Métodos Lineales Multipaso

Rafael Orive
Universidad Autónoma de Madrid

Madrid, Noviembre-Diciembre 2021

Objetivo: Definir y analizar la familia de los Métodos Lineales Multipaso (MLM)

- Métodos MLM explícitos e implícitos
- Ejemplos de Métodos
- Orden y Barreras
- Estabilidad
- A-Estabilidad

Definición (Métodos Lineales Multipaso)

Un Método Lineal de k-pasos (MLM) se puede escribir en la forma

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f(t_{n+j}, y_{n+j}), \qquad n = 0, \ldots, N-K \qquad \text{(MLM)}$$

con $\alpha_k = 1$, $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$.

- Notación: pondremos $\boxed{f_i = f(t_i, y_i)}$
- Si $\beta_k = 0$ *el método es explícito.*
  Si se han almacenado los valores $f_n, \ldots, f_{n+k-2}$, *una única evaluación de función* f_{n+k-1} *producirá* y_{n+k}
- Si $|\beta_k| \neq 0$ *el método es implícito.*

Polinómios característicos

Un Método Lineal de k-pasos se puede escribir en la forma

$$\underbrace{\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j}}_{\rho(\xi)=\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \xi^j} = \underbrace{h \sum_{j=0}^{k} \beta_j \overbrace{f(t_{n+j}, y_{n+j})}^{f_{n+j}}}_{\sigma(\zeta)=\sum_{j=0}^{k} \beta_j \zeta^j}, \qquad n = 0, \ldots, N-K \qquad \text{(MLM)}$$

con $\alpha_k = 1$, $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$.

- Recordar: el Primer Polinomio Característico

$$\rho(\xi) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \xi^j$$

- Definimos el **Segundo Polinomio Característico**:

$$\sigma(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \zeta^j$$

Consistencia de MLM

¿Qué condiciones deben satisfacer los coeficientes de un MLM para que sea consistente? La función de incremento de un MLM viene dada por:

$$\Phi_f(t_n, y_n, y_{n+k-1}; h) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(t_n + jh, y_{n+j})$$
$$+ \beta_k f\left(t_n + kh, -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} + h\Phi_f(t_n, y_n, y_{n+k-1}; h)\right)$$

Proposición (Consistencia MLM)

Un MLM es consistente si y solo si

$$(C1)\ \ \rho(1) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 0 \qquad \text{y} \qquad (C2)\ \ \rho'(1) = \sum_{j=0}^{k} j\alpha_j = \sum_{j=0}^{k} \beta_j = \sigma(1).$$

MLM: orden p

¿Qué condiciones deben satisfacer los coeficientes de un MLM para que sea consistente de orden p? El residuo viene dado por:

$$R_n = \sum_{j=0}^{k} [\alpha_j Y(t_{n+j}) - h\beta_j f(t_{n+j}, Y(t_{n+j}))]$$
$$= \sum_{j=0}^{k} [\alpha_j Y(t_{n+j}) - h\beta_j Y'(t_{n+j})] \qquad n = 0, \dots, N-k.$$

Si $f \in C^p$, desarrollando con Taylor $Y(t_{n+j}) = Y(t_n + jh)$ e $Y'(t_{n+j}) = Y'(t_n + jh)$ en t_n:

$$Y(t_{n+j}) = Y(t_n) + Y'(t_n)jh + \cdots + Y^{(p)}(t_n)\frac{(jh)^p}{p!} + Y^{(p+1)}(\overline{\xi}_{n,j})\frac{(jh)^{p+1}}{(p+1)!}$$

$$Y'(t_{n+j}) = Y'(t_n) + Y''(t_n)jh + \cdots + Y^{(p)}(t_n)\frac{(jh)^{p-1}}{(p-1)!} + Y^{(p+1)}(\overline{\eta}_{n,j})\frac{(jh)^p}{p!}$$

Donde $\overline{\xi}_{n,j}, \overline{\eta}_{n,j} \in (t_n, t_n + jh)$. Entonces:

$$R_n = C_0 Y(t_n) + C_1 Y'(t_n)h + \cdots + C_p Y^{(p)}(t_n)h^p + O\left(h^{p+1}\right)$$

$$R_n = \sum_{j=0}^{k} \left[\alpha_j Y(t_{n+j}) - h\beta_j Y'(t_{n+j}) \right] \qquad n = 0, \dots, N-k$$

$$\alpha_j Y(t_{n+j}) = \alpha_j Y(t_n) + \alpha_j Y'(t_n) jh + \dots + \alpha_j Y^{(p)}(t_n) \frac{(jh)^p}{p!} + O\left(h^{p+1}\right)$$

$$-h\beta_j Y'(t_{n+j}) = -\beta_j Y'(t_n) h - \beta_j Y''(t_n) jh^2 - \dots - \beta_j Y^{(p)}(t_n) \frac{j^{p-1}}{(p-1)!} h^p + O\left(h^{p+1}\right)$$

