólido respecto del origen $O' \equiv P$ del sistema de ejes fijos. En definitiva, se tiene

$$\mathbf{L} = I' \boldsymbol{\omega} , \quad I' \equiv I^{(P)} . \quad (5.20)$$

Del mismo modo,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha}{}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{\alpha} + \mathbf{R}))^2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I' \boldsymbol{\omega} . \quad (5.21)$$

Nótese que I' se puede calcular a partir de I aplicando el teorema de Steiner (5.19), es decir

$$I'_{ij} = I_{ij} + M(\mathbf{R}^2 \delta_{ij} - X_i X_j) ,$$

donde X_i ($i = 1, 2, 3$) son las componentes del vector $\mathbf{R}$. Obsérvese también que, al igual que I , la matriz I' es constante (independiente del tiempo) si las coordenadas de los vectores se calculan respecto del sistema de ejes del cuerpo. A partir de ahora normalmente omitiremos la prima cuando quede claro por el contexto respecto de qué punto se calcula el tensor de inercia.

5.2.3 Ejes principales de inercia

Veamos a continuación cómo cambian las componentes del tensor de inercia (5.15b) (respecto del centro de masas, o en general de cualquier punto P fijo en el sólido) cuando efectuamos una rotación de los ejes del sistema del cuerpo. Más concretamente, sea

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_j a_{ji} \mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.22)$$

un segundo triedro positivamente orientado fijo en el cuerpo. Entonces la *matriz de cambio de base*

$$A \equiv (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$$

es una matriz ortogonal propia *constante* (es decir, $A \in \text{SO}(3)$ es independiente de t). Como es bien sabido, la transformación de las coordenadas (o, en general, de las componentes de cualquier vector) está dada por

$$x_i = \sum_j a_{ij} \tilde{x}_j;$$

en efecto,

$$\sum_j \tilde{x}_j \tilde{\mathbf{e}}_j = \sum_j \tilde{x}_j \sum_i a_{ij} \mathbf{e}_i = \sum_{i,j} a_{ij} x_j \mathbf{e}_i \equiv \sum_i x_i \mathbf{e}_i \implies x_i = \sum_j a_{ij} \tilde{x}_j.$$

Si denotamos por x al vector columna cuyas componentes son las coordenadas x_i , y análogamente $\tilde{x} = (\tilde{x}_i)$, entonces podemos escribir la relación anterior en la forma matricial

$$x = A \tilde{x}.$$

Utilizando esta notación, y denotando por I la matriz del tensor de inercia respecto del sistema de ejes $\mathbf{e}_i$, se tiene

$$L_{\text{CM}} = I \omega = I A \tilde{\omega} = A \tilde{L}_{\text{CM}} \implies \tilde{L}_{\text{CM}} = A^{-1} I A \tilde{\omega} \equiv \tilde{I} \tilde{\omega}.$$

Por tanto la matriz del tensor de inercia en el nuevo sistema de ejes está dada por

$$\tilde{I} = A^{-1} I A = A^T I A,$$

ya que la matriz A es ortogonal. Nótese que la energía rotacional en el nuevo sistema de ejes del cuerpo está dada por

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega^T I \omega = \frac{1}{2} \tilde{\omega}^T A^T I A \tilde{\omega} \equiv \frac{1}{2} \tilde{\omega}^T \tilde{I} \tilde{\omega},$$

lo que concuerda con la expresión que acabamos de obtener para la matriz $\tilde{I}$.

Es bien conocido que *una matriz simétrica real se puede diagonalizar mediante una transformación ortogonal propia*⁴. En otras palabras, es posible escoger la matriz $A \in \text{SO}(3)$ de forma que en el nuevo sistema de ejes del cuerpo (5.22) se tenga

$$\tilde{I}_{ij} = \delta_{ij} I_i, \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

siendo I_1, I_2 e I_3 los *autovalores* del tensor de inercia I . Equivalentemente, *es posible encontrar un nuevo sistema de ejes del cuerpo cada uno de cuyos vectores $\tilde{\mathbf{e}}_i$ sea un autovector de la aplicación lineal I con autovalor I_i* :

$$I \tilde{\mathbf{e}}_i = I_i \tilde{\mathbf{e}}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.23)$$

Los vectores $\tilde{\mathbf{e}}_i$ que satisfacen las relaciones (5.23) se denominan **ejes principales de inercia** del sólido, y sus correspondientes autovalores I_i son los **momentos principales de inercia**. Como es bien sabido,

⁴Esencialmente, esto se debe a que: i) toda matriz simétrica real es diagonalizable; ii) sus autovalores son todos reales, y iii) dos autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales entre sí.

los autovalores de la matriz (I_{ij}) , es decir los momentos principales de inercia, son las raíces de la **ecuación secular**

$$\det(I_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0.$$

Nótese que los ejes principales de inercia, es decir los autovectores de la matriz (I_{ij}) , solo están unívocamente determinados (salvo un signo) si todos los autovalores del tensor de inercia son distintos entre sí (es decir, son raíces *simples* de la ecuación secular).

- Si el sistema de ejes del cuerpo $\mathbf{e}_i$ es un sistema de ejes principales de inercia, las expresiones (5.14) y (5.17) adoptan la forma más sencilla

$$\mathbf{L}_{\text{CM}} = \sum_i I_i \omega_i \mathbf{e}_i, \quad T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2. \quad (5.24)$$

En particular, si el sólido gira alrededor del i -ésimo eje principal entonces

$$\mathbf{L}_{\text{CM}} = I_i \boldsymbol{\omega}, \quad T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_i \omega^2.$$

Si el origen del sistema de ejes fijo es también un punto fijo en el sólido, expresiones análogas a las anteriores son válidas para $\mathbf{L}$ y T sin más que reemplazar I por el tensor de inercia I' respecto del punto O' .

- Atendiendo a la multiplicidad de los autovalores de su tensor de inercia, los sólidos rígidos se pueden clasificar en las tres categorías siguientes:

1. *Trompo asimétrico*: $I_i \neq I_j$ si $i \neq j$
2. *Trompo (axialmente) simétrico*: $I_1 = I_2 \neq I_3$
3. *Trompo esféricamente simétrico*: $I_1 = I_2 = I_3$.

Ejemplo 5.1. Estudiaremos en este ejemplo las implicaciones que determinadas *simetrías* de un sólido continuo B tienen en relación con su tensor de inercia.

- 1) Si B y ρ son invariantes bajo la reflexión $x_i \mapsto -x_i$, entonces

$$I_{ij} = 0, \quad \forall j \neq i.$$

En efecto, supongamos que (por ejemplo) B es invariante bajo la reflexión de la coordenada x_1 y $\rho(-x_1, x_2, x_3) = \rho(x_1, x_2, x_3)$. En tal caso, si efectuamos el cambio de variable

$$x_1 = -x'_1, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3$$

en la integral que proporciona la componente I_{1j} del tensor de inercia (con $j \neq 1$) obtenemos

$$\begin{aligned} -I_{1j} &= \int_B \rho(\mathbf{r}) x_1 x_j d^3 \mathbf{r} = - \int_{B'} \rho(-x'_1, x'_2, x'_3) x'_1 x'_j d^3 \mathbf{r}' = - \int_B \rho(x'_1, x'_2, x'_3) x'_1 x'_j d^3 \mathbf{r}' = I_{1j} \\ \implies I_{1j} &= 0, \quad j \neq 1. \end{aligned}$$

- 2) Si B y ρ son invariantes bajo la permutación $x_i \mapsto x_j$, entonces

$$I_{ii} = I_{jj}, \quad I_{ik} = I_{jk} \quad (k \neq i, j).$$

En efecto, si (por ejemplo) B es invariante bajo $x_1 \mapsto x_2$ y $\rho(x_2, x_1, x_3) = \rho(x_1, x_2, x_3)$ efectuando el cambio de variable

$$x_1 = x'_2, \quad x_2 = x'_1, \quad x_3 = x'_3$$

en la integral de I_{11} obtenemos

$$I_{11} = \int_B \rho(\mathbf{r})(x_2^2 + x_3^2) d^3\mathbf{r} = \int_{B'} \rho(x'_2, x'_1, x'_3)(x_1'^2 + x_3'^2) d^3\mathbf{r}' = \int_B \rho(x'_1, x'_2, x'_3)(x_1'^2 + x_3'^2) d^3\mathbf{r}' = I_{22}.$$

Análogamente,

$$-I_{13} = \int_B \rho(\mathbf{r})x_1x_3 d^3\mathbf{r} = \int_{B'} \rho(x'_2, x'_1, x'_3)x'_2x'_3 d^3\mathbf{r}' = \int_B \rho(x'_1, x'_2, x'_3)x'_2x'_3 d^3\mathbf{r}' = -I_{23}.$$

Observaciones análogas pueden hacerse acerca de las coordenadas del *centro de masas*. Por ejemplo, si B y ρ son invariantes bajo la reflexión $x_i \mapsto -x_i$ entonces la coordenada i del centro de masas se anula, ya que (tomando, por sencillez, $i = 1$)

$$\begin{aligned} X_1 &= \int_B \rho(\mathbf{r})x_1 d^3\mathbf{r} = - \int_{B'} \rho(-x'_1, x'_2, x'_3)x'_1 d^3\mathbf{r}' = - \int_B \rho(x'_1, x'_2, x'_3)x'_1 d^3\mathbf{r}' = -X_1 \\ \implies X_1 &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.2. Supongamos que el sólido es un *sólido homogéneo* ($\rho = \text{const.}$) *de revolución* alrededor del eje $\mathbf{e}_3$. En coordenadas cilíndricas (r, φ, z) , el sólido está dado por una ecuación de la forma

$$0 \leq r \leq f(z), \quad z_1 \leq z \leq z_2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Por simetría, el centro de masas del sólido es un punto del eje z , que podemos tomar como el origen de coordenadas. La simetría alrededor del eje z implica la invariancia del sólido bajo las transformaciones

$$x_1 \mapsto -x_1, \quad x_2 \mapsto -x_2, \quad x_1 \mapsto x_2.$$

Por tanto

$$I_{11} = I_{22}, \quad I_{ij} = 0 \quad (i \neq j),$$

y las únicas componentes del tensor de inercia que es preciso calcular son I_{11} e I_{33} . Dichas componentes están dadas por

$$\begin{aligned} I_{11} &= I_{22} = \rho \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^{f(z)} dr \int_0^{2\pi} r d\varphi \cdot (z^2 + r^2 \sin^2 \varphi) \\ &= \pi \rho \int_{z_1}^{z_2} z^2 f^2(z) dz + \frac{\pi \rho}{4} \int_{z_1}^{z_2} f^4(z) dz, \\ I_{33} &= \rho \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^{f(z)} dr \int_0^{2\pi} r d\varphi \cdot r^2 = \frac{\pi \rho}{2} \int_{z_1}^{z_2} f^4(z) dz, \end{aligned}$$

que en general es distinto de I_{11} . Esto prueba que el tensor de inercia del sólido es diagonal, con momentos principales $I_1 = I_2$ en general distintos de I_3 . Más precisamente, se verifica la relación

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_3 + \pi \rho \int_{z_1}^{z_2} z^2 f^2(z) dz.$$

Por tanto un sólido de revolución es en general un trompo axialmente simétrico. Nótese, además, que en este caso el eje de simetría es un eje principal de inercia, y también lo es cualquier eje perpendicular a él.

Por ejemplo, en el caso de un *cilindro* de radio a y altura h podemos tomar $f(z) = a$, $z_1 = -h/2$ y $z_2 = h/2$, ya que por simetría el centro de masas del cilindro es equidistante de sus bases. Por tanto

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{\pi}{2} \rho a^4 h = \frac{1}{2} M a^2, \\ I_1 &= I_2 = \frac{1}{2} I_3 + \pi \rho a^2 \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{1}{4} M a^2 + 2\pi \rho a^2 \int_0^{h/2} z^2 dz = \frac{1}{4} M a^2 + \frac{1}{12} \pi \rho a^2 h^3 \\ &= \frac{1}{4} M \left(a^2 + \frac{h^2}{3} \right). \end{aligned}$$

Nótese, en particular, que el cilindro es un trompo esféricamente simétrico si $h = \sqrt{3}a$.

5.3 Ecuaciones del movimiento de un sólido rígido

5.3.1 Ecuaciones del movimiento de un sólido rígido en un sistema inercial

Dado que (en general) un sólido rígido tiene 6 grados de libertad, es de esperar que se necesiten 6 ecuaciones diferenciales para determinar su movimiento. Las tres primeras de estas ecuaciones son obviamente las ecuaciones del movimiento del centro de masas del sólido, que, como vimos en el Capítulo 1, son simplemente

$$M \left(\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \right)_f = \mathbf{F}. \quad (5.25)$$

En el miembro derecho

$$\mathbf{F} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}$$

denota la suma de las fuerzas *externas* que actúan sobre las partículas del sólido (recuérdese que, en virtud de la tercera ley de Newton, la suma de las fuerzas internas es nula). Las restantes tres ecuaciones son las ecuaciones del movimiento del momento angular del sólido, es decir

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_f = \mathbf{N}. \quad (5.26)$$

De nuevo, en el miembro derecho $\mathbf{N}$ denota el par total de las fuerzas *externas* que actúan sobre cada partícula del sólido:

$$\mathbf{N} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha},$$

ya que las fuerzas internas no contribuyen a la suma si se cumple la tercera ley de Newton en sentido fuerte.

En la ecuación (5.26) tanto el momento angular como el par total de las fuerzas externas están calculados respecto del origen O' del sistema fijo. De hecho, *dicha ecuación también es válida si sustituimos $\mathbf{L}$ por $\mathbf{L}_{CM}$ y $\mathbf{N}$ por el par de las fuerzas externas respecto del CM*. En efecto, de la relación $\mathbf{L} = M\mathbf{R} \times \mathbf{V} + \mathbf{L}_{CM}$ y de la ecuación del movimiento del CM se sigue que

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_f = \left(\frac{d\mathbf{L}_{CM}}{dt} \right)_f + \mathbf{R} \times \mathbf{F} = \mathbf{N} = \sum_{\alpha} (\mathbf{R} + \mathbf{r}_{\alpha}) \times \mathbf{F}_{\alpha} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \mathbf{N}_{CM},$$

y por tanto

$$\left(\frac{d\mathbf{L}_{CM}}{dt} \right)_f = \mathbf{N}_{CM}, \quad (5.27)$$

siendo

$$\mathbf{N}_{CM} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha} \quad (5.28)$$

el par de las fuerzas externas respecto del CM.

• En general, si la fuerza total que actúa sobre el sistema es nula el par $\mathbf{N}$ no depende del punto respecto del cuál se calcula. En efecto, si $\mathbf{F} \equiv \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} = 0$ se tiene

$$\sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} + \mathbf{a}) \times \mathbf{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha} + \mathbf{a} \times \mathbf{F} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}.$$

Ejercicio. Probar que la condición para que un sólido rígido esté en equilibrio en un sistema inercial es que $\mathbf{F} = \mathbf{N} = 0$.

En general, el sólido está en equilibrio en un sistema inercial —es decir $\mathbf{v}'_{\alpha} = 0$ para todo t — si y solo si $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} = 0$, ya que⁵

$$\mathbf{v}'_{\alpha} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}.$$

⁵Estrictamente hablando, este resultado solo es válido si el sólido rígido no es lineal (ejercicio).

Supongamos, en primer lugar, que el sólido está en equilibrio. Entonces $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} = 0$, y por tanto $\mathbf{L} = M\mathbf{R} \times \mathbf{V} + I\boldsymbol{\omega} = 0$. Sustituyendo en las ecuaciones del movimiento (5.25)-(5.26) se obtiene inmediatamente $\mathbf{F} = \mathbf{N} = 0$. El recíproco de esta afirmación es el siguiente: si $\mathbf{F} = \mathbf{N} = 0$, e inicialmente $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} = 0$, entonces el sólido está en equilibrio. En efecto, si $\mathbf{F} = \mathbf{N} = 0$ las ecuaciones del movimiento implican que $\mathbf{V}$ y $\mathbf{L}$ son constantes *en el sistema fijo*. Si inicialmente $\mathbf{V}(0) = 0$, entonces $\mathbf{V}(t) = 0$ y $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(0)$ para todo t . Esto implica que $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{CM}} + M\mathbf{R} \times \mathbf{V} = \mathbf{L}_{\text{CM}} = I\boldsymbol{\omega}$. Por otra parte, de la relación $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ se obtiene

$$\dot{L}_i = \sum_j I_{ij} \dot{\omega}_j + \sum_j \dot{I}_{ij} \omega_j = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

donde las componentes de los vectores $\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\omega}$ y del tensor de inercia están calculadas *en el sistema de ejes fijos*. Si el tensor de inercia es invertible (es decir, si el sólido no es lineal), estas ecuaciones son equivalentes a la ecuación vectorial

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -(I^{-1} \dot{I})\boldsymbol{\omega}$$

que es un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden en las componentes de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Por el teorema de existencia y unicidad de soluciones de este tipo de sistemas, la solución con la condición inicial $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$ es $\boldsymbol{\omega}(t) = 0$ para todo t . $\square$

• Un caso particular que se presenta frecuentemente en la práctica es aquél en que la fuerza $\mathbf{F}_\alpha$ que actúa sobre cada partícula del sólido es de la forma

$$\mathbf{F}_\alpha = \lambda_\alpha \mathbf{f}, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (5.29)$$

donde $\mathbf{f}$ no depende de α y λ_α es un parámetro característico de la partícula. Por ejemplo, este es el caso de la *fuerza gravitatoria terrestre* si la extensión del sólido es pequeña en comparación con su distancia al centro de la Tierra, de modo que el campo gravitatorio es aproximadamente uniforme en el sólido ($\lambda_\alpha = m_\alpha$, $\mathbf{f} = \mathbf{g}$), y de la fuerza eléctrica en un *campo eléctrico uniforme* ($\lambda_\alpha = e_\alpha$, $\mathbf{f} = \mathbf{E}$). En tal caso

$$\mathbf{F} = \sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{f} \sum_\alpha \lambda_\alpha \equiv \Lambda \mathbf{f}, \quad \mathbf{N} = \left(\sum_\alpha \lambda_\alpha \mathbf{r}'_\alpha \right) \times \mathbf{f},$$

y llamando

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\Lambda} \sum_\alpha \lambda_\alpha \mathbf{r}'_\alpha = \frac{1}{\Lambda} \sum_\alpha \lambda_\alpha (\mathbf{R} + \mathbf{r}_\alpha) = \mathbf{R} + \frac{1}{\Lambda} \sum_\alpha \lambda_\alpha \mathbf{r}_\alpha \quad (5.30)$$

se tiene por tanto

$$\mathbf{N} = \mathbf{X} \times \mathbf{F}. \quad (5.31)$$

En otras palabras, para calcular el par total de las fuerzas externas podemos suponer que dichas fuerzas se aplican en el punto $\mathbf{X}$, que obviamente está fijo en el sólido en virtud de la ec. (5.30). En particular, *para calcular el par total de las fuerzas gravitatorias que actúan sobre un sólido puede suponerse que dichas fuerzas están aplicadas en su centro de masas*.

Análogamente, el par de las fuerzas externas respecto del CM está dado por

$$\mathbf{N}_{\text{CM}} = \left(\sum_\alpha \lambda_\alpha \mathbf{r}_\alpha \right) \times \mathbf{f} \equiv \mathbf{X}_{\text{CM}} \times \mathbf{F},$$

siendo ahora

$$\mathbf{X}_{\text{CM}} \equiv \frac{1}{\Lambda} \sum_\alpha \lambda_\alpha \mathbf{r}_\alpha = \mathbf{X} - \mathbf{R}.$$

En particular, *el momento respecto del CM de las fuerzas gravitatorias* (suponiendo la extensión del sólido despreciable frente a su distancia al centro de la Tierra) $\mathbf{F}_\alpha = m_\alpha \mathbf{g}$ es nulo, ya que en este caso $\mathbf{X} = \mathbf{R}$.

Nótese, también, que en este caso la fuerza $\mathbf{F}$ es claramente conservativa, con potencial

$$V = -\mathbf{f} \cdot \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} = -\Lambda \mathbf{f} \cdot \mathbf{X} = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{X};$$

en otras palabras, también a los efectos de calcular la energía potencial podemos considerar en este caso que la fuerza externa constante $\mathbf{F}$ actúa en el punto $\mathbf{X}$. En particular, la energía potencial de un sólido rígido en el campo gravitatorio terrestre está dada por

$$V = -M \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}.$$

5.3.2 Ecuaciones de Euler

Dado que la relación entre el momento angular y la velocidad angular es particularmente sencilla en un sistema de ejes principales de inercia fijo en el cuerpo, resulta muy útil formular la ecuación del movimiento del momento angular en este sistema. Supondremos, para ello, que el punto respecto del cual se calculan $\mathbf{L}$ y $\mathbf{N}$ es, o bien el CM, o bien un punto *fijo* simultáneamente en el sólido y en el sistema de ejes fijo, que tomaremos como origen O' de este último sistema. En ambos casos,

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_f = \mathbf{N}$$

y

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega},$$

con I constante en el sistema de ejes del cuerpo, ya que el punto respecto del cual se calculan $\mathbf{L}$ e I está fijo en dicho sistema. Desarrollando la derivada temporal de $\mathbf{L}$ en la ecuación (5.26) se obtiene entonces la fórmula

$$\dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N},$$

donde el punto denota derivación respecto del sistema de ejes del cuerpo. Utilizando la relación entre $\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\omega}$, y teniendo en cuenta que I_{ij} es constante en el sistema de ejes del cuerpo, se llega inmediatamente a la ecuación

$$I \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (I \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{N}.$$

Si los ejes del cuerpo son ejes principales de inercia, la i -ésima componente de esta relación es

$$I_i \dot{\omega}_i + \sum_{l,m} \varepsilon_{ilm} I_m \omega_l \omega_m = N_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

o bien

$$I_i \dot{\omega}_i - (I_j - I_k) \omega_j \omega_k = N_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.32a)$$

donde

$$(i, j, k) = \text{permutación cíclica de } (1, 2, 3). \quad (5.32b)$$

Las ecuaciones (5.32), es decir el sistema

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = N_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 = N_2, \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = N_3, \end{cases} \quad (5.33)$$

se conocen como **ecuaciones de Euler**. Recuérdese que estas ecuaciones son válidas si $\mathbf{N}$ e I se calculan, o bien respecto del CM, o bien respecto de un punto fijo simultáneamente en el sólido y en el sistema inercial. Además, las cantidades ω_i y N_i que aparecen en dichas ecuaciones son las componentes de los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{N}$ en un sistema de ejes principales de inercia (en general *no* inercial).

