Tema 3 – Análisis de Sistemas LTI en el dominio transformado

Introducción

- http://video.google.es/videoplay?docid=6726953938324261715

Filtros ideales

Filtros Paso Bajo (Low Pass Filters)

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & resto \end{cases} \quad -\pi \le \omega < \pi \quad \xleftrightarrow{0<\omega_c<\pi} \quad h_{lp}[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \sin c\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right)$$

Filtros Paso Alto (High Pass Filters)

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega}) \quad \xleftrightarrow{0<\omega_c<\pi} \quad h_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n]$$

Son filtros no causales y con respuesta impulsional infinita.

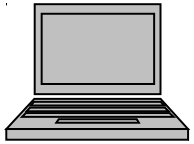
Filtros realizables

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \longrightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{z^N}{z^M} \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}} = z^{N-M} \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}} = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=0}^{M} (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N} (1 - p_k z^{-1})}$$

Ejemplo:

$$H(z) = \frac{(1-z^{-1})^2}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{3}{4}z^{-1})} = \frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{1+\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{8}z^{-2}}$$



$$y[n] + \tfrac{5}{4} y[n-1] + \tfrac{3}{8} y[n-2] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$$

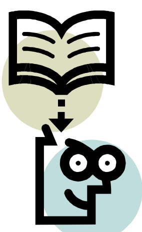
$$y[n] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2] - \tfrac{5}{4} y[n-1] - \tfrac{3}{8} y[n-2]$$

Filtros definidos por ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes

Una ecuación en diferencias no define de forma única la respuesta al impulso del sistema. Por ejemplo,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \longrightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k h[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k]$$

sea $h'[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k p_k^n$ donde $\sum_{m=0}^{N} a_m p_k^{-m} = 0, A_k \in R, p_i \neq p_j$, entonces



$$\sum_{k=0}^{N} a_k h'[n-k] = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=0}^{N} a_k (h[n-k] + h'[n-k]) = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k]$$

Es decir, hay N coeficientes indeterminados A_k , que pueden ser fijados por medio de condiciones iniciales $y[-1], y[-2], ..., y[-N]$ si es causal ó $y[1], y[2], ..., y[N]$ si es anticausal.

Respuesta al impulso de un sistema racional

Expansión en fracciones parciales

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=\sum_{k=0}^{M-N} B_k z^{-k}+\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-p_k z^{-k}} \longrightarrow h[n]=\underbrace{\sum_{k=0}^{M-N} B_k \delta[n-k]}_{\text{FIR}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{N} A_k p_k^n u[n]}_{\text{IIR}}$$

sólo si M≥N

FIR
Polos en el origen

IIR
Polos fuera del origen

Ejemplo: $h[n]=a^n(u[n]-u[n-M-1])$

$$H(z)=\sum_{n=0}^{M} a^n z^{-n}=\frac{1-a^{M+1}z^{-(M+1)}}{1-az^{-1}}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} p_k=\cancel{0},0,\ldots,0\ (M+1) \\ z_k=\cancel{ae^{j\frac{2\pi}{M+1}0}},ae^{j\frac{2\pi}{M+1}1},\ldots,ae^{j\frac{2\pi}{M+1}M} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} p_k=\cancel{a} \\ z_k=\cancel{0} \end{cases}$$

Respuesta de un sistema racional

$$Y(z)=H(z)X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}\frac{N(z)}{Q(z)}=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}+\sum_{k=1}^{L}\frac{Q_k}{1-q_k z^{-1}}$$

El sistema está inicialmente en reposo.

No se producen cancelaciones polo-cero.

Polos del sistema

Respuesta natural

Polos de la entrada

Respuesta forzada

$$y[n]=\sum_{k=1}^{N}A_k p_k^n u[n]+\sum_{k=1}^{L}Q_k q_k^n u[n]$$

Respuesta transitoria

Régimen permanente

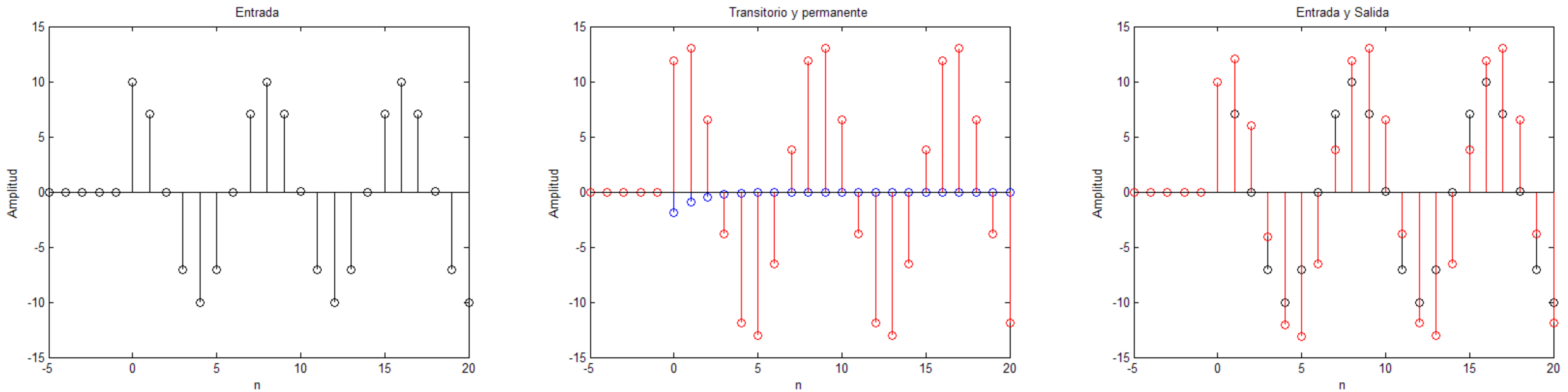
Respuesta transitoria y régimen permanente

Ejemplo: $y[n] = 0.5y[n-1] + x[n] \longleftrightarrow H(z) = \dfrac{1}{1-0.5z^{-1}}$

$$x[n] = 10\cos\left(\tfrac{\pi}{4}n\right)u[n] \longleftrightarrow X(z) = 10\,\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

$$Y(z) = H(z)X(z) = 10\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\,\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}} = \frac{6.3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{11.894-13.015z^{-1}}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

$$y[n] = -1.907(0.5)^n u[n] + 13.56\cos\left(\tfrac{\pi}{4}n - 28.7^{\circ}\right)u[n]$$

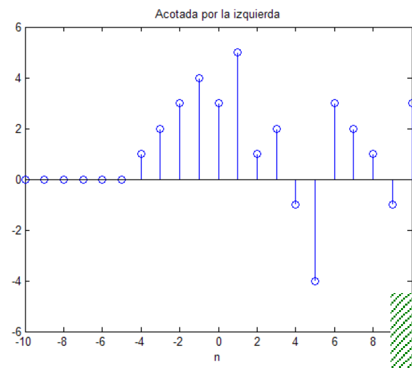


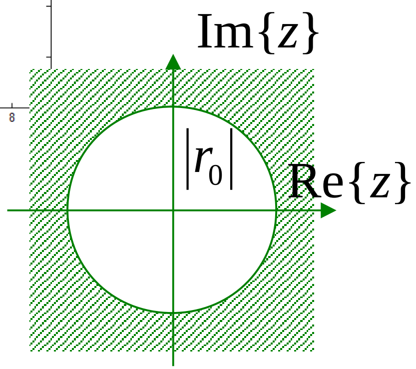
Estabilidad y causalidad

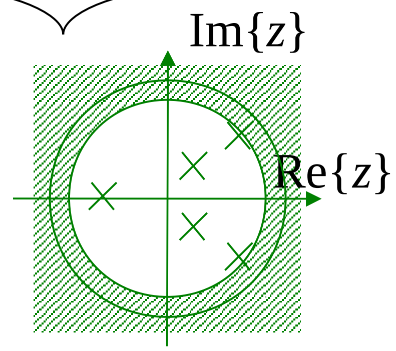
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| h[n] z^{-n} \right| \Big|_{|z|=1} < \infty$$

h[n] es estable si la ROC de H(z) incluye al círculo unidad.







$$|p_k| < 1$$

Estabilidad

Ejemplo: $y[n]-y[n-1]=x[n]$

$x[n]=u[n]$ → La señal de entrada está acotada

$\exists B_x : \forall n \left|x[n]\right| < B_x$

$$H(z)=\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z|>1$$

$$Y(z)=H(z)X(z)=\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

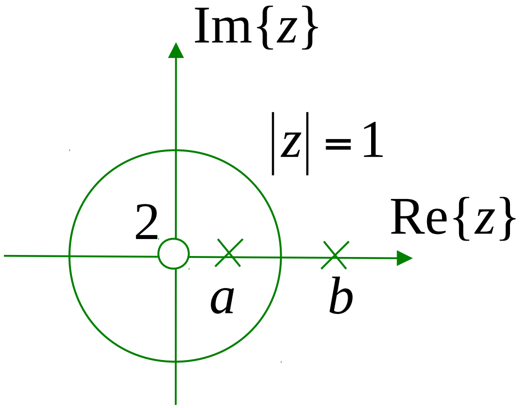
$y[n]=(n+1)u[n]$ → Pero la salida, no

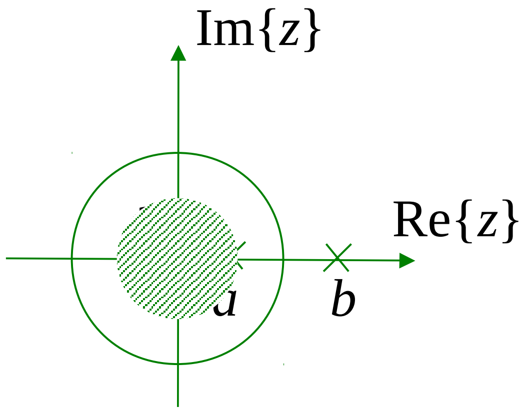
$\neg\exists B_y : \forall n \left|y[n]\right| < B_y$

Estabilidad y Causalidad

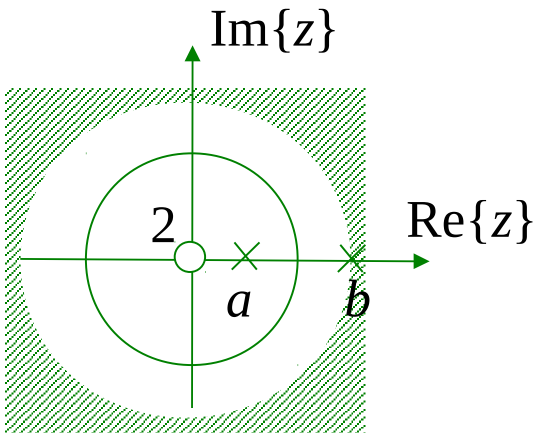
Ejemplo: $y[n]-(a+b)y[n-1]+aby[n-2]=x[n]$

$$H(z)=\frac{1}{\left(1-az^{-1}\right)\left(1-bz^{-1}\right)} \qquad a<1<b$$

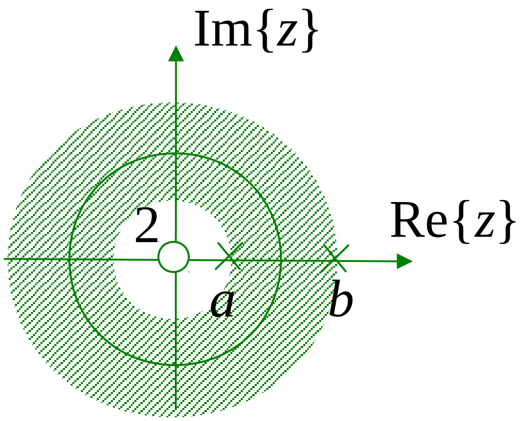




El sistema no es ni causal ni estable



El sistema es causal pero no estable



El sistema es estable pero no causal

Cancelaciones polo-cero

Ejemplo: $y[n] - \frac{5}{2} y[n-1] + y[n-2] = x[n] - 5x[n-1] + 6x[n-2]$

$$H(z) = \frac{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}{1 - \frac{5}{2} z^{-1} + z^{-2}} = \frac{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)} = \frac{\left(1 - 3z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{1 - 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = 1 - \frac{\frac{5}{2} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

Cancelación polo-cero

$$h[n] = \delta[n] - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

El sistema es estable debido a la cancelación polo-cero pero en una implementación real no tienen por qué cancelarse exactamente.

Test de estabilidad de Schür-Cohn

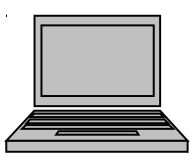
<u>Notación</u>

Polinomio de orden m: $A_m(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k^{(m)} z^{-k}$ $\quad a_0^{(m)} = 1$

Polinomio inverso o recíproco: $\tilde{A}_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{m} a_{m-k}^{(m)} z^{-k}$

<u>Test</u>

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$



1. $A_N(z) = A(z)$
2. $m = N$
4. mientras $m \neq 0$
   4.1. Calcular $\tilde{A}_m(z)$
   4.2. $K_m = a_m^{(m)}$
   4.3. $A_{m-1}(z) = \dfrac{A_m(z) - K_m \tilde{A}_m(z)}{1 - K_m^2}$
   4.4. $m = m - 1$

A(z) tiene todas sus raíces dentro del círculo unidad si y sólo si

$$\forall m \in \{1,2,\ldots,N\} : |K_m| < 1$$

Test de estabilidad de Schür-Cohn

Ejemplo: $H(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{7}{4} z^{-1} - \frac{1}{2} z^{-2}}$

$$A_2(z) = 1 - \tfrac{7}{4} z^{-1} - \tfrac{1}{2} z^{-2}$$

$$\tilde{A}_2(z) = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{7}{4} z^{-1} + z^{-2}$$

$$K_2 = a_2^{(2)} = -\tfrac{1}{2}$$

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - K_2 \tilde{A}_2(z)}{1 - K_2^2} = 1 - \tfrac{7}{2} z^{-1}$$

$$\tilde{A}_1(z) = -\tfrac{7}{2} + z^{-1}$$

$K_1 = a_1^{(1)} = -\tfrac{7}{2} \longrightarrow |K_1| > 1 \longrightarrow$ El sistema no es estable

Estabilidad de un sistema de 2º orden

$$H(z)=\frac{b_0}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_1, z_2 = 0 \\ p_1, p_2 = -\dfrac{a_1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{a_1^2-4a_2}{4}} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = -(p_1+p_2) \\ a_2 = p_1 p_2 \end{array} \right.$$

Estabilidad $|K_i| < 1$

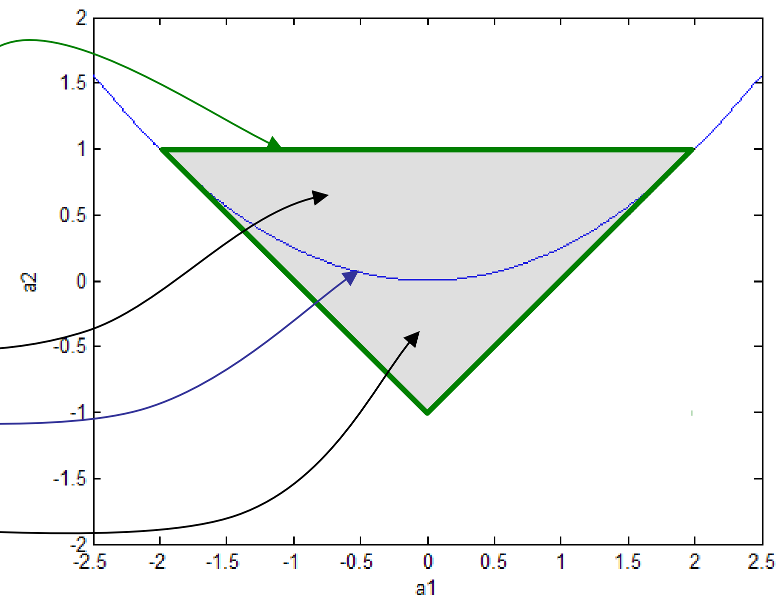
$$K_2 = a_2$$

$$K_1 = \frac{a_1}{1+a_2}$$

Polos complejos $a_1^2 - 4a_2 < 0$

Polos reales dobles $a_1^2 - 4a_2 = 0$

Polos reales simples $a_1^2 - 4a_2 > 0$



Invertibilidad

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{H\left(e^{j\omega}\right)} \xrightarrow{h[n]} \boxed{H_i\left(e^{j\omega}\right)} \longrightarrow h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

$$H(e^{j\omega})H_i(e^{j\omega}) = 1$$

$$H(z)H_i(z) = 1$$

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=0}^{M}(1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N}(1 - p_k z^{-1})} \longrightarrow H_i(z) = \frac{a_0}{b_0}\frac{\prod_{k=0}^{N}(1 - p_k z^{-1})}{\prod_{k=0}^{M}(1 - z_k z^{-1})}$$

Es decir, los polos de un sistema son los ceros de su sistema inverso, y los ceros de un sistema son los polos de su inverso. La ROC del sistema inverso debe solaparse con la del sistema H(z)

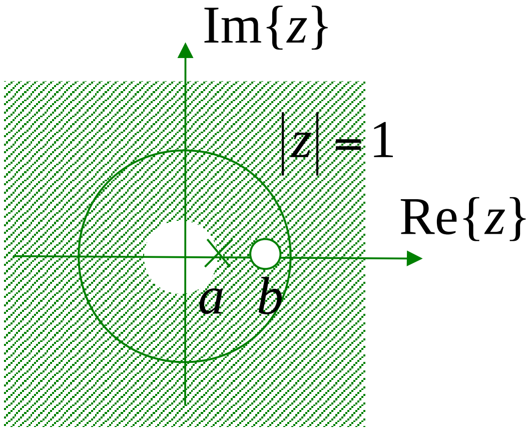
Un sistema LTI es estable y causal y tiene un sistema inverso estable y causal sii todos los polos y ceros de H(z) están dentro del círculo unidad

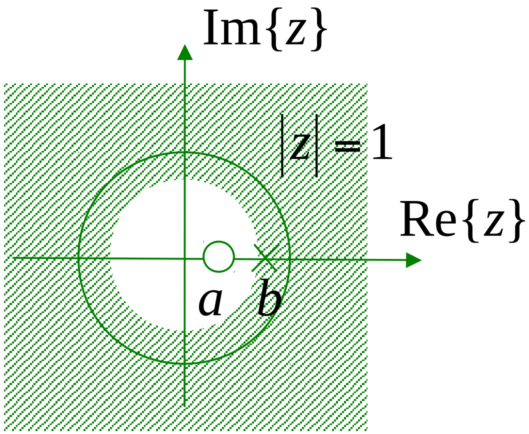
Invertibilidad

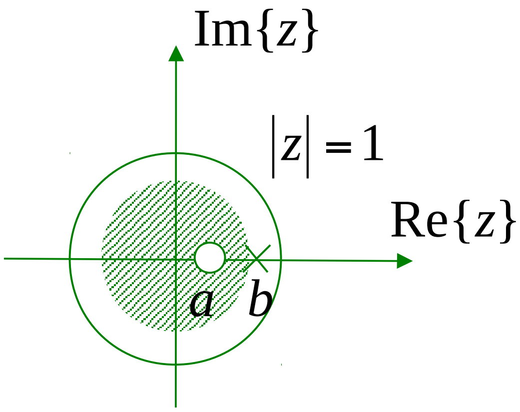
Ejemplo: $H(z) = \dfrac{1 - bz^{-1}}{1 - az^{-1}}$ $\qquad b, a < 1$

$$h[n] = a^n u[n] - b a^{n-1} u[n-1]$$

$$H_i(z) = \frac{1 - az^{-1}}{1 - bz^{-1}}$$







$$h[n] = b^n u[n] - a b^{n-1} u[n-1]$$

$$h[n] = -b^n u[-n-1] + a b^{n-1} u[-n-2]$$

Respuesta en frecuencia de un sistema LTI

$$x[n] \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow y[n] = h[n] * x[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \qquad \left|Y(e^{j\omega})\right| = \left|H(e^{j\omega})\right|\left|X(e^{j\omega})\right|$$

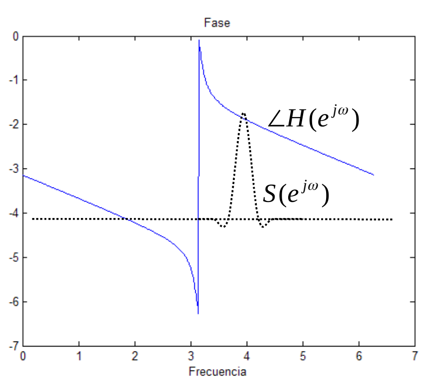
$$\angle Y(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega})$$