Donde $\overline{\xi}_{n,j}, \overline{\eta}_{n,j} \in (t_n, t_n + jh)$. Entonces:

$$R_n = \underbrace{\left[\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \right]}_{C_0} Y(t_n) + \underbrace{\left[\sum_{j=0}^{k} \alpha_j j - \sum_{j=0}^{k} \beta_j \right]}_{C_1} Y'(t_n) h + \dots$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{p!} \left[\sum_{j=0}^{k} \alpha_j j^p - p \sum_{j=0}^{k} \beta_j j^{p-1} \right]}_{C_p} Y^{(p)}(t_n) h^p + O\left(h^{p+1}\right)$$

Los coeficientes

$$C_q = \frac{1}{q!} \left[\sum_{j=0}^{k} \alpha_j j^q - q \sum_{j=0}^{k} \beta_j j^{q-1} \right], \qquad \text{con } q = 0, 1, \dots, p$$

Proposición (Consistencia MLM orden p)

Un MLM es consistente de orden $p \geq 1$ si y solo si

$$C_q = \frac{1}{q!}\left[\sum_{j=0}^{k} \alpha_j j^q - q \sum_{j=0}^{k} \beta_j j^{q-1}\right] = 0, \qquad \text{con } q = 0, 1, \ldots, p$$

y *la constante de error* $C_{p+1} \neq 0$. $\big[$Tenemos que $R_n = O(h^{p+1})\big]$.

Si $C_{p+1} \neq 0$, el método no puede ser consistente de orden $p+1$. En efecto, la solución del problema

$$Y'(t) = \frac{t^p}{p!}, \qquad Y(0) = 0, \qquad \text{verifica que} \qquad Y^{(p+1)}(t) = 1.$$

Entonces el residuo es

$$R_n = C_{p+1} h^{p+1} \neq O(h^{p+2})$$

y el método *NO es consistente (ni convergente) de orden* $p+1$.

Primera Barrera de Dahlquist

¿Cual es el mejor orden que podemos conseguir para un MLM de k-pasos?

- Un MLM de k-pasos viene determinado por $2k+1$ coeficientes.
- Las condiciones de orden de consistencia son relaciones lineales entre estos coeficientes.
- Existen MLM con orden de consistencia $p = 2k$ (p. ej. Simpson) y se llaman *maximales*.
- Sin embargo, no sirven para nada, dado que **no son convergentes salvo en los casos $k = 1$ y $k = 2$.**

Theorem (Primera Barrera de Dahlquist (1956))

El orden de convergencia p de un MLM 0-estable satisface:

- $p \leq k+2$ *si* k *es par*
- $p \leq k+1$ *si* k *es impar*
- $p \leq k$ *si* $\beta_k \leq 0$ *(en particular si es explícito)*

Estabilidad Lineal de MLM

Queremos aplicar el MLM

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}\,, \qquad \text{con } n = 0, \ldots, N-k$$

al problema escalar $Y'(t) = \lambda Y(t)$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ y con $Y(0) = 1$. Llegamos a la ecuación lineal homogénea en diferencias con coeficientes constantes:

$$\sum_{j=0}^{k} \left(\alpha_j - h\lambda\beta_j\right) y_{n+j} = 0$$

Poniendo $z = h\lambda$ obtenemos el polinomio característico de la ecuación:

$$\boxed{\Pi(r,z) = \sum_{j=0}^{k} \left(\alpha_j - \beta_j z\right) r^j = \rho(r) - z\sigma(r)}$$

donde ρ, σ son los dos polinomios característicos del MLM.

Π se llama **Polinomio de Estabilidad del MLM**.

Lema

Supongamos que los ceros de $\Pi(\,\cdot\,, z)$ como función de r, son

$$r_1(z), r_2(z), \ldots, r_{q(z)} \in \mathbb{C} \qquad \text{con} \qquad m_1(z), m_2(z), \ldots, m_{q(z)} \in \mathbb{N}$$

siendo m_i sus multiplicidades, y tenemos $\displaystyle\sum_{i=1}^{q(z)} m_i(z) = k$. Entonces

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |r_i(z)| < 1, \ i = 1, \ldots, q(z)\} \ .$$

Prueba.