- Si el par total de las fuerzas externas es nulo y el origen O' del sistema inercial es un punto fijo en el sólido, se conservan $\mathbf{L}$ y T . La conservación de $\mathbf{L}$ es inmediata a partir de la ecuación del movimiento (5.26), mientras que la de T se deduce derivando la relación (5.21) en el sistema de ejes del cuerpo (lo cual es correcto, ya que T es un *escalar*). En efecto, al ser I una matriz simétrica

$$\dot{T} = \boldsymbol{\omega} \cdot I \dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times (I \boldsymbol{\omega})) = 0.$$

Análogamente, si $\mathbf{N}_{\text{CM}}$ es nulo se conservan el momento angular $\mathbf{L}_{\text{CM}}$ y la energía rotacional T_{rot} , ya que en este caso $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (I \boldsymbol{\omega})$.

5.4 Movimiento inercial de un trompo simétrico

Estudiaremos en esta sección el movimiento de rotación de un sólido *axialmente simétrico* cuando se anula el par total de las fuerzas externas o bien respecto del CM, o bien respecto de un punto fijo simultáneamente en el sólido y en el sistema de ejes fijos. Esto ocurrirá evidentemente (en ambos casos) si el sólido es *libre*, es decir si sobre él no actúan fuerzas externas. Más generalmente, como vimos al final de la Sección 5.3.1, el par $\mathbf{N}_{\text{CM}}$ es nulo si la única fuerza externa que actúa sobre el sólido es la gravedad terrestre (suponiendo la extensión del sólido despreciable frente a la distancia de sus puntos al centro de la Tierra). Antes de empezar nuestro estudio, es conveniente hacer una observación relacionada con la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$:

- *La velocidad angular es aditiva.* En otras palabras, sean S_0 , S_1 y S_2 tres sistemas de referencia con el mismo origen. Si en un cierto instante t el sistema de ejes S_1 tiene velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_1$ respecto de S_0 , y a su vez S_2 tiene velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_2$ respecto de S_1 , entonces la velocidad angular de S_2 respecto de S_0 es

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2. \quad (5.34)$$

En efecto, sea $\mathbf{v}_i$ la velocidad respecto del sistema de ejes S_i de una partícula cualquiera que en el instante t se halla en un punto $\mathbf{r}$ del espacio. Como los tres ejes tienen el mismo origen, utilizando la fórmula general (4.10) obtenemos

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Como $\mathbf{r}$ es arbitrario, combinando estas tres fórmulas se obtiene inmediatamente la relación (5.34). $\square$

Nota. En el resto de esta sección denotaremos por $\mathbf{L}$ e I el momento angular y el tensor de inercia respecto de O' o del CM, según sea $\mathbf{N} = 0$ o $\mathbf{N}_{\text{CM}} = 0$ (en el primer caso, se supone que O' es un punto simultáneamente fijo en el sólido y en el sistema de ejes fijos).

Supongamos, para fijar ideas, que el eje de simetría del sólido es el eje $\mathbf{e}_3$. Sustituyendo $\mathbf{N} = 0$ (o $\mathbf{N}_{\text{CM}} = 0$) e $I_1 = I_2$ en las ecuaciones de Euler (5.33) se obtiene el sistema más sencillo

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3 = 0, \\ I_1 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 = 0, \\ I_3 \dot{\omega}_3 = 0, \end{cases} \quad (5.35)$$

de donde se deduce inmediatamente (suponiendo que $I_3 \neq 0$, es decir que el sólido no es lineal) que

$$\omega_3 = \text{const.}$$

Llamando

$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3,$$

las dos primeras ecuaciones se escriben

$$\dot{\omega}_1 = -\Omega \omega_2, \quad \dot{\omega}_2 = \Omega \omega_1$$

o, utilizando notación compleja,

$$\dot{\omega}_1 + i\dot{\omega}_2 = i\Omega(\omega_1 + i\omega_2).$$

La solución de esta ecuación lineal de primer orden es

$$\omega_1 + i\omega_2 = (\omega_{10} + i\omega_{20})e^{i\Omega t}, \quad (5.36)$$

con $\omega_{i0} \equiv \omega_i(0)$ ($i = 1, 2$) constantes reales. De (5.36) se sigue que

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = |\omega_1 + i\omega_2|^2 = \omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 \equiv \omega_0^2$$

es constante. En otras palabras, el módulo de la proyección de la velocidad angular sobre el plano perpendicular a $\mathbf{e}_3$ es constante, y por tanto también lo son el módulo ω de la velocidad angular y el ángulo α que forman los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{e}_3$. En términos de este ángulo se tiene

$$\omega_3 = \omega \cos \alpha, \quad \omega_0 = \omega \sin \alpha, \quad \omega_1 + i\omega_2 = \omega \sin \alpha e^{i(\Omega t + \beta)}, \quad (5.37)$$

siendo β el ángulo que forma el vector $\omega_{10}\mathbf{e}_1 + \omega_{20}\mathbf{e}_2$ con el eje $\mathbf{e}_1$ (que podría tomarse igual a cero escogiendo adecuadamente el origen de tiempos). En otras palabras⁶, en el sistema de ejes del cuerpo el

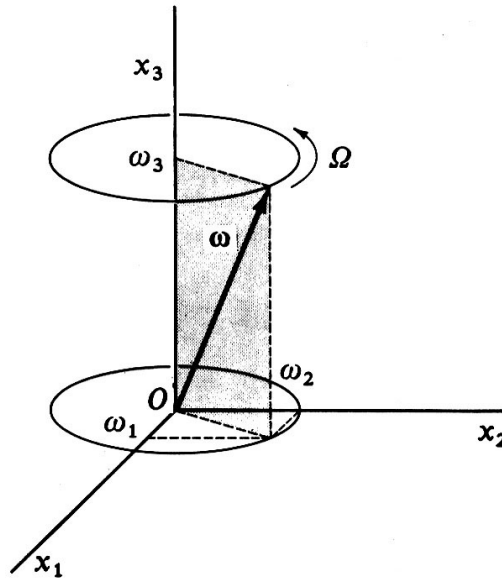


Figura 5.1: Precesión del vector $\boldsymbol{\omega}$ alrededor del eje fijo $\mathbf{e}_3$.

vector $\boldsymbol{\omega}$ gira alrededor del eje $\mathbf{e}_3$ con velocidad angular constante Ω (cf. la Fig. 5.1). Esta velocidad angular es positiva para $I_3 > I_1$ (sólido “achataado”), mientras que es negativa para $I_3 < I_1$ (sólido “alargado”). Geométricamente, desde el punto de vista del sistema de ejes fijo en el cuerpo el vector $\boldsymbol{\omega}$ se mueve trazando un cono de eje $\mathbf{e}_3$ y semiángulo α con velocidad angular constante Ω . El cono trazado por $\boldsymbol{\omega}$ en su rotación alrededor del vector $\mathbf{e}_3$ se llama **cono del cuerpo** (más correctamente, *cono fijo en el cuerpo*). El movimiento del momento angular $\mathbf{L}$ respecto del sistema del cuerpo se determina también fácilmente teniendo en cuenta la relación (5.24), que podemos escribir como sigue:

$$L_3 = I_3\omega_3 = I_3\omega \cos \alpha = \text{const.}, \quad L_1 + iL_2 = I_1(\omega_1 + i\omega_2) = I_1\omega \sin \alpha e^{i(\Omega t + \beta)}. \quad (5.38)$$

En otras palabras, el vector $\mathbf{L}$ está en el plano formado por los vectores $\mathbf{e}_3$ y $\boldsymbol{\omega}$, siendo L_3 , $L_1^2 + L_2^2$ y L constantes en el sistema del cuerpo. Nótese que la constancia de L se sigue también de su constancia en

⁶Supondremos a partir de ahora que ω y α no se anulan. Si $\omega \neq 0$ pero $\alpha = 0$, $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_3$ es constante —tanto en el sistema de ejes del cuerpo como en el sistema fijo, ya que la derivada temporal de $\boldsymbol{\omega}$ coincide en ambos sistemas en virtud de la ec. (4.11)— y por tanto el sólido gira con velocidad angular constante alrededor de su eje de simetría. Dicho eje está también fijo en el espacio, al ser en este caso $\mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\omega}/\omega$ con $\boldsymbol{\omega}$ constante.

el sistema de ejes fijo (ya que $\mathbf{L}$ es constante en dicho sistema, al ser $\mathbf{N} = 0$), y el carácter coplanario de los vectores $\mathbf{e}_3$, $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{L}$ se podría haber probado directamente observando que

$$\mathbf{e}_3 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}) = (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = 0.$$

Una consecuencia inmediata de las observaciones anteriores es que (siempre desde el punto de vista del sistema de ejes del cuerpo) el momento angular $\mathbf{L}$ rota con velocidad angular constante Ω respecto del eje $\mathbf{e}_3$. El ángulo θ formado por los vectores $\mathbf{L}$ y $\mathbf{e}_3$ se puede calcular fácilmente observando que

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}}{L_3} = \frac{|L_1 + iL_2|}{I_3\omega \cos \alpha} = \frac{I_1}{I_3} \tan \alpha;$$

nótese, en particular, que $\theta > \alpha$ para un sólido alargado.

Desde el punto de vista del *sistema de ejes fijos*, el vector $\mathbf{L}$ es *constante* al ser nulo por hipótesis el par de las fuerzas externas. La dirección de $\mathbf{L}$, que es por tanto constante en el sistema fijo, se denomina **dirección invariante** y se suele tomar como eje $\mathbf{e}'_3$:

$$\mathbf{e}'_3 = \frac{\mathbf{L}}{L}.$$

Los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{e}_3$ giran ambos alrededor de $\mathbf{L}$ ya que, como acabamos de ver, el ángulo formado por los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{e}_3$ con el momento angular y el módulo de dichos vectores son constantes. Además, la velocidad angular Ω_p con la que giran $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{e}_3$ alrededor de $\mathbf{L}$ es la misma, ya que estos tres vectores están en el mismo plano. Geométricamente, *desde el punto de vista del sistema fijo el vector $\boldsymbol{\omega}$ describe al moverse un cono de eje $\mathbf{L}$ y semiángulo $|\theta - \alpha|$* , con una cierta velocidad angular que denotaremos Ω_p . Este cono se denomina **cono del espacio** (más precisamente, *cono fijo en el espacio*, o simplemente **cono fijo**). Nótese que el cono del cuerpo y el del espacio son tangentes en todo instante a lo largo de la generatriz paralela a $\boldsymbol{\omega}$ (cf. la Fig. 5.2). La situación es totalmente análoga para el vector $\mathbf{e}_3$, ya que $\mathbf{L}$, $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{e}_3$ están en el mismo plano.

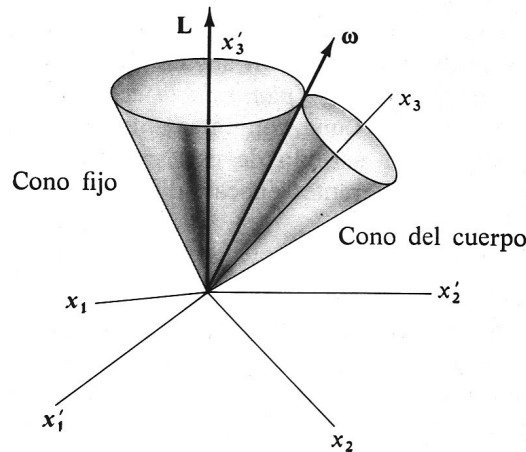


Figura 5.2: Cono fijo y cono del cuerpo (en el caso $I_1 > I_3$).

Para calcular la velocidad angular Ω_p basta tener en cuenta que, al ser $\boldsymbol{\omega}$ coplanario con los vectores $\mathbf{L}$ y $\mathbf{e}_3$, podemos expresarlo en la forma

$$\boldsymbol{\omega} = a \frac{\mathbf{L}}{L} + b \mathbf{e}_3, \quad (5.39)$$

Veremos a continuación que el coeficiente a es igual a la velocidad angular Ω_p de rotación del eje de simetría $\mathbf{e}_3$ del sólido alrededor de $\mathbf{L}$, mientras que $b = -\Omega$. Consideremos, en efecto, un tercer sistema de ejes $\mathbf{e}''_i$ ($i = 1, 2, 3$) formado por los vectores

$$\mathbf{e}''_3 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}''_2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{L}}{|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{L}|}, \quad \mathbf{e}''_1 = \mathbf{e}''_2 \times \mathbf{e}''_3.$$

La velocidad angular ω' de los ejes $\{\mathbf{e}_i''\}_{1 \leq i \leq 3}$ respecto de los ejes fijos $\{\mathbf{e}_i'\}_{1 \leq i \leq 3}$ es paralela al vector $\mathbf{e}_3' \equiv \mathbf{L}/L$, ya que los vectores $\mathbf{e}_3'$, $\mathbf{e}_1''$ y $\mathbf{e}_3'' \equiv \mathbf{e}_3$ están en el mismo plano. Como este plano es el determinado por los vectores ω y $\mathbf{L}$, la velocidad angular ω' es igual a $\Omega_p \mathbf{e}_3'$. Por otra parte, la velocidad angular ω'' del sistema de ejes del cuerpo $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq 3}$ respecto de los ejes $\{\mathbf{e}_i''\}_{1 \leq i \leq 3}$ es igual a $-\Omega \mathbf{e}_3$, ya que $\mathbf{e}_3'' \equiv \mathbf{e}_3$, $\mathbf{L}$ y $\mathbf{e}_1''$ son coplanarios, y hemos visto que $\mathbf{L}$ gira con velocidad angular Ω alrededor de $\mathbf{e}_3$. Por la aditividad de las velocidades angulares, la velocidad angular de los ejes del cuerpo $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq 3}$ respecto del sistema de ejes fijos $\{\mathbf{e}_i'\}_{1 \leq i \leq 3}$, que por definición es igual a ω , está dada por

$$\omega = \omega' + \omega'' = \Omega_p \frac{\mathbf{L}}{L} - \Omega \mathbf{e}_3 .$$

- La ecuación anterior, junto con el razonamiento que conduce a su demostración, pone de manifiesto que el movimiento del sólido puede describirse como la composición de una precesión de su eje de simetría $\mathbf{e}_3$ alrededor de la dirección invariante (i.e., la dirección de $\mathbf{L}$) con velocidad angular Ω_p y una rotación del sólido alrededor de su eje de simetría con velocidad angular $-\Omega$.

De la Fig. 5.3 se sigue que

$$\omega \sin \alpha = \Omega_p \sin \theta ,$$

y por tanto

$$\Omega_p = \omega \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} = \omega \sin \alpha \frac{L}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}} = \frac{L}{I_1} . \quad (5.40)$$

Teniendo en cuenta las ecs. (5.38) se obtiene

$$\Omega_p = \frac{\omega}{I_1} \sqrt{I_1^2 \sin^2 \alpha + I_3^2 \cos^2 \alpha} = \omega \sqrt{1 + \frac{I_3^2 - I_1^2}{I_1^2} \cos^2 \alpha} .$$

En particular, $\Omega_p < \omega$ para un sólido alargado, mientras que $\Omega_p > \omega$ para un sólido achatado.

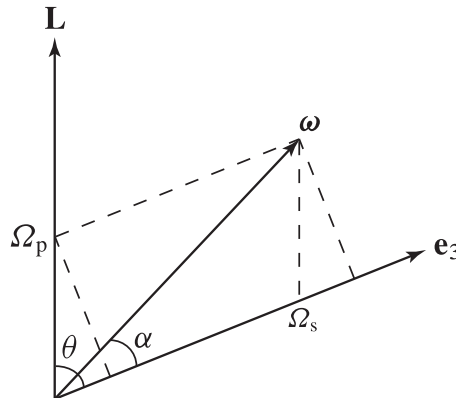


Figura 5.3: Vectores $\mathbf{L}$, ω y $\mathbf{e}_3$ en el movimiento inercial de un sólido rígido simétrico alrededor del eje $\mathbf{e}_3$ (en el caso en que $I_1 > I_3$).

Ejercicio. Deducir la ec. (5.40) directamente a partir de (5.39).

Solución. Multiplicando (5.39) por $\mathbf{e}_3$ se obtiene

$$\Omega_p \frac{L_3}{L} = \Omega_p \frac{\omega_3 I_3}{L} = \omega_3 + \Omega = \omega_3 + \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 = \frac{I_3 \omega_3}{I_1} \implies \Omega_p = \frac{L}{I_1} ,$$

como antes.

5.5 Ángulos de Euler

Las ecuaciones de Euler deducidas en la Sección 5.3.2 tienen dos importantes desventajas, a saber: i) están escritas en términos de las componentes de la velocidad angular $\omega(t)$ en el sistema de ejes del cuerpo, cuyo movimiento no se conoce a priori, y ii) en el mejor de los casos, permiten calcular la velocidad angular, pero no proporcionan directamente la orientación del sistema de ejes del cuerpo respecto del sistema de ejes fijos en función del tiempo. Para evitar ambos inconvenientes, en esta sección vamos a describir una forma muy útil de caracterizar dicha orientación (o, en general, la orientación relativa de dos sistemas de ejes) en términos de tres ángulos apropiados. Una vez obtenida esta caracterización, expresaremos la velocidad angular ω en función de estos ángulos, lo que, en virtud de las ecuaciones de Euler, conduce a un sistema de segundo orden en dichos ángulos. Resolviendo este sistema se obtendrá finalmente la orientación de los ejes fijos en el sólido en cada instante, lo que determina el movimiento rotacional del sólido.

Para ello, veremos primero cómo llevar los ejes fijos $\mathbf{e}'_i$ a los ejes del cuerpo $\mathbf{e}_i$ mediante tres rotaciones sucesivas. En primer lugar, efectuemos una rotación de ángulo $\phi \in [0, 2\pi)$ alrededor del eje x'_3 , hasta llevar el eje x'_1 a la dirección del vector $\mathbf{e}'_3 \times \mathbf{e}_3$. Si llamamos $\mathbf{e}''_i$ a los nuevos ejes así obtenidos, entonces

$$\mathbf{e}''_i = R_{\mathbf{e}'_3}(\phi) \mathbf{e}'_i;$$

nótese, en particular, que

$$\mathbf{e}''_3 = \mathbf{e}'_3.$$

En notación matricial, si $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ y $\mathbf{x}'' = (x''_1, x''_2, x''_3)$ denotan respectivamente las coordenadas de un mismo vector respecto de los ejes $\mathbf{e}'_i$ y $\mathbf{e}''_i$ (consideradas como vectores columna) se tiene

$$\mathbf{x}' = R_3(\phi) \mathbf{x}'', \quad R_3(\phi) \equiv \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como el nuevo eje x''_1 , denominado **línea de nodos**, es perpendicular a los ejes x_3 y x'_3 , mediante una rotación de ángulo $\theta \in [0, \pi]$ alrededor de x''_1 podemos llevar el eje x'_3 al eje x_3 . Denotando por $\mathbf{e}'''_i$ a los ejes así obtenidos se tiene

$$\mathbf{e}'''_i = R_{\mathbf{e}''_1}(\theta) \mathbf{e}''_i;$$

en particular,

$$\mathbf{e}'''_1 = \mathbf{e}''_1, \quad \mathbf{e}'''_3 = \mathbf{e}_3.$$

En términos de las coordenadas,

$$\mathbf{x}'' = R_1(\theta) \mathbf{x}''', \quad R_1(\theta) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Los nuevos ejes $x'''_1 \equiv x''_1$ y x'''_2 están en el plano perpendicular a $\mathbf{e}_3$, por lo que podemos hacerlos coincidir con los ejes x_1 y x_2 del sistema del cuerpo mediante una rotación de ángulo $\psi \in [0, 2\pi)$ alrededor de x_3 , sin variar este último eje. Por tanto,

$$\mathbf{e}_i = R_{\mathbf{e}_3}(\psi) \mathbf{e}'''_i,$$

que en términos de las coordenadas se escribe

$$\mathbf{x}''' = R_3(\psi) \mathbf{x}.$$

En definitiva,

$$\mathbf{x}' = R(\phi, \theta, \psi) \mathbf{x}, \quad (5.41)$$

siendo

$$R(\phi, \theta, \psi) = R_3(\phi)R_1(\theta)R_3(\psi) \\ = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \psi \sin \phi & -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \cos \psi \sin \phi & \sin \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \sin \psi \cos \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \psi \cos \phi & -\sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Nótese que

$$\mathbf{x} = R_3(\psi)^{-1}R_1(\theta)^{-1}R_3(\phi)^{-1}\mathbf{x}' = R_3(-\psi)R_1(-\theta)R_3(-\phi)\mathbf{x}' \equiv R(-\psi, -\theta, -\phi)\mathbf{x}'.$$

Los ángulos

$$\phi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in [0, \pi], \quad \psi \in [0, 2\pi), \quad (5.42)$$

que como hemos visto caracterizan completamente la orientación del sistema de ejes del cuerpo respecto del sistema de ejes fijos, reciben el nombre de **ángulos de Euler**. Nótese que estos ángulos tienen la siguiente interpretación geométrica (cf. la Fig. 5.4):

ϕ = ángulo entre el eje x'_1 y la línea de nodos

θ = ángulo entre el eje x'_3 y el eje x_3

ψ = ángulo entre la línea de nodos y el eje x_1 .