Ejemplo: $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$ $\quad \angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_0 \longrightarrow h[n] = \delta[n - n_0]$

$$\angle H(e^{j\omega}) \approx -\phi_0 - \omega n_0 \longrightarrow y[n] \approx \left|H(e^{j\omega_0})\right| s[n-n_0]\cos(\omega_0(n-n_0)-\phi_0)$$

$$x[n] = s[n]\cos\omega_0 n$$

donde $n_0 = \tau(\omega)\Big|_{\omega=\omega_0}$

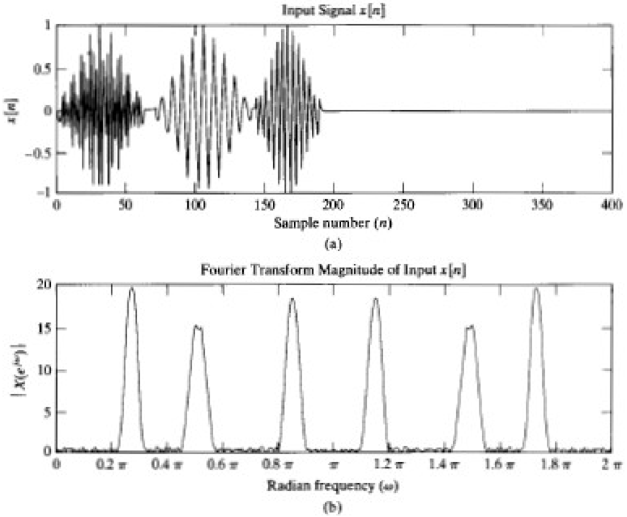


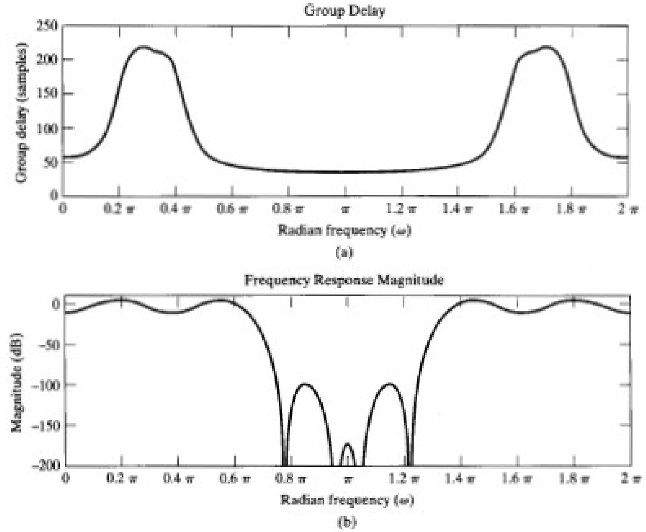
Retardo de grupo

$$\boxed{\tau(\omega) = grd\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{d}{d\omega}\arg\{H(e^{j\omega})\}}$$

Efectos del retardo de grupo

Ejemplo:





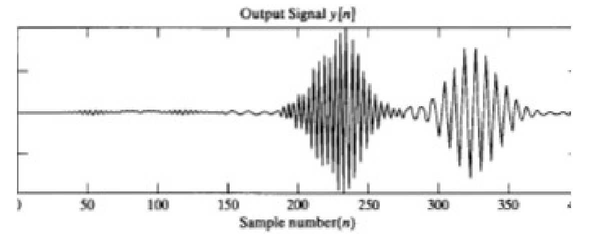
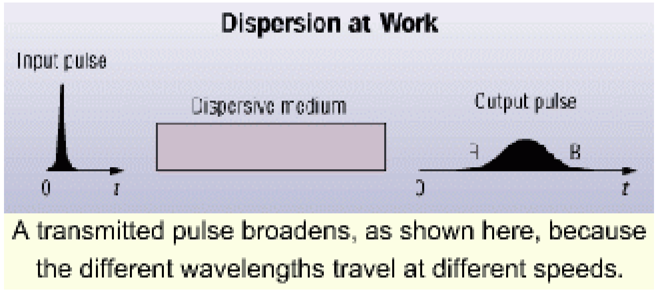
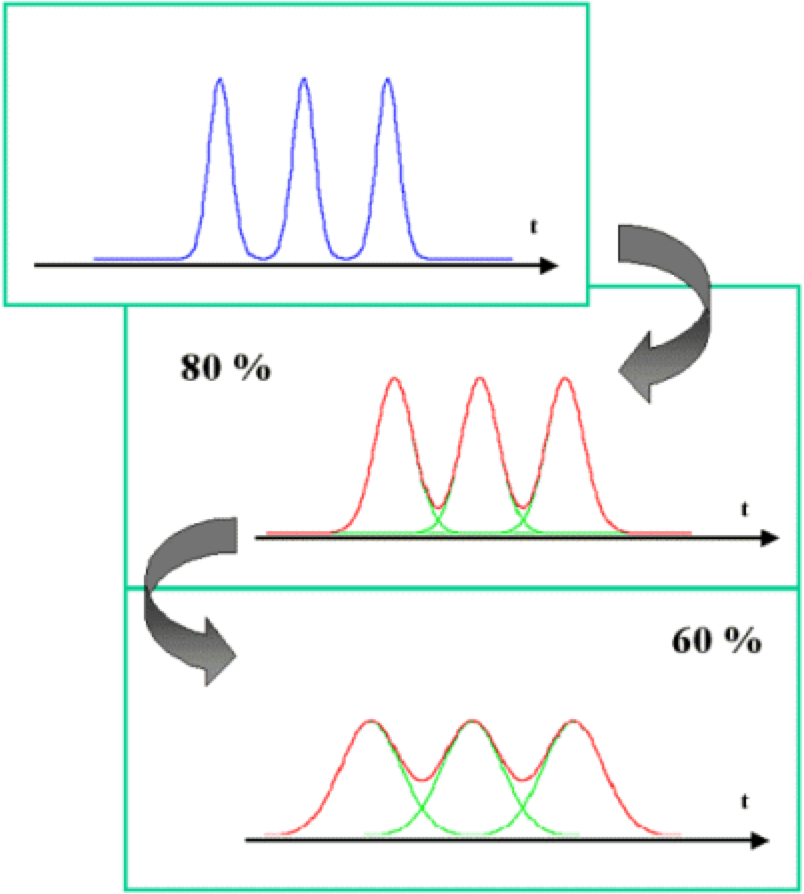


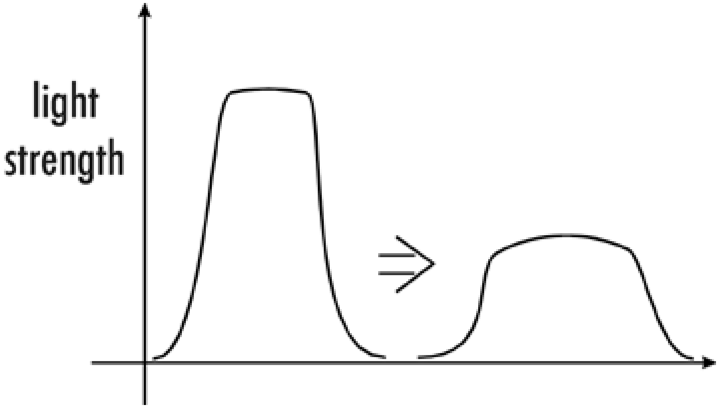
Figure 5.3 Output signal for Example 5.1.

Entrada Sistema Salida

Efectos del retardo de grupo







Applet: http://cnyack.homestead.com/files/afilt/afilt-phasegroup.htm

Respuesta en frecuencia de un sistema racional

Respuesta de amplitud

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}} = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=0}^{M}(1 - z_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=0}^{N}(1 - p_k e^{-j\omega})}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=0}^{M}(1 - z_k e^{-j\omega})(1 - z_k^* e^{j\omega})}{\prod_{k=0}^{N}(1 - p_k e^{-j\omega})(1 - p_k^* e^{j\omega})}$$

Ganancia del filtro en dBs

$$20\log_{10}\left|H(e^{j\omega})\right| = 20\log_{10}\frac{b_0}{a_0} + \sum_{k=0}^{M} 20\log_{10}\left|1 - z_k e^{-j\omega}\right| - \sum_{k=0}^{N} 20\log_{10}\left|1 - p_k e^{-j\omega}\right|$$

Respuesta en frecuencia de un sistema racional

<u>Respuesta de fase</u>

Valor principal

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle\left(\frac{b_0}{a_0}\right) + \sum_{k=0}^{M} \angle(1 - z_k e^{-j\omega}) - \sum_{k=0}^{N} \angle(1 - p_k e^{-j\omega}) = ARG\left\{H(e^{j\omega})\right\} + 2\pi r(\omega)$$

donde

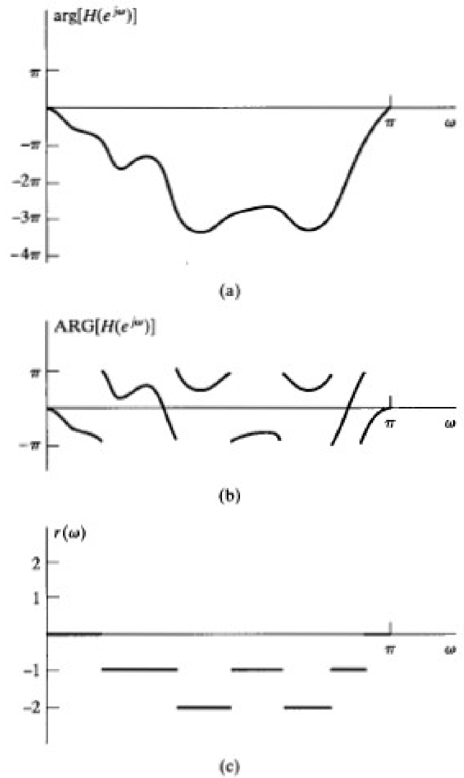
$$\pi < ARG\left\{H(e^{j\omega})\right\} = \arctan\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} \leq \pi$$

$r(\omega) \in N$ Sin restricción

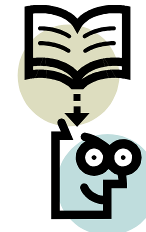
$$\arg H(e^{j\omega}) = ARG\left\{H(e^{j\omega})\right\} + 2\pi r(\omega)$$

donde

$r(\omega) \in N$ Es tal que $\arg H(e^{j\omega})$ es continua



Respuesta en frecuencia de un sistema racional



<u>Retardo de grupo</u>

$$grd\left\{H(e^{j\omega})\right\} = \sum_{k=0}^{M} \frac{d}{d\omega} \arg\left\{1 - z_k e^{-j\omega}\right\} - \sum_{k=0}^{N} \frac{d}{d\omega} \arg\left\{1 - p_k e^{-j\omega}\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{M} \frac{\left|z_k\right|^2 - \mathrm{Re}\left\{z_k e^{-j\omega}\right\}}{1 + \left|z_k\right|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left\{z_k e^{-j\omega}\right\}} - \sum_{k=0}^{N} \frac{\left|p_k\right|^2 - \mathrm{Re}\left\{p_k e^{-j\omega}\right\}}{1 + \left|p_k\right|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left\{p_k e^{-j\omega}\right\}}$$

Propiedades

$$grd\left\{H(e^{j\omega})\right\} \equiv -\frac{d}{d\omega} \arg\left\{H(e^{j\omega})\right\} = -\frac{d}{d\omega} ARG\left\{H(e^{j\omega})\right\} = -\frac{d}{d\omega} \angle H(e^{j\omega})$$

salvo en las discontinuidades

$$\arg\left\{H(e^{j\omega})\right\} - \arg\left\{H(e^{j0})\right\} = -\int_0^{\omega} grd\left\{H(e^{j\phi})\right\} d\phi$$

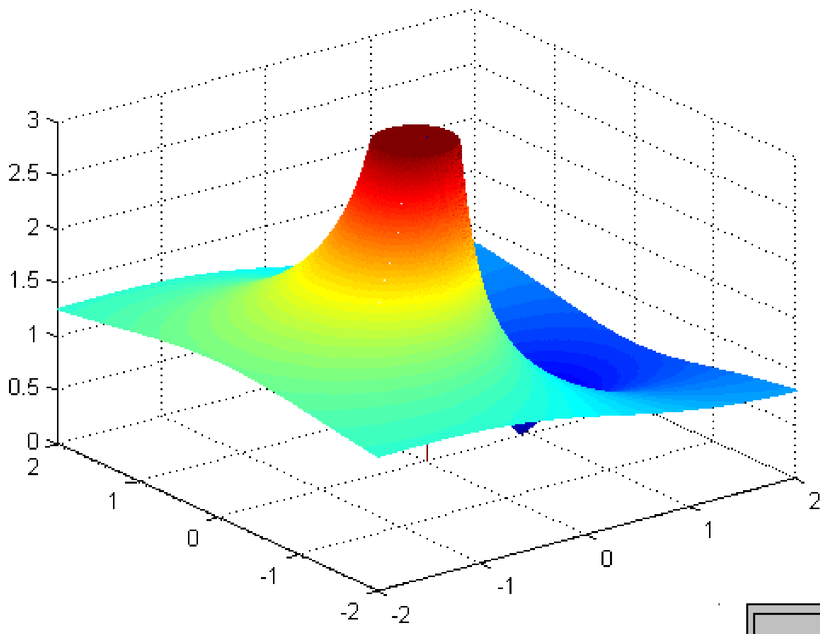
Respuesta en frecuencia de un sistema racional

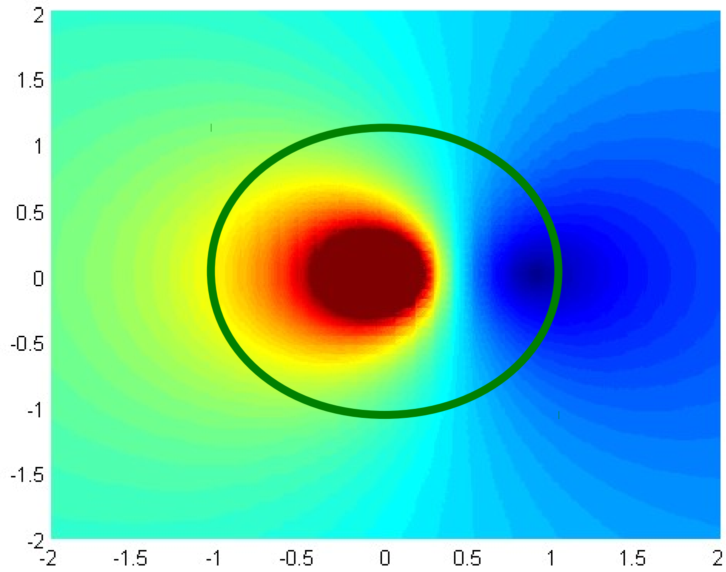
- Applet:
- http://www.eas.asu.edu/~dsp/grad/anand/java/FreqResp/FreqResp.html
- http://www.thole.org/manfred/polezero/en_idx.html

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

$$H(e^{j\omega}) = 1 - z_0 e^{-j\omega} = 1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}$$

$$z_0 = 0.9$$

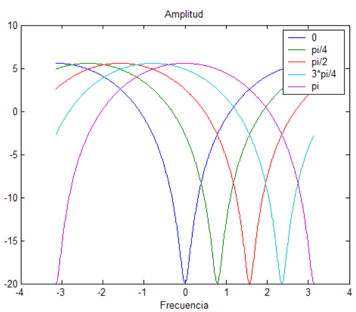




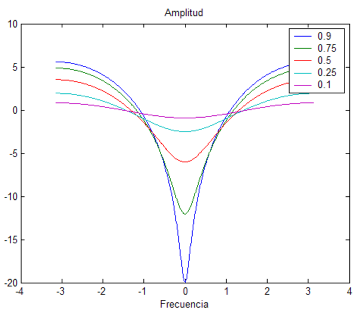
Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

$$H(e^{j\omega}) = 1 - z_0 e^{-j\omega} = 1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = 1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta)$$

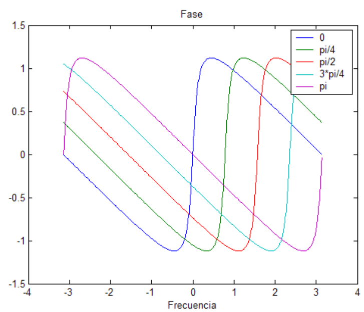


$r = 0.9$

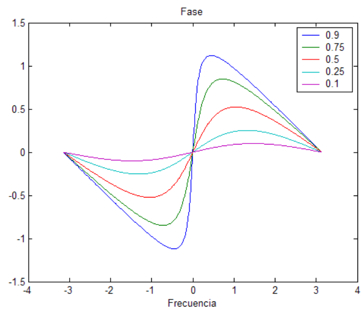


$\theta = 0$

$$ARG\left\{H(e^{j\omega})\right\} = \arctan\frac{r\sin(\omega - \theta)}{1 - r\cos(\omega - \theta)}$$

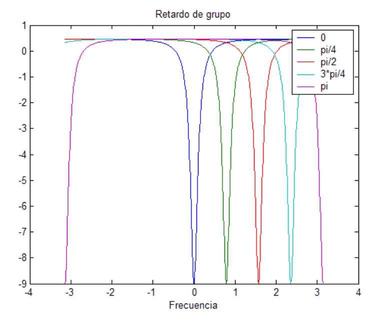


$r = 0.9$

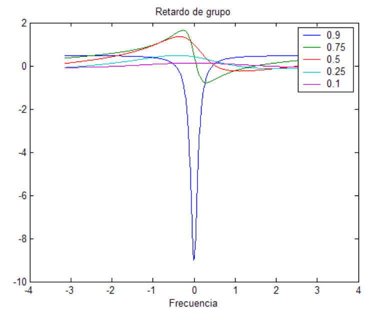


$\theta = 0$

$$grd\left\{H(e^{j\omega})\right\} = \frac{r^2 - r\cos(\omega - \theta)}{\left|H(e^{j\omega})\right|^2}$$



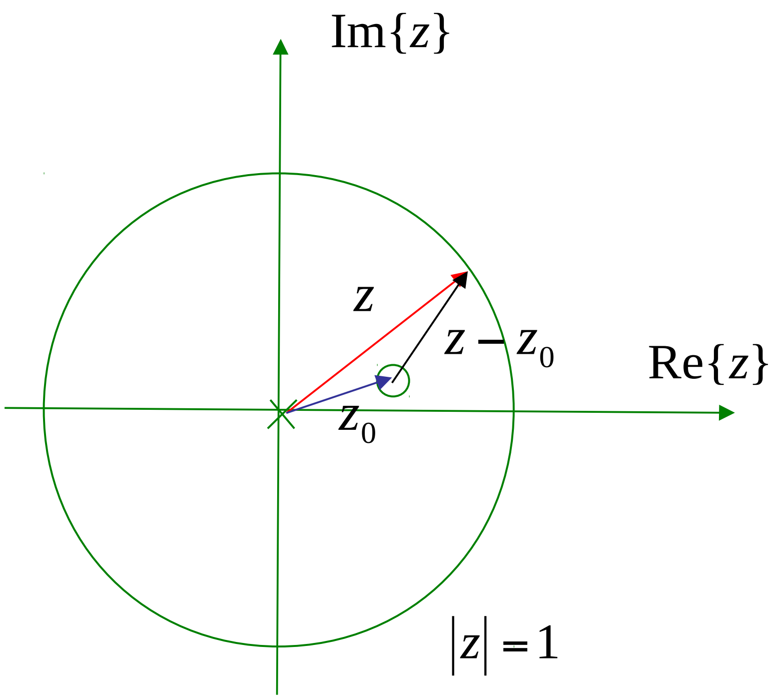
$r = 0.9$

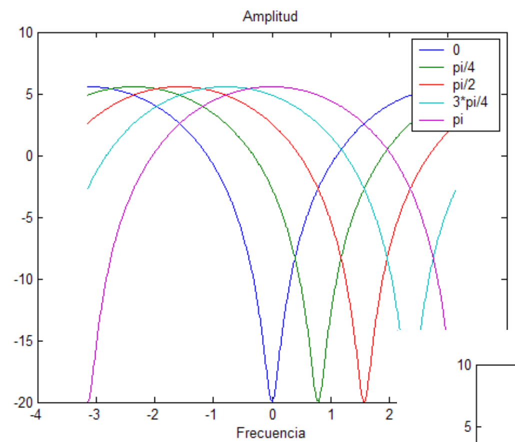


$\theta = 0$

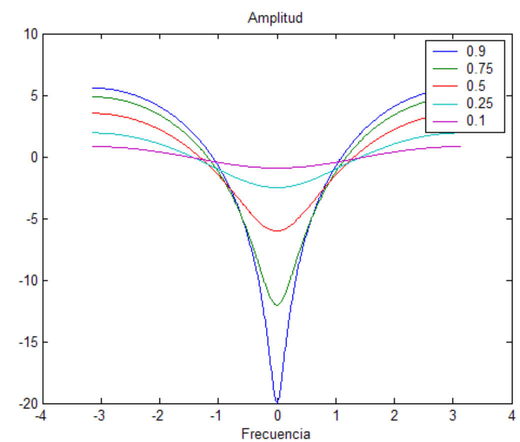
Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

$$H(z) = 1 - re^{j\theta} z^{-1} = \frac{z - z_0}{z} \longrightarrow \left|H(z)\right| = \frac{\left|z - z_0\right|}{\left|z\right|} \longrightarrow \left|H(e^{j\omega})\right| = \left|H(z)\right|\Big|_{|z|=1} = \left|e^{j\omega} - z_0\right|$$