Usar el Lema para determinar el dominio de estabilidad $\mathcal{D}$ presenta dos problemas:

- Hay que hallar las raíces del polinomio de estabilidad Π
- Hay que determinar los valores z para los que dichas raíces tienen módulo menor que 1.

Conviene tratar de usar otro "Ansatz", mirando al "borde/frontera" del dominio $\mathcal{D}$

$$\partial\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \text{existe una raíz de } \Pi(\cdot, z) \text{ de módulo } 1 \ \}$$

- En general vale la inclusión estricta, y no la igualdad: $\partial\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{F}$.
(puede haber z_0 para los que hay raíces de módulo 1, pero también algunas de módulo menor y otras de módulo menor que 1, y dicho z_0 **no pertenece a** $\partial\mathcal{D}$).
- Notese que $\mathcal{D} \cap \mathcal{F} = \emptyset$

Si $z \in \mathcal{F} = \{z \in \mathbb{C}\ :\ \text{existe una raíz de } \Pi(\cdot, z) \text{ de modulo 1.}\ \}$,
entonces existe $\vartheta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\Pi\left(e^{i\vartheta}, z\right) = \rho\left(e^{i\vartheta}\right) - z\sigma\left(e^{i\vartheta}\right) = 0\,,$$

es decir

$$z = \frac{\rho\left(e^{i\vartheta}\right)}{\sigma\left(e^{i\vartheta}\right)}\,, \qquad \text{con } 0 \le \vartheta < 2\pi.$$

Por lo tanto, tenemos que

- $\partial\mathcal{D}$ está contenida en un conjunto $\mathcal{F}$ que es la imagen de una curva cerrada que separa $\mathbb{C}$ en dos regiones disjuntas:

$$\mathbb{C} \setminus \mathcal{F} = A_1 \sqcup \cdots \cup A_k$$

- Por lo tanto, $\mathcal{D} \subseteq A_i$ para alguno de los A_i (pueden ser varios)
- Para ver cual de los casos se da, basta con estudiar un punto.

Barreras de estabilidad

¿Hay MLM que son A-estables?

- **Explícitos no**, como muestra el siguiente

Theorem

*Todo **MLM explícito y convergente** tiene región de estabilidad absoluta acotada, por lo tanto **no es A-estable**.*

¿Tenemos más suerte con los MLM implícitos?
Si, hay ejemplos de orden 1 (Euler implícito) y 2 (Trapecio).

Theorem (Segunda Barrera de Dahlquist (1957))

El mejor orden de consistencia p de un MLM A-estable es $p = 2$

No podemos conseguir nada mejor

Notas:

- Los RK-implícitos A-estables no tienen esta restricción.
  Por ejemplo Gauss-Legendre es de 2 etapas y orden 4 y es A-estable.
- Se podria pensar que los MLM son inferiores a los RK..., no es completamente cierto...
- $A(\alpha)$-estabilidad: son los MN tal que existe $\alpha \in (0, \pi]$ tal que $\mathcal{D}$ está contenido en el cono

$$\Gamma(\alpha) := \left\{ re^{i\vartheta} \ : \ r > 0 \, , |\vartheta - \pi| < \alpha \right\}$$

- En otras palabras, si todos los autovalores están en $\Gamma(\alpha)$ aunque estén muy lejos, **NO obliga a disminuir el paso por motivos de estabilidad**.

Ejercicio/Ejemplo

Una propiedad útil

Queremos demostrar que la región de estabilidad absoluta de un MLM convergente no puede contener el eje real positivo en un entorno del origen.

Para ello, veremos que

(i) Hay una única raíz $r_1(z)$ de $\Pi(r,z)$ tal que $r_1(z) \xrightarrow[z\to 0]{} 1$

(ii) Consideramos el problema

$$Y'(t) = \lambda Y(t) \qquad \text{con} \qquad Y(0) = 1, \qquad \text{y con} \qquad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

El residuo satisface $R_n = O(h^2)$ cuando $h \to 0$, por lo tanto $\Pi(e^z, z) = O(z^2)$ cuando $z \to 0$, $z \in \mathbb{R}^+$.

(iii) Usaremos que

$$\Pi(r,z) = (1 - z\beta_k)(r - r_1)(r - r_2)\ldots(r - r_k)$$

para concluir que cuando $z \to 0$, $z \in \mathbb{R}^+$ tenemos que

$$r_1(z) = e^z + O(z^2) = 1 + z + O(z^2)\,.$$