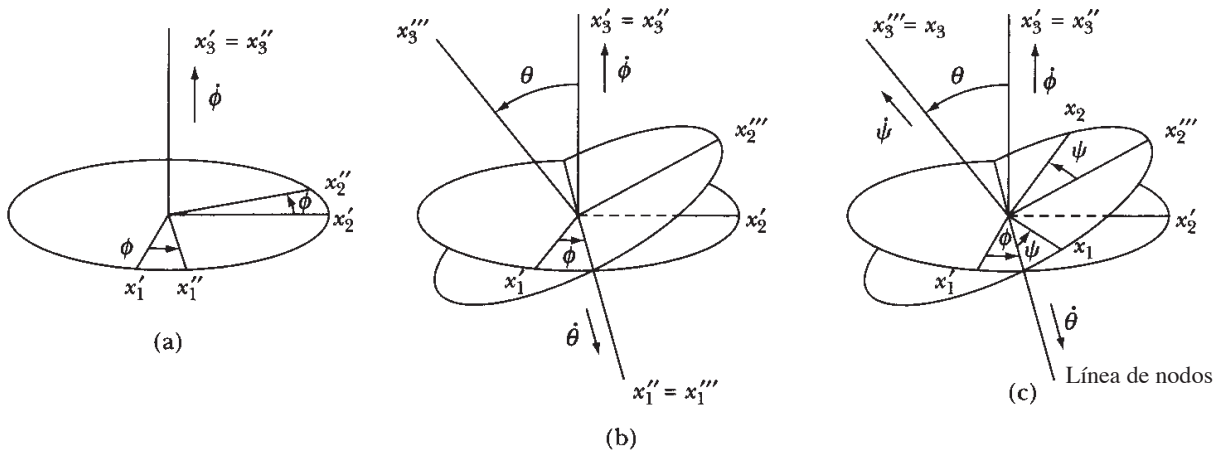


Figura 5.4: Ángulos de Euler.

En virtud del resultado sobre la aditividad de las velocidades angulares probado al principio de la Sección 5.4, la velocidad angular $\omega(t)$ se expresa en función de los ángulos de Euler mediante la fórmula

$$\omega = \dot{\phi} \mathbf{e}'_3 + \dot{\theta} \mathbf{e}''_1 + \dot{\psi} \mathbf{e}_3. \quad (5.43)$$

Es de interés expresar la velocidad angular en el sistema de ejes del cuerpo, ya que son las componentes de ω en este sistema las que intervienen en las ecuaciones de Euler. Para ello, nótese en primer lugar que

$$\mathbf{e}''_1 \equiv \mathbf{e}'''_1 = R_{\mathbf{e}_3}(\psi)^{-1} \mathbf{e}_1 = R_{\mathbf{e}_3}(-\psi) \mathbf{e}_1 = \cos \psi \mathbf{e}_1 - \sin \psi \mathbf{e}_2.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_3 \equiv \mathbf{e}''_3 &= R_{\mathbf{e}'_1}(-\theta) \mathbf{e}'''_3 = \sin \theta \mathbf{e}'''_2 + \cos \theta \mathbf{e}'''_3 = \sin \theta \mathbf{e}'''_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3 = \sin \theta R_{\mathbf{e}_3}(-\psi) \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3 \\ &= \sin \theta (\sin \psi \mathbf{e}_1 + \cos \psi \mathbf{e}_2) + \cos \theta \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Utilizando las dos fórmulas anteriores en la ecuación (5.43) se obtiene finalmente la siguiente expresión para las componentes ω_i de $\boldsymbol{\omega}$ en el sistema de ejes del cuerpo:

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta. \end{cases} \quad (5.45)$$

5.6 El trompo de Lagrange

En esta sección estudiaremos el movimiento del denominado **trompo de Lagrange**, que consiste en un sólido axisimétrico con un punto fijo sometido únicamente a la gravedad terrestre (cf. la Fig. 5.5). Tomando el origen de coordenadas del sistema de ejes fijos en dicho punto, la energía cinética del trompo

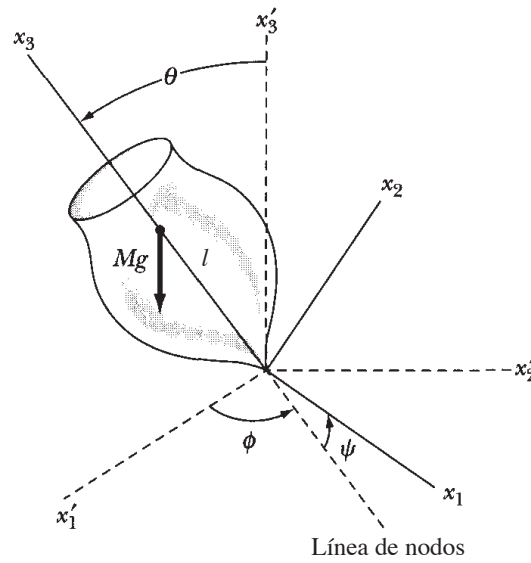


Figura 5.5: Trompo de Lagrange.

es

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (I \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2,$$

donde I_i ($i = 1, 2, 3$) es el i -ésimo momento principal de inercia del trompo *respecto del origen*, y el eje x_3 se toma en la dirección de su eje de simetría. Utilizando las expresiones (5.45) para las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ se obtiene fácilmente

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2.$$

La energía potencial del trompo es el potencial de la fuerza externa $\mathbf{F} = -Mg\mathbf{e}'_3$ aplicada en el CM, es decir

$$V = MgX'_3.$$

Por simetría, el CM del trompo está en el eje de simetría x_3 , a una distancia l del origen. Por tanto

$$V = Mgl \cos \theta,$$

y el lagrangiano del sistema está dado por

$$L = T - V = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta. \quad (5.46)$$

Los momentos canónicos asociados a las coordenadas generalizadas (θ, ϕ, ψ) son

$$\begin{cases} p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \dot{\theta} , \\ p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1 \sin^2 \theta \dot{\phi} + I_3 \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) , \\ p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) . \end{cases} \quad (5.47)$$

Al ser L independiente de los ángulos ϕ y ψ y del tiempo t , se conservan los momentos p_ϕ y p_ψ y el hamiltoniano, que es igual a la energía $T + V$ al ser L cuadrático en las velocidades generalizadas:

$$H = T + V = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + Mgl \cos \theta = E . \quad (5.48)$$

La existencia de estas tres leyes de conservación permite expresar el movimiento de la coordenada θ mediante una integral, lo que a su vez determina el movimiento de los otros dos ángulos utilizando la conservación de p_ϕ y p_ψ .

• En virtud de la tercera ecuación (5.45), el momento canónico p_ψ es igual a $I_3 \omega_3$, es decir a la componente del momento angular $\mathbf{L}$ en la dirección del eje $\mathbf{e}_3$, que denotaremos por L_3 . Análogamente, de las ecuaciones (5.44) y (5.45) se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_3' &\equiv L_3' = \sin \theta (L_1 \sin \psi + L_2 \cos \psi) + \cos \theta L_3 = I_1 \sin \theta (\omega_1 \sin \psi + \omega_2 \cos \psi) + I_3 \omega_3 \cos \theta \\ &= I_1 \sin^2 \theta \dot{\phi} + I_3 \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = p_\phi . \end{aligned}$$

Por otra parte, el par de la fuerza gravitatoria está dirigido en la dirección de la línea de nodos, y por tanto es perpendicular a los vectores $\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{e}_3'$. Aplicando las ecuaciones del movimiento del momento angular en el sistema *fijo* con $N_3' \equiv \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_3' = 0$ se deduce inmediatamente que L_3' se conserva. La conservación de $L_3 = I_3 \omega_3$ se deduce teniendo en cuenta que⁷

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_3 \cdot \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_f + \mathbf{L} \cdot \left(\frac{d\mathbf{e}_3}{dt} \right)_f = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{N} + \mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3) = N_3 + \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{L} \times \boldsymbol{\omega}) \\ &= \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{L} \times \boldsymbol{\omega}) = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = 0 . \end{aligned}$$

Para obtener la ecuación del movimiento del ángulo θ , basta sustituir las relaciones

$$\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = \frac{p_\psi}{I_3} , \quad I_1 \sin^2 \theta \dot{\phi} = p_\phi - p_\psi \cos \theta \quad (5.49)$$

en la ec. (5.48), lo que conduce a una ecuación de primer orden en θ de variables separadas:

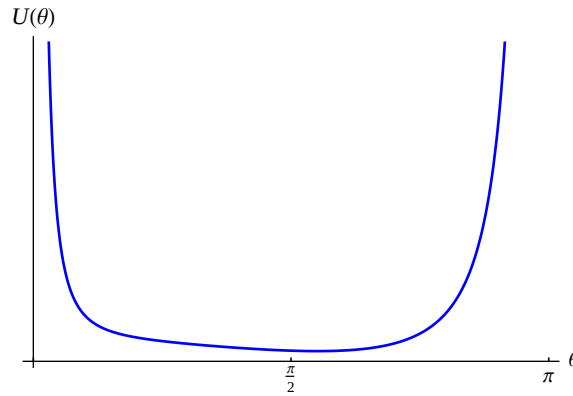
$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta = E - \frac{p_\psi^2}{2 I_3} . \quad (5.50)$$

Formalmente, esta es la ecuación del movimiento de una partícula de masa unidad y energía

$$\varepsilon = \frac{1}{I_1} \left(E - \frac{p_\psi^2}{2 I_3} \right) \quad (5.51)$$

en el potencial unidimensional efectivo⁸

$$U(\theta) = \frac{(a - b \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} + c \cos \theta , \quad 0 \leq \theta \leq \pi , \quad (5.52a)$$

Figura 5.6: Potencial efectivo $U(\theta)$.

siendo

$$a = \frac{p_\phi}{I_1}, \quad b = \frac{p_\psi}{I_1}, \quad c = \frac{Mgl}{I_1} > 0 \quad (5.52b)$$

(cf. la Fig. 5.6). El potencial anterior es singular para $\theta = 0$ o $\theta = \pi$. Sin embargo, de la ley de conservación de p_ψ se sigue que si en algún instante $\theta = 0$ (respectivamente $\theta = \pi$) entonces $a = b$ (resp. $a = -b$). Probaremos más adelante que en tal caso U es, de hecho, regular en $\theta = 0$ (resp. $\theta = \pi$), y que además $U'(0) = 0$ (resp. $U'(\pi) = 0$).

Supondremos, por el momento, que

$$a \neq \pm b,$$

y por tanto que $\theta \neq 0, \pi$. En términos de la variable $u = \cos \theta \in (-1, 1)$, la ley de conservación de la energía se expresa en la forma

$$\dot{u}^2 = f(u), \quad (5.53a)$$

donde $f(u)$ es el polinomio de grado 3 dado por

$$f(u) = 2(\varepsilon - cu)(1 - u^2) - (a - bu)^2. \quad (5.53b)$$

Formalmente, la ecuación anterior se puede utilizar para expresar el movimiento de la coordenada θ mediante una integral:

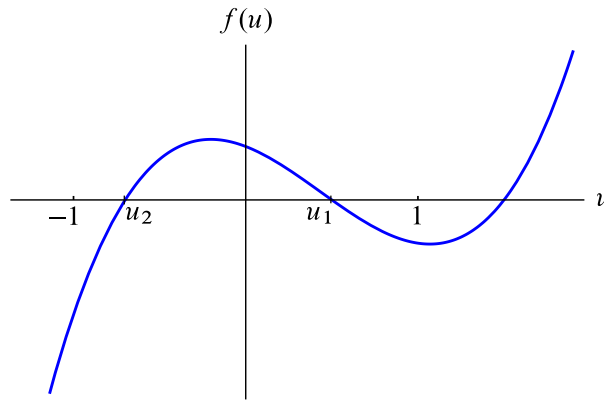
$$t - t_0 = \pm \int^{\cos \theta} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} \equiv \pm \int^{\cos \theta} \frac{du}{\sqrt{2(\varepsilon - cu)(1 - u^2) - (a - bu)^2}}.$$

En la práctica, esta expresión no es de mucha utilidad, ya que para evaluar la integral es necesario utilizar funciones elípticas. Sin embargo, la ec. (5.53) proporciona una sencilla descripción cualitativa del movimiento que estudiaremos a continuación.

En primer lugar, como $a \neq \pm b$ los puntos $u = \pm 1$ no son raíces de f . Al ser $c > 0$, el polinomio $f(u)$ es positivo para $u \rightarrow \infty$ y negativo para $u \rightarrow -\infty$. Por otra parte, dicho polinomio ha de tener o bien una o bien tres raíces reales (contando multiplicidades), alguna de las cuales ha de pertenecer al intervalo físico $(-1, 1)$. En efecto, en caso contrario f no cambiaría de signo en dicho intervalo y por tanto sería negativa en él, al ser $f(\pm 1) < 0$. Además, en $(-1, 1)$ ha de haber *dos* raíces de f (contando multiplicidades), pues si hubiera un número impar de raíces $f(-1)$ y $f(1)$ tendrían signos opuestos. Esto implica que f tiene necesariamente tres raíces reales, estando dos de ellas (contando multiplicidades) en el intervalo $(-1, 1)$ y la restante en $(1, \infty)$. Por tanto la gráfica de f tiene el aspecto representado en la Fig. 5.7.

⁷Alternativamente, de la tercera ecuación de Euler (5.33) con $N_3 = 0$ se deduce que ω_3 , y por tanto $L_3 = I_3\omega_3$, es constante en el sistema del cuerpo. Como L_3 es un escalar, ha de ser también constante en el sistema de ejes fijo.

⁸Para que el ángulo θ pueda variar entre $\pi/2$ y π el trompo debe ser en realidad un giróscopo, no una peonza.

Figura 5.7: Polinomio $f(u)$ (caso genérico).

Si llamamos $u_2 < u_1$ a las raíces de f en $(-1, 1)$, el movimiento tiene lugar en la región $u_2 \leq u \leq u_1$, o equivalentemente $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, siendo $\theta_i = \arccos u_i$. En otras palabras, el eje del trompo oscila entre los ángulos θ_1 y θ_2 , efectuando un movimiento denominado **nutación** (del latín “nutatio”, cabeceo). Si

$$\sin^2 \theta \dot{\phi} = a - b \cos \theta \equiv a - bu$$

no cambia de signo cuando $\cos \theta$ varía entre u_1 y u_2 , la trayectoria trazada por eje del trompo en la esfera unidad es semejante a la de la Fig. 5.8 (izda.), mientras que si $a - bu$ cambia de signo en el intervalo (u_2, u_1) entonces dicha trayectoria es análoga a la mostrada en la Fig. 5.8 (centro).

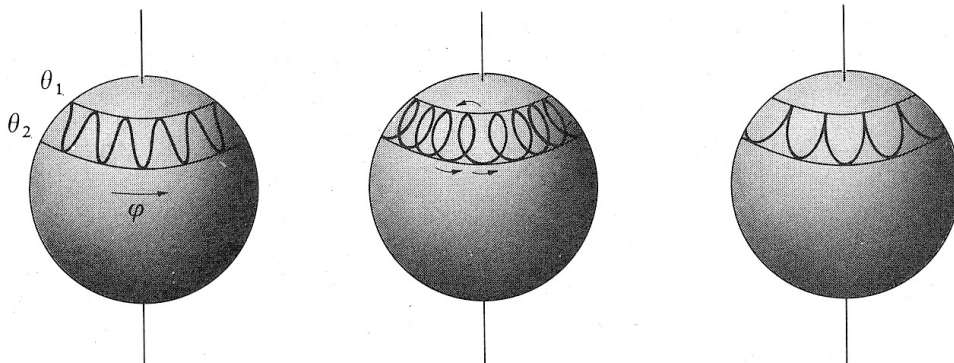


Figura 5.8: Trayectoria trazada por el eje del trompo de Lagrange en la esfera unidad.

- Consideremos a continuación el caso limite en que $a - bu$ se anula en uno de los *extremos* del intervalo $[u_2, u_1]$, que por el momento denotaremos por u_0 , y mantiene por tanto el mismo signo para los demás valores de u . En tal caso, llamando $u_0 = \cos \theta_0$ se tiene (al ser u_0 uno de los puntos de retroceso)

$$a = bu_0 \implies f(u) = 2(\varepsilon - cu)(1 - u^2) - b^2(u - u_0)^2, \quad f(u_0) = 0 \implies \varepsilon = cu_0,$$

y por tanto

$$f(u) = (u - u_0)[2c(u^2 - 1) - b^2(u - u_0)].$$

Al ser

$$f'(u_0) = 2c(u_0^2 - 1) < 0$$

(ya que $u_0 = \cos \theta_0 < 1$ y $c > 0$), u_0 es entonces igual a la raíz *mayor* u_1 , y por tanto $\theta_0 = \theta_1$. La velocidad de precesión

$$\dot{\phi} = b(u_0 - u)$$

verifica por tanto $b\dot{\phi} > 0$ para $\theta_1 < \theta \leq \theta_2$ y $\dot{\phi} = 0$ para $\theta = \theta_1$. En otras palabras, la trayectoria del eje del trompo presenta una *cúspide* en $\theta = \theta_1$ (cf. la Fig. 5.8, drcha.). Nótese, por último, que el caso en

que $\dot{\phi}$ se anula para $\theta = \theta_1$ se produce precisamente cuando el trompo se lanza en la forma habitual, es decir cuando inicialmente $\dot{\theta}(0) = \dot{\phi}(0) = 0$, ya que en tal caso (llamando de nuevo $u_0 = \cos \theta_0 \neq \pm 1$ al valor inicial de u)

$$\dot{\phi}(0) = 0 \implies a - bu_0 = 0, \quad \dot{\theta}(0) = 0 \implies \dot{u}(0) = f(u_0) = -\sin \theta_0 \dot{\theta}(0) = 0.$$

Veamos a continuación bajo qué condiciones es posible que el trompo tenga precesión pero no nutación, es decir que las ecuaciones del movimiento tengan una solución constante $\theta = \theta_0$. (Por el momento, seguiremos suponiendo que $a \neq \pm b$ y por tanto $0 < \theta_0 < \pi$.) En este caso la ecuación (5.53a) ha de tener una solución de equilibrio $u = u_0$, y por tanto

$$f(u_0) = f'(u_0) = 0. \quad (5.54)$$

Nótese que si θ es constante también lo será la velocidad de precesión

$$\dot{\phi} = \frac{a - bu_0}{1 - u_0^2} \equiv \Omega_p$$

(recuérdese que $\theta_0 \neq 0, \pi$, y por tanto $u \neq \pm 1$). Utilizando las condiciones (5.54) se obtiene

$$2(\varepsilon - cu_0) = \frac{(a - bu_0)^2}{1 - u_0^2} = (1 - u_0^2)\Omega_p^2,$$

y por tanto

$$\frac{1}{2} f'(u_0) = -2u_0(\varepsilon - cu_0) - c(1 - u_0^2) + b(a - bu_0) = -(1 - u_0^2)(u_0\Omega_p^2 - b\Omega_p + c).$$

En consecuencia, la velocidad de precesión Ω_p ha de verificar la ecuación cuadrática

$$u_0\Omega_p^2 - b\Omega_p + c = 0.$$

Esta ecuación tiene soluciones reales si y solo si su discriminante es no negativo, es decir si

$$b^2 - 4cu_0 \geq 0,$$

o equivalentemente

$$p_\psi^2 \equiv I_3^2 \omega_3^2 \geq 4MglI_1 \cos \theta_0. \quad (5.55)$$

Nótese que la condición anterior se cumple automáticamente si $\theta_0 \geq \pi/2$. Si se verifica (5.55), en general existirán *dos* frecuencias de precesión dadas por⁹

$$\Omega_{p,\pm} = \frac{1}{2u_0} \left(b \pm \sqrt{b^2 - 4cu_0} \right) = \frac{b}{2u_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4cu_0}{b^2}} \right) \equiv \frac{I_3 \omega_3}{2I_1 \cos \theta_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4MglI_1 \cos \theta_0}{I_3^2 \omega_3^2}} \right).$$

Si la frecuencia ω_3 es muy grande frente al término $(MglI_1 \cos \theta_0)^{1/2}/I_3$, el radical se puede aproximar por

$$1 - \frac{2MglI_1 \cos \theta_0}{I_3^2 \omega_3^2},$$

y por tanto

$$\Omega_{p,+} \simeq \frac{I_3 \omega_3}{I_1 \cos \theta_0}, \quad \Omega_{p,-} \simeq \frac{Mgl}{I_3 \omega_3}.$$

En la práctica, el rozamiento hace que ω_3 disminuya lentamente hasta que la condición (5.55) deja de cumplirse, momento en el cual el trompo comienza a cabecear.

⁹Si $\theta_0 = \pi/2$ la velocidad de precesión es $\Omega_p = c/b = Mgl/(I_3 \omega_3)$.

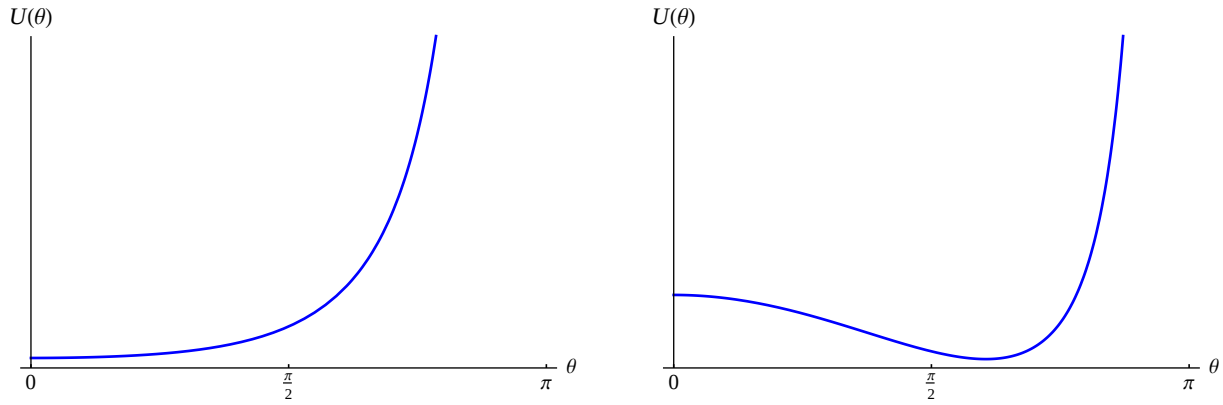


Figura 5.9: Potencial efectivo $U(\theta)$ para $a = b \geq 2\sqrt{c}$ (izda.) y $a = b < 2\sqrt{c}$ (izda.).