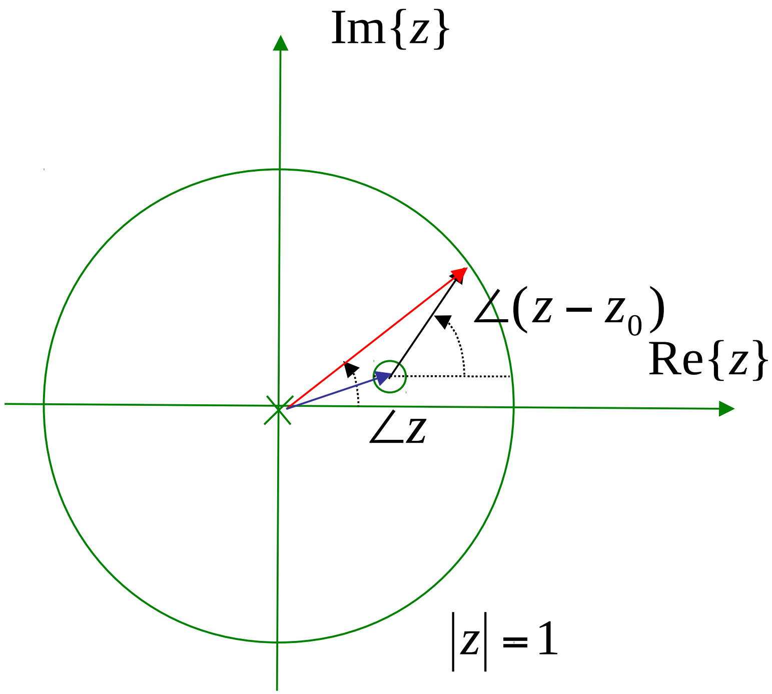
$r = 0.9$

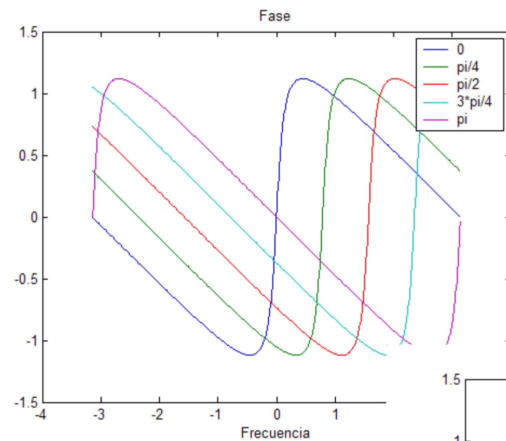


$\theta = 0$

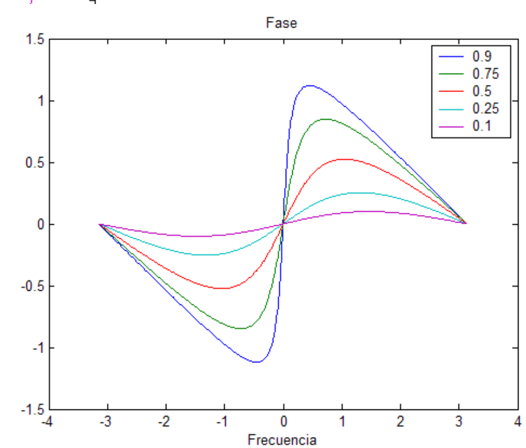
Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

$$H(z)=\frac{z-z_0}{z}\longrightarrow \angle H(z)=\angle(z-z_0)-\angle z\longrightarrow \angle H(e^{j\omega})=\angle(e^{j\omega}-z_0)-\omega$$





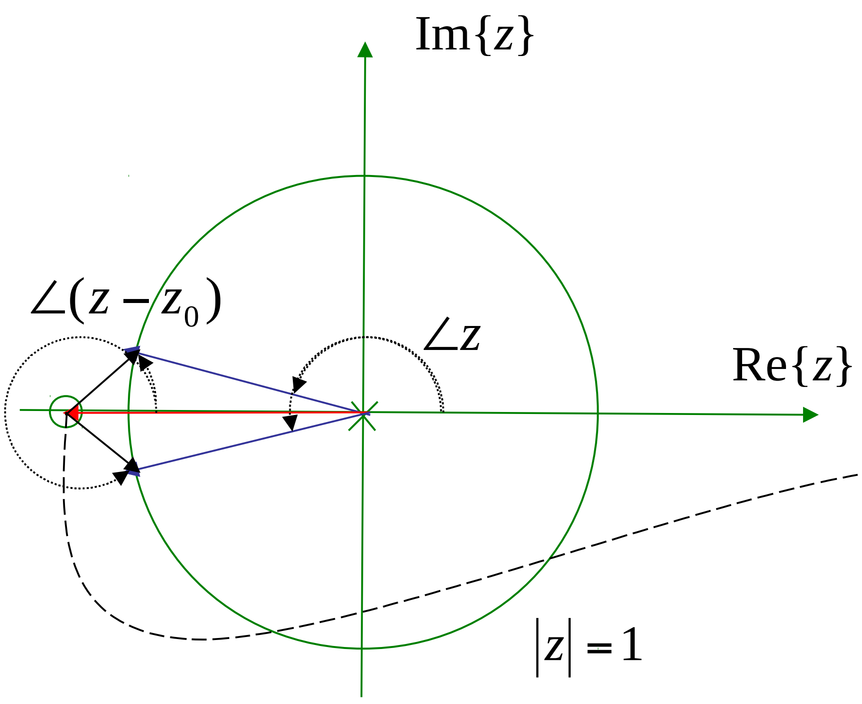
$r = 0.9$

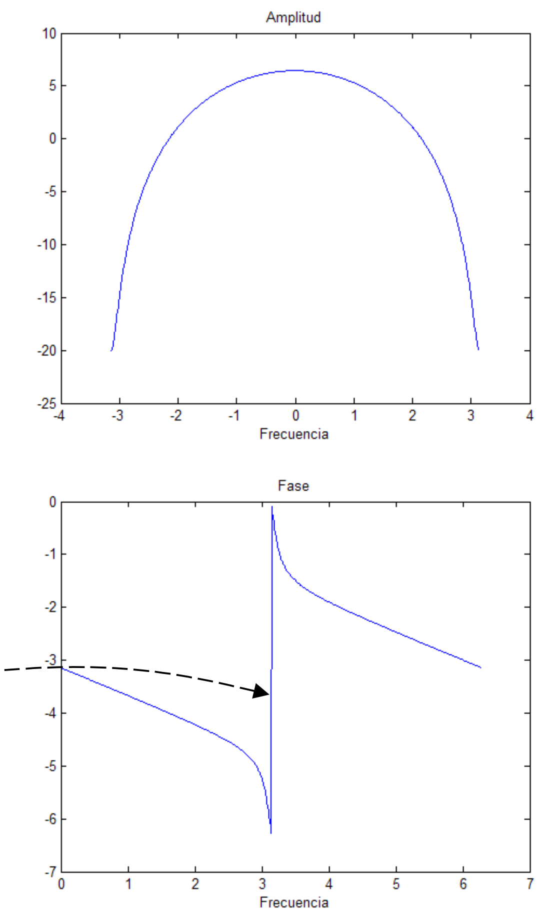


$\theta = 0$

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

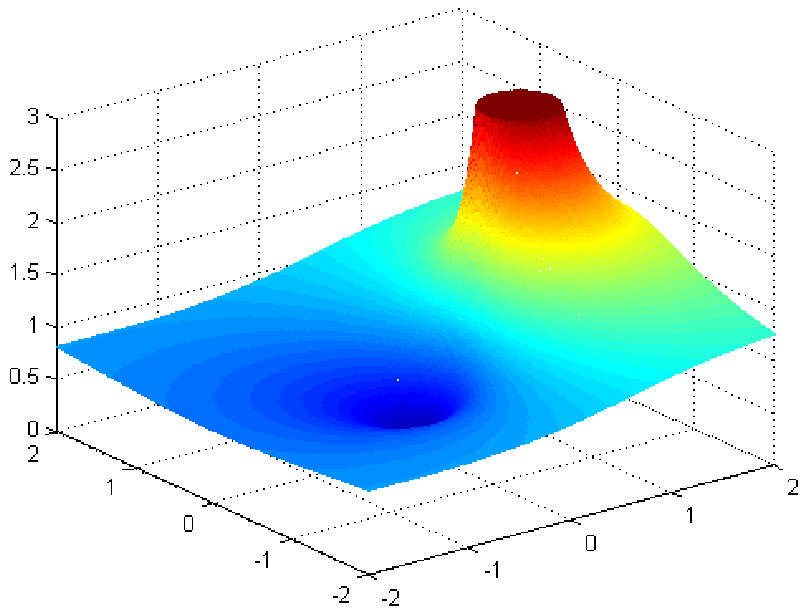
Para $|z_0| \geq 1$ hay una discontinuidad en la fase

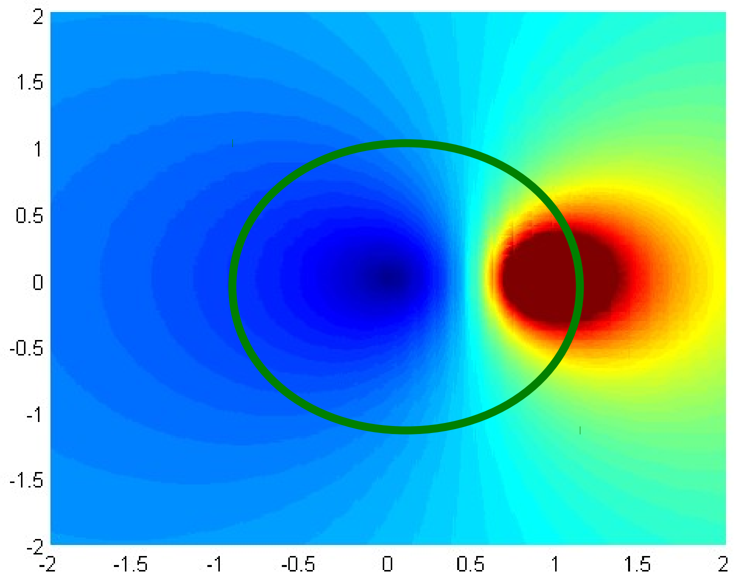




Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo polo

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - z_0 e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}}$$





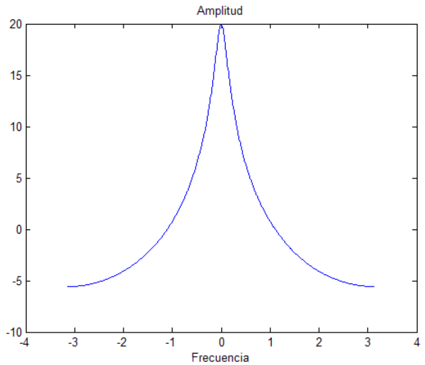
Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo polo

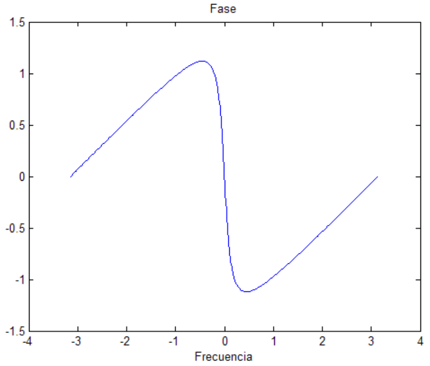
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - z_0 e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}}$$

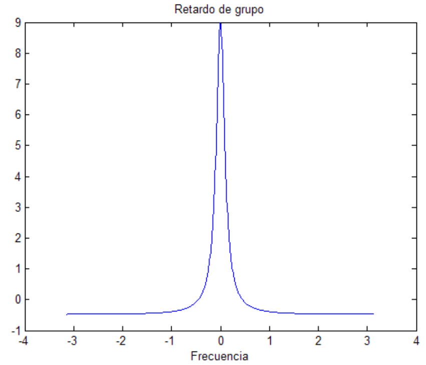
$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = \frac{1}{1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta)}$$

$$ARG\left\{H(e^{j\omega})\right\} = -\arctan\frac{r\sin(\omega - \theta)}{1 - r\cos(\omega - \theta)}$$

$$grd\left\{H(e^{j\omega})\right\} = -\frac{r^2 - r\cos(\omega - \theta)}{\left|H(e^{j\omega})\right|^2}$$



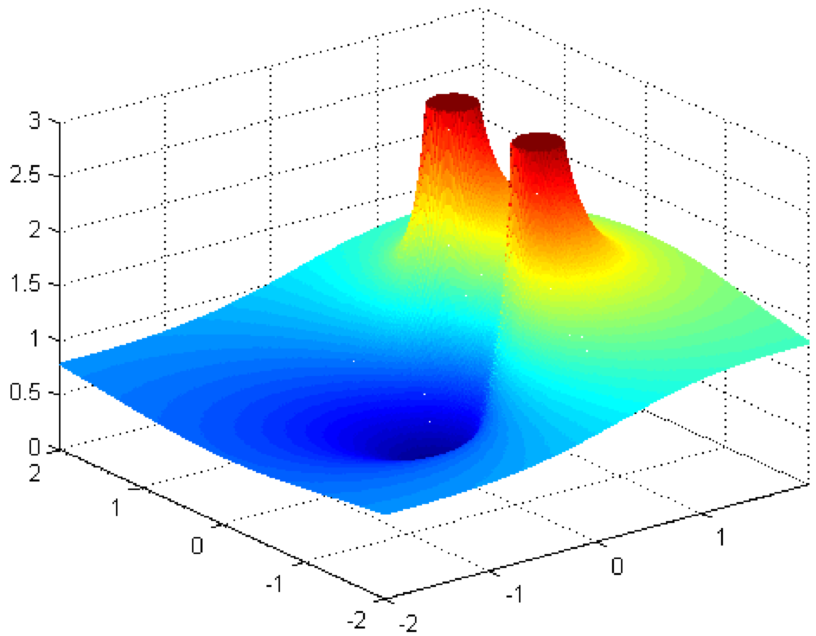


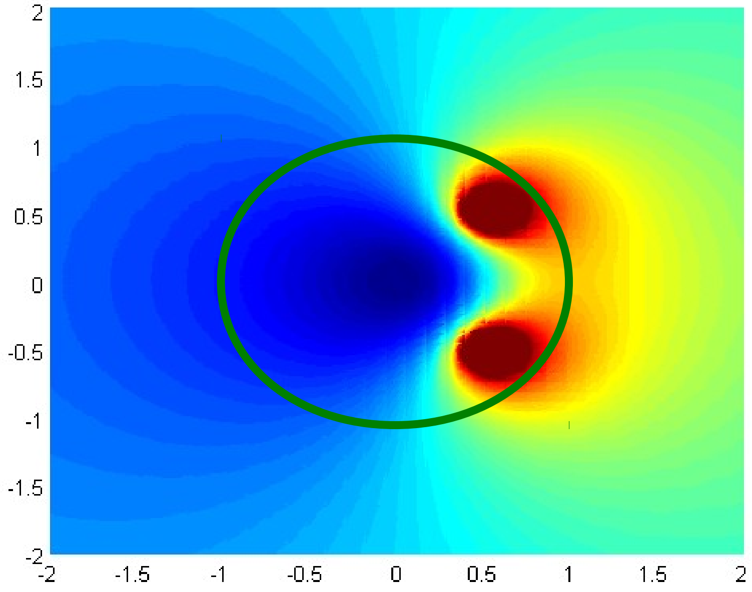


Los valores obtenidos son los opuestos a los obtenidos con un solo cero.

Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - z_0 e^{-j\omega})(1 - z_0^* e^{-j\omega})} = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$$



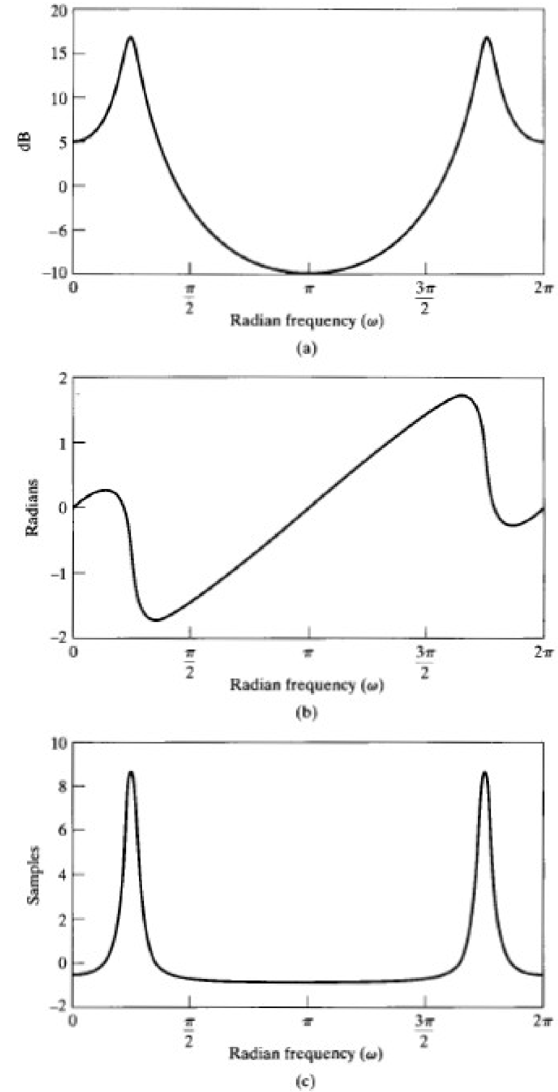


Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden IIR

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = \left(\frac{1}{1+r^2-2r\cos(\omega-\theta)}\right)\left(\frac{1}{1+r^2-2r\cos(\omega+\theta)}\right)$$

$$ARG\left\{H(e^{j\omega})\right\} = -\arctan\frac{r\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)} - \arctan\frac{r\sin(\omega+\theta)}{1-r\cos(\omega+\theta)}$$

$$grd\left\{H(e^{j\omega})\right\} = -\frac{r^2-r\cos(\omega-\theta)}{1+r^2-2r\cos(\omega-\theta)} - \frac{r^2-r\cos(\omega+\theta)}{1+r^2-2r\cos(\omega+\theta)}$$

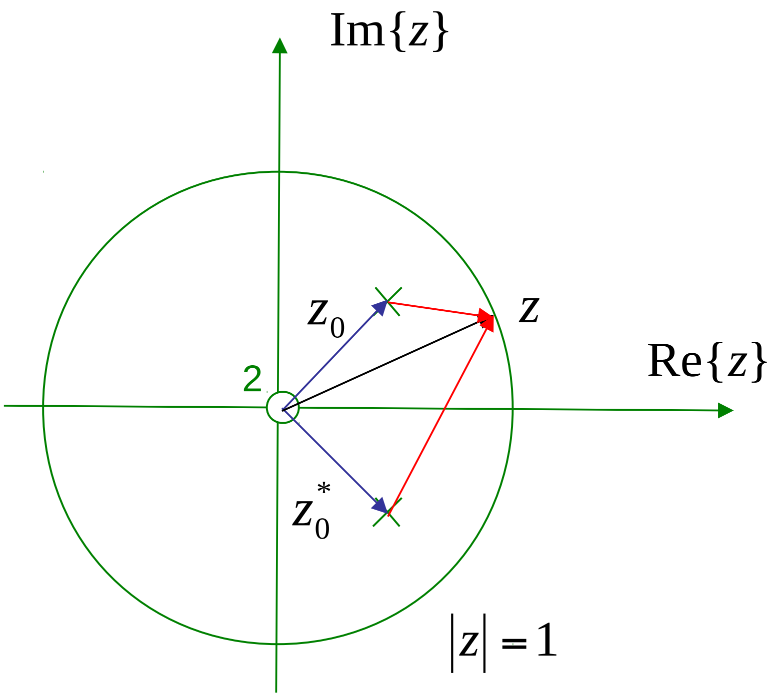


Los valores obtenidos son los opuestos a los obtenidos con dos ceros.

Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden

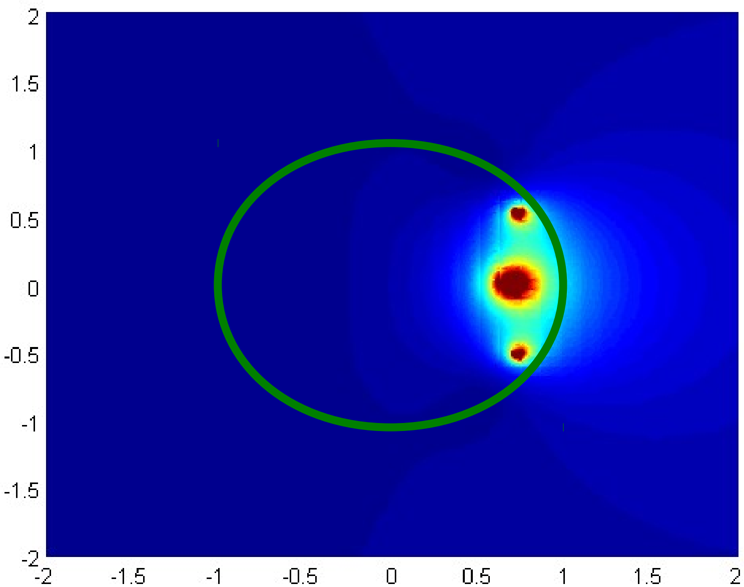
$$|H(z)| = \frac{|z|^2}{|z - z_0||z - z_0^*|}$$

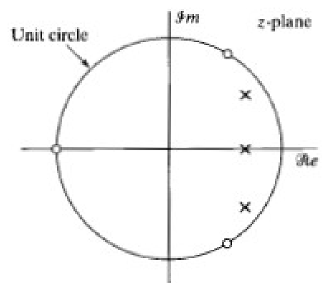
$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|e^{j\omega} - z_0||e^{j\omega} - z_0^*|}$$

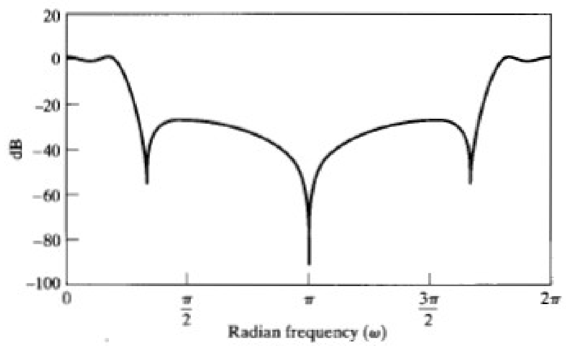


Respuesta en frecuencia de un sistema raciona

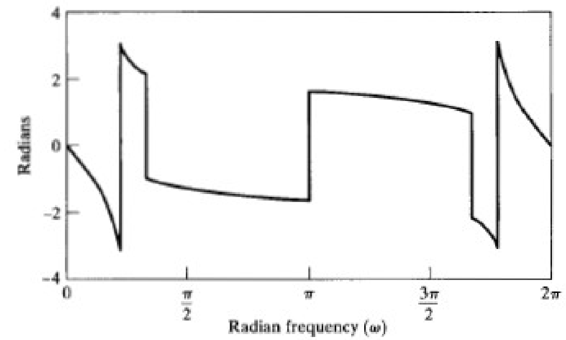
Ejemplo: $$H(z)=\frac{0.05634(1+z^{-1})(1-1.0166z^{-1}+z^{-2})}{(1-0.683z^{-1})(1-1.4461z^{-1}+0.7957z^{-2})}$$



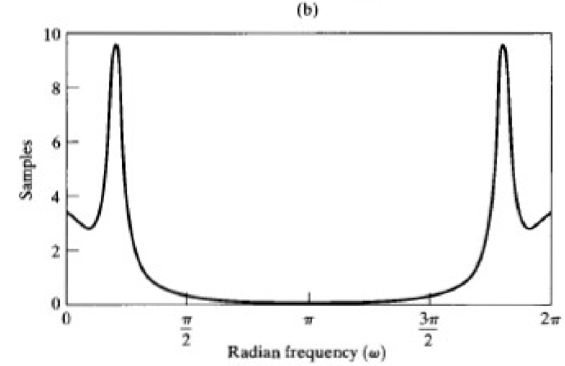




(a)



(b)



(c)

Relación entre fase y magnitud para sistemas definidos por una ED

En general, no hay ninguna relación entre magnitud y fase para un sistema LTI. Sin embargo, si el sistema está definido por una ED, una vez especificada una de ellas, la otra queda determinada dentro de un número reducido de opciones.

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = H(z)H^*(\tfrac{1}{z^*})\Big|_{z=e^{j\omega}} = C(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} \quad [1]$$

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=0}^{M}(1-z_k z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N}(1-p_k z^{-1})}$$

$$H^*(\tfrac{1}{z^*}) = \frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=0}^{M}(1-z_k^* z)}{\prod_{k=0}^{N}(1-p_k^* z)}$$

$$C(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=0}^{M}(1-z_k z^{-1})(1-z_k^* z)}{\prod_{k=0}^{N}(1-p_k z^{-1})(1-p_k^* z)}$$

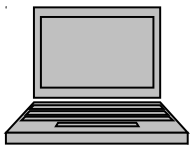
Polos $\quad p_k, \left(p_k^*\right)^{-1}$

Ceros $\quad z_k, \left(z_k^*\right)^{-1}$

$\longrightarrow$ Si uno está dentro del círculo unidad, el otro debe estar fuera. Los polos de un sistema estable y causal están automáticamente determinados, pero no así los ceros.

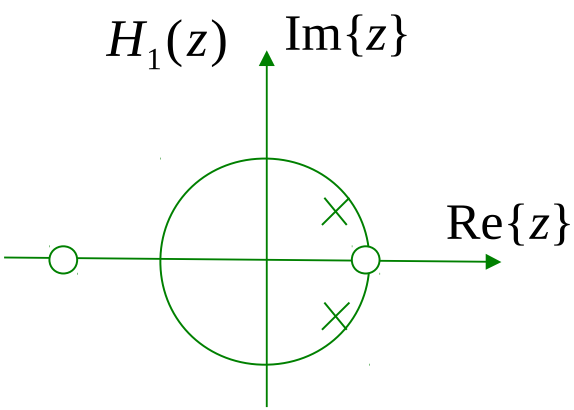
Relación entre fase y magnitud para sistemas definidos por una ED

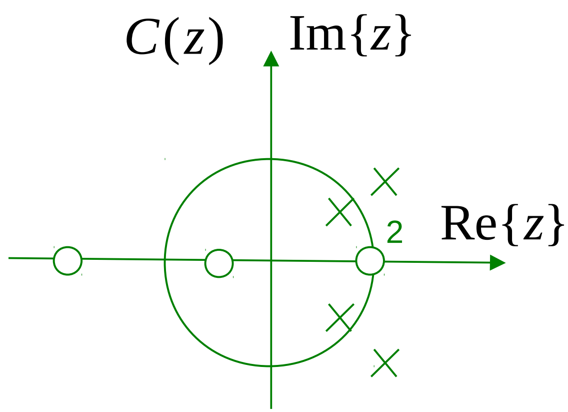
Ejemplo:

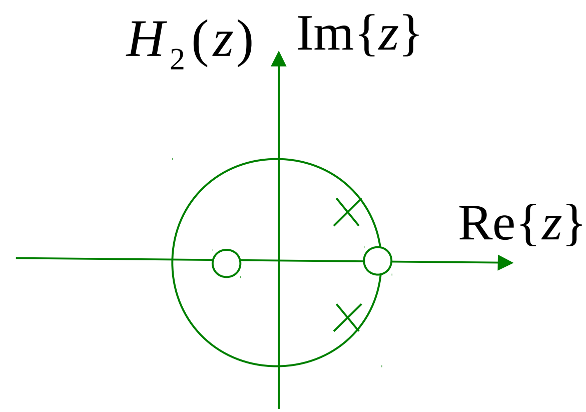


$$C(z) = \frac{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})(1-z)(1+2z)}{(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z)(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z)}$$

$$= \frac{2(1-z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})2(1-z)(1+\frac{1}{2}z)}{(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z)(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z)}$$







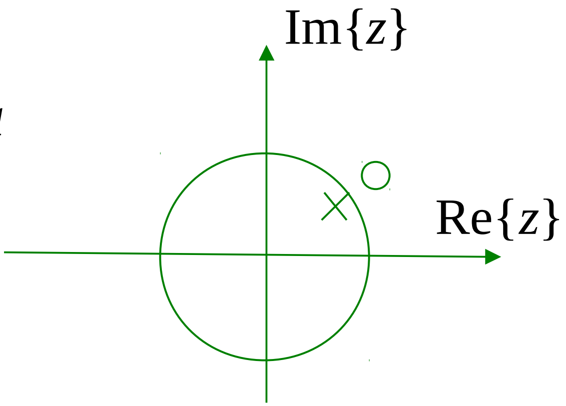
$$H_1(z) = \frac{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})}{(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})}$$

$$H_2(z) = \frac{2(1-z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})}{(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})}$$

Sistemas paso-todo

Ejemplo:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \longrightarrow \quad z_1 = \frac{1}{a^*} \qquad p_1 = a$$



$$H_{ap}(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}} = e^{-j\omega}\frac{1 - a^* e^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} = e^{-j\omega}\frac{(1 - ae^{-j\omega})^*}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$\left|H_{ap}(e^{j\omega})\right| = \left|e^{-j\omega}\frac{(1 - ae^{-j\omega})^*}{1 - ae^{-j\omega}}\right| = \left|e^{-j\omega}\right|\left|\frac{(1 - ae^{-j\omega})^*}{1 - ae^{-j\omega}}\right| = 1$$

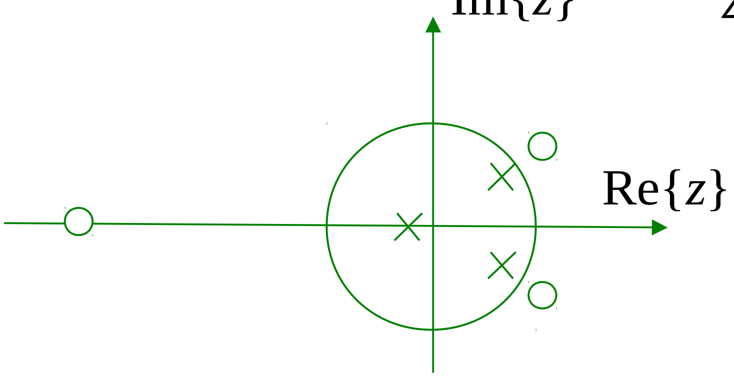
Sistemas paso-todo

Sistema paso todo de respuesta real

$$H_{ap}(z) = A\prod_{k=1}^{M_r}\frac{z^{-1}-a_k}{1-a_k z^{-1}}\prod_{k=1}^{M_c}\frac{z^{-1}-c_k^*}{1-c_k z^{-1}}\frac{z^{-1}-c_k}{1-c_k^* z^{-1}} \qquad a_k \in R, c_k \in C$$

$2M_c + M_r$ polos y ceros $z_r = \frac{1}{a_k}$ $p_r = a_k$ $z_c = \frac{1}{c_k^*}, \frac{1}{c_k}$ $p_c = c_k, c_k^*$

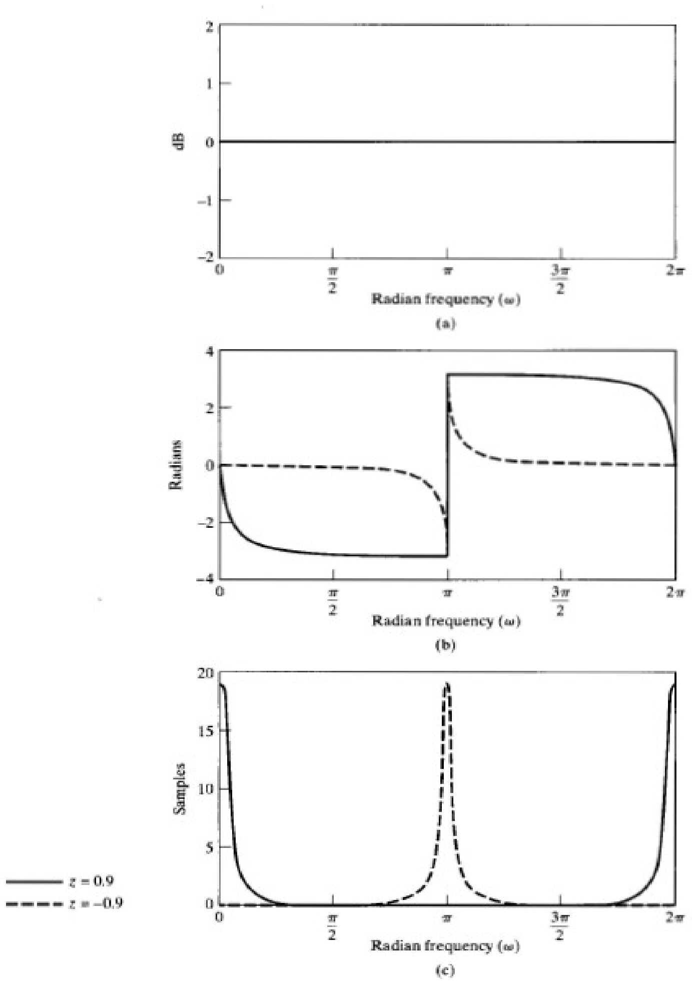
$$\boxed{\left|H_{ap}(e^{j\omega})\right| = A}$$

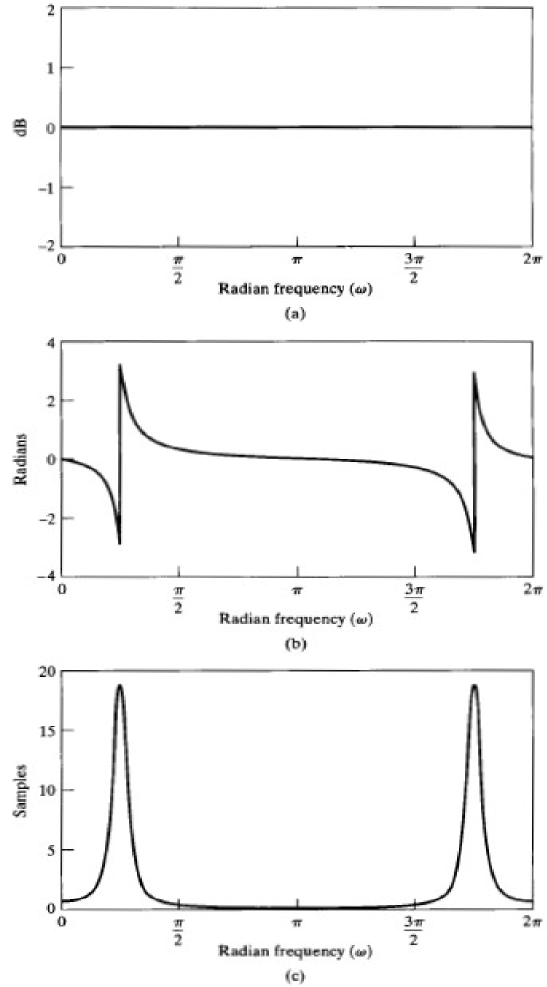


$$\angle H_{ap}(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^{M_r}\left(-\omega - 2\arctan\frac{r_k\sin(\omega-\theta_k)}{1-r_k\cos(\omega-\theta_k)}\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{M_c}\left(-2\omega - 2\arctan\frac{r_k\sin(\omega-\theta_k)}{1-r_k\cos(\omega-\theta_k)} - 2\arctan\frac{r_k\sin(\omega+\theta_k)}{1-r_k\cos(\omega+\theta_k)}\right)$$

Sistemas paso-todo





Sistemas paso-todo

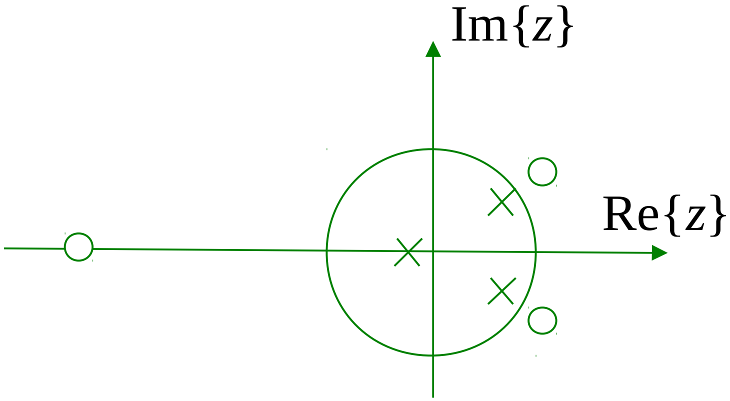
$$\boxed{grdH_{ap}(e^{j\omega})} = \sum_{k=1}^{M_r}\underbrace{\left(\frac{1-r_k^2}{\left|1-r_k e^{j\theta_k} e^{-j\omega}\right|^2}\right)}_{>0} + \sum_{k=1}^{M_c}\underbrace{\left(\frac{1-r_k^2}{\left|1-r_k e^{j\theta_k} e^{-j\omega}\right|^2} + \frac{1-r_k^2}{\left|1-r_k e^{-j\theta_k} e^{-j\omega}\right|^2}\right)}_{>0}\boxed{>0}$$

Sistema causal y estable $\Rightarrow |r_k| < 1$

$$H_{ap}(e^{j0}) = A\prod_{k=1}^{M_r}\frac{1-a_k}{1-a_k}\prod_{k=1}^{M_c}\frac{1-c_k^*}{1-c_k}\frac{1-c_k}{1-c_k^*} = A \Rightarrow \angle H_{ap}(e^{j0}) = 0$$

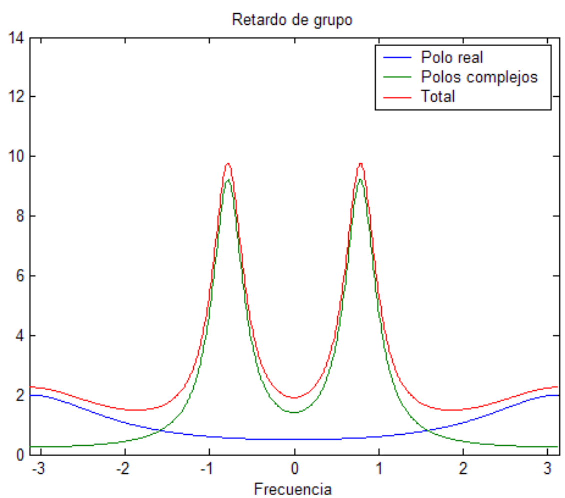
$$\boxed{\arg\left\{H_{ap}(e^{j\omega})\right\}} = \arg\left\{H_{ap}(e^{j0})\right\} - \int_0^{\omega} grd\left\{H_{ap}(e^{j\phi})\right\}d\phi \boxed{<0}$$