- Estudiemos a continuación cómo es el movimiento del trompo cuando $a = b$ (el caso en que $a = -b$ se trata de forma análoga). En tal caso, el potencial efectivo $U(\theta)$ está dado por

$$U(\theta) = \frac{a^2}{2} \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + c \cos \theta = \frac{a^2}{2} \tan^2(\theta/2) + c \cos \theta. \quad (5.56)$$

Desarrollando U hasta orden dos en θ alrededor de $\theta = 0$ se obtiene

$$U(\theta) = c + \frac{\theta^2}{2} \left(\frac{a^2}{4} - c \right) + O(\theta^4);$$

por tanto, si $a^2 > 4c$, es decir si

$$p_\psi^2 \equiv I_3^2 \omega_3^2 > 4MglI_1, \quad (5.57)$$

entonces la solución constante $\theta = 0$ es un *equilibrio estable*. Es fácil ver que en este caso la derivada de U es positiva para $0 < \theta < \pi$, y por tanto el potencial tiene el aspecto de la Fig. 5.9 (izda.). En efecto,

$$\begin{aligned} U'(\theta) &= \frac{a^2}{2} \tan(\theta/2) \sec^2(\theta/2) - 2c \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \\ &= 2c \tan(\theta/2) \sec^2(\theta/2) \left(\frac{a^2}{4c} - \cos^4(\theta/2) \right) > 0, \quad 0 < \theta < \pi. \end{aligned}$$

Lo mismo ocurre si $a^2 = 4c$, es decir si

$$I_3^2 \omega_3^2 = 4MglI_1,$$

pues en este caso

$$U'(\theta) = 2c \tan(\theta/2) \sec^2(\theta/2) (1 - \cos^4(\theta/2))$$

se anula para $\theta = 0$ y es positivo para $0 < \theta < \pi$. Por el contrario, si $a^2 < 4c$, es decir si

$$I_3^2 \omega_3^2 < 4MglI_1 \quad (5.58)$$

entonces $\theta = 0$ es un *equilibrio inestable*. En este caso, la derivada de U se anula para

$$\cos(\theta/2) = \left(\frac{a^2}{4c} \right)^{1/4} \equiv \left(\frac{I_3^2 \omega_3^2}{4MglI_1} \right)^{1/4},$$

que es de hecho un equilibrio estable, y el potencial tiene el aspecto de la Fig. 5.9 (drcha.). En la práctica, el rozamiento hace que disminuya la frecuencia ω_3 hasta que se verifica la condición (5.58), momento en el cual el trompo empieza a cabecear (“trompo dormido”).

Capítulo 6

Relatividad especial

6.1 Principios de la Relatividad especial

Como vimos en el Capítulo 1, las leyes de la Mecánica tienen la misma forma en todos los sistemas inerciales. En particular, la segunda ley de Newton

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$$

se convierte en

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}'(t', \mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}'), \quad \text{con} \quad \mathbf{F}'(t', \mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}') = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}),$$

bajo la transformación de Galileo

$$t' = t, \quad x'_1 = x_1 - vt, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3. \quad (6.1)$$

Dicha transformación relaciona las coordenadas espacio-temporales (t, x_1, x_2, x_3) de un suceso cualquiera en un sistema de referencia inercial (SRI) S con sus análogas (t', x'_1, x'_2, x'_3) en otro sistema inercial S' (con ejes paralelos a los de S) que se mueve respecto de S con velocidad *constante* $v\mathbf{e}_1$. Una forma equivalente de enunciar este *principio de relatividad de Galileo* es la afirmación de que *ningún experimento mecánico permite distinguir entre dos sistemas de referencia inerciales*. En otras palabras, *todos los sistemas inerciales son equivalentes* desde el punto de vista de la Mecánica newtoniana.

A finales del siglo XIX, se planteó la cuestión de si el principio de relatividad de Galileo se aplicaba también a las ecuaciones de Maxwell, que gobiernan los fenómenos electromagnéticos —en particular, la propagación de las *ondas electromagnéticas*, incluida la *luz*. Dicho de otro modo ¿es posible distinguir entre dos sistemas inerciales mediante algún fenómeno de tipo electromagnético (en particular, luminoso)? Para responder a esta pregunta, recuérdese que en el vacío los potenciales electromagnéticos $A_0 \equiv \Phi/c$ y $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ obedecen la ecuación de ondas¹

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_i^2} = 0, \quad \mu = 0, \dots, 3, \quad (6.2)$$

donde

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

es una constante universal (dependiente de las propiedades electromagnéticas del vacío). ¿Cómo se transforma la ecuación (6.2) bajo la transformación de Galileo (6.1)? Para responder a esta pregunta, supondremos que los potenciales se transforman *linealmente*, es decir que

$$A'_\mu(t', \mathbf{r}') = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda'_\mu(\nu) A_\nu(t, \mathbf{r}), \quad \mu = 0, \dots, 3.$$

¹Supondremos a partir de ahora que los potenciales electromagnéticos verifican el gauge de Lorentz (1.36).

(Esta suposición es muy natural, ya que la ecuación de ondas (6.2) es lineal en las componentes del potencial electromagnético.) En tal caso, las componentes A'_μ verificarán también la ecuación (6.2), es decir

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A'_\mu}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 A'_\mu}{\partial x_i^2} = 0, \quad \mu = 0, \dots, 3.$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x'_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

se obtiene inmediatamente

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A'_\mu}{\partial t'^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 A'_\mu}{\partial x_1'^2} - \sum_{i=2}^3 \frac{\partial^2 A'_\mu}{\partial x_i'^2} - \frac{2v}{c^2} \frac{\partial^2 A'_\mu}{\partial t' \partial x'_1} = 0, \quad \mu = 0, \dots, 3,$$

que *no* es una ecuación de ondas en las coordenadas (t', x'_1, x'_2, x'_3) para ningún valor² de $v \neq 0$.

El hecho de que la ecuación (6.2) no sea invariante bajo transformaciones de Galileo plantea las siguientes tres posibilidades, que solo pueden decidirse mediante el experimento:

1. Existe un sistema de referencia inercial privilegiado, en el que son válidas las ecs. (6.2) (o, equivalentemente, las ecuaciones de Maxwell) y las ondas electromagnéticas se propagan con velocidad $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$. Por tanto, el principio de relatividad (es decir, la equivalencia de todos los sistemas inerciales) es válido para la Mecánica pero no para el Electromagnetismo.
2. El principio de relatividad es válido tanto para la Mecánica como para el Electromagnetismo, pero las ecuaciones de Maxwell no son correctas.
3. El principio de relatividad es válido tanto para la Mecánica como para el Electromagnetismo, pero la formulación newtoniana de la Mecánica no es correcta.

A finales del siglo XIX se pensaba que la hipótesis correcta era la primera. La explicación teórica que se aducía era que las ondas electromagnéticas se propagan en un medio material denominado *éter* que llena el espacio, y por tanto las ecs. (6.2) —o, equivalentemente, las ecuaciones de Maxwell— solo son válidas en un sistema inercial que esté en reposo respecto del éter. Se pensaba, además, que este sistema inercial coincidía con el de las estrellas lejanas, lo que permitía identificar dicho sistema inercial privilegiado con el “espacio absoluto” de Newton. Si esto fuera cierto, sería en principio posible detectar experimentalmente el movimiento de un sistema inercial respecto del éter (“movimiento absoluto”) estudiando la propagación de las ondas electromagnética respecto de dicho sistema.

En 1887, Michelson y Morley realizaron un experimento muy sensible para detectar la velocidad de la Tierra respecto del éter o, equivalentemente, respecto de las estrellas lejanas (que, a su vez, están aproximadamente en reposo respecto del Sol). El experimento se basa en estudiar la trayectoria de un rayo luminoso que se divide mediante un espejo semiplatedado en dos rayos perpendiculares (cf. la Fig. 6.1), de modo que el tiempo empleado por cada uno de estos rayos en volver al espejo es distinto si el dispositivo está en movimiento respecto del éter. Aunque el efecto es muy pequeño (del orden de $v^2/c^2 \sim 10^{-8}$, siendo v la velocidad de la Tierra respecto del éter, aproximadamente igual a su velocidad respecto del Sol), es posible observarlo estudiando las franjas de interferencia producidas al recombinarse ambos rayos. Aunque el experimento se repitió numerosas veces, *siempre se obtuvo un resultado negativo*, es decir no se detectó velocidad alguna de la Tierra respecto del éter. Este resultado es totalmente inesperado y ciertamente sorprendente, ya que, aun admitiendo que en algún punto de su órbita alrededor del Sol la velocidad de la Tierra pudiera coincidir con la del éter, dicha velocidad varía a lo largo de la órbita.

Durante casi dos décadas el experimento de Michelson–Morley permaneció sin una explicación que fuera a la vez consistente con otros fenómenos observados (como, por ejemplo, la aberración de la luz o

²Nótese, sin embargo, que para $v \ll c$ la ecuación de ondas es aproximadamente invariante.

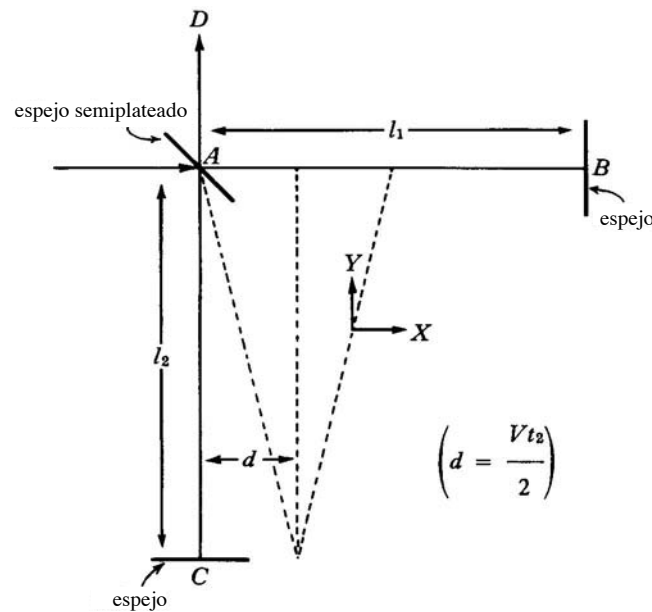


Figura 6.1: Experimento de Michelson–Morley.

la velocidad de la luz en medios materiales en movimiento). Finalmente, en 1905 Einstein observó que el resultado negativo de dicho experimento (así como el de los demás fenómenos citados anteriormente) puede explicarse en base a los dos postulados fundamentales siguientes:

1. Las leyes de la Física son las mismas en cualquier sistema de referencia inercial (*principio de relatividad*).
2. La velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío es la *constante universal* $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$.

Los postulados anteriores constituyen la base de la **teoría especial de la Relatividad**³. El primer postulado es evidentemente una extensión del principio de relatividad galileano a *todas* las leyes de la Física (incluyendo el Electromagnetismo), y no solo a la Mecánica. Por otra parte, combinándolo con el segundo se llega inmediatamente la siguiente conclusión:

La velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío es igual a c en cualquier sistema inercial.

Por supuesto, este principio explica satisfactoriamente el resultado negativo del experimento de Michelson–Morley, ya que si es cierto los dos rayos luminosos en dicho experimento viajan a la misma velocidad (c). Sin embargo, es profundamente anti-intuitivo desde el punto de vista de la Mecánica newtoniana, ya que viola la familiar *ley de adición de velocidades*

$$\dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{r}} - v\mathbf{e}_1$$

que se deduce directamente derivando la ec. (6.1). Por consiguiente, la transformación de Galileo (6.1) *no* puede ser correcta. A esta misma conclusión se llega observando que la ecuación de ondas (6.2) para los potenciales electromagnéticos —que es equivalente a las ecuaciones de Maxwell— no es invariante bajo la transformación (6.1), en contradicción con los postulados 1 y 2.

³La teoría general extiende el primer postulado —es decir el principio de relatividad— a sistemas de referencia no inerciales, y desarrolla una teoría de la gravitación universal (basada en la geometría del espacio-tiempo) compatible con los postulados de la Relatividad especial.

6.2 Transformaciones de Lorentz

6.2.1 Deducción de las ecuaciones de la transformación

Como acabamos de ver, la transformación de Galileo (6.1) *no* es compatible con los postulados de la teoría especial de la Relatividad. En esta sección deduciremos, aplicando dichos postulados junto con la *homogeneidad* e *isotropía* del espacio-tiempo⁴, las ecuaciones correctas que relacionan las coordenadas espacio-temporales $(t, \mathbf{r})$ y $(t', \mathbf{r}')$ de un mismo suceso en dos sistemas inerciales distintos S y S' . Supondremos, como en la sección anterior, que los ejes de ambos sistemas son paralelos, y que la velocidad del origen O' de S' respecto de S es⁵ $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_1$. Escogiendo adecuadamente el origen de tiempos, siempre podemos conseguir que O y O' coincidan en $t = t' = 0$, es decir que

$$x_\mu = 0, \quad \forall \mu = 0, \dots, 3 \implies x'_\mu = 0, \quad \forall \mu = 0, \dots, 3, \quad (6.3)$$

donde hemos introducido la notación

$$x_0 \equiv ct, \quad x'_0 \equiv ct'.$$

A partir de ahora siempre supondremos que se cumple la condición (6.3), salvo indicación expresa en contrario.

i) En primer lugar, utilizando la *homogeneidad* del espacio-tiempo se puede demostrar que la transformación que relaciona las coordenadas x'_μ con las x_μ es *lineal*, es decir

$$x'_\mu = \sum_v \Lambda_{\mu v}(v) x_v, \quad \mu = 0, \dots, 3,$$

donde los coeficientes $\Lambda_{\mu v}(v)$ dependen solo de la velocidad relativa de ambos sistemas.

En efecto, consideremos un reloj que se mueve con velocidad *constante* respecto de S , y por tanto (por el primer postulado de la RE) respecto de S' . Si $x_i(t)$ y $x'_i(t')$ ($i = 1, 2, 3$) son las coordenadas espaciales de dicho reloj en los sistemas S y S' entonces

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{d^2 x'_i}{dt'^2} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Por otra parte, por la homogeneidad del tiempo y del espacio el tiempo τ medido por el reloj en movimiento uniforme ha de verificar

$$\frac{d\tau}{dt} = \text{const.}, \quad \frac{d\tau}{dt'} = \text{const.}$$

De esto se deduce fácilmente que

$$\frac{d^2 x_i}{d\tau^2} = \frac{d^2 x'_i}{d\tau'^2} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

y por tanto, llamando $x_0 = ct$, $x'_0 = ct'$,

$$\frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} = \frac{d^2 x'_\mu}{d\tau'^2} = 0, \quad \mu = 0, \dots, 3.$$

Pero entonces

$$\frac{dx'_\mu}{d\tau} = \sum_{v=0}^3 \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_v} \frac{dx_v}{d\tau}, \quad \frac{d^2 x'_\mu}{d\tau^2} = \sum_{v,\sigma=0}^3 \frac{\partial^2 x'_\mu}{\partial x_v \partial x_\sigma} \frac{dx_v}{d\tau} \frac{dx_\sigma}{d\tau} = 0 \implies \frac{\partial^2 x'_\mu}{\partial x_v \partial x_\sigma} = 0, \quad \forall v, \sigma = 0, \dots, 3,$$

al ser $dx_\mu/d\tau$ ($\mu = 0, \dots, 3$) arbitrario.

⁴El espacio-tiempo ha de ser *homogéneo*, es decir todos sus puntos deben ser equivalentes. Análogamente, el espacio debe ser *isótropo*, lo que significa que todas las direcciones espaciales han de ser equivalentes.

⁵En todo este capítulo, v denotará normalmente la componente de la velocidad relativa de los sistemas S y S' en la dirección del vector $\mathbf{e}_1$, pudiendo ser por tanto positiva o negativa. El módulo de la velocidad es entonces igual a $|v|$.

ii) En segundo lugar, es fácil comprobar que las coordenadas transversales a la velocidad $\mathbf{v}$ son iguales en ambos sistemas, es decir

$$x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3.$$

En efecto (por ejemplo), al ser la transformación $x_\mu \mapsto x'_\mu$ lineal se tendrá

$$x'_2 = \sum_{\mu} a_{\mu}(v) x_{\mu},$$

donde el índice de suma varía de 0 a 3 (en general, a partir de ahora los índices *griegos* variarán entre 0 y 3 y los *latinos* irán de 1 a 3). Como $x_2 = 0$ implica $x'_2 = 0$ (ya que los ejes de S y S' son paralelos), todos los coeficientes a_{μ} se anulan excepto a_2 , y por tanto

$$x'_2 = a_2(v) x_2.$$

Nótese que, por la *isotropía del espacio*, el coeficiente a_2 solo pueden depender de $|v|$, es decir

$$a_2(v) = a_2(-v).$$

Por el principio de relatividad, la velocidad de O respecto de O' ha de ser $-v\mathbf{e}_1$, y por tanto

$$x_2 = a_2(-v)x'_2 = a_2(-v)a_2(v)x_2 = a_2^2(v)x_2 \implies a_2(v) = \pm 1.$$

Por continuidad (ya que $a_2(0) = 1$) debemos tomar $a_2(v) = 1$, lo que conduce a la igualdad de x_2 y x'_2 . Un argumento análogo se aplica a x_3 .

iii) Teniendo en cuenta que el sistema S' se mueve con velocidad $v\mathbf{e}_1$ respecto de S , la coordenada x'_1 debe anularse cuando $x_1 - vt = 0$, y por tanto

$$x'_1 = \gamma(v)(x_1 - vt), \quad (6.4)$$

donde γ es una función *par* de v . Por el principio de relatividad, debe cumplirse también la relación

$$x_1 = \gamma(v)(x'_1 + vt'). \quad (6.5)$$

Hasta el momento, solo hemos aplicado el principio de relatividad (primer postulado) y la homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo. Por ejemplo, si en este momento supusiéramos que $t' = t$ (es decir, que el tiempo es *absoluto*) de las ecs. (6.4) y (6.5) se obtendría inmediatamente

$$x_1 = \gamma^2(v)(x_1 - vt) + \gamma(v)vt \implies (1 - \gamma^2(v))x_1 + \gamma(v)(\gamma(v) - 1)vt = 0 \implies \gamma(v) = 1,$$

lo que conduce a la transformación de Galileo (6.1). Sabemos, sin embargo, que esta ecuación es incorrecta, lo que implica que $t' \neq t$, en contradicción con uno de los axiomas fundamentales de la Mecánica newtoniana. Para encontrar la relación correcta entre t y t' debemos aplicar el segundo postulado de Einstein, según el cual la ecuación $x_1 - ct = 0$ (ecuación del propagación de una onda electromagnética en la dirección del eje x_1) debe implicar $x'_1 - ct' = 0$. Sustituyendo estas relaciones en (6.4) y (6.5) obtenemos

$$ct' = \gamma(v)(c - v)t, \quad ct = \gamma(v)(c + v)t'.$$

Multiplicando ambas ecuaciones y cancelando un factor común tt' se llega fácilmente a la relación

$$c^2 = \gamma^2(v)(c^2 - v^2) \implies \gamma(v) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

De nuevo debemos tomar, por continuidad, el signo “+”, es decir

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6.6)$$

Sustituyendo en la ec. (6.5) y despejando t' se obtiene fácilmente la ley de transformación del tiempo:

$$x_1 = \gamma^2(v)(x_1 - vt) + \gamma(v)vt' \implies t' = \gamma(v) \left[t + (\gamma(v)^{-2} - 1) \frac{x_1}{v} \right] \implies t' = \gamma(v) \left(t - \frac{vx_1}{c^2} \right).$$

Reuniendo las ecuaciones que acabamos de deducir se llega finalmente a las siguientes fórmulas que relacionan las coordenadas x_μ y x'_μ en ambos sistemas inerciales:

$$t' = \gamma(v) \left(t - \frac{vx_1}{c^2} \right), \quad x'_1 = \gamma(v)(x_1 - vt), \quad x'_k = x_k \quad (k = 2, 3). \quad (6.7)$$

La transformación (6.6)-(6.7) entre las coordenadas x_μ y x'_μ , que sustituyen a la transformación de Galileo (6.1), se denomina **transformación de Lorentz** (en la dirección del eje x_1).

• De la ec. (6.6) para la función $\gamma(v)$ se sigue inmediatamente que *el módulo de la velocidad relativa entre dos sistemas inerciales es estrictamente menor que la velocidad c de las ondas EM en el vacío*. En particular, *la velocidad de cualquier partícula material* (con masa no nula) *ha de ser inferior a c* , ya que un conjunto de tales partículas define en cierto modo un sistema inercial. De hecho, es fácil probar que *la velocidad de transmisión de cualquier señal física no puede ser superior a c* , entendiendo por “señal” física el intercambio de *información*. En efecto, supongamos que se envía una señal de un punto P a otro punto Q a una velocidad $u > c$ medida en un sistema inercial S . Escojamos los ejes de S de modo que P y Q estén en el eje x_1 con una separación espacial $\Delta x_1 > 0$, y sea $\Delta t > 0$ el tiempo empleado por la señal en alcanzar Q medido en S (cf. la Fig. 6.2). En virtud de (6.6)-(6.7), el tiempo correspondiente

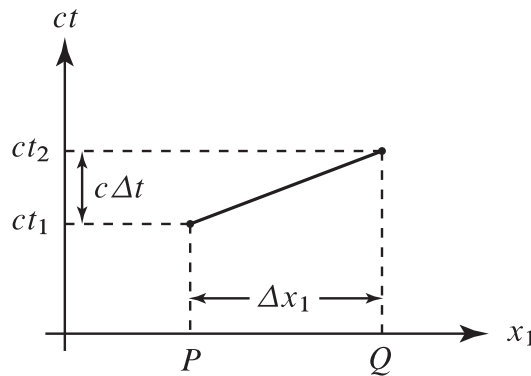


Figura 6.2: Transmisión de una señal de P a Q con velocidad $u > c$ respecto de un sistema inercial S .

medido en el sistema S' es igual a

$$\Delta t' = \gamma(v) \left(\Delta t - \frac{v \Delta x}{c^2} \right) = \gamma(v) \Delta t \left(1 - \frac{uv}{c^2} \right).$$

Si escogemos

$$\frac{c^2}{u} < v < c$$

entonces $\Delta t' < 0$; en otras palabras, según S' la señal se recibe en Q *antes* de ser emitida en P , lo que viola el *principio de causalidad* (la causa debe siempre preceder al efecto).

6.2.2 Ley de adición de velocidades relativista

Aunque acabamos de demostrar que los dos postulados de la Relatividad especial conducen a las las ecs. (6.6)-(6.7) de la transformación de Lorentz, debemos comprobar que esta transformación respeta dichos postulados. En cuanto al primer postulado, si una partícula se mueve con velocidad constante $\mathbf{u}$ respecto del sistema S , es decir si

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = u_i = \text{const.}, \quad i = 1, 2, 3,$$

para todo t , utilizando las ecuaciones de la transformación de Lorentz y la identidad

$$\frac{dx'_i}{dt'} = \frac{\frac{dx'_i}{dt}}{\frac{dt'}{dt}}$$

se obtiene inmediatamente

$$\frac{dx'_1}{dt'} = \frac{u_1 - v}{1 - \frac{u_1 v}{c^2}}, \quad \frac{dx'_k}{dt'} = \frac{u_k}{\gamma(v) \left(1 - \frac{u_1 v}{c^2}\right)} \quad (k = 2, 3).$$

Por tanto, en el sistema S' la partícula se mueve también con *velocidad constante* $\mathbf{u}'$, siendo

$$u'_1 = \frac{u_1 - v}{1 - \frac{u_1 v}{c^2}}, \quad u'_k = \frac{u_k}{\gamma(v) \left(1 - \frac{u_1 v}{c^2}\right)} \quad (k = 2, 3).$$

En otras palabras, *se verifica la primera ley de Newton*. La expresión de $\mathbf{u}$ en función de $\mathbf{u}'$ se puede obtener despejando u_i en función de u'_i de las ecuaciones anteriores, o, más sencillamente (por el principio de relatividad), cambiando v por $-v$ en dichas ecuaciones:

$$u_1 = \frac{u'_1 + v}{1 + \frac{u'_1 v}{c^2}}, \quad u_k = \frac{u'_k}{\gamma(v) \left(1 + \frac{u'_1 v}{c^2}\right)} \quad (k = 2, 3). \quad (6.8)$$

La ecuación anterior es la **ley de adición de velocidades** relativista, que reemplaza a su análogo galileano $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + v\mathbf{e}_1$. De la ec. (6.8) se obtiene fácilmente

$$\left(1 + \frac{u'_1 v}{c^2}\right)^2 (\mathbf{u}^2 - c^2) = u_1'^2 + \frac{1}{\gamma^2(v)}(u_2'^2 + u_3'^2) + v^2 - c^2 - \frac{v^2 u_1'^2}{c^2} = \frac{\mathbf{u}'^2 - c^2}{\gamma^2(v)}.$$

En particular, si $|\mathbf{u}'| = c$ entonces $|\mathbf{u}| = c$, y por tanto se verifica el segundo postulado de la Relatividad especial. De la ecuación anterior se deduce también que si $|\mathbf{u}'| < c$ entonces $|\mathbf{u}| < c$. En otras palabras, *la adición de dos velocidades menores en módulo que la velocidad de la luz produce como resultado una velocidad menor que c* .

6.2.3 Intervalo

En relación con el segundo postulado, consideremos la ecuación de propagación de una señal luminosa (en general, de una onda electromagnética) emitida desde el origen de S en el instante $t = 0$, es decir

$$c^2 t^2 - \mathbf{r}^2 = 0.$$

Según el segundo postulado, la ecuación del frente de ondas en el sistema S' debería ser

$$c^2 t'^2 - \mathbf{r}'^2 = 0,$$

dado que $t = 0$ y $\mathbf{r} = 0$ implica que $t' = 0$ y $\mathbf{r}' = 0$. De hecho, aplicando la transformación de Lorentz (6.6)-(6.7) a la expresión $c^2 t'^2 - \mathbf{r}'^2$ se obtiene fácilmente

$$\begin{aligned} c^2 t'^2 - \mathbf{r}'^2 &= \gamma^2(v) \left(ct - \frac{vx_1}{c} \right)^2 - \gamma^2(v) (x_1 - vt)^2 - x_2^2 - x_3^2 \\ &= \gamma^2(v) (c^2 - v^2) t^2 - \gamma^2(v) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2. \end{aligned}$$

En otras palabras, la forma cuadrática $c^2t^2 - \mathbf{r}^2$ es invariante bajo la transformación de Lorentz (6.6)-(6.7). En general, dados dos sucesos de coordenadas espacio-temporales x_μ y $x_\mu + \Delta x_\mu$ (con $x_0 = ct$), el (cuadrado del) **intervalo** entre ambos se define por

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \sum_{i=1}^3 \Delta x_i^2 = \Delta x_0^2 - \sum_{i=1}^3 \Delta x_i^2 \equiv \Delta x_0^2 - \Delta \mathbf{x}^2. \quad (6.9)$$

Nótese que, a pesar de lo que la notación utilizada sugiere, Δs^2 puede ser negativo. Como la transformación de Lorentz (6.6)-(6.7) es *lineal*, las diferencias Δx_μ se transforman igual que las propias coordenadas x_μ , y por tanto el intervalo entre dos sucesos es invariante bajo transformaciones de Lorentz:

$$\Delta s^2 = \Delta x_0^2 - \Delta \mathbf{x}^2 = \Delta x_0'^2 - \Delta \mathbf{x}'^2. \quad (6.10)$$

Por tanto el intervalo entre dos sucesos es una característica *intrínseca* de la relación entre ambos, independientemente de las coordenadas que utilicemos para describirlos. Por definición, el intervalo Δs^2 entre dos sucesos es **temporal** si $\Delta s^2 > 0$, **de tipo luz** si $\Delta s^2 = 0$, y **espacial** si $\Delta s^2 < 0$ (cf. la Fig. (6.3)).

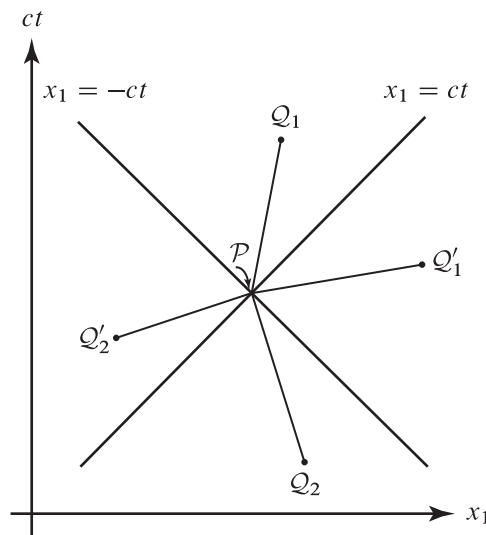


Figura 6.3: En la figura se muestran 5 sucesos P , Q_i , Q'_i ($i = 1, 2$), donde se ha tomado $x_2 = x_3 = 0$ por sencillez. Los intervalos $Q_i - P$ son temporales, siendo los restantes intervalos $Q'_i - P$ espaciales. El suceso Q_1 está en el futuro de P ($t(Q_1) - t(P) > 0$), mientras que Q_2 está en su pasado ($t(Q_2) - t(P) < 0$). El suceso Q'_2 no puede haber influido en P , ni el suceso Q'_1 puede haber sido influido por P .

- Si dos sucesos están separados por un intervalo temporal, existe un sistema de referencia inercial en el cual ambos sucesos ocurren en el mismo lugar.

En efecto, escojamos los ejes de S de forma que

$$\Delta x_2 = \Delta x_3 = 0,$$

y consideremos un sistema inercial S' que se mueve con velocidad $v\mathbf{e}_1$ respecto de S . Como

$$\Delta x'_2 = \Delta x'_3 = 0, \quad \Delta x'_1 = \gamma(\Delta x_1 - v\Delta t),$$

para conseguir que $\Delta \mathbf{x}' = 0$ basta tomar

$$v = \frac{\Delta x_1}{\Delta t},$$

lo cual es posible al ser

$$\frac{|v|}{c} = \left| \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \right| = \frac{|\Delta x_1|}{\sqrt{\Delta s^2 + \Delta x_1^2}} < 1.$$

El lapso de tiempo $\Delta t'$ entre ambos sucesos medido en el sistema S' (en el que dichos sucesos coinciden espacialmente) se denomina **lapso de tiempo propio**, y se suele indicar por $\Delta \tau$. De la invariancia del intervalo se sigue que, en cualquier otro sistema de referencia inercial S ,

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \mathbf{x}^2 = c^2 \Delta t'^2 \equiv c^2 \Delta \tau^2 \implies \Delta \tau = \frac{\Delta s}{c} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{\Delta \mathbf{x}^2}{\Delta x_0^2}},$$

donde hemos utilizado que $\Delta \tau \equiv \Delta t'$ y Δt tienen el mismo signo (véase la ec. (6.11)). Nótese que *el lapso de tiempo coordenado Δt es siempre mayor o igual que el de tiempo propio*, y solo coincide con este último en un sistema de referencia inercial en que ambos sucesos ocurren en el mismo lugar.

- Si dos sucesos están separados por un intervalo espacial, es posible encontrar un sistema de referencia inercial en el cual ambos sucesos son simultáneos.

En efecto (suponiendo de nuevo que $\Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$), al ser

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v \Delta x_1}{c^2} \right)$$

se puede conseguir que $\Delta t'$ se anule sin más que tomar

$$v = \frac{c^2 \Delta t}{\Delta x_1} = \frac{c \Delta x_0}{\Delta x_1},$$

lo que es factible dado que

$$\frac{|v|}{c} = \left| \frac{\Delta x_0}{\Delta x_1} \right| = \frac{|\Delta x_0|}{\sqrt{\Delta x_0^2 - \Delta s^2}} < 1.$$

Nótese también que en este caso

$$\sqrt{-\Delta s^2} = |\Delta x'_1|$$

coincide con la distancia entre ambos sucesos en el sistema de referencia en que son simultáneos, denominada **distancia propia**. Como

$$|\Delta \mathbf{x}| = \sqrt{\Delta x_0^2 - \Delta s^2} \geq \sqrt{-\Delta s^2},$$

la distancia propia es siempre *menor o igual* que la distancia espacial $|\Delta \mathbf{x}|$ en cualquier sistema de referencia inercial.

- Por último, si dos sucesos están separados por un intervalo de tipo luz entonces

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \mathbf{x}^2 = 0,$$

y por tanto ambos sucesos están en la trayectoria de un rayo de luz.

- Consideremos dos sucesos separados por un intervalo espacial, como $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}'_1$ en la Fig. 6.3. Como acabamos de ver, aunque en el sistema inercial S el suceso $\mathcal{Q}'_1$ precede a $\mathcal{P}$, en algún sistema inercial $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}'_1$ son simultáneos. En otras palabras, *el concepto de simultaneidad no es absoluto, sino que depende del sistema de referencia inercial utilizado*. Este fenómeno se denomina **relatividad de la simultaneidad**, y es una de las diferencias más radicales entre la teoría especial de la Relatividad y la concepción newtoniana del tiempo.

- Es importante darse cuenta de que *la relatividad de la simultaneidad no viola el principio de causalidad*, ya que se aplica a sucesos separados por un intervalo *espacial*, entre los cuales no puede haber

transmisión de información (pues una hipotética señal entre ambos debería viajar a una velocidad superior a c), y por tanto no pueden ser causa y efecto uno del otro. Por el contrario, si dos sucesos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ están separados por un intervalo *temporal* y $\mathcal{P}$ precede a $\mathcal{Q}$ en un sistema inercial S , entonces $\mathcal{P}$ precede a $\mathcal{Q}$ en cualquier otro sistema inercial S' relacionado con S mediante la transformación de Lorentz (6.6)-(6.7). En efecto, las diferencias de tiempo coordinado Δt y $\Delta t'$ entre ambos sucesos están relacionadas por⁶

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \left(1 - \frac{v}{c} \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \right), \quad (6.11)$$

donde el término entre paréntesis es siempre mayor que cero si el cuadrado del intervalo es positivo.

6.2.4 Propiedades de las transformaciones de Lorentz

Si $x = (x_0, \mathbf{x})$ e $y = (y_0, \mathbf{y})$ son las coordenadas de dos sucesos, de la invariancia del intervalo y de la forma cuadrática $x_0^2 - \mathbf{x}^2$ se sigue que

$$\begin{aligned} (y_0 - x_0)^2 - (\mathbf{y} - \mathbf{x})^2 &= y_0^2 - \mathbf{y}^2 + x_0^2 - \mathbf{x}^2 - 2(x_0 y_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \\ &= (y'_0 - x'_0)^2 - (\mathbf{y}' - \mathbf{x}')^2 = y_0'^2 - \mathbf{y}'^2 + x_0'^2 - \mathbf{x}'^2 - 2(x'_0 y'_0 - \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}') \\ &= y_0^2 - \mathbf{y}^2 + x_0^2 - \mathbf{x}^2 - 2(x'_0 y'_0 - \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}'), \end{aligned}$$

y por tanto

$$x_0 y_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x'_0 y'_0 - \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}'. \quad (6.12)$$

En otras palabras, la forma bilineal

$$x \cdot y \equiv x_0 y_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \quad (6.13)$$

denominada **producto de Minkowski**, es también invariante bajo transformaciones de Lorentz. Nótese que, según esta definición,

$$x \cdot x \equiv x^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2, \quad \Delta s^2 = (\Delta x)^2. \quad (6.14)$$

Por definición, se denomina **espacio de Minkowski** al espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ (el **espacio-tiempo**) dotado del producto de Minkowski (6.13). Nótese que, como la forma cuadrática (6.14) asociada a esta forma bilineal (esencialmente, el cuadrado del intervalo) *no* es definida positiva, la ec. (6.13) *no* define un verdadero producto escalar en el espacio de Minkowski, aunque puede utilizarse para dotar a este espacio de una estructura geométrica muy útil a la hora estudiar sus propiedades.

• Sean S y S' dos sistemas de referencia inerciales arbitrarios cuyos orígenes coinciden en $t = t' = 0$, y denotemos por $\mathbf{v}$ la velocidad del origen de S' respecto de S . Para encontrar la relación entre las coordenadas espacio-temporales x y x' de un mismo suceso respectivamente en S y S' , podemos proceder de la forma siguiente. En primer lugar, consideremos un sistema inercial S'' en reposo respecto de S , cuyo eje x''_1 esté en la dirección de $\mathbf{v}$. En tal caso

$$x'' = R_1 x,$$

siendo R_1 una rotación de las coordenadas espaciales (es decir, $x''_0 = x_0$ y $\mathbf{x}''_0 = \mathcal{R}\mathbf{x}$, con $\mathcal{R} \in \text{SO}(3)$). En segundo lugar, sea S''' un nuevo sistema de referencia inercial que se mueve con velocidad $\mathbf{v} = v\mathbf{e}''_1$ ($v = |\mathbf{v}|$) respecto de S'' , con ejes paralelos a los de este último sistema y cuyo origen coincide con el de este en $t'' = t''' = 0$. Entonces se verifica

$$x''' = L(v)x'',$$

donde $L(v)$ es la transformación de Lorentz (6.6)-(6.7) (sustituyendo x por x'' y x' por x'''). Por último, como S' y S''' se mueven con la misma velocidad $\mathbf{v}$ respecto de S , y sus orígenes coinciden inicialmente, las coordenadas espacio-temporales x' y x''' estarán relacionadas simplemente por una rotación, es decir

$$x' = R_2 x'''.$$

⁶Obsérvese que si el intervalo entre dos sucesos es temporal entonces $\Delta t \neq 0$ en cualquier sistema de referencia inercial.

Combinando estas ecuaciones se obtiene finalmente

$$x' = R_2 L(v) R_1 x \equiv \Lambda(v) x. \quad (6.15)$$

La transformación $\Lambda(v)$, que recibe el nombre de **transformación (general) de Lorentz**, es la transformación más general que relaciona las coordenadas de un mismo suceso en dos sistemas inerciales cuyos orígenes espacio-temporales coinciden. Si no se hace esta última suposición, se obtiene la **transformación de Poincaré**

$$x' = \Lambda(v)x + a,$$

con $a \in \mathbb{R}^4$ constante.

La transformación de Lorentz (6.6)-(6.7) puede escribirse en forma matricial como

$$x' = L(v)x, \quad (6.16)$$

donde $L(v)$ es la matriz 4×4 dada por

$$L(v) = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\beta(v)\gamma(v) & 0 & 0 \\ -\beta(v)\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta(v) \equiv \frac{v}{c}. \quad (6.17)$$

Utilizando notación matricial, el producto de Minkowski entre dos **cuadrivectores** $x, y \in \mathbb{R}^4$ se escribe

$$x \cdot y = x^T G y,$$

donde en el miembro derecho x, y se consideran vectores columna y G es la matriz diagonal

$$G = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

La invariancia del producto de Minkowski se expresa entonces mediante la relación

$$x' \cdot y' = (L(v)x)^T G (L(v)y) = x^T (L(v)^T G L(v)) y = x^T G y, \quad x, y \in \mathbb{R}^4,$$

o equivalentemente

$$L(v)^T G L(v) = G. \quad (6.18)$$

Por otra parte, las *rotaciones* también dejan invariante el producto de Minkowski —ya que no cambian el tiempo y dejan invariante el producto escalar de las componentes espaciales de los cuadrivectores—, es decir

$$R^T G R = G \quad (6.19)$$

para toda rotación R . Si $\Lambda(v) = R_2 L(v) R_1$ es una transformación general de Lorentz, de las ecs. (6.18)-(6.19) se sigue inmediatamente que

$$\Lambda(v)^T G \Lambda(v) = G. \quad (6.20)$$

En otras palabras, *el producto de Minkowski, y por tanto el cuadrado del intervalo, son invariantes bajo transformaciones generales de Lorentz*. Matemáticamente, las matrices que satisfacen la relación (6.20) forman un grupo denominado **grupo de Lorentz**, de extraordinaria importancia en Física. Se demuestra que las transformaciones generales de Lorentz (6.15) que acabamos de definir forman un subgrupo del grupo de Lorentz denominado *ortócrono propio*, definido por (6.18) junto con las dos condiciones adicionales $\det \Lambda(v) = 1$ y $\Lambda_{00}(v) > 0$.

- Consideremos, de nuevo, la transformación de Lorentz en la dirección del eje (6.6)-(6.7), que en inglés se denomina *boost* de Lorentz. Dado que $\beta(v) \in (-1, 1)$, existe un único $\phi \in \mathbb{R}$ tal que

$$\beta(v) = \tanh \phi .$$

En términos de este parámetro ϕ , denominado *rapidez*, $\gamma(v)$ está dado por

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta(v)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \phi}} = \cosh \phi ,$$

y por tanto la matriz $L(v)$ adopta la siguiente expresión sencilla:

$$L(v) = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (6.21)$$

Supongamos que efectuamos sucesivamente dos *boosts* de Lorentz de velocidades $v_1 = c \tanh \phi_1$ y $v_2 = c \tanh \phi_2$. Utilizando las fórmulas de adición satisfechas por $\cosh$ y $\sinh$ se prueba inmediatamente que la transformación resultante es otro boost de Lorentz, de rapidez $\phi_1 + \phi_2$. La velocidad de este boost es por tanto

$$v = c \tanh(\phi_1 + \phi_2) = c \frac{\tanh \phi_1 + \tanh \phi_2}{1 + \tanh \phi_1 \tanh \phi_2} \equiv \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} .$$

Se obtiene así de nuevo la ley de adición de dos velocidades paralelas $v_1 \mathbf{e}_1$ y $v_2 \mathbf{e}_2$ (cf. la ec. (6.8)).

6.3 Consecuencias físicas de las transformaciones de Lorentz

Las ecuaciones (6.6)-(6.7) tienen importantes consecuencias físicas, que pasamos a discutir a continuación.

6.3.1 Dilatación del tiempo

Sean, de nuevo, S y S' dos sistemas de referencia con los ejes paralelos⁷ que se mueven con velocidad relativa $v \mathbf{e}_1$, y consideremos un reloj fijo en el origen de S' . Como $\mathbf{x}' = 0$ en todo instante, cuando dicho reloj marca un tiempo t' el tiempo t registrado en S está dado por

$$t = \gamma(v) \left(t' + \frac{v x'_1}{c^2} \right) = \gamma(v) t' \equiv \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > t' . \quad (6.22)$$

En otras palabras, el reloj fijo en el origen de S' *atrás* en relación con los relojes de S . Para velocidades v pequeñas en comparación con la velocidad de la luz c la diferencia $t - t'$ es muy pequeña, dado que

$$t = t' \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + O(v^4/c^4) \right) .$$

Sin embargo, para velocidades próximas a las de la luz dicha diferencia puede ser muy grande, y de hecho tiende a infinito para $v \rightarrow c$. Por ejemplo, si $v = 3c/5$ entonces $t = 5t'/4$. Es importante darse cuenta de los siguientes extremos:

⁷A partir de ahora, supondremos tácitamente que los orígenes de los sistemas de referencia S y S' coinciden en $t = t' = 0$.