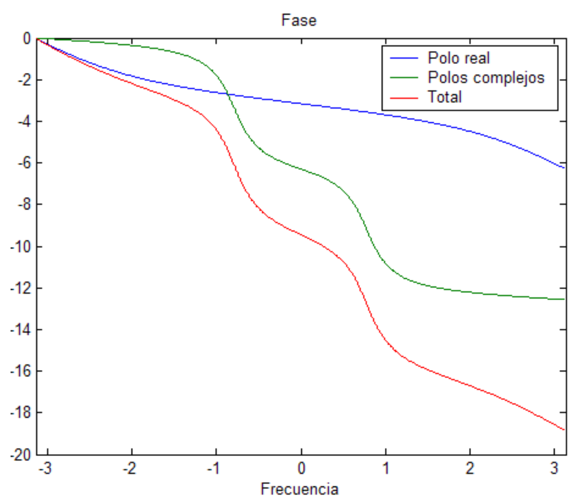
Sistemas paso-todo

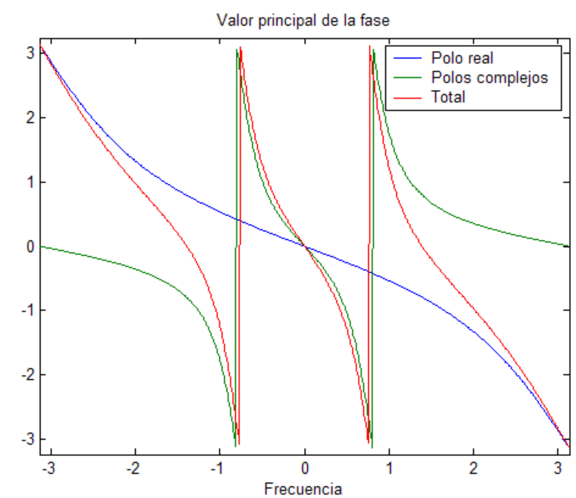


$$z_r = -3 \qquad z_c = \tfrac{5}{4}e^{j\frac{\pi}{4}}, \tfrac{5}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$p_r = -\tfrac{1}{3} \qquad p_c = \tfrac{4}{5}e^{j\frac{\pi}{4}}, \tfrac{4}{5}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$







Sistemas de fase mínima

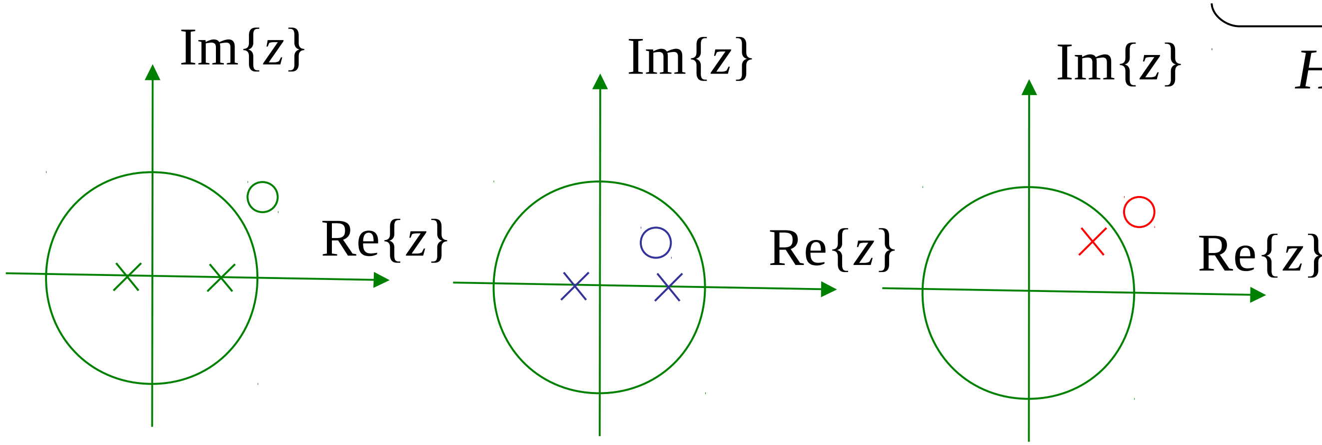
Un sistema es de fase mínima si todos sus polos y ceros están en el interior del círculo unidad.

<u>Descomposición de un sistema LTI causal y estable</u>

$$H(z) = H_{\min}(z) H_{ap}(z)$$

Supongamos que H(z) tiene un cero fuera del círculo unidad en $z = \frac{1}{c^*}\ ; |c| < 1$

$$H(z) = H_1(z)(z^{-1} - c^*) = \underbrace{H_1(z)(1 - cz^{-1})}_{H_{\min}(z)} \underbrace{\frac{z^{-1} - c^*}{1 - cz^{-1}}}_{H_{ap}(z)}$$



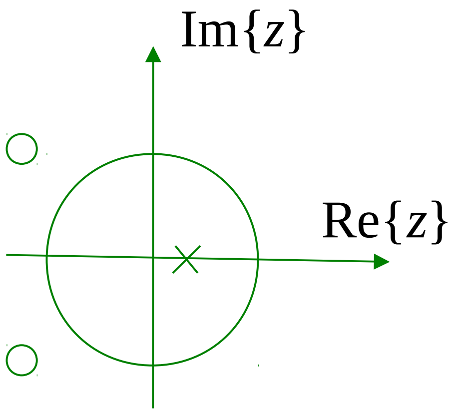
Sistemas de fase mínima

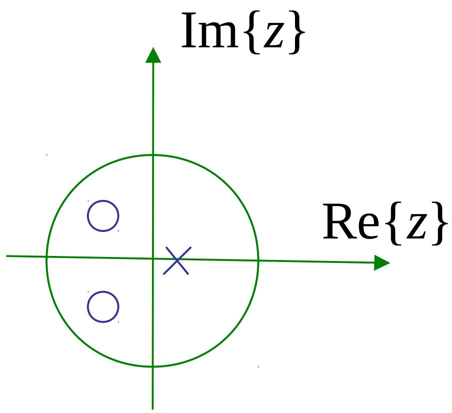
Ejemplo:

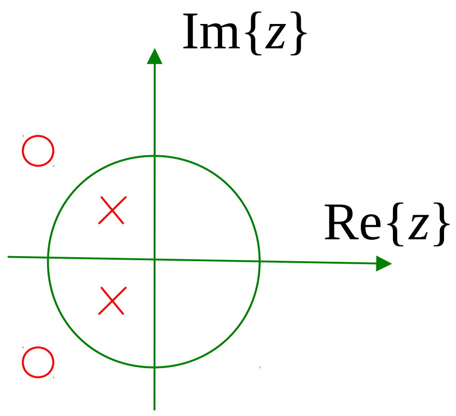
$$(1 - z_0 z^{-1})(1 - z_1 z^{-1}) = z_0 z_1 (z^{-1} - z_0^{-1})(z^{-1} - z_1^{-1})$$

$$H(z) = \frac{\left(1 - \frac{3}{2} e^{j\frac{5\pi}{4}} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{3}{2} e^{-j\frac{5\pi}{4}} z^{-1}\right)}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} = \frac{\frac{9}{4}\left(z^{-1} - \frac{2}{3} e^{-j\frac{5\pi}{4}}\right)\left(z^{-1} - \frac{2}{3} e^{j\frac{5\pi}{4}}\right)}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}$$

$$= \frac{\frac{9}{4}\left(1 - \frac{2}{3} e^{-j\frac{5\pi}{4}} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{2}{3} e^{j\frac{5\pi}{4}} z^{-1}\right)}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} \, \frac{\left(z^{-1} - \frac{2}{3} e^{-j\frac{5\pi}{4}}\right)\left(z^{-1} - \frac{2}{3} e^{j\frac{5\pi}{4}}\right)}{\left(1 - \frac{2}{3} e^{-j\frac{5\pi}{4}} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{2}{3} e^{j\frac{5\pi}{4}} z^{-1}\right)}$$

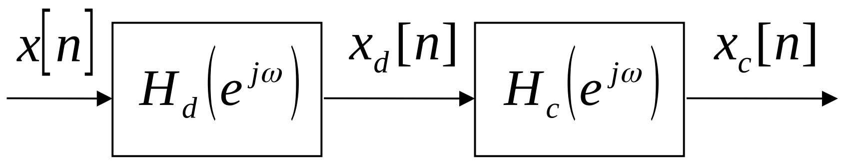






Sistemas de fase mínima

Compensación de la respuesta frecuencial



Caso Particular: $H_d(e^{j\omega})$ es de fase mínima, causal y estable

Se puede diseñar un sistema causal y estable tal que $x_c[n] = x[n]$

Caso General:

Se puede compensar la amplitud pero no la fase.

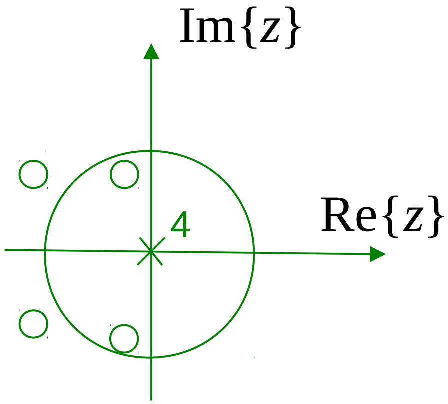
$$H_d(e^{j\omega}) = H_{d\min}(e^{j\omega})H_{ap}(e^{j\omega}) \longrightarrow H_c(e^{j\omega}) = H_{d\min}^{-1}(e^{j\omega})$$

$$X_c(e^{j\omega}) = H_{ap}(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

Sistemas de fase mínima

Ejemplo:

$$H_d(z) = (1 - \tfrac{9}{10} e^{j\frac{3}{5}\pi} z^{-1})(1 - \tfrac{9}{10} e^{-j\frac{3}{5}\pi} z^{-1})(1 - \tfrac{5}{4} e^{j\frac{4}{5}\pi} z^{-1})(1 - \tfrac{5}{4} e^{-j\frac{4}{5}\pi} z^{-1})$$

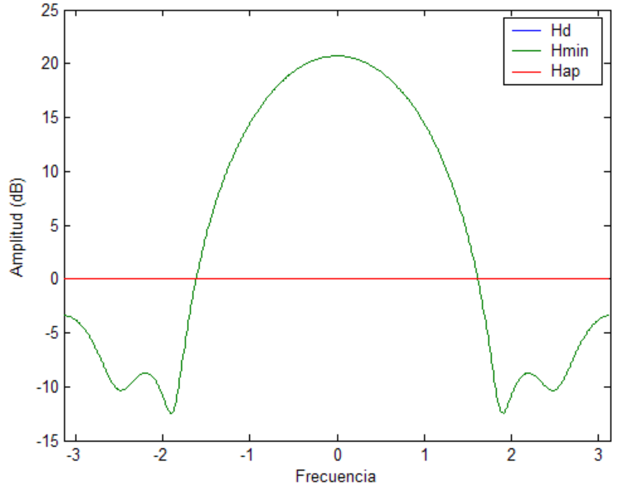


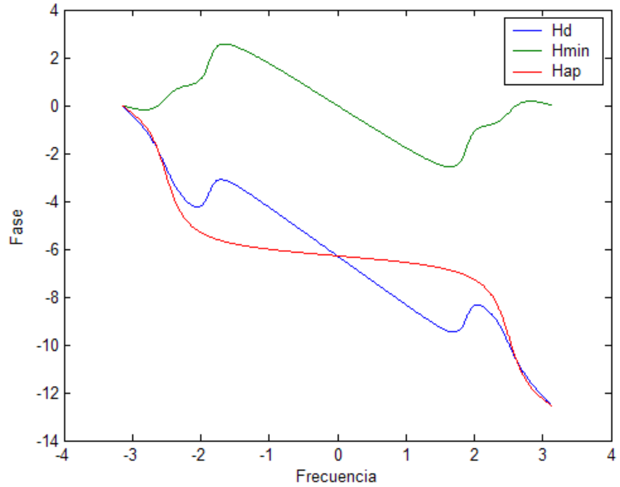
$$H_d(z) = (1 - \tfrac{9}{10} e^{j\frac{3}{5}\pi} z^{-1})(1 - \tfrac{9}{10} e^{-j\frac{3}{5}\pi} z^{-1})\,\tfrac{25}{16}\,\boxed{(z^{-1} - \tfrac{4}{5} e^{-j\frac{4}{5}\pi})(z^{-1} - \tfrac{4}{5} e^{j\frac{4}{5}\pi})} =$$

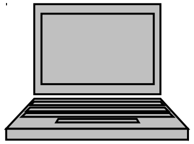
$$H_d(z) = \tfrac{25}{16} (1 - \tfrac{9}{10} e^{j\frac{3}{5}\pi} z^{-1})(1 - \tfrac{9}{10} e^{-j\frac{3}{5}\pi} z^{-1})\boxed{(1 - \tfrac{4}{5} e^{j\frac{4}{5}\pi} z^{-1})(1 - \tfrac{4}{5} e^{-j\frac{4}{5}\pi} z^{-1})}\,\frac{\boxed{(z^{-1} - \tfrac{4}{5} e^{-j\frac{4}{5}\pi})(z^{-1} - \tfrac{4}{5} e^{j\frac{4}{5}\pi})}}{\boxed{(1 - \tfrac{4}{5} e^{j\frac{4}{5}\pi} z^{-1})(1 - \tfrac{4}{5} e^{-j\frac{4}{5}\pi} z^{-1})}}$$

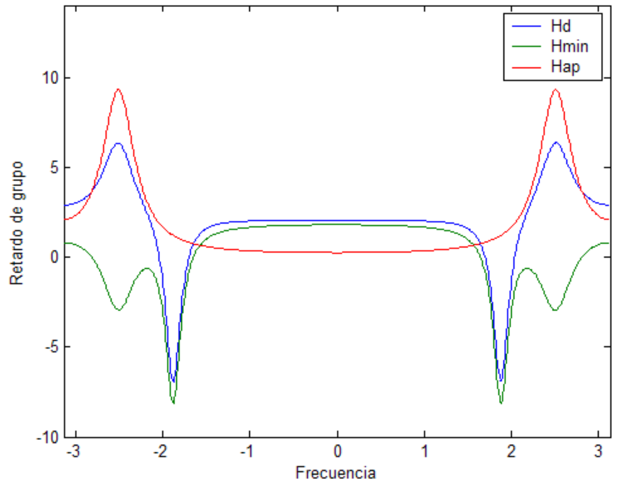
Sistemas de fase mínima

Ejemplo:



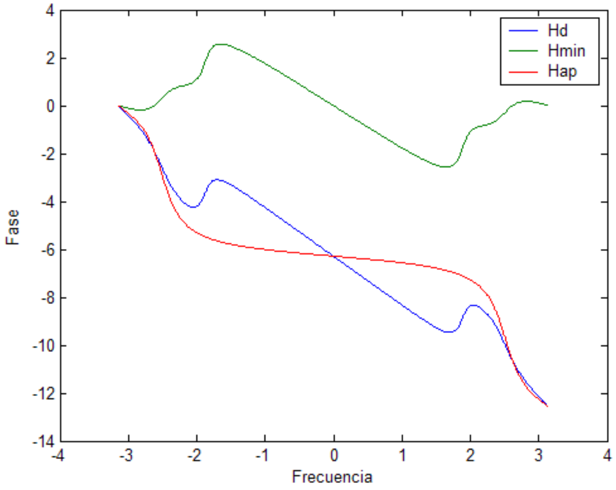






Propiedades de los sistemas de fase mínima

<u>Fase (*phase-lag*) mínima</u>



$$H(z) = H_{\min}(z) H_{ap}(z)$$

$$\arg\{H(z)\} = \arg\{H_{\min}(z)\} + \underbrace{\arg\{H_{ap}(z)\}}_{<0}$$

$$phase-lag\{H(z)\} = -\arg\{H(z)\}$$

Luego,

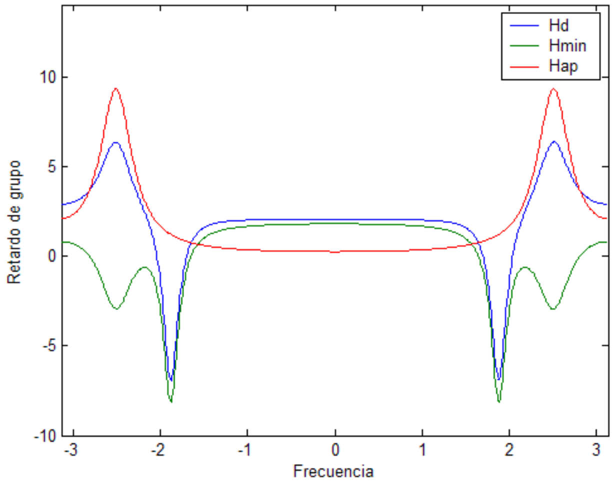
$$phase-lag\{H_{\min}(z)\} < phase-lag\{H(z)\}$$

Hay que tener cuidado con que $H_{\min}(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] > 0$ porque

$h[n]$ y $-h[n]$ tienen los mismos polos y ceros pero un desfase de π

Propiedades de los sistemas de fase mínima

Retardo de grupo mínimo



$$H(z) = H_{\min}(z) H_{ap}(z)$$

$$grd\{H(z)\} = grd\{H_{\min}(z)\} + grd\{H_{ap}(z)\}$$

$$> 0$$

Luego, $grd\{H_{\min}(z)\} < grd\{H(z)\}$

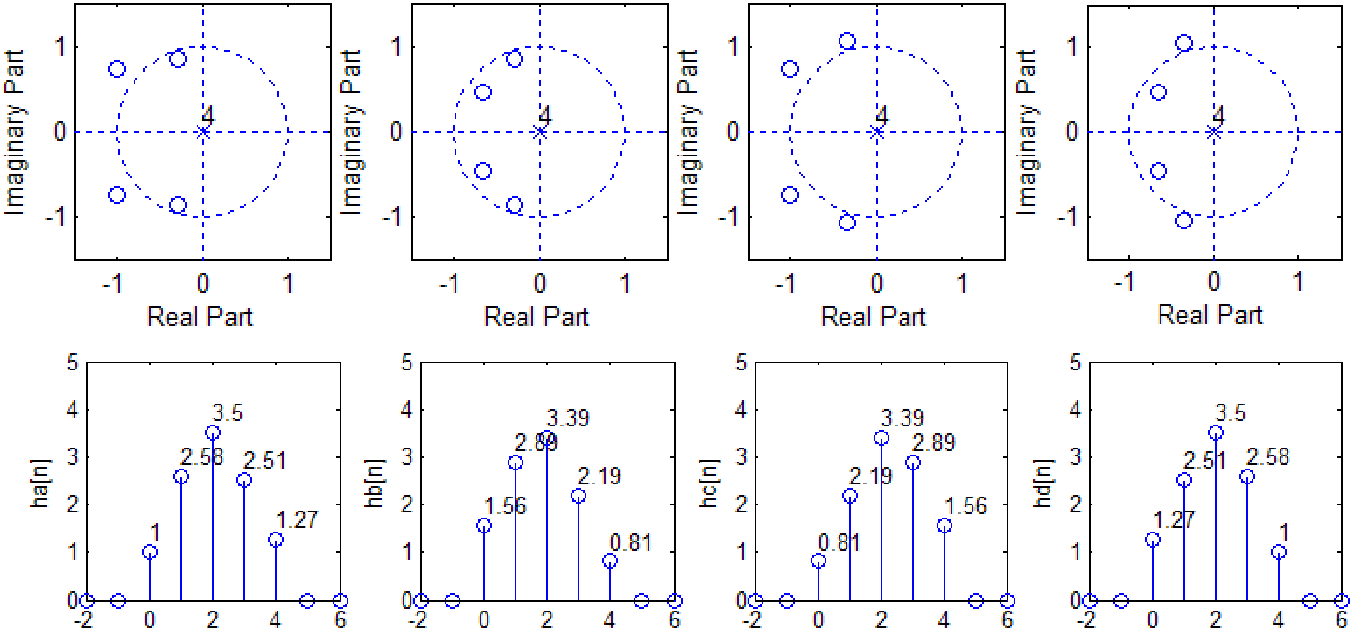
Propiedades de los sistemas de fase mínima

$$H_d(z) = (1 - \tfrac{9}{10} e^{j\frac{3}{5}\pi} z^{-1})(1 - \tfrac{9}{10} e^{-j\frac{3}{5}\pi} z^{-1})(1 - \tfrac{5}{4} e^{j\frac{4}{5}\pi} z^{-1})(1 - \tfrac{5}{4} e^{-j\frac{4}{5}\pi} z^{-1})$$

Retardo de energía mínimo

Ejemplo:

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|H_{\min}(e^{j\omega})\right|$$



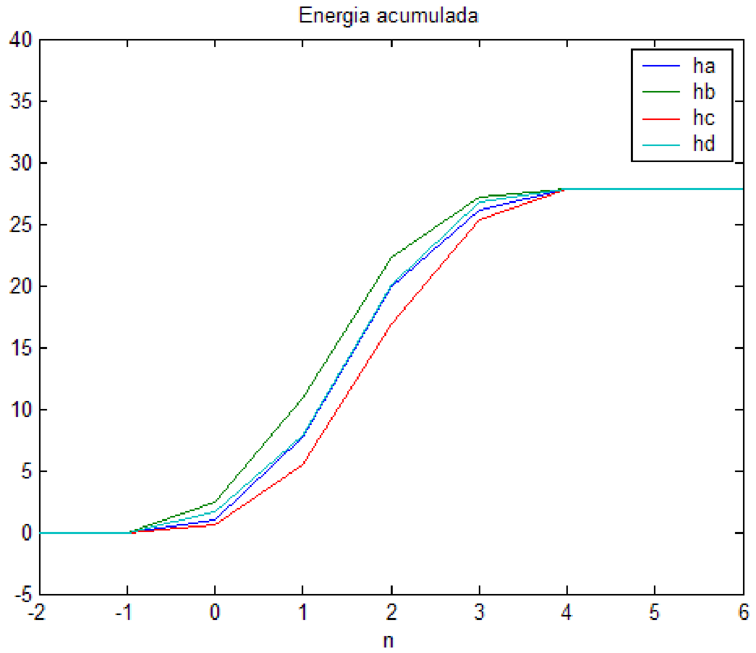
$$\left|h[0]\right| \le \left|h_{\min}[0]\right|$$

Propiedades de los sistemas de fase mínima

Retardo de energía mínimo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h[n]\right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h_{\min}[n]\right|^2 \quad \text{pero} \quad \sum_{k=-\infty}^{n} \left|h[k]\right|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{n} \left|h_{\min}[k]\right|^2$$

Ejemplo:



Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Sistemas de fase lineal

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha} \qquad |\omega| < \pi \longrightarrow \begin{cases} |H(e^{j\omega})| = 1 \\ \angle H(e^{j\omega}) = -\omega\alpha \qquad |\omega| < \pi \\ grd\{H(e^{j\omega})\} = \alpha \\ h[n] = \sin c(n-\alpha) \qquad \alpha \in R \\ h[n] = \delta[n-\alpha] \qquad \alpha \in Z \end{cases}$$

En general, un sistema de fase lineal es tal que $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{-j\omega\alpha}$.