- El efecto que acabamos de describir, denominado **dilatación del tiempo**, es *simétrico entre ambos sistemas de referencia*, como no podía ser menos en virtud del primer postulado de Einstein. En otras palabras, si colocamos un reloj en el origen de S la relación entre el tiempo t marcado por dicho reloj y el correspondiente tiempo t' registrado por los relojes de S' es

$$t' = \gamma(v)t, \quad (6.23)$$

ya que ahora $x = 0$ para todo t .

- La aparente contradicción entre las ecuaciones (6.22) y (6.23) se resuelve teniendo en cuenta que en dichas ecuaciones tanto t como t' denotan *tiempos distintos*. Lo esencial es que en ambos casos hay una clara *asimetría* entre el **tiempo propio** medido por un *único* reloj (en reposo en un determinado sistema inercial) y el **tiempo coordenado** registrado por los *relojes* —¡necesariamente *más de uno*!, ya que los “tics” de un reloj fijo en un sistema inercial ocurren en lugares *distintos* en el otro— de otro sistema inercial respecto del cual dicho reloj está en movimiento. Sería incorrecto afirmar que el tiempo transcurre más lentamente en S que en S' , o viceversa, ya que *todos los sistemas inerciales son equivalentes*, y no existe el movimiento (o el reposo) *absoluto*. Sí es correcto decir que *el tiempo propio de un reloj avanza más lentamente que el tiempo coordenado medido por los relojes de un sistema inercial en movimiento respecto de dicho reloj*.

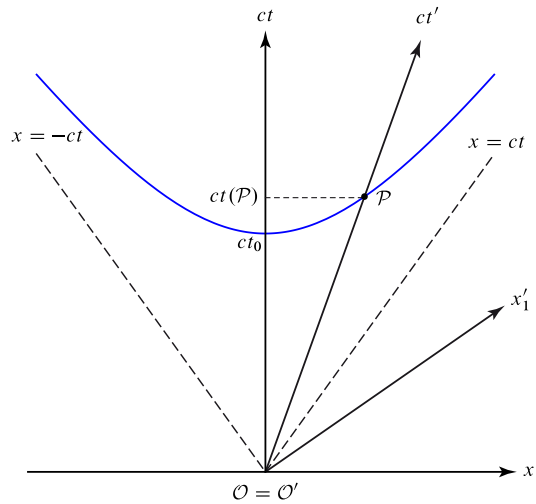


Figura 6.4: Diagrama de Minkowski ilustrando la dilatación del tiempo. El suceso $\mathcal{P}$, que corresponde a un “tic” del reloj fijo en el origen de su sistema propio S' , tiene coordenadas $(ct_0, 0)$ en dicho sistema. La curva en azul es la hipérbola $c^2t^2 - x_1^2 = c^2t'^2 - x_1'^2 = c^2t_0^2$, es decir el lugar de todos los sucesos (en el plano $x_2 = x_3 = 0$) separados del origen $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$ por un intervalo ct_0 . En particular, el punto de intersección de dicha hipérbola con el eje ct tiene coordenada temporal ct_0 en S , de donde se sigue que $t(\mathcal{P})$ es mayor que t_0 .

- La dilatación del tiempo se comprueba a diario en experimentos que miden la *vida media* de una partícula. En efecto, si dicha vida media es igual a Δt_0 en un sistema de referencia inercial en que la partícula está en reposo (es decir, en el *emph*sistema propio de la partícula), su vida media en el sistema del laboratorio será

$$\Delta t = \gamma(v)\Delta t_0, \quad (6.24)$$

siendo v la velocidad de la partícula respecto de este último sistema. La vida media Δt_0 se puede calcular muchas veces de forma teórica mediante técnicas de teoría cuántica de campos, lo que permite comprobar la validez de (6.24) midiendo v y Δt . Todos los (extremadamente numerosos) experimentos realizados hasta la fecha han confirmado la validez de la ec. (6.24). Por ejemplo, los muones presentes en los rayos cósmicos pueden alcanzar una velocidad

$$v = 0,999c$$

cuando entran en la atmósfera terrestre. Para este valor de v , la vida media medida en el sistema de referencia de la Tierra (aproximadamente inercial) es igual a

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (1 - 10^{-3})^2}} \simeq \frac{\Delta t_0}{\sqrt{2 \cdot 10^{-3}}} = \sqrt{500} \Delta t_0 \simeq 22,3663 \Delta t_0.$$

En el caso concreto de los muones,

$$\Delta t_0 \simeq 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ s} \implies \Delta t \simeq 3,35 \cdot 10^{-5} \text{ s}.$$

Nótese que la distancia recorrida por el muón en el tiempo Δt es igual a

$$v\Delta t \sim 10 \text{ Km},$$

mientras que la distancia recorrida a esa misma velocidad durante el tiempo Δt_0 es de apenas

$$v\Delta t_0 \sim 450 \text{ m}.$$

Ejemplo 6.1. *Paradoja de los dos gemelos.* Supongamos que un viajero parte del origen O de S con velocidad $v\mathbf{e}_1$ y, después de un cierto tiempo $\Delta t/2$ (medido en S) invierte su velocidad, llegando de nuevo a O en un tiempo Δt (cf. la Fig. 6.5). ¿Cuál es el tiempo transcurrido según el viajero? En la

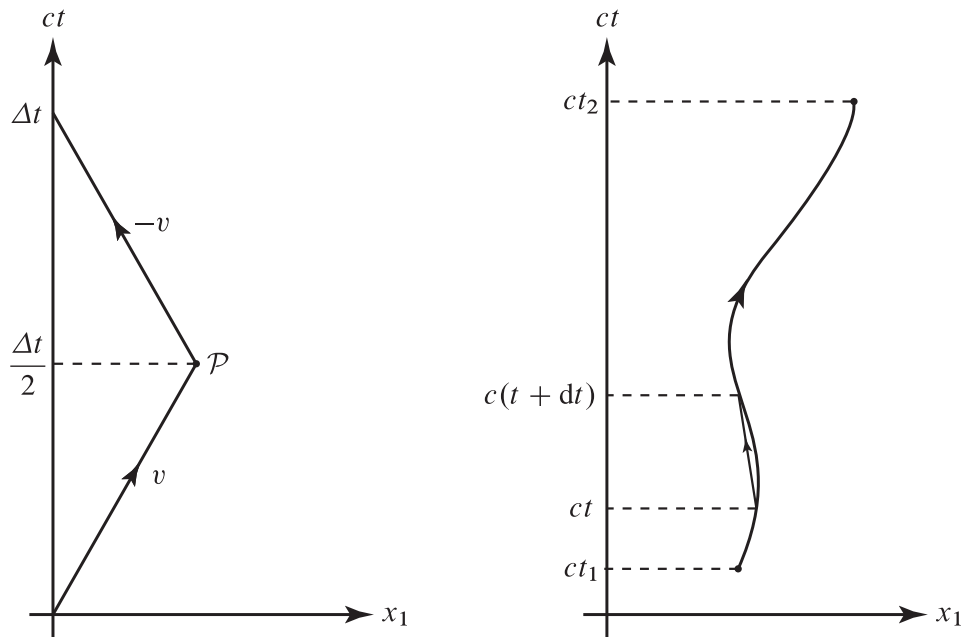


Figura 6.5: Línea de universo del viajero en la paradoja de los dos gemelos (izda.) y línea de universo de una partícula material utilizada en la definición de tiempo propio (drcha).

primera parte del viaje (hasta llegar al suceso denotado por $\mathcal{P}$ en la Fig. 6.5), el sistema de referencia del viajero es un sistema inercial S' que se mueve con velocidad constante $v\mathbf{e}_1$ respecto de S . Por tanto el tiempo que asigna el viajero al suceso $\mathcal{P}$ es

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{2\gamma(v)}$$

(cf. la ec. (6.22)). En la segunda parte del viaje (a partir de $\mathcal{P}$), el sistema de referencia del viajero es *otro* sistema inercial S'' cuya velocidad respecto de S es $-v\mathbf{e}_1$. El tiempo transcurrido en S es (por simetría) de nuevo $\Delta t/2$, mientras que para el viajero el lapso de tiempo correspondiente será

$$\Delta t'' = \frac{\Delta t}{2\gamma(-v)} = \frac{\Delta t}{2\gamma(v)}.$$

Por tanto, la duración del viaje según el viajero es igual a

$$\Delta t' + \Delta t'' = \frac{\Delta t}{\gamma(v)},$$

que puede ser considerablemente menor que Δt si v/c es próximo a 1. Este resultado puede parecer paradójico, ya que cabría pensar que desde el punto de vista del viajero es el observador en O el que se ha movido con velocidad $\mp v\mathbf{e}_1$, y por tanto la duración del viaje medida por dicho viajero debería ser $\gamma(v)\Delta t > \Delta t$. La falacia consiste en suponer que la relación entre el observador en O y el viajero es simétrica, lo cual está muy lejos de ser cierto. En efecto, mientras que el sistema de referencia en que dicho observador está en reposo es un sistema *inercial*, el viajero no está en reposo respecto de *ningún* sistema inercial durante *todo* el transcurso de su viaje, debido al cambio del sentido de la velocidad en $\mathcal{P}$. En otras palabras, mientras que el observador no ha estado sometido a aceleración alguna, el viajero ha tenido que sentir una aceleración (al menos) al cambiar de dirección. $\square$

Supongamos, más generalmente, que una partícula material sigue una trayectoria

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

respecto de un sistema inercial S . Llamaremos **tiempo propio** de la partícula al lapso de tiempo medido por un observador que viaje con dicha partícula (es decir, respecto del cual la partícula esté en reposo en todo instante). Como dicho observador no define en general un sistema inercial —a menos que $\mathbf{v}(t) \equiv \dot{\mathbf{r}}(t)$ sea constante—, para calcular dicho tiempo propio subdividimos la trayectoria de la partícula en el espacio de Minkowski, llamada **línea de universo**, en pequeños arcos aproximadamente rectos. En cada uno de estos arcos, en que el tiempo coordenado de S varía entre t y $t + dt$, la velocidad de la partícula es aproximadamente constante e igual a $\mathbf{v}(t)$. Por tanto el lapso de tiempo propio $d\tau$ empleado por la partícula en recorrer dicho arco es igual al lapso de tiempo coordenado medido por un sistema inercial S' que se mueve con velocidad $\mathbf{v}(t)$ respecto de S , es decir

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2(t)}{c^2}} dt. \quad (6.25)$$

“Sumando” todos estos tiempos infinitesimales $d\tau$ (es decir, integrando respecto de t) obtenemos la siguiente expresión para el lapso de tiempo propio $\Delta\tau$:

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2(t)}{c^2}} dt. \quad (6.26)$$

Nótese que $\Delta\tau$ es invariante bajo transformaciones de Lorentz por su propia definición. Esto también puede comprobarse analíticamente, ya que en virtud de la ec. (6.25) se tiene

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2}(c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2) \equiv \frac{ds^2}{c^2}.$$

De nuevo, $\Delta\tau$ es siempre *menor o igual* que $\Delta t \equiv t_2 - t_1$, y $\Delta\tau = \Delta t$ si y solo si $\mathbf{v}(t) = 0$ para todo $t \in [t_1, t_2]$, es decir si la partícula está en reposo respecto de S . Es también importante observar que *el lapso de tiempo propio $\Delta\tau$ depende en general de la trayectoria seguida por la partícula*, y no solo de los sucesos inicial y final de dicha trayectoria $(t_i, \mathbf{r}(t_i))$, $i = 1, 2$ (cf. la Fig. 6.6).

6.3.2 Contracción de Lorentz–Fitzgerald

Sean, una vez más, S y S' dos sistemas de referencia con los ejes paralelos que se mueven con velocidad relativa $v\mathbf{e}_1$. Consideremos una regla *en reposo* en S' , que podemos suponer determinada por dos marcas situadas en los puntos x'_1 y $x'_1 + l_0$ del eje x'_1 , con $l_0 > 0$. La distancia l_0 es por tanto la longitud de la regla en su **sistema propio** S' , llamada **longitud en reposo**. Para determinar la longitud de dicha regla

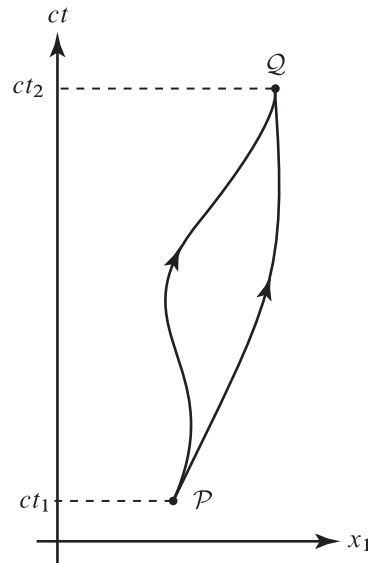


Figura 6.6: Líneas de universo que conectan dos suceso $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$.

en el sistema S , es preciso medir las coordenadas x_1 y $x_1 + l$ de sus extremos *en un mismo instante* t . Utilizando las ecs. (6.6)-(6.7) de la transformación de Lorentz se obtiene

$$\Delta x'_1 \equiv l_0 = \gamma(v)(\Delta x_1 - v\Delta t) = \gamma(v)\Delta x_1 \equiv \gamma(v)l \quad \Rightarrow \quad l = \frac{l_0}{\gamma(v)} < l_0.$$

En el sistema S la regla aparece por tanto *contraída* en un factor $1/\gamma(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, fenómeno conocido como **contracción de Lorentz–Fitzgerald**.

- Nótese que *esta contracción solo se produce en la dirección de la velocidad relativa entre el sistema inercial S y el sistema S'* (sistema en que la regla está *en reposo*), ya que en las direcciones transversales $x_k = x'_k$ ($k = 2, 3$).
- De nuevo, es necesario subrayar que este fenómeno es absolutamente *simétrico entre ambos sistemas de referencia*. En otras palabras, las reglas en reposo en S aparecen contraídas por el mismo factor $1/\gamma(v)$ (en la dirección x'_1) respecto del sistema S' .
- La *asimetría* está en este caso entre el sistema de referencia inercial en que la regla está *en reposo* y cualquier otro sistema inercial. En efecto, en el sistema propio de dicha regla su longitud puede determinarse *directamente* (comparándola, por ejemplo, con una regla patrón), sin necesidad de medir *simultáneamente* las coordenadas espaciales de sus dos extremos. Más precisamente, en el sistema propio de la regla las líneas de universo de sus dos extremos son las rectas verticales

$$(t', 0, 0, 0), \quad (t', l_0, 0, 0),$$

donde hemos supuesto por sencillez, que $x'_1 = 0$. En otro sistema inercial S dichas líneas de universo se transforman en

$$(\gamma(v)t', \gamma(v)vt', 0, 0), \quad (\gamma(v)(t' + \frac{vl_0}{c^2}), \gamma(v)(l_0 + vt'), 0, 0).$$

Según el observador en S , cuando un observador en el sistema propio de dicha regla mide la distancia entre sus extremos lo está haciendo en tiempos *distintos* $t = \gamma(v)t'$ y $t + \Delta t$, separados por un incremento

$$\Delta t = \frac{\gamma(v)vl_0}{c^2}.$$

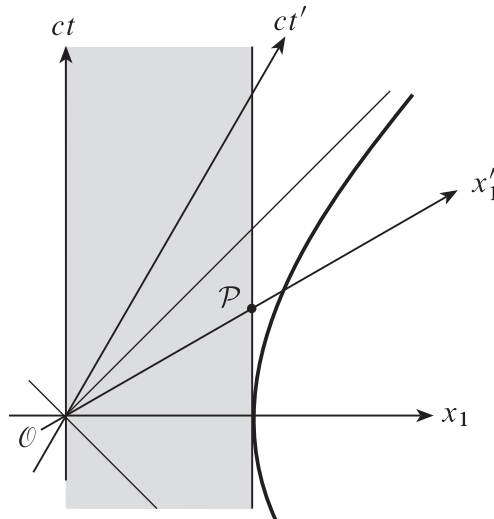


Figura 6.7: Diagrama de Minkowski ilustrando la contracción de Lorentz-Fitzgerald, donde se ha tomado como sistema propio de la regla el sistema S . La zona sombreada está formada por las líneas de universo de los puntos de la regla en su sistema propio. En el sistema S' , los sucesos $\mathcal{O}$ y $\mathcal{P}$ representan dos posiciones *simultáneas* de los extremos de la regla. Por tanto, la distancia espacial de $\mathcal{O}$ a $\mathcal{P}$ medida en S' es la longitud l de la regla en dicho sistema. Los puntos de la hipérbola a la derecha de la figura, de ecuación $ct^2 - x_1^2 = ct'^2 - x_1'^2 = -l_0^2$, son los sucesos separados del origen de coordenadas espacio-temporales $\mathcal{O}$ por un mismo intervalo $\Delta s^2 = -l_0^2$. En particular, la intersección de dicha hipérbola con el eje x_1' está a distancia l_0 del origen respecto del sistema S' , *mayor* que la distancia espacial l de $\mathcal{O}$ a $\mathcal{P}$. Por tanto l ha de ser menor que l_0 , como ya habíamos probado utilizando las ecuaciones de la transformación de Lorentz.

En el incremento de tiempo Δt el extremo derecho de la regla se ha movido, según S , en

$$v\Delta t = \frac{v^2}{c^2} \gamma(v) l_0.$$

Por tanto según el observador en S en el instante $t = \gamma(v)t'$ los extremos de la regla están situados en los puntos de coordenadas

$$x_1 = \gamma(v)vt', \quad x_1 + \Delta x_1 = \gamma(v)(l_0 + vt') - \frac{v^2}{c^2} \gamma(v) l_0,$$

y la longitud de la regla medida en S está dada por

$$l = \Delta x_1 = \gamma(v)l_0 - \frac{v^2}{c^2} \gamma(v)l_0 = \gamma(v)l_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{l_0}{\gamma(v)}.$$

Vemos, en particular, que la contracción de Lorentz-Fitzgerald está estrechamente relacionada con la *relatividad de la simultaneidad*.

6.3.3 Efecto Doppler relativista

Es bien conocido que si una fuente que emite ondas sonoras de frecuencia ν_0 se mueve *hacia* nosotros percibimos dichas ondas con una frecuencia *mayor* que ν_0 , mientras que cuando la fuente se aleja de nosotros la frecuencia de las ondas parece *menor* que ν_0 . Un fenómeno semejante ocurre con la luz y, en general, las ondas electromagnéticas. Para estudiarlo, sin embargo, debemos usar las ecuaciones de la transformación de Lorentz⁸, ya que las ondas electromagnéticas se propagan con velocidad c .

⁸En comparación, la velocidad del sonido en el aire es $\simeq 1,13509 \cdot 10^{-6}c$, por lo que el efecto Doppler en ondas sonoras puede tratarse en muy buena aproximación utilizando las leyes de la Mecánica newtoniana.