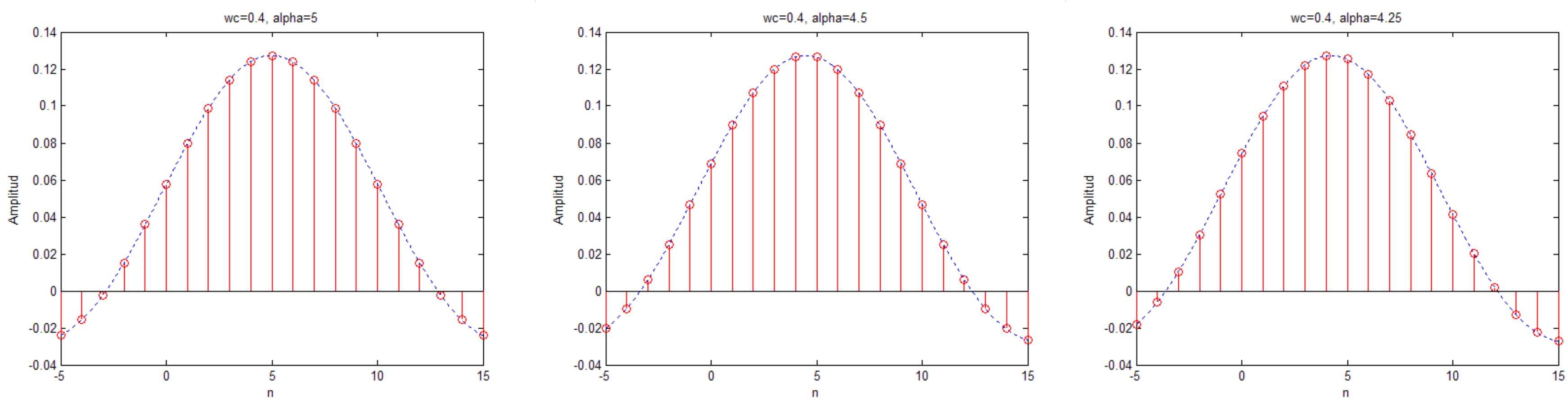
$h[n]$ es simétrica respecto a α si 2α es un entero, es decir, $h[2\alpha - n] = h[n]$

Si α es entero, entonces existe un sistema de fase 0 que es una versión desplazada de $h[n]$

Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Ejemplo:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c \le |\omega| < \pi \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad h[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc} \frac{\omega_c}{\pi}(n-\alpha)$$



Sistemas lineales de fase lineal generalizada

<u>Sistemas de fase lineal generalizada</u>

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{-j\omega\alpha} \longrightarrow H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j(\omega\alpha-\beta)} : A(e^{j\omega}) \in R$$

Fase lineal — Fase lineal generalizada (GLP)

Ejemplo: $$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c \le |\omega| < \pi \end{cases}$$

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{M+1}\frac{\sin\left(\frac{M+1}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)} e^{-j\omega\frac{M}{2}}$$

$$H_3(e^{j\omega}) = \frac{j\omega}{T_s} \qquad |\omega| < \pi$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|A(e^{j\omega})\right|$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = \beta - \omega\alpha + \angle A(e^{j\omega}) \qquad |\omega| < \pi$$

$$grd\{H(e^{j\omega})\} = \alpha$$

Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Si $\forall\omega: \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\sin(\omega(n-\alpha)+\beta) = 0$, entonces el sistema es GLP

Si $\beta \in \{0, \pi\}, 2\alpha \in Z, h[2\alpha - n] = h[n]$, entonces el sistema es GLP y

$A(e^{j\omega})$ es par

Si $\beta \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}, 2\alpha \in Z, h[2\alpha - n] = -h[n]$, entonces el sistema es GLP y

$A(e^{j\omega})$ es impar

Un sistema de fase 0 tiene todos sus polos y ceros en pares recíprocos conjugados.

Un sistema de fase lineal generalizada es un sistema de fase cero con polos o ceros adicionales en $z = 0, \pm 1, \infty$

Sistemas lineales de fase lineal generalizada

<u>Sistemas de fase lineal generalizada causales</u>

Si $\forall\omega : \sum_{n=0}^{\infty} h[n]\sin(\omega(n-\alpha)+\beta) = 0$, entonces el sistema es GLP

Si $h[n]$ es FIR, causal y $h[n] = \begin{cases} h[M-n] & 0 \le n \le M \\ 0 & resto \end{cases}$, entonces el sistema es GLP y $A(e^{j\omega})$ es real y par. $H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\omega\frac{M}{2}}$

Si $h[n]$ es FIR, causal y $h[n] = \begin{cases} -h[M-n] & 0 \le n \le M \\ 0 & resto \end{cases}$, entonces el sistema es GLP y $A(e^{j\omega})$ es real e impar. $H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j(\omega\frac{M}{2}-\frac{\pi}{2})}$

Sistemas de fase lineal FIR de tipo I

$$h[n] = \begin{cases} h[M-n] & 0 \le n \le M \\ 0 & resto \end{cases} \qquad M = 2m$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M} h[n]e^{-j\omega n} = h[\tfrac{M}{2}]e^{-j\omega\frac{M}{2}} + \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1}\left(h[n]e^{-j\omega n} + h[M-n]e^{-j\omega(M-n)}\right) =$$

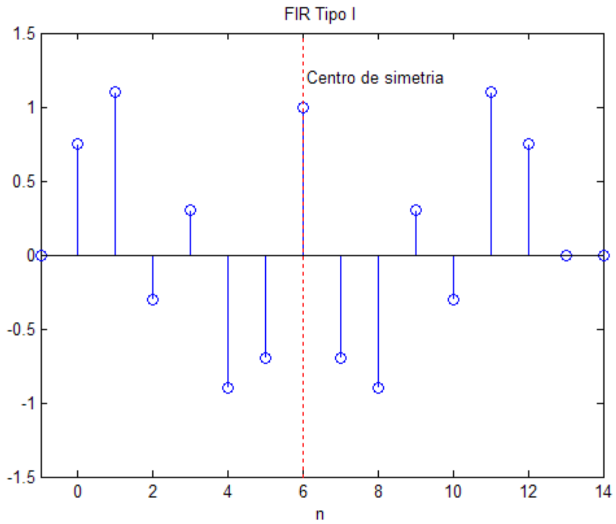
$$= h[\tfrac{M}{2}]e^{-j\omega\frac{M}{2}} + \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h[n]e^{-j\omega\frac{M}{2}}\left(e^{j\omega(\frac{M}{2}-n)} + e^{-j\omega(\frac{M}{2}-n)}\right) = e^{-j\omega\frac{M}{2}}\left(h[\tfrac{M}{2}] + \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} 2h[n]\cos\left(\omega(\tfrac{M}{2}-n)\right)\right)$$

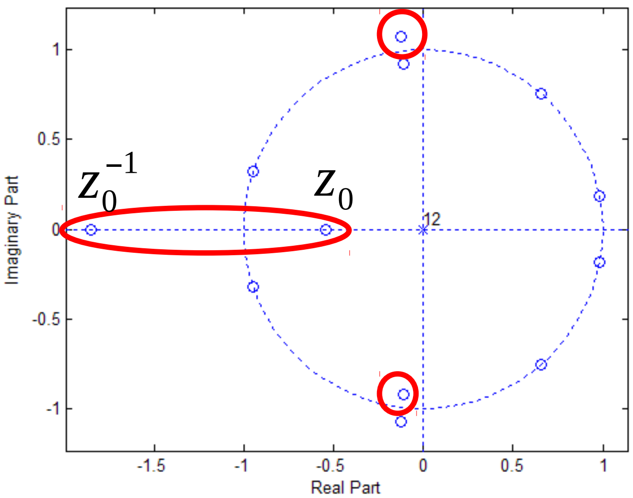
$$= e^{-j\omega\frac{M}{2}}\left(h[\tfrac{M}{2}] + \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} 2h[\tfrac{M}{2}-k]\cos\left(\omega k\right)\right) = A(e^{j\omega})e^{-j\omega\frac{M}{2}}$$

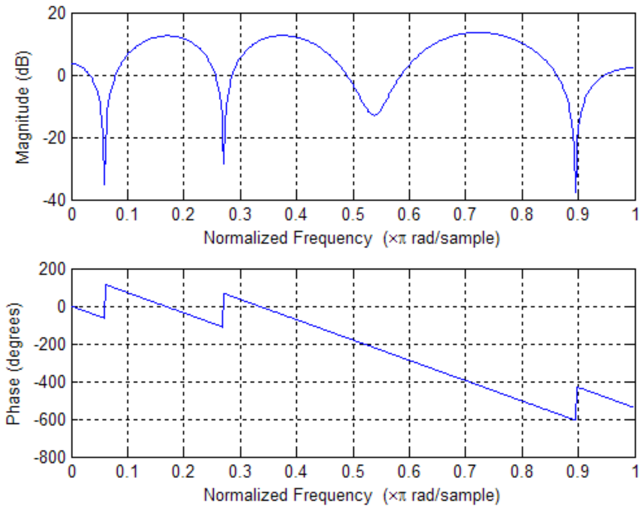
$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{M} h[M-n]z^{-n} = \sum_{k=0}^{M} h[k]z^{k-M} = z^{-M}H(z^{-1})$$

Si $H(z_0) = 0$, entonces $H(z_0^{-1}) = 0$

Sistemas de fase lineal FIR de tipo I

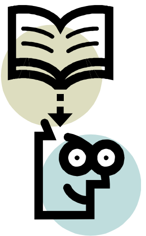




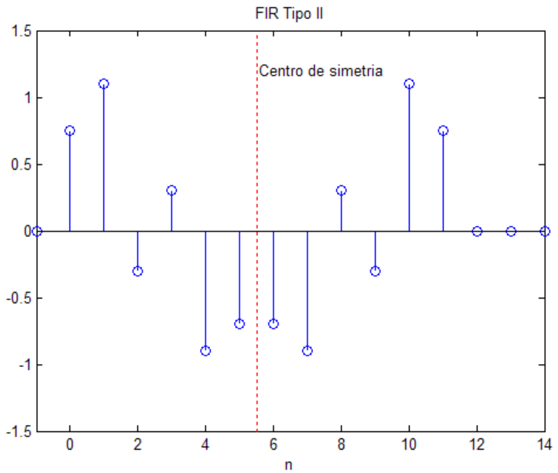


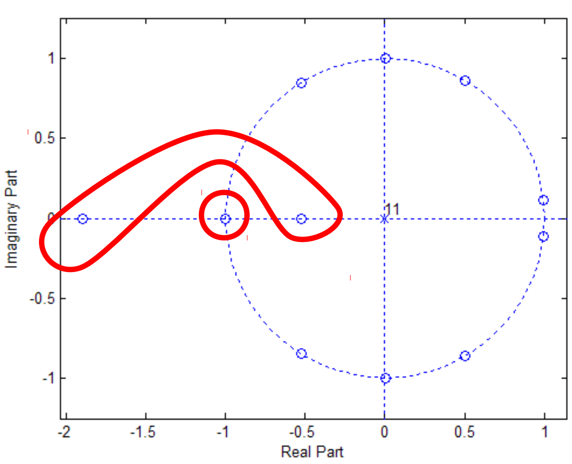
Sistemas de fase lineal FIR de tipo II

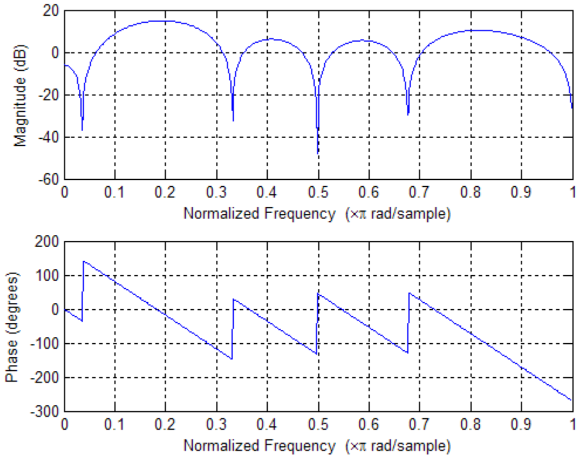
$$h[n] = \begin{cases} h[M-n] & 0 \le n \le M \\ 0 & resto \end{cases} \qquad M = 2m+1$$



$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} 2h[\tfrac{M-1}{2} - k]\cos\left(\omega(k - \tfrac{1}{2})\right)$$



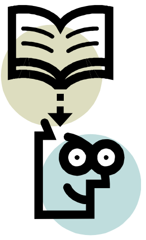




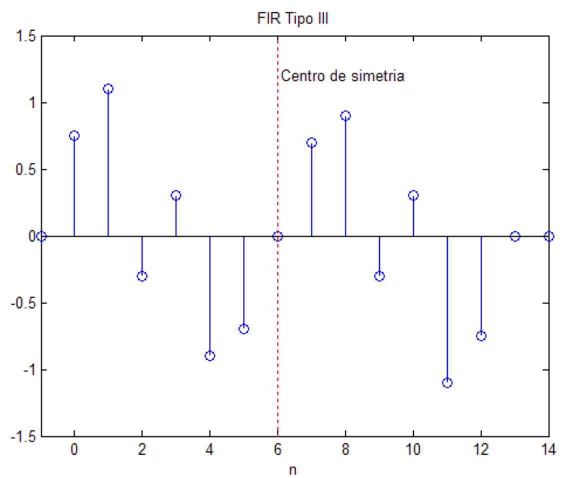
$$H(z) = z^{-M} H(z^{-1}) \xrightarrow{z=-1} H(-1) = -H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0$$

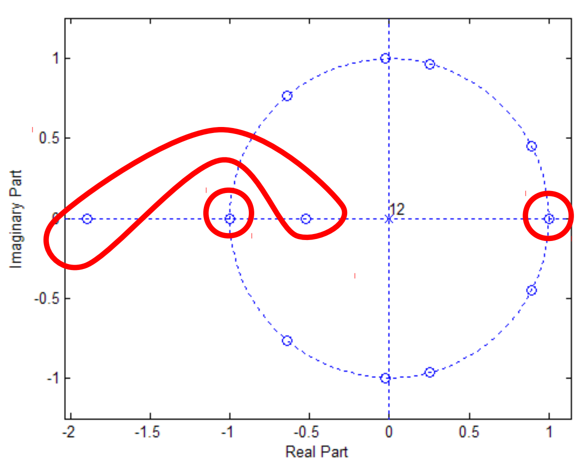
Sistemas de fase lineal FIR de tipo III

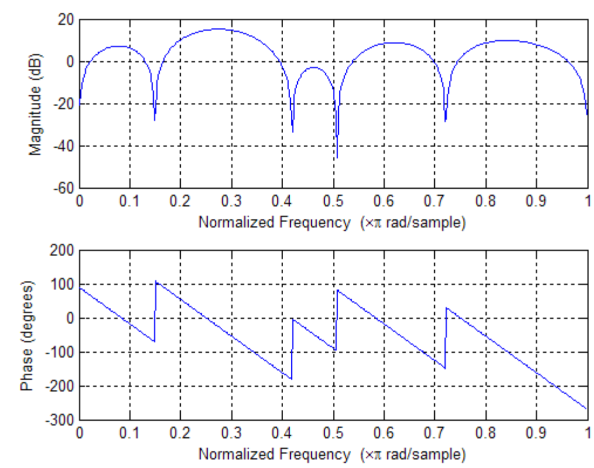
$$h[n] = \begin{cases} -h[M-n] & 0 \le n \le M \\ 0 & resto \end{cases} \qquad M = 2m$$



$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega\frac{M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} 2h[\tfrac{M}{2}-k]\sin(\omega k)$$

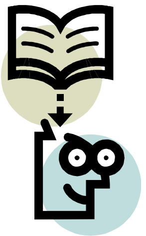




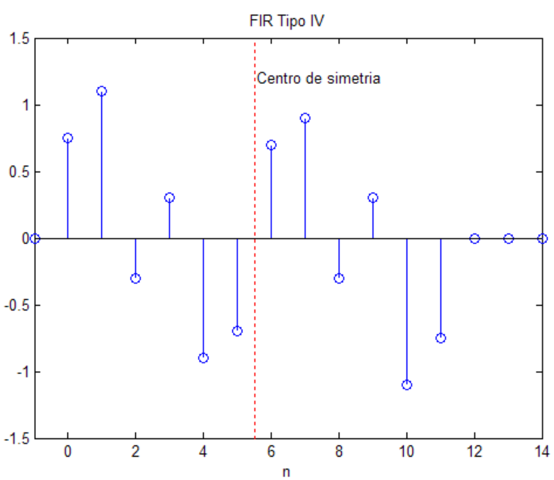


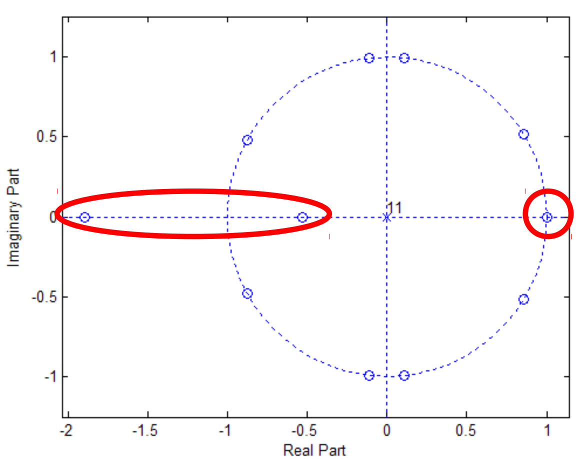
Sistemas de fase lineal FIR de tipo IV

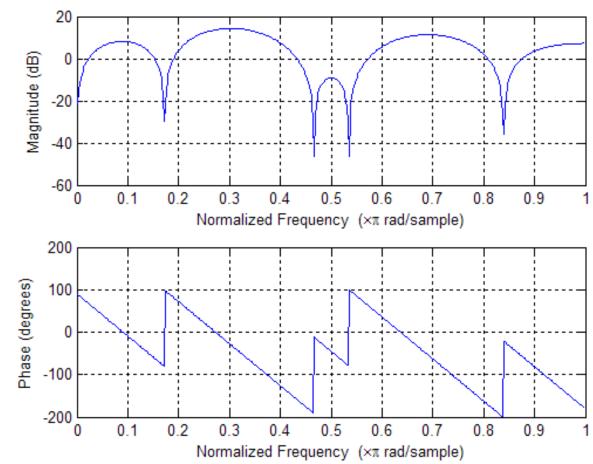
$$h[n] = \begin{cases} -h[M-n] & 0 \le n \le M \\ 0 & resto \end{cases} \qquad M = 2m+1$$