Consideremos, en general, una onda plana de frecuencia $\omega = 2\pi\nu$. La ecuación de dicha onda (en un cierto sistema de referencia inercial S) será de la forma

$$\phi(t, \mathbf{r}) = f(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}),$$

donde ϕ es la magnitud que se propaga (por ejemplo, uno de los potenciales electromagnéticos en el caso de las ondas EM), f es una función periódica de período 2π y $\mathbf{k}$ es el llamado *vector de ondas*. Los *frentes de onda* son los lugares geométricos en que el argumento de f —llamado *fase* de la onda—, y por tanto ϕ , es constante. Su ecuación

$$\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const.}$$

es la ecuación de un *plano* perpendicular al vector $\mathbf{k}$ en cada instante. La velocidad $\mathbf{u} = u\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ con que se mueve uno cualquiera de estos frentes de onda, llamada *velocidad de fase*, se calcula sin más que derivar implícitamente en la ecuación anterior:

$$\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = \omega - u|\mathbf{k}| = 0 \implies u = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}.$$

El período temporal de las ondas es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu},$$

mientras que su período espacial es la *longitud de ondas*

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|} = \frac{u}{\nu}.$$

La fase de la onda es evidentemente igual al producto $k \cdot x$ de los cuadvectores $x = (x_0, \mathbf{x})$ y

$$k = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right) \equiv (k_0, \mathbf{k}).$$

Dicha fase ha de ser *invariante bajo transformaciones de Lorentz*, es decir ha de ser *la misma* en cualquier sistema inercial, por serlo la intensidad de la onda. De esto se sigue que *el cuadvector de onda k se transforma igual que las coordenadas bajo una transformación de Lorentz*. En otras palabras, si S' es otro sistema inercial y $x' = \Lambda(v)x$ entonces

$$k' = \Lambda(v)k. \quad (6.27)$$

La demostración de este resultado, basada en la invariancia del producto de Minkowski bajo transformaciones de Lorentz, es muy sencilla:

$$k \cdot x = k' \cdot x' = k' \cdot (\Lambda(v)x) = (\Lambda(v)^{-1}k') \cdot x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^4 \implies k = \Lambda(v)^{-1}k'.$$

Supongamos ahora que los ejes de S' son paralelos a los de S y su velocidad respecto de este sistema es $v\mathbf{e}_1$, de modo que $\Lambda(v)$ es el *boost* de Lorentz $L(v)$ dado por la ec. (6.17). Si en el sistema S' se emite una onda con frecuencia propia $\omega' = \omega_0$ y vector de ondas

$$\mathbf{k}' = -|\mathbf{k}'|(\cos \alpha', 0, \sin \alpha'),$$

podemos hallar fácilmente la frecuencia ω y el vector de ondas

$$\mathbf{k} = -|\mathbf{k}|(\cos \alpha, 0, \sin \alpha)$$

en el sistema S (cf. la Fig 6.8) mediante la fórmula $k' = L(v)k$. En primer lugar,

$$k'_0 = \frac{\omega_0}{c} = \gamma \left(k_0 - \beta k_1 \right) = \gamma \left(\frac{\omega}{c} + \beta |\mathbf{k}| \cos \alpha \right) = \frac{\gamma \omega}{c} \left(1 + \frac{v}{u} \cos \alpha \right),$$

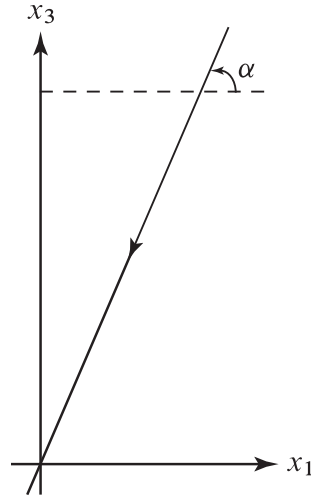


Figura 6.8: Efecto Doppler relativista.

y por tanto

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma \left(1 + \frac{v}{u} \cos \alpha\right)}. \quad (6.28)$$

La relación entre los ángulos α y α' también se calcula fácilmente utilizando las ecuaciones

$$k'_1 = \gamma \left(k_1 - \frac{\beta \omega}{c}\right) = -\gamma |\mathbf{k}| \left(\cos \alpha + \frac{uv}{c^2}\right), \quad k'_3 = k_3 = -|\mathbf{k}| \sin \alpha,$$

de donde se sigue que

$$\tan \alpha' = \frac{k'_3}{k'_1} = \frac{\tan \alpha}{\gamma \left(1 + \frac{uv}{c^2} \sec \alpha\right)}. \quad (6.29)$$

Para ondas electromagnéticas $u = c$, y por tanto las fórmulas anteriores se convierten en

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma (1 + \beta \cos \alpha)}, \quad \tan \alpha' = \frac{\tan \alpha}{\gamma (1 + \beta \sec \alpha)}. \quad (6.30)$$

Al ser la velocidad de las ondas EM en el vacío *invariante*,

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}, \quad (6.31)$$

y por tanto

$$\lambda = \gamma (1 + \beta \cos \alpha) \lambda_0. \quad (6.32)$$

En el caso particularmente importante en que $\alpha' = 0$ (es decir, la onda electromagnética se propaga en la dirección del movimiento relativo entre el observador S y la fuente S'), de las fórmulas anteriores se deduce que $\alpha = 0$ y

$$\lambda = \gamma (1 + \beta) \lambda_0 = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \lambda_0. \quad (6.33)$$

Vemos, por tanto, que si la fuente se *aleja* del observador, es decir si $\beta > 0$, entonces $\lambda > \lambda_0$, y por tanto el observador en S percibe un *corrimiento hacia el rojo* en la longitud de onda de la radiación electromagnética emitida por la fuente S' . Por el contrario, si la fuente se *acerca* al observador entonces $\beta < 0$, lo cual implica que $\lambda < \lambda_0$. Por tanto en este último caso el observador en S percibe un *corrimiento al azul* de la luz (o, en general, la radiación electromagnética) emitida por S . También es

interesante notar que si $\alpha = \pi/2$ (es decir, cuando el frente de ondas es transversal a la dirección de la velocidad relativa de S' y S) de la ec. (6.32) se sigue que

$$\lambda = \gamma \lambda_0 > \lambda_0 ,$$

Por tanto en este caso el observador en S percibe un *corrimiento hacia el rojo* (independientemente del signo de v), a diferencia de lo que ocurre clásicamente (en el límite $v \rightarrow 0$). Este es el llamado *efecto Doppler transversal*, que como hemos visto no tiene un análogo clásico.

6.4 Cuadrivelocidad y cuádrimomento. Energía cinética relativista

En Mecánica newtoniana, la velocidad y el momento de una partícula de masa m están relacionadas por la ecuación

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} , \quad (6.34)$$

y la ley del movimiento de la partícula es la segunda ley de Newton

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} . \quad (6.35)$$

Las relaciones anteriores son *incompatibles con los postulados de la Relatividad especial*. Por ejemplo, si m y $\mathbf{F}$ son ambas constantes la ecuación anterior implica que

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \frac{\mathbf{F}}{m}t ,$$

por lo que (el módulo de) la velocidad de la partícula será superior a c para $|t|$ suficientemente grande. Está claro, por tanto, que las ecs. (6.34)-(6.35) no pueden ser válidas (al menos para velocidades comparables a las de la luz), y surge por tanto la cuestión de cuáles han de ser las ecuaciones correctas que las sustituyan. Un principio de fundamental importancia que nos debe guiar a la hora de hallar estas nuevas ecuaciones es el *principio de relatividad*, según el cual dichas ecuaciones han de tener la *misma forma* en todos los sistemas de referencia inerciales. En otras palabras, dichas ecuaciones han de ser *covariantes Lorentz*, es decir han de mantener su forma al aplicarles *cualquier* transformación de Lorentz. En general, la forma más sencilla de conseguir que una ecuación sea covariante Lorentz es que dicha ecuación sea una relación entre escalares (como el producto de Minkowski $x \cdot y$, el intervalo al cuadrado $x^2 \equiv x \cdot x$, etc.), vectores (como las coordenadas espacio-temporales x) o, en general, *tensores*, bajo transformaciones de Lorentz. El problema aquí es que $\mathbf{v}$, $\mathbf{p}$ y $\mathbf{F}$ son vectores de $\mathbb{R}^3$, covariantes solo bajo *rotaciones*. Además, mientras que en Mecánica newtoniana el tiempo t es un *escalar* (esencialmente invariante bajo cambios de coordenadas), según la teoría especial de la Relatividad t depende en realidad del sistema de referencia escogido. De hecho, la propia definición de la *velocidad* en Mecánica newtoniana

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} , \quad \mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3) ,$$

adolesce de todos los problemas que acabamos de señalar. La generalización más sencilla de esta definición que es claramente un vector bajo transformaciones de Lorentz es el cuádrivector

$$u = \frac{dx}{d\tau} , \quad (6.36)$$

donde τ es el tiempo propio de la partícula, relacionado con el tiempo t en *cualquier* sistema de referencia inercial mediante

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} dt \equiv \frac{dt}{\gamma(v)} . \quad (6.37)$$

En efecto, bajo una transformación de Lorentz cualquiera $x' = \Lambda x$ se tiene

$$dx' = \Lambda dx ,$$

mientras que $d\tau$ es un *escalar* ($d\tau = d\tau'$), por lo que

$$u' = \frac{dx'}{d\tau'} = \frac{dx'}{d\tau} = \Lambda \frac{dx}{d\tau},$$

es decir

$$u' = \Lambda u.$$

En otras palabras, la **cuadrivelocidad** $u \in \mathbb{R}^4$ es un *vector bajo transformaciones de Lorentz*, ya que se transforma de la misma forma que las coordenadas al pasar de un SRI a otro. Denotemos

$$u \equiv (u_0, \mathbf{u}), \quad \text{con } \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Las coordenadas espaciales de la cuadrivelocidad en un sistema de referencia inercial cualquiera están dadas por

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma(v) \mathbf{v}. \quad (6.38)$$

En particular, si la velocidad de la partícula es mucho menor que c entonces $\gamma(v) \simeq 1$ y $\mathbf{u} \simeq \mathbf{v}$. En cuanto a la coordenada temporal u_0 ,

$$u_0 = \frac{dx_0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} = c\gamma(v), \quad (6.39)$$

y por tanto

$$u = \gamma(v)(c, \mathbf{v}). \quad (6.40)$$

De las ecuaciones anteriores se sigue inmediatamente la importante relación

$$u^2 = c^2. \quad (6.41)$$

Esta identidad también se puede deducir directamente de la definición de u , observando que

$$dx^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2 = c^2 d\tau^2.$$

Una vez definida la cuadrivelocidad, es muy natural definir el **cuádrimomento** p mediante

$$p = mu, \quad (6.42)$$

donde $m > 0$ es la masa de la partícula. Por lo visto anteriormente —cf. las ecs. (6.40)-(6.41)—, las componentes del cuádrimomento están dadas por

$$p = m\gamma(v)(c, \mathbf{v}), \quad (6.43)$$

y su cuadrado es

$$p^2 = m^2 c^2. \quad (6.44)$$

En particular,

$$p_i = m\gamma(v)v_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.45)$$

por lo que para velocidades pequeñas en comparación con c se tiene

$$p_i \simeq mv_i \quad (v \ll c).$$

A partir de ahora, *denotaremos por $\mathbf{p}$ al vector*

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \equiv m\gamma(v)\mathbf{v}, \quad (6.46)$$

que solo coincide con el momento no relativista $m\mathbf{v}$ en el límite $v \rightarrow 0$. Por otra parte, la componente temporal de p está dada por

$$p_0 = mc\gamma(v),$$

de donde se sigue que $p_0 \geq mc > 0$ y

$$\mathbf{v} = \frac{c\mathbf{p}}{p_0}. \quad (6.47)$$

Utilizando la identidad (6.44), escrita en la forma

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + m^2c^2, \quad (6.48)$$

se obtiene (teniendo en cuenta que $p_0 > 0$)

$$\mathbf{v} = \frac{c\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}}. \quad (6.49)$$

También se puede utilizar la ec. (6.48) para despejar $\gamma(v)$ en función de $\mathbf{p}$:

$$\gamma(v) = \frac{p_0}{mc} = \frac{1}{mc} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}. \quad (6.50)$$

Si $v \ll c$, desarrollando cp_0 en potencias de v/c y reteniendo solamente el primero término no constante se obtiene

$$cp_0 = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) + O(v^4/c^2) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + O(v^4/c^2), \quad (6.51)$$

que, salvo por el término constante mc^2 , es en primera aproximación la energía cinética no relativista. La ecuación anterior sugiere definir la **energía cinética relativista** T mediante

$$T = cp_0 - mc^2 \equiv mc^2(\gamma(v) - 1), \quad (6.52)$$

y por tanto

$$p_0 = \frac{1}{c}(mc^2 + T). \quad (6.53)$$

6.5 Conservación del cuadrimomento. Energía relativista

La primera ley de Newton establece la conservación del (tri)momento $\mathbf{p}$ de una partícula no sometida a fuerzas externas. La generalización más natural de este principio que es *covariante Lorentz* es la *conservación del cuadrimomento* para una partícula relativista que se mueve en ausencia de fuerzas:

$$p = \text{const.},$$

o equivalentemente

$$cp_0 = mc^2 + T = \text{const.}, \quad p_i = m\gamma(v)v_i = \text{const.}.$$

Estas ecuaciones se reducen a la conservación de la energía cinética y el momento no relativistas para $v \ll c$. Como en el caso newtoniano, en virtud de la ec. (6.47) ambas leyes de conservación son equivalentes a la constancia de las componentes v_i de la velocidad ordinaria (en cualquier SRI).

Consideremos a continuación la colisión de N partículas de masas m_n ($n = 1, \dots, N$) sobre las que no actúan fuerzas externas. El **cuadrimomento total** P se define por

$$P = \sum_{n=1}^N p_n \equiv (P_0, \mathbf{P}), \quad (6.54)$$

siendo p_n el cuadrimomento de la partícula n . Por tanto

$$P_0 = \sum_{n=1}^N p_{n,0} \equiv c \sum_{n=1}^N m_n \gamma(v_n), \quad \mathbf{P} = \sum_{n=1}^N \mathbf{p}_n \equiv \sum_{n=1}^N m_n \gamma(v_n) \mathbf{v}_n. \quad (6.55)$$

Según la Mecánica newtoniana, incluso si la colisión no es elástica se ha de conservar el momento lineal total del sistema, que tiende a $\mathbf{P}$ en el límite en que las velocidades v_n de las partículas son pequeñas en comparación con c . Esto hace plausible postular la conservación de $\mathbf{P}$, es decir

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f,$$

donde P_i y P_f denotan respectivamente el cuadrimomento total antes y después de la colisión. Sin embargo, la ecuación anterior no es *covariante Lorentz*, ya que solo depende de *tres* de las componentes de un cuadvectores. La ecuación covariante Lorentz más sencilla que se deduce de la anterior es evidentemente la conservación del cuadrimomento total P , es decir

$$P_i = P_f. \quad (6.56)$$

Esta **ley de conservación del momento** relativista se ha comprobado experimentalmente en múltiples situaciones para velocidades arbitrariamente próximas a c , muy especialmente en el análisis de las colisiones en aceleradores de partículas.

La conservación de la componente cero del cuadrimomento puede expresarse en la forma

$$\sum_n (m_n c^2 + T_n)_i = \sum_n (m_n c^2 + T_n)_f,$$

o equivalentemente

$$(Mc^2 + T)_i = (Mc^2 + T)_f,$$

siendo

$$M = \sum_n m_n, \quad T = \sum_n T_n$$

respectivamente la *masa total* y la *energía cinética total* del sistema. Es importante observar en este punto que en Mecánica relativista el número de partículas antes y después de la colisión no tiene por qué ser el mismo, ya que, como veremos más adelante, pueden crearse o destruirse partículas si se dan las condiciones apropiadas. Por este motivo, a partir de ahora se entenderá que las sumas en n que aparecen en expresiones como las anteriores están extendidas a todas las partículas del sistema, sin especificar explícitamente su número N_i (antes de la colisión) o N_f (tras la colisión).

En Mecánica newtoniana se conserva la masa total M , y por tanto la conservación de P_0 es equivalente a la de la energía cinética del sistema:

$$T_i = T_f.$$

Según lo que acabamos de ver, sin embargo, en Mecánica relativista solo es necesaria la conservación de P_0 , es decir de $Mc^2 + T$, no de cada sumando por separado. En particular, *puede haber procesos en que disminuya (resp. aumente) la masa total del sistema, siempre y cuando esta disminución (resp. aumento) esté compensada por un aumento (resp. disminución) correspondiente de su energía cinética*. Más cuantitativamente, si denotamos $\Delta M = M_f - M_i$ y $\Delta T = T_f - T_i$, la conservación de P_0 puede escribirse en la forma

$$\Delta(Mc^2) = -\Delta T. \quad (6.57)$$

En otras palabras, *la energía cinética puede convertirse en masa, y viceversa, siendo el factor de conversión energía/masa el cuadrado de la velocidad de las ondas EM en el vacío*. Esta es una de las predicciones más importantes de la teoría especial de la Relatividad, que hasta el momento se ha visto corroborada experimentalmente sin ninguna excepción.

En virtud de la discusión anterior, es prácticamente obligado interpretar la cantidad

$$cP_0 = \sum_n cP_{n,0} = \sum_n (m_n c^2 + T_n) \equiv Mc^2 + T$$

como la **energía total** E del sistema (en ausencia de fuerzas externas). En el caso de una partícula, la energía total es

$$E = mc^2 + T = cp_0, \quad (6.58)$$

y el cuadrimomento p puede por tanto expresarse en la forma

$$p = (E/c, \mathbf{p}) = (E/c, m\gamma(v)\mathbf{v}). \quad (6.59)$$

En virtud de las ecs. (6.50) y (6.61), la energía relativista se expresa en función de la velocidad mediante la fórmula

$$E = mc^2\gamma(v). \quad (6.60)$$

En particular, cuando $v = 0$ la partícula posee una **energía en reposo**

$$E_0 = mc^2.$$

Nótese también que de las ecs. (6.48) y (6.58) se sigue la importante relación

$$E = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2} \quad (6.61)$$

entre la energía y el momento relativista. Escribiendo esta relación en la forma

$$E = mc^2\sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2c^2}}$$

y desarrollando en potencias de $\mathbf{p}^2$ se obtiene

$$E = mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + O(|\mathbf{p}|^4/(m^3c^2)).$$

Nótese que de las ecs. (6.47) y (6.61) se sigue la siguiente relación entre la velocidad, la energía y el momento de la partícula:

$$\mathbf{v} = \frac{c^2\mathbf{p}}{E}. \quad (6.62)$$

Una formulación alternativa de los resultados anteriores consiste en definir una *masa dependiente de la velocidad*

$$m(v) = m\gamma(v) \equiv \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

en términos de la cual el momento y la energía relativista son simplemente

$$\mathbf{p} = m(v)\mathbf{v}, \quad E = m(v)c^2.$$

La fórmula para la energía cinética

$$T = (m(v) - m)c^2,$$

sin embargo, no se reduce a la expresión clásica reemplazando m por $m(v)$. Nosotros no utilizaremos esta masa variable en estas notas.

6.6 Partículas de masa nula. Efecto Compton

Como acabamos de ver, el cuadrimomento p de una partícula de masa m está dado por

$$p = (E/c, \mathbf{p}),$$

y su cuadrado es

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2.$$

Estas relaciones tienen sentido también si la masa de la partícula es nula, es decir si $m = 0$. En tal caso (al ser $E > 0$) la ecuación anterior se escribe

$$E = c|\mathbf{p}|, \quad (6.63)$$

y por tanto

$$p = (|\mathbf{p}|, \mathbf{p}). \quad (6.64)$$

De la ecuación (6.60) se sigue inmediatamente que *el módulo de la velocidad de una partícula de masa nula es igual a c* , ya que en caso contrario E y $\mathbf{p}$ serían idénticamente nulos. A esta conclusión también se llega fácilmente a partir de la ec. (6.62). De esta última ecuación se sigue también que la velocidad y el momento tienen la misma dirección y sentido, como en el caso $m > 0$.

La única partícula conocida⁹ de masa nula es el **fotón**, que no es otra cosa que el cuanto de energía del campo electromagnético (i.e., la partícula que “transporta” la energía y el momento de dicho campo). Según la Mecánica cuántica, la relación entre la energía de un fotón y la frecuencia ω de la onda electromagnética asociada está dada por la célebre *ecuación de Planck*

$$E = \hbar\omega \equiv h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad (6.65)$$

donde

$$h = 6,62606957 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$$

es la constante de Planck. De las relaciones

$$\omega = c|\mathbf{k}|, \quad \mathbf{v} = c \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \quad (6.66)$$

y de la ecs. (6.63) y (6.65) se sigue que el vector de onda de la onda asociada al fotón está dado por

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{\omega}{c} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \frac{\omega \mathbf{p}}{E} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar} \implies \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}.$$

Como, en virtud de la ec. (6.65),

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{E}{c\hbar} \implies p_0 = \frac{E}{c} = \hbar k_0,$$

el cuádrimomento de un fotón y el cuádrivector de ondas de la onda electromagnética asociada están relacionados por la célebre expresión de de Broglie

$$p = \hbar k. \quad (6.67)$$

6.6.1 Efecto Compton

Consideremos a continuación el llamado *efecto Compton*, que consiste en la dispersión de un fotón por un electrón. En el SRI en que el electrón está en reposo (que suele coincidir con el sistema del laboratorio) los momentos iniciales del fotón y el electrón son respectivamente

$$p_\gamma = \left(\frac{E}{c}, |\mathbf{p}|, 0, 0 \right) = \frac{E}{c} (1, 1, 0, 0), \quad p_e = (mc, 0, 0, 0).$$

Tomemos los ejes de forma que la colisión tenga lugar en el plano $x_3 = 0$, y llamemos θ al ángulo formado por el momento del fotón con el eje x_1 . Entonces los momentos tras la colisión están dados por

$$p'_\gamma = \frac{E'}{c} (1, \cos \theta, \sin \theta, 0), \quad p'_e = \frac{1}{c} (mc^2 \gamma(v), E' \cos \theta, -E' \sin \theta, 0),$$

⁹Por razones de tipo teórico, se cree que debería existir una partícula análoga para el campo gravitatorio llamada *gravitón*.

siendo m la masa del electrón y v su velocidad. En efecto, la conservación de P_2 , que inicialmente es nulo, requiere que el momento del electrón forme un ángulo $-\theta$ con el eje x_1 y tenga igual módulo que el del electrón dispersado. Por la ley de conservación del momento,

$$p_\gamma + p_e = p'_\gamma + p'_e,$$

o equivalentemente

$$p_e + (p_\gamma - p'_\gamma) = p'_e.$$

Elevando al cuadrado, y teniendo en cuenta que

$$p_\gamma^2 = p'^2_\gamma = 0, \quad p_e^2 = p'^2_e = m^2 c^2$$

se obtiene la relación

$$p_e(p_\gamma - p'_\gamma) = p_\gamma p'_\gamma,$$

en la que hemos eliminado el momento p'_e del electrón dispersado. Sustituyendo las expresiones halladas anteriormente para p_γ , p'_γ y p_e se obtiene:

$$m(E - E') = \frac{EE'}{c^2}(1 - \cos \theta) \implies mc^2 \left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} \right) = 1 - \cos \theta,$$

y teniendo en cuenta (6.65) se llega finalmente a la célebre *ecuación de Compton*

$$\lambda - \lambda' = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta). \quad (6.68)$$

6.7 Colisiones relativistas

La conservación del cuadrimomento de un sistema de partículas sobre las que no actúan fuerzas externas permite estudiar de forma sencilla las *colisiones* en el marco de la teoría especial de la Relatividad. En efecto, como vimos en la sección anterior, en ausencia de fuerzas externas el cuadrimomento total P del sistema es constante, por lo que en particular el momento P_i inmediatamente antes de la colisión ha de coincidir con el momento P_f tras la colisión:

$$P_i = P_f. \quad (6.69)$$

Esta ley de conservación es equivalente a la *conservación de la energía relativista*

$$P_0 = \sum_n p_{n,0} \equiv \sum_n \gamma(v_n) m_n c \quad (6.70)$$

junto con la *conservación del momento*

$$\mathbf{P} = \sum_n \mathbf{p}_n \equiv \sum_n \gamma(v_n) m_n \mathbf{v}_n. \quad (6.71)$$

6.7.1 Sistema centro de momentos

La relación (6.69) es válida en cualquier sistema de referencia inercial. En el análisis de las colisiones de un sistema de partículas ultrarelativistas (es decir, que se mueven a velocidades comparables a c) hay, sin embargo, un SRI particularmente útil denominado **sistema centro de momentos** (CM). Este sistema, análogo al sistema centro de masas en Mecánica newtoniana, es aquél en que las componentes espaciales del momento total del sistema son nulas, es decir aquél en que se verifica

$$\mathbf{P} = 0.$$

Para demostrar la existencia de tal SRI, basta comprobar que el cuádrimomento total P de un sistema de partículas es *de tipo temporal*, es decir, $P^2 > 0$ (cf. la discusión de la pág. 140). A su vez, este hecho es consecuencia del siguiente resultado general, que probaremos a continuación: la suma $P = \sum_n p_n$ de un número cualquiera de cuádrivectores p_n de tipo temporal y *orientados hacia el futuro* (es decir, $p_{n,0} > 0$) es también un vector de tipo tiempo orientado hacia el futuro. En efecto, al ser p_n un vector de tipo tiempo orientado hacia el futuro se tiene

$$p_n^2 = p_{n,0}^2 - \mathbf{p}_n^2 > 0 \implies |p_{n,0}| = p_{n,0} > |\mathbf{p}_n|.$$

Por tanto, si p_m es otro vector de este tipo se tiene

$$\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{p}_m \leq |\mathbf{p}_n| |\mathbf{p}_m| < p_{n,0} p_{m,0}$$

y en consecuencia

$$p_n \cdot p_m = p_{n,0} p_{m,0} - \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{p}_m > 0.$$

Entonces

$$P_0 = \sum_n p_{n,0} > 0,$$

y, por lo que acabamos de ver,

$$P^2 = \left(\sum_n p_n \right)^2 = \sum_{n,m} p_n \cdot p_m = \sum_n p_n^2 + \sum_{n \neq m} p_n \cdot p_m > 0.$$

- De hecho, es fácil ver que el resultado anterior se extiende al caso en que algunas de las partículas del sistema (pero *no todas*) tengan masa nula, es decir es válido con tal que $p_n^2 \geq 0$ para todo n y $p_k^2 > 0$ para algún k (siendo, como antes, $p_{n,0} > 0$ para todo n).