$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega\frac{M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} 2h[\tfrac{M-1}{2} - k]\sin\left(\omega(k - \tfrac{1}{2})\right)$$

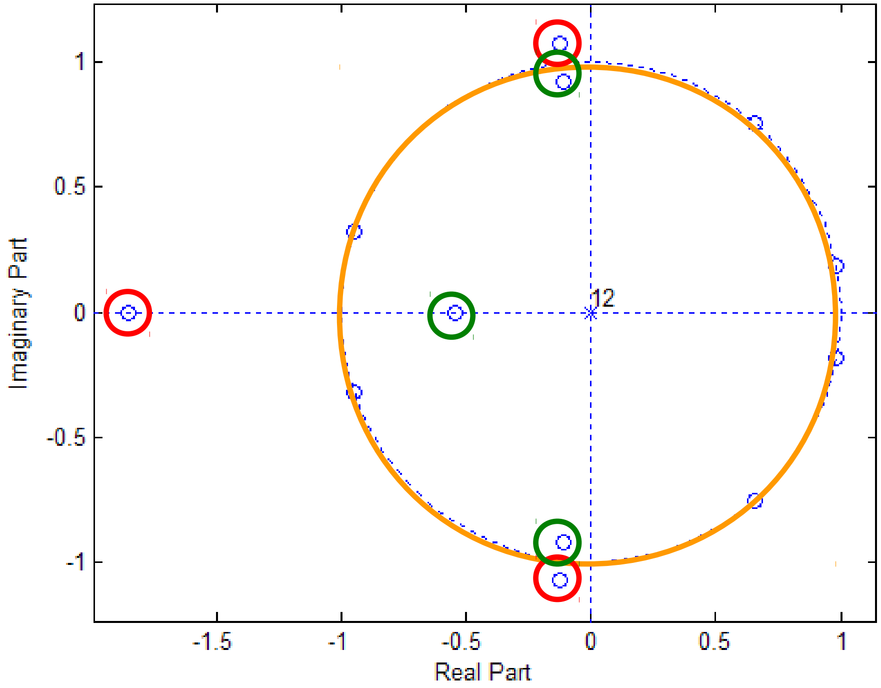






Descomposición de un sistema FIR

$$H(z) = k\,H_{\min}(z)\,H_{circ}(z)\,H_{\max}(z)$$



$$H_{\max}(z) = H_{\min}(z^{-1})z^{-M_i}$$

M_i es el número de ceros de $H_{\min}(z)$

$$\left|H_{\max}(e^{j\omega})\right| = \left|H_{\min}(e^{-j\omega})\right| =$$

$$= \left|H_{\min}(e^{j\omega})\right|$$

$$k = \frac{h[0]}{\prod \left|z_{\min}\right|}$$

Descomposición de un sistema FIR

Ejemplo:

$$h[n] = 0.75\delta[\mathrm{n}] + 1.1\delta[\mathrm{n}-1] - 0.3\delta[\mathrm{n}-2] + 0.3\delta[\mathrm{n}-3] - 0.9\delta[\mathrm{n}-4] - 0.7\delta[\mathrm{n}-5]$$

$$+\delta[\mathrm{n}-6]$$

$$+0.75\delta[\mathrm{n}-7] + 1.1\delta[\mathrm{n}-8] - 0.3\delta[\mathrm{n}-9] + 0.3\delta[\mathrm{n}-10] - 0.9\delta[\mathrm{n}-11] - 0.7\delta[\mathrm{n}-12]$$

$$H_{\min}(z) = \left(1 + 0.5412z^{-1}\right)\left(1 - 0.9242e^{j1.6881}z^{-1}\right)\left(1 - 0.9242e^{-j1.6881}z^{-1}\right)$$

$$h_{\min}[n] = \delta[\mathrm{n}] + 0.7574\delta[\mathrm{n}-1] + 0.9711\delta[\mathrm{n}-2] + 0.4622\delta[\mathrm{n}-3]$$

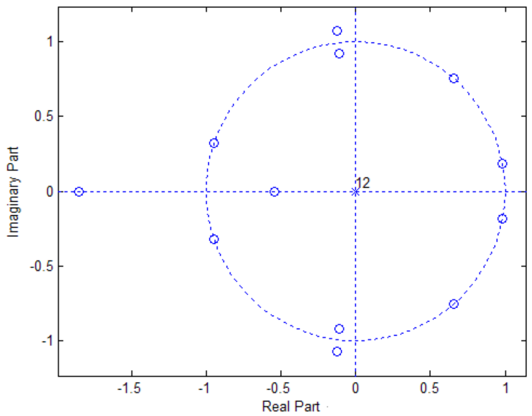
$$H_{\max}(z) = \left(0.9242^2 0.5412\right)\left(1 + 1.8479z^{-1}\right)\left(1 - 1.0821e^{j1.6881}z^{-1}\right)\left(1 - 1.0821e^{-j1.6881}z^{-1}\right)$$

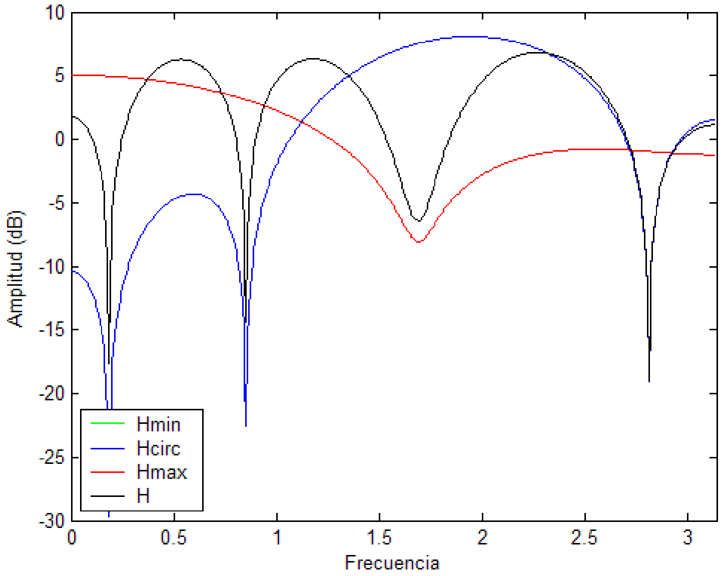
$$h_{\max}[n] = 0.4622\delta[\mathrm{n}] + 0.9711\delta[\mathrm{n}-1] + 0.7574\delta[\mathrm{n}-2] + \delta[\mathrm{n}-3]$$

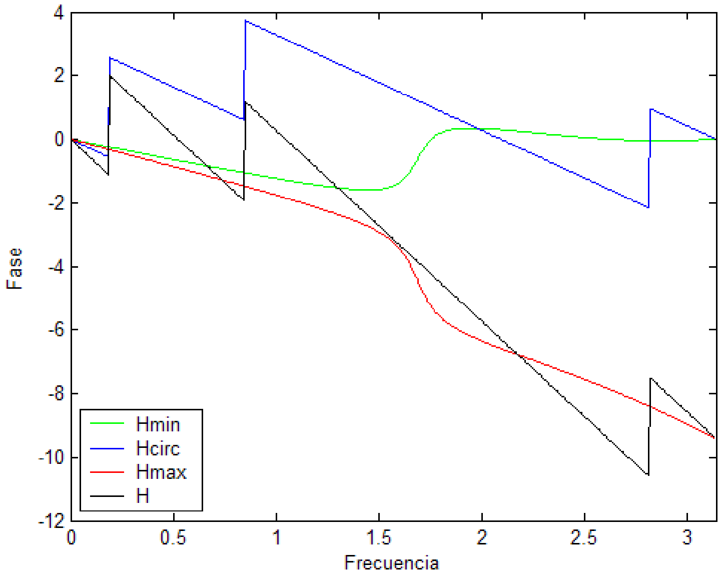
$$H_{circ}(z) = \left(1 + e^{j0.1852}z^{-1}\right)\left(1 + e^{-j0.1852}z^{-1}\right)\left(1 + e^{j0.8512}z^{-1}\right)\left(1 + e^{-j0.8512}z^{-1}\right)\left(1 + e^{j2.8118}z^{-1}\right)\left(1 + e^{-j2.8118}z^{-1}\right)$$

$$k = \frac{0.75}{0.9242^2 0.5412}$$

Descomposición de un sistema FIR







Resumen

- Filtros definidos por un sistema racional
- Propiedades (estabilidad, causalidad, invertibilidad)
- Retardo de grupo
- Respuestas tipo: 1 cero, 1 polo, 2 polos
- Relación magnitud-fase
- Sistemas paso-todo
- Sistemas de fase mínima
- Sistemas de fase lineal generalizada
  - Filtros FIR

Tema 3 – Análisis de Sistemas LTI en el dominio transformado

Oppenheim II (Cap. 5), Proakis (Cap. 4)

Probl Opp: 5.1, 5.6, 5.28, 5.29, 5.30, 5.33, 5.71

Probl Pro: 4.83*, 4.84, 4.92, 4.93

Introducción

- http://video.google.es/videoplay?docid=6726953938324261715

Filtros ideales

Filtros Paso Bajo (Low Pass Filters)

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & resto \end{cases} \quad -\pi \le \omega < \pi \quad \xleftrightarrow{0 < \omega_c < \pi} \quad h_{lp}[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sin} c\left(\frac{\omega_c}{\pi} n \right)$$

Filtros Paso Alto (High Pass Filters)

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega}) \quad \xleftrightarrow{0 < \omega_c < \pi} \quad h_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n]$$

Son filtros no causales y con respuesta impulsional infinita.

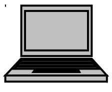
Filtros realizables

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \longrightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{z^N}{z^M} \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}} = z^{N-M} \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}} = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=0}^{M} (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N} (1 - p_k z^{-1})}$$

Ejemplo:

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{(1 + \frac{1}{2} z^{-1})(1 + \frac{3}{4} z^{-1})} = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + \frac{5}{4} z^{-1} + \frac{3}{8} z^{-2}}$$



$$y[n] + \tfrac{5}{4} y[n-1] + \tfrac{3}{8} y[n-2] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$$

$$y[n] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2] - \tfrac{5}{4} y[n-1] - \tfrac{3}{8} y[n-2]$$

Ejercicio: Implementar este filtro y compararlo con la salida de la función filter de MATLAB

Filtros definidos por ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes

Una ecuación en diferencias no define de forma única la respuesta al impulso del sistema. Por ejemplo,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \longrightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k h[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k]$$

sea $h'[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k p_k^n$ donde $\sum_{m=0}^{N} a_m p_k^{-m} = 0, A_k \in R, p_i \neq p_j$, entonces

$$\sum_{k=0}^{N} a_k h'[n-k] = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{N} a_k (h[n-k] + h'[n-k]) = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k]$$

Es decir, hay N coeficientes indeterminados A_k , que pueden ser fijados por medio de condiciones iniciales $y[-1], y[-2], \ldots, y[-N]$ si es causal ó $y[1], y[2], \ldots, y[N]$ si es anticausal.

Bibliografía: Oppenheim 5.2, Proakis 3.6

Pág 37, Opp II. Ejercicio: Comprobar que la suma justo a la derecha es efectivamente 0.

Probl Opp: 5.2, 5.7

Probl Pro: 4.45, 4.46, 4.91

Respuesta al impulso de un sistema racional

Expansión en fracciones parciales

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=\sum_{k=0}^{M-N} B_k z^{-k}+\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}} \longrightarrow h[n]=\underbrace{\sum_{k=0}^{M-N} B_k \delta[n-k]}_{\text{FIR}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{N} A_k p_k^n u[n]}_{\text{IIR}}$$

sólo si M≥N

FIR: Polos en el origen

IIR: Polos fuera del origen

Ejemplo: $h[n]=a^n(u[n]-u[n-M-1])$

$$H(z)=\sum_{n=0}^{M} a^n z^{-n}=\frac{1-a^{M+1}z^{-(M+1)}}{1-az^{-1}}$$

$$\begin{cases} p_k=\cancel{0},0,\ldots,0\ (M+1) \\ z_k=\cancel{ae^{j\frac{2\pi}{M+1}0}},ae^{j\frac{2\pi}{M+1}1},\ldots,ae^{j\frac{2\pi}{M+1}M} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_k=\cancel{a} \\ z_k=\cancel{0} \end{cases}$$

Bibliografía: Oppenheim 5.2 , Proakis 3.6

Probl Opp: 5.3*, 5.4

Probl Pro: 4.47, 4.48

Respuesta de un sistema racional

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{B(z)}{A(z)}\frac{N(z)}{Q(z)} = \sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{L}\frac{Q_k}{1-q_k z^{-1}}$$

El sistema está inicialmente en reposo.

No se producen cancelaciones polo-cero.

$$\underbrace{\text{Polos del sistema}}_{\text{Respuesta natural}} \qquad \underbrace{\text{Polos de la entrada}}_{\text{Respuesta forzada}}$$

$$y[n] = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} A_k p_k^n u[n]}_{\text{Respuesta transitoria}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{L} Q_k q_k^n u[n]}_{\text{Régimen permanente}}$$

Bibliografía: Oppenheim 5.2 , Proakis 3.6

No todas las X se pueden expresar como un cociente. Pero supongamos que ésta sí. Si el sistema no estuviese inicialmente en reposo debería usarse la TZ unilateral.

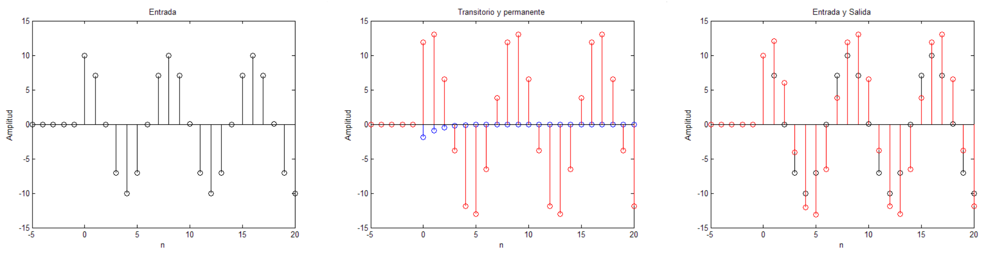
Respuesta transitoria y régimen permanente

Ejemplo: $y[n] = 0.5y[n-1] + x[n] \longleftrightarrow H(z) = \dfrac{1}{1-0.5z^{-1}}$

$$x[n] = 10\cos\left(\tfrac{\pi}{4}n\right)u[n] \longleftrightarrow X(z) = 10\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

$$Y(z) = H(z)X(z) = 10\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}} = \frac{6.3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{11.894-13.015z^{-1}}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

$$y[n] = -1.907(0.5)^n u[n] + 13.56\cos(\tfrac{\pi}{4}n - 28.7^{o})u[n]$$



Bibliografía: Proakis 3.6, 4.4

Aquí se ve muy bien la respuesta transitoria y la permanente.

Probl Opp: 5.34

Probl Pro: 4.29 (*** AQUÍ ME QUEDO), 4.31, 4.43

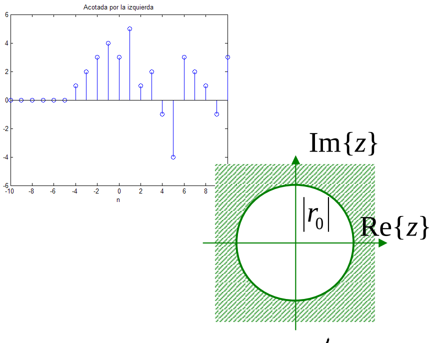
Estabilidad y causalidad

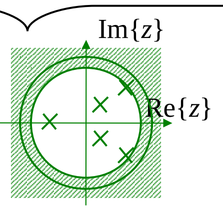
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| h[n] z^{-n} \right| \Big|_{|z|=1} < \infty$$

$\downarrow$

h[n] es estable si la ROC de H(z) incluye al círculo unidad.





$$|p_k| < 1$$

Bibliografía: Oppenheim 5.2, Proakis 3.6

Para que un filtro definido por una ED sea causal y estable tiene que ser que todos los polos estén dentro del círculo unidad. Si no fuese causal por ejemplo, h[n]=a*delta[n+1]+delta[n] (H(z)=az+1), entonces tendría un polo en el infinito.

Probl Opp: 5.5*, 5.8, 5.9*, 5.10, 5.11

Probl Pro: 4.99, 4.104

Estabilidad

Ejemplo: $y[n]-y[n-1]=x[n]$

$x[n]=u[n]$ → La señal de entrada está acotada $\exists B_x : \forall n \ |x[n]| < B_x$

$$H(z)=\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z|>1$$

$$Y(z)=H(z)X(z)=\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

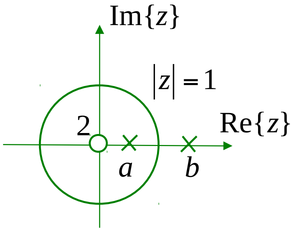
$y[n]=(n+1)u[n]$ → Pero la salida, no $\neg\exists B_y : \forall n \ |y[n]| < B_y$

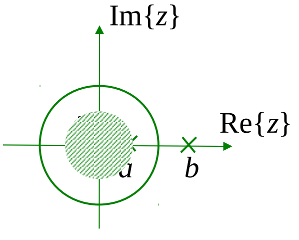
Bibliografía: Oppenheim 5.2, Proakis 3.6

Estabilidad y Causalidad

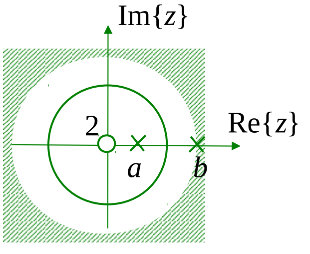
Ejemplo: $y[n]-(a+b)y[n-1]+aby[n-2]=x[n]$

$$H(z)=\frac{1}{\left(1-az^{-1}\right)\left(1-bz^{-1}\right)} \qquad a<1<b$$

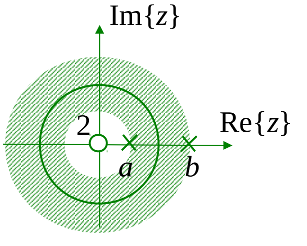




El sistema no es ni causal ni estable



El sistema es causal pero no estable



El sistema es estable pero no causal

Bibliografía: Oppenheim 5.2, Proakis 3.6

Probl Pro: 4.88

Cancelaciones polo-cero

Ejemplo: $y[n]-\frac{5}{2}y[n-1]+y[n-2]=x[n]-5x[n-1]+6x[n-2]$

$$H(z)=\frac{1-5z^{-1}+6z^{-2}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}=\frac{1-5z^{-1}+6z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}=\frac{\left(1-3z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{1-3z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=1-\frac{\frac{5}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Cancelación polo-cero

$$h[n]=\delta[n]-\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

El sistema es estable debido a la cancelación polo-cero pero en una implementación real no tienen por qué cancelarse exactamente.