6.7.2 Energía umbral

Consideremos un proceso del tipo

$$a + b \rightarrow a + b + c,$$

en que dos partículas a y b chocan, produciéndose una tercera partícula c como resultado de la colisión. En el sistema del laboratorio una de las partículas (por ejemplo, la b) es el blanco, es decir $\mathbf{p}_b = 0$, y la otra (el proyectil) tiene un momento $\mathbf{p}_a \neq 0$. ¿Cuál es la **energía umbral** de la partícula a , es decir la energía mínima que debe tener dicha partícula para que sea posible la creación de la partícula c ? Evidentemente, la conservación de la energía relativista requiere que

$$\frac{E_a}{c^2} + m_b = m_a \gamma(v'_a) + m_b \gamma(v'_b) + m_c \gamma(v'_c),$$

donde las primas indican las velocidades tras la colisión en el sistema del laboratorio. Al ser $\gamma(v'_i) \geq 1$, de esta relación se sigue que

$$E_a \geq (m_a + m_c)c^2.$$

Sin embargo, para que se alcance la igualdad en la desigualdad anterior es necesario que $\gamma(v'_a) = \gamma(v'_b) = \gamma(v'_c) = 1$, es decir que $v'_a = v'_b = v'_c = 0$. Esto es, sin embargo, *imposible*, ya que en virtud de la conservación del momento $\mathbf{p}'_a + \mathbf{p}'_b + \mathbf{p}'_c = \mathbf{p}_a \neq 0$, por lo que las velocidades de las tres partículas tras la colisión no pueden ser todas nulas. Por tanto, la energía umbral es *mayor* que $(m_a + m_c)c^2$.

Veamos a continuación cómo se calcula la energía umbral $E_{\min}$ en el caso más general

$$a + b \rightarrow c_1 + \cdots + c_N, \quad (6.72)$$

en el que se admite la producción de un número arbitrario de partículas adicionales c_i , todas ellas de masa no nula. Para ello, analizaremos la colisión en el sistema centro de momentos (CM), en que el cuadrimomento total (antes o después de la colisión) está dado por

$$P = \frac{E_{\text{CM}}}{c} (1, 0, 0, 0) .$$

Calculando la energía E_{CM} en el sistema CM después de la colisión se obtiene

$$E_{\text{CM}} = \sum_i m_i \gamma(v_i) c^2 \geq \sum_i m_i c^2 \equiv M c^2 .$$

Nótese que en este caso se puede dar la igualdad si todas las partículas están en reposo en el sistema CM —es decir si todas ellas se mueven con la misma velocidad $\mathbf{v}$ en el sistema del laboratorio—, lo cual es evidentemente posible si ninguna de ellas tiene masa nula. Por tanto el valor mínimo de la energía en el sistema CM es simplemente $M c^2$:

$$E_{\text{CM}} \geq M c^2 .$$

Para encontrar la energía umbral de la partícula a en el sistema del laboratorio, basta utilizar la ley de conservación del cuadrimomento y la invariancia del producto de Minkowski, que proporcionan la relación

$$P_{\text{CM}}^2 = \frac{E_{\text{CM}}^2}{c^2} = P_{\text{L}}^2 = (p_a + p_b)^2 = c^2(m_a^2 + m_b^2) + 2p_a \cdot p_b , \quad (6.73)$$

siendo P_{L} el cuadrimomento inicial en el sistema del laboratorio y p_a, p_b los momentos de las partículas a y b antes de la colisión *en el sistema del laboratorio*:

$$p_a = \left(\frac{E_a}{c}, \mathbf{p}_a \right), \quad p_b = m_b c (1, 0, 0, 0) .$$

Sustituyendo en la ec. (6.73) y operando se obtiene

$$\frac{E_{\text{CM}}^2}{c^2} = c^2(m_a^2 + m_b^2) + 2E_a m_b .$$

Por tanto la energía de la partícula a en el sistema del laboratorio está dada por

$$E_a = \frac{c^2}{2m_b} \left(\frac{E_{\text{CM}}^2}{c^4} - m_a^2 - m_b^2 \right) .$$

En particular, reemplazando E_{CM} por su valor mínimo $M c^2$ se obtiene la fórmula

$$E_{\text{min}} = \frac{c^2}{2m_b} (M^2 - m_a^2 - m_b^2) . \quad (6.74)$$

Nótese que el resultado anterior es válido también si la partícula a (el proyectil) tiene masa nula.

Ejercicio. Un protón choca contra otro protón en reposo (en el sistema del laboratorio), produciéndose como resultado de la colisión un par protón-antiprotón ($p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$). ¿Cuál es la mínima energía cinética del protón incidente para que este proceso sea posible?

Dado que la masa de una partícula es igual a la de su antipartícula, podemos aplicar la ecuación anterior con

$$m_a = m_b \equiv m, \quad M = 4m ,$$

siendo $m \simeq 938,272046 \text{ MeV}/c^2$ la masa del protón. Sustituyendo en dicha fórmula se obtiene

$$E_{\text{min}} = \frac{c^2}{2m} (16m^2 - 2m^2) = 7mc^2 .$$

Por tanto la mínima energía cinética del protón incidente es

$$T_{\text{min}} = E_{\text{min}} - mc^2 = 6mc^2 \simeq 5,63 \text{ GeV} .$$

Ejercicio. Demostrar que un fotón *aislado* no puede desintegrarse en un par electrón-positrón ($\gamma \not\rightarrow e^- + e^+$). Probar que, sin embargo, sí es posible el proceso $\gamma + N \rightarrow N + e^- + e^+$ (donde N es un núcleo pesado), siendo la energía umbral del fotón en este caso aproximadamente igual a $2m_e c^2$.

En primer lugar, veamos que el proceso $\gamma \rightarrow e^- + e^+$ es imposible, independientemente de la energía del fotón. En efecto, si analizamos este proceso en el sistema centro de momentos del par $e^- - e^+$ entonces el momento final $\mathbf{P}$ es nulo, por lo que también habría de serlo el momento del fotón. Pero esto es imposible, ya que para una partícula de masa nula $\mathbf{p} = 0$ implica que $E = c|\mathbf{p}| = 0$, es decir la partícula no tendría energía ni momento. (Según la teoría especial de la Relatividad, la energía de cualquier partícula ha de ser estrictamente positiva, incluso si la masa es nula.) En segundo lugar, consideremos el proceso

$$\gamma + N \rightarrow N + e^- + e^+$$

mediado por un núcleo pesado. Utilizando la fórmula (6.74) con

$$m_a = 0, \quad m_b = m_N, \quad M = 2m_e + m_N$$

se obtiene

$$E_{\min} = \frac{c^2}{2m_N} [(2m_e + m_N)^2 - m_N^2] = 2m_e c^2 \left(1 + \frac{m_e}{m_N}\right) \simeq 2m_e c^2,$$

ya que $m_e \ll m_N$.

6.8 Dinámica relativista

En Mecánica newtoniana, el movimiento de una partícula material está regido por la segunda ley de Newton

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (6.75)$$

válida en cualquier SRI. Desde el punto de vista de la teoría especial de la Relatividad, la generalización más natural de la ecuación anterior es

$$\frac{dp}{d\tau} = f, \quad (6.76)$$

donde

$$f \equiv (f_0, \mathbf{f}) \in \mathbb{R}^4 \quad (6.77)$$

es un cuadvivector denominado **cuadrifuerza**, que depende en general de las coordenadas espacio-temporales y de la velocidad de la partícula. En efecto, esta ecuación es *covariante Lorentz*, ya que p es un vector bajo transformaciones de Lorentz y el tiempo propio τ es un escalar. Además, veremos a continuación que la ecuación (6.76) se reduce esencialmente a la segunda ley de Newton para velocidades pequeñas en comparación con c .

Por analogía con la Mecánica newtoniana, *definimos* la **fuerza relativista** $\mathbf{F}$ de modo que se cumpla la segunda ley de Newton (6.75) cuando $\mathbf{p}$ es el momento *relativista*. Como

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma(v)} \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{\mathbf{f}}{\gamma(v)},$$

la relación entre la cuadrifuerza y la fuerza relativista es

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{f}}{\gamma(v)}. \quad (6.78)$$

Nótese que la ec. (6.75) se puede escribir

$$\frac{d}{dt}(\gamma(v)m\mathbf{v}) \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \mathbf{F}. \quad (6.79)$$

Evidentemente, para una dada fuerza $\mathbf{F}$ (por ejemplo, para $\mathbf{F}$ constante) la ecuación anterior tiende a su homóloga newtoniana para velocidades mucho menores que c .

Veamos a continuación que la componente temporal de la cuadrifuerza está en realidad determinada por las componentes espaciales. Para ello basta derivar la identidad

$$p^2 \equiv p \cdot p = m^2 c^2$$

respecto de τ , obteniendo

$$p \cdot f = 0. \quad (6.80)$$

En otras palabras, *el cuádrimomento y la cuadrifuerza son ortogonales* (en el sentido del producto de Minkowski) *en todo instante*. Aplicando la definición del producto de Minkowski se obtiene la relación

$$f_0 = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{p}}{p_0} = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c} = \frac{\gamma(v)}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \quad (6.81)$$

donde hemos tenido en cuenta la ec. (6.47). Por tanto

$$f = \gamma(v) \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c}, \mathbf{F} \right). \quad (6.82)$$

En Mecánica newtoniana,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{dT}{dt}, \quad (6.83)$$

siendo

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$$

la energía cinética de la partícula. El análogo relativista de esta ecuación lo proporciona la componente temporal de la ecuación del movimiento (6.76), es decir

$$\frac{dp_0}{d\tau} = f_0.$$

En efecto, en virtud de (6.81) se tiene

$$\frac{dp_0}{d\tau} = \frac{dp_0}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma(v) \frac{dp_0}{dt} = f_0 = \frac{\gamma(v)}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v},$$

de donde se obtiene la identidad

$$\frac{d}{dt}(cp_0) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (6.84)$$

Esta ecuación es el análogo relativista de la ec (6.83), ya que

$$cp_0 = mc^2 + T$$

es la energía relativista en ausencia de fuerzas.

Supongamos, a continuación, que *en un cierto sistema de referencia inercial S* la fuerza relativista $\mathbf{F}$ deriva de un potencial $V(\mathbf{r})$ independiente del tiempo, es decir

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}. \quad (6.85)$$

Este es el caso, por ejemplo, de una fuerza constante independiente del tiempo (¡en un determinado SRI!), con $V = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$ una función lineal de las coordenadas espaciales. Si se cumple la ec. (6.85),

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{dV}{dt},$$

y la ecuación (6.84) se puede escribir en la forma

$$\frac{d}{dt}(cp_0 + V(\mathbf{r})) = 0. \quad (6.86)$$

En otras palabras, *si en un cierto sistema de referencia inercial la fuerza relativista deriva de un potencial independiente del tiempo se conserva la energía total relativista*

$$E = cp_0 + V(\mathbf{r}) \equiv mc^2 + T + V(\mathbf{r}) \equiv mc^2\gamma(v) + V(\mathbf{r}). \quad (6.87)$$

- El ejemplo más importante de fuerza relativista es la *fuerza de Lorentz*

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (6.88)$$

En efecto, se comprueba experimentalmente que la ecuación del movimiento de una partícula de carga q en un campo eléctrico $\mathbf{E}$ y magnético $\mathbf{B}$ es *exactamente* (para velocidades arbitrariamente próximas a c) la ec. (6.75) con la fuerza de Lorentz (6.88). Además, si los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ se transforman adecuadamente bajo una transformación de Lorentz, la ecuación del movimiento (6.75)-(6.88) es válida en *cualquier* sistema de referencia inercial.

6.9 Movimiento hiperbólico

El ejemplo más sencillo de fuerza relativista es el de una fuerza constante¹⁰

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

con $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ un vector constante con dimensiones de aceleración. Veremos a continuación que en este caso, al igual que en Mecánica relativista, la ecuación del movimiento de la partícula puede resolverse exactamente. Supongamos, por sencillez, que la partícula está en reposo en el origen de coordenadas para $t = 0$, es decir

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{p}(0) = 0.$$

Integrando la ecuación del movimiento

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{a}$$

con la condición inicial $\mathbf{p}(0) = 0$ queda

$$\mathbf{p} = m\mathbf{a}t.$$

Sustituyendo en la ecuación (6.49) se obtiene

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{c\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}} = \frac{m\mathbf{a}t}{\sqrt{m^2c^2 + m^2a^2t^2}} = \frac{\mathbf{a}t}{\sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}}}. \quad (6.89)$$

Nótese que, independientemente de la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ (es decir, de la aceleración constante $\mathbf{a}$), de la ecuación anterior se sigue que $v < c$ para todo t . Integrando dicha ecuación respecto del tiempo y teniendo en cuenta que $\mathbf{r}(0) = 0$ se obtiene la ley horaria del movimiento:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} \int_0^t \frac{s \, ds}{\sqrt{1 + \frac{a^2s^2}{c^2}}} = \frac{c^2\mathbf{a}}{a^2} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}} - 1 \right). \quad (6.90)$$

¹⁰La afirmación de que la fuerza que actúa sobre la partícula es constante *no* es invariante Lorentz, sino que depende del sistema de referencia inercial considerado. En otras palabras, aunque $\mathbf{F}$ sea constante en un determinado sistema de referencia inercial S no lo será, en general, en otro sistema inercial S' en movimiento respecto del primero. Puede probarse, sin embargo, que si $\mathbf{F}$ es constante en un sistema inercial S también lo es en cualquier otro sistema inercial S' cuyo origen se mueve (respecto de S) en la dirección de $\mathbf{F}$, y además en tal caso $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$.

Nótese que para $a|t| \ll c$ las ecuaciones (6.89) y (6.90) se convierten aproximadamente en sus análogas en Mecánica newtoniana

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}t, \quad \mathbf{r} = \frac{1}{2} \mathbf{a}t^2. \quad (6.91)$$

Por el contrario, para $t \rightarrow \pm\infty$ la velocidad $\mathbf{v}$ tiende a $\pm c\mathbf{a}/a$ y, por tanto, su módulo tiende a c (cf. la Fig. 6.9), mientras que $\mathbf{r} \sim c|t|\mathbf{a}/a$.

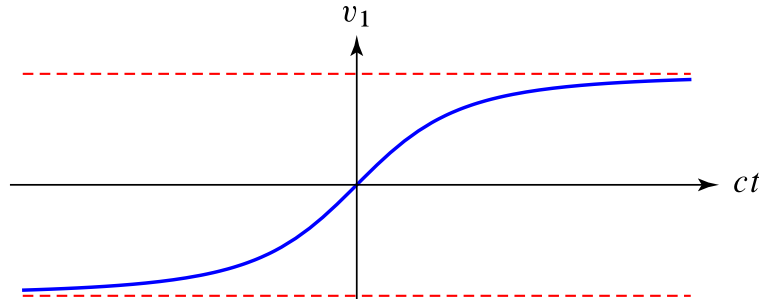


Figura 6.9: Componente en la dirección de $\mathbf{a}$ de la velocidad de una partícula relativista de masa m sometida a una fuerza constante $m\mathbf{a}$ en función del tiempo (curva en azul). En rojo se han representado las dos asintotas $v_1 = \pm c$.

Si escogemos los ejes de modo que $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_1$, la ley horaria del movimiento (6.90) se reduce a

$$x_1 = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right) \implies \left(x_1 + \frac{c^2}{a} \right)^2 - x_0^2 = \frac{c^4}{a^2}, \quad x_1 \geq 0.$$

Esta es la ecuación de una (rama de) *hipérbola equilátera* (cf. la Fig. 6.10) que tiene por centro el punto $(0, -c^2/a)$, por eje el eje x_1 y por asintotas las rectas

$$x_1 + \frac{c^2}{a} = \pm x_0.$$

Nótese que en Mecánica newtoniana la línea de universo de la partícula es la *parábola*

$$x_1 = \frac{a}{2c^2} x_0^2$$

(cf. la ec. (6.91)).

De la ec. (6.89) se sigue inmediatamente que

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma} = \left(1 + \frac{a^2 t^2}{c^2} \right)^{-1/2} \implies \tau = \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{1 + \frac{a^2 s^2}{c^2}}},$$

donde hemos tomado, por sencillez $\tau(0) = 0$. Efectuando el cambio de variable $as/c = \sinh z$, en la integral se obtiene fácilmente

$$\tau = \frac{c}{a} \operatorname{arcsinh}(at/c), \quad (6.92)$$

Por tanto el tiempo coordenado t se expresa en función del tiempo propio τ mediante

$$t = \frac{c}{a} \sinh(a\tau/c). \quad (6.93)$$

Nótese, en particular, que para $\tau \gg c/a$ se tiene

$$t \simeq \frac{c}{a} e^{a\tau/c} \quad (\tau \gg c/a),$$

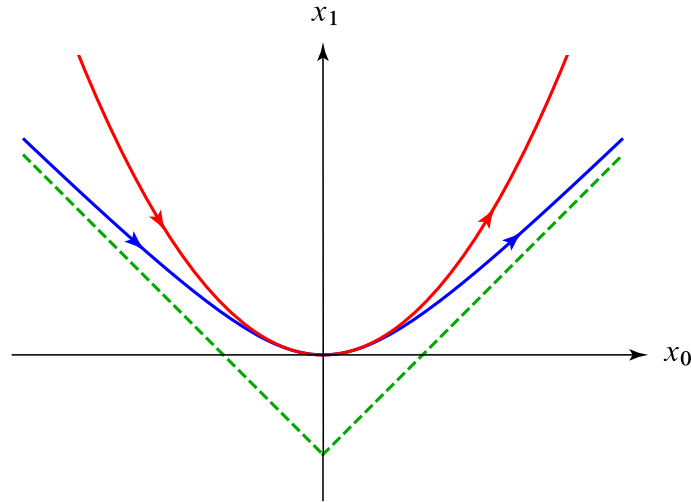


Figura 6.10: Línea de universo de una partícula relativista de masa m sometida a una fuerza constante ma en la dirección del eje x_1 (en azul), junto con su análoga en Mecánica newtoniana (en rojo). Se han representado en verde las rectas $x_1 = -\frac{c^2}{a} \pm x_0$, asintóticas a la línea de universo de la partícula relativista.

i.e., el tiempo coordenado aumenta exponencialmente con el propio.

También puede resultar de interés calcular $\beta(v)$ y $\gamma(v)$ en función del tiempo propio τ . En primer lugar (tomando, como antes, $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_1$) el parámetro $\beta(v)$ se obtiene fácilmente a partir de las ecuaciones (6.89) y (6.93):

$$\beta(v) = \frac{v_1}{c} = \frac{\sinh(a\tau/c)}{\sqrt{1 + \sinh^2(a\tau/c)}} = \tanh(a\tau/c). \quad (6.94)$$

En cuanto al parámetro $\gamma(v)$, se puede obtener de la ecuación anterior o más sencillamente teniendo en cuenta que es igual a la derivada del tiempo coordenado t respecto del tiempo propio:

$$\gamma(v) = \frac{dt}{d\tau} = \cosh(a\tau/c). \quad (6.95)$$

En virtud de la ecuación (6.52), la energía cinética de la partícula está dada por

$$T = mc^2(\gamma(v) - 1) = mc^2(\cosh(a\tau/c) - 1). \quad (6.96)$$

Esta es la energía que es necesario suministrar a la partícula para mantener su aceleración constante (igual a $\mathbf{a}$) desde el instante inicial ($\tau = 0$) hasta un tiempo propio τ . Por la ley de conservación de la energía relativista (6.87), esta energía ha de ser igual al trabajo $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = m\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$ (ya que $\mathbf{F}$ es constante) realizado por la fuerza $\mathbf{F}$ durante ese lapso de tiempo propio. Este hecho se comprueba fácilmente utilizando las ecs. (6.90) y (6.93):

$$m\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = mc^2 \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right) = mc^2 (\cosh(a\tau/c) - 1). \quad (6.97)$$

De nuevo, para tiempos propios $\tau \gg c/a$ esta energía aumenta exponencialmente con τ :

$$T \simeq mc^2 e^{a\tau/c} \quad (\tau \gg c/a).$$