Bibliografía: Proakis 3.6

Test de estabilidad de Schür-Cohn

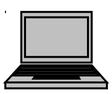
Notación

Polinomio de orden m: $A_m(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k^{(m)} z^{-k} \qquad a_0^{(m)} = 1$

Polinomio inverso o recíproco: $\tilde{A}_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{m} a_{m-k}^{(m)} z^{-k}$

Test

$H(z) = \dfrac{B(z)}{A(z)}$



1. $A_N(z) = A(z)$
2. $m = N$
4. mientras $m \neq 0$
   - 4.1. Calcular $\tilde{A}_m(z)$
   - 4.2. $K_m = a_m^{(m)}$
   - 4.3. $A_{m-1}(z) = \dfrac{A_m(z) - K_m \tilde{A}_m(z)}{1 - K_m^2}$
   - 4.4. $m = m - 1$

A(z) tiene todas sus raíces dentro del círculo unidad si y sólo si

$\forall m \in \{1,2,\ldots,N\} : |K_m| < 1$

Bibliografía: Proakis 3.6

Proakis pp 217

Ejercicio: Implementar este algoritmo

Test de estabilidad de Schür-Cohn

Ejemplo: $H(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}$

$$A_2(z) = 1 - \tfrac{7}{4}z^{-1} - \tfrac{1}{2}z^{-2}$$

$$\tilde{A}_2(z) = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{7}{4}z^{-1} + z^{-2}$$

$$K_2 = a_2^{(2)} = -\tfrac{1}{2}$$

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - K_2\tilde{A}_2(z)}{1 - K_2^2} = 1 - \tfrac{7}{2}z^{-1}$$

$$\tilde{A}_1(z) = -\tfrac{7}{2} + z^{-1}$$

$K_1 = a_1^{(1)} = -\tfrac{7}{2} \longrightarrow |K_1| > 1 \longrightarrow$ El sistema no es estable

Bibliografía: Proakis 3.6

Estabilidad de un sistema de 2º orden

$$H(z)=\frac{b_0}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} z_1, z_2 = 0 \\ p_1, p_2 = -\dfrac{a_1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{a_1^2-4a_2}{4}} \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = -(p_1+p_2) \\ a_2 = p_1 p_2 \end{array}\right.$$

Estabilidad $|K_i|<1$

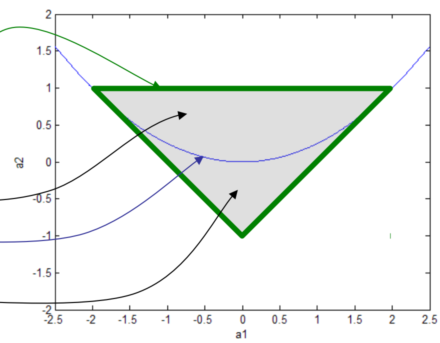
$$K_2 = a_2$$

$$K_1 = \frac{a_1}{1+a_2}$$

Polos complejos $a_1^2-4a_2<0$

Polos reales dobles $a_1^2-4a_2=0$

Polos reales simples $a_1^2-4a_2>0$



Bibliografía: Oppenheim 5.2, Proakis 3.6

Las condiciones de estabilidad que hemos dado definen una región en el plano de coeficientes (a_1, a_2, ver figura) que tiene forma de triángulo. Es sistema es estable si y solo si el punto (a_1, a_2) está dentro de este triángulo, que se conoce como *triángulo de estabilidad.*

Las características del two-pole system dependen de la situación de sus polos, o, equivalentemente, de la situación del punto (a_1,a_2) en el triángulo de estabilidad. Los polos pueden ser reales o complejos conjugados, dependiendo del valor del discriminante Δ=a1^2-4a_2. La parábola a_2=a_1^2/4 divide el triángulo de estabilidad en dos regiones (ver figura). La región por debajo de la parábola (a_1^2>4a_2) corresponde a polos reales distintos. Los puntos que están en la parábola (a_1^2=4a_2) proporcionan dos polos reales iguales. Por último, los punos por encima de la parábola resultan en polos complejos conjugados.

Invertibilidad

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{H\left(e^{j\omega}\right)} \xrightarrow{h[n]} \boxed{H_i\left(e^{j\omega}\right)} \longrightarrow$$

$$h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

$$H(e^{j\omega})H_i(e^{j\omega}) = 1$$

$$H(z)H_i(z) = 1$$

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=0}^{M}(1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N}(1 - p_k z^{-1})} \longrightarrow H_i(z) = \frac{a_0}{b_0}\frac{\prod_{k=0}^{N}(1 - p_k z^{-1})}{\prod_{k=0}^{M}(1 - z_k z^{-1})}$$

Es decir, los polos de un sistema son los ceros de su sistema inverso, y los ceros de un sistema son los polos de su inverso. La ROC del sistema inverso debe solaparse con la del sistema H(z)

Un sistema LTI es estable y causal y tiene un sistema inverso estable y causal sii todos los polos y ceros de H(z) están dentro del círculo unidad

Bibliografía: Oppenheim 5.2, Proakis 3.6

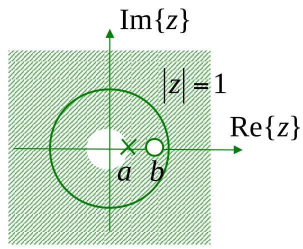
Probl Opp: 5.31, 5.32, 5.36, 5.59, 5.72, 5.73, 5.74, 5.75

Probl Pro: 4.90

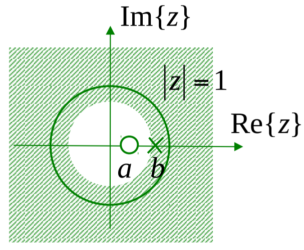
Invertibilidad

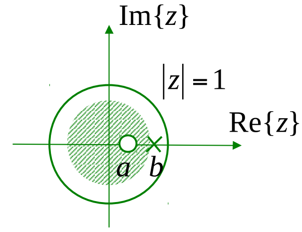
Ejemplo: $H(z) = \dfrac{1-bz^{-1}}{1-az^{-1}} \qquad b, a < 1$

$$h[n] = a^n u[n] - ba^{n-1}u[n-1]$$



$$H_i(z) = \frac{1-az^{-1}}{1-bz^{-1}}$$





$$h[n] = b^n u[n] - ab^{n-1}u[n-1] \qquad\qquad h[n] = -b^n u[-n-1] + ab^{n-1}u[-n-2]$$

Bibliografía: Oppenheim 5.2, Proakis 3.6

Los dos pueden ser sistemas inversos porque los dos solapan con la ROC original. El problema del segundo sistema inverso es que no es estable.
Ejercicio: comprobar que los dos son sistemas inversos.

Respuesta en frecuencia de un sistema LTI

$$x[n] \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow y[n] = h[n] * x[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \qquad \left|Y(e^{j\omega})\right| = \left|H(e^{j\omega})\right|\left|X(e^{j\omega})\right|$$

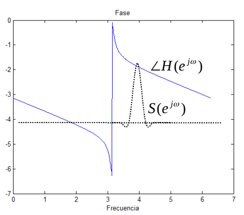
$$\angle Y(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega})$$

Ejemplo: $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} \quad \angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_0 \longrightarrow h[n] = \delta[n - n_0]$

$$\angle H(e^{j\omega}) \approx -\phi_0 - \omega n_0 \longrightarrow y[n] \approx \left|H(e^{j\omega_0})\right| s[n - n_0]\cos(\omega_0(n - n_0) - \phi_0)$$

$$x[n] = s[n]\cos\omega_0 n$$

donde $n_0 = \tau(\omega)\big|_{\omega=\omega_0}$



Retardo de grupo

$$\boxed{\tau(\omega) = grd\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{d}{d\omega}\arg\{H(e^{j\omega})\}}$$

Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

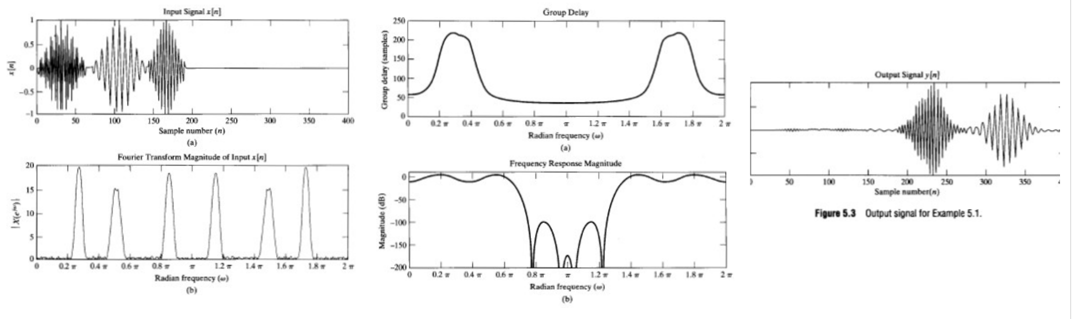
S[n] una señal de banda estrecha. Arg(.) es la fase continua de H(e^jw). Cuanto más se aleje el retardo de grupo de una constante menos lineal es la fase del filtro.

Probl Opp: 5.21, 5.22, 5.25, 5.27, 5.47

Probl Pro: 4.41*, 4.42, 4.57, 4.59*, 4.89

Efectos del retardo de grupo

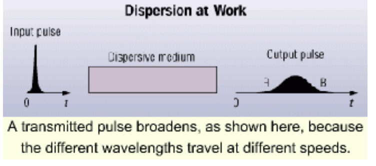
Ejemplo:

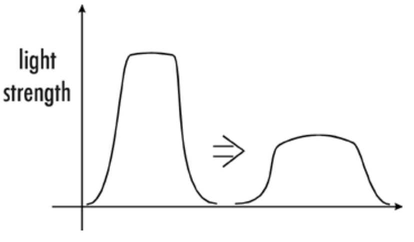


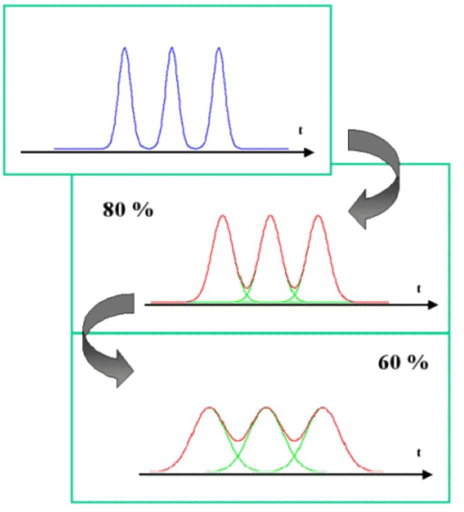
Entrada Sistema Salida

Bibliografía: Oppenheim 5.1, 5.3

Efectos del retardo de grupo







Applet: http://cnyack.homestead.com/files/afilt/afilt-phasegroup.htm

Bibliografía: Oppenheim 5.1, 5.3

El pulso se ensancha porque las diferentes frecuencias viajan a diferentes velocidades.

Respuesta en frecuencia de un sistema racional

Respuesta de amplitud

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}} = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=0}^{M}(1 - z_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=0}^{N}(1 - p_k e^{-j\omega})}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=0}^{M}(1 - z_k e^{-j\omega})(1 - z_k^* e^{j\omega})}{\prod_{k=0}^{N}(1 - p_k e^{-j\omega})(1 - p_k^* e^{j\omega})}$$

Ganancia del filtro en dBs

$$20\log_{10}\left|H(e^{j\omega})\right| = 20\log_{10}\frac{b_0}{a_0} + \sum_{k=0}^{M} 20\log_{10}\left|1 - z_k e^{-j\omega}\right| - \sum_{k=0}^{N} 20\log_{10}\left|1 - p_k e^{-j\omega}\right|$$

Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Probl Pro: 4.54, 4.79, 4.87, 4.106, 4.107, 4.108

El k=0 es k=1.

Respuesta en frecuencia de un sistema racional

Respuesta de fase

Valor principal

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle\left(\frac{b_0}{a_0}\right) + \sum_{k=0}^{M} \angle(1 - z_k e^{-j\omega}) - \sum_{k=0}^{N} \angle(1 - p_k e^{-j\omega}) = ARG\left\{H(e^{j\omega})\right\} + 2\pi r(\omega)$$

donde

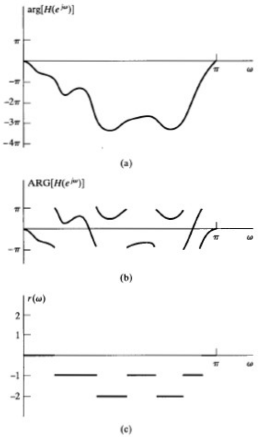
$$\pi < ARG\left\{H(e^{j\omega})\right\} = \arctan\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} \leq \pi$$

$r(\omega) \in N$ Sin restricción

$$\arg H(e^{j\omega}) = ARG\left\{H(e^{j\omega})\right\} + 2\pi r(\omega)$$

donde

$r(\omega) \in N$ Es tal que $\arg H(e^{j\omega})$ es continua



Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Respuesta en frecuencia de un sistema racional

<u>Retardo de grupo</u>

$$grd\left\{H(e^{j\omega})\right\} = \sum_{k=0}^{M} \frac{d}{d\omega} \arg\left\{1 - z_k e^{-j\omega}\right\} - \sum_{k=0}^{N} \frac{d}{d\omega} \arg\left\{1 - p_k e^{-j\omega}\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{M} \frac{\left|z_k\right|^2 - \mathrm{Re}\left\{z_k e^{-j\omega}\right\}}{1 + \left|z_k\right|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left\{z_k e^{-j\omega}\right\}} - \sum_{k=0}^{N} \frac{\left|p_k\right|^2 - \mathrm{Re}\left\{p_k e^{-j\omega}\right\}}{1 + \left|p_k\right|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left\{p_k e^{-j\omega}\right\}}$$

Propiedades

$$grd\left\{H(e^{j\omega})\right\} \equiv -\frac{d}{d\omega} \arg\left\{H(e^{j\omega})\right\} = -\frac{d}{d\omega} ARG\left\{H(e^{j\omega})\right\} = -\frac{d}{d\omega} \angle H(e^{j\omega})$$

salvo en las discontinuidades

$$\arg\left\{H(e^{j\omega})\right\} - \arg\left\{H(e^{j0})\right\} = -\int_0^{\omega} grd\left\{H(e^{j\phi})\right\} d\phi$$

Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Ejercicio: cálculo de esta derivada

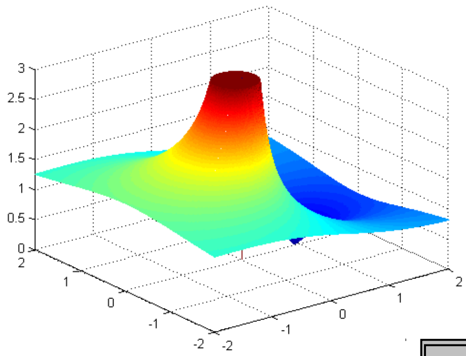
Respuesta en frecuencia de un sistema racional

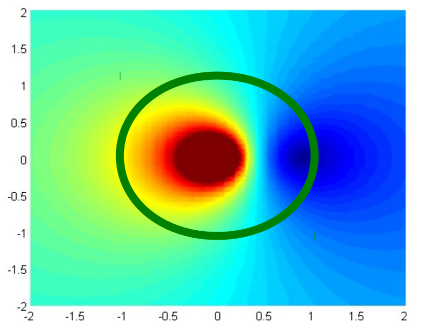
- Applet:
- http://www.eas.asu.edu/~dsp/grad/anand/java/FreqResp/FreqResp.html
- http://www.thole.org/manfred/polezero/en_idx.html

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

$$H(e^{j\omega}) = 1 - z_0 e^{-j\omega} = 1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}$$

$$z_0 = 0.9$$





Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Ejercicio: Repetir estas gráficas

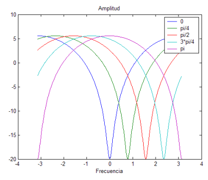
Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

$$H(e^{j\omega}) = 1 - z_0 e^{-j\omega} = 1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}$$

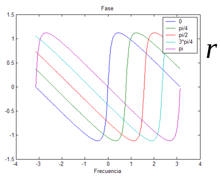
$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = 1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta)$$

$$ARG\left\{H(e^{j\omega})\right\} = \arctan\frac{r\sin(\omega-\theta)}{1 - r\cos(\omega-\theta)}$$

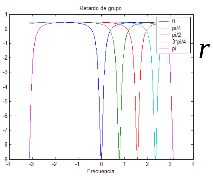
$$grd\left\{H(e^{j\omega})\right\} = \frac{r^2 - r\cos(\omega-\theta)}{\left|H(e^{j\omega})\right|^2}$$



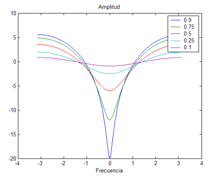
$r = 0.9$



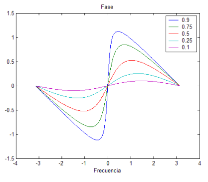
$r = 0.9$



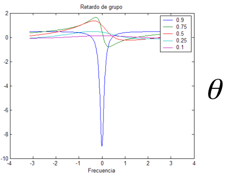
$r = 0.9$



$\theta = 0$



$\theta = 0$



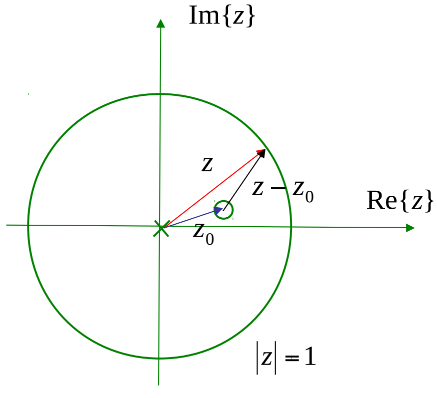
$\theta = 0$

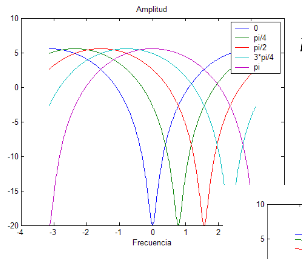
Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Probl Pro: 4.61*

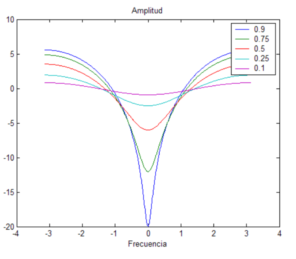
Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

$$H(z)=1-re^{j\theta}z^{-1}=\frac{z-z_0}{z} \longrightarrow |H(z)|=\frac{|z-z_0|}{|z|} \longrightarrow |H(e^{j\omega})|=|H(z)|\big|_{|z|=1}=|e^{j\omega}-z_0|$$





$r=0.9$

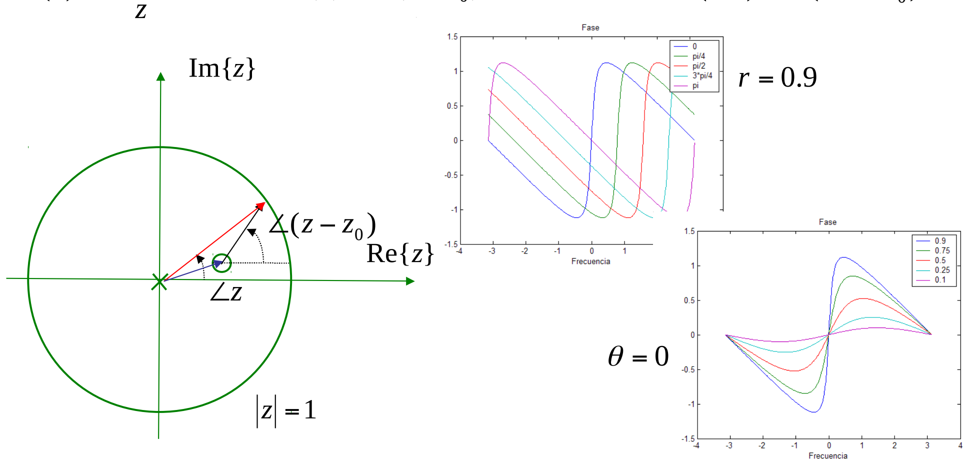


$\theta=0$

Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

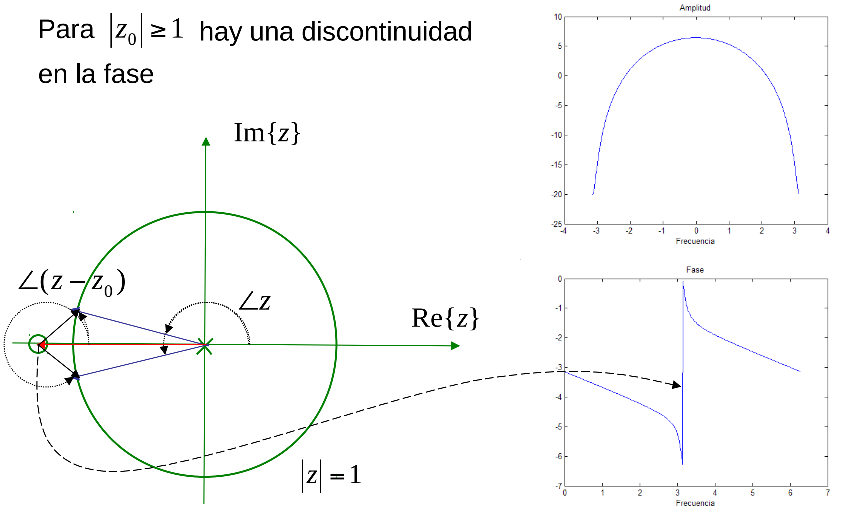
$$H(z)=\frac{z-z_0}{z} \longrightarrow \angle H(z)=\angle(z-z_0)-\angle z \longrightarrow \angle H(e^{j\omega})=\angle(e^{j\omega}-z_0)-\omega$$



Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

Para $|z_0| \geq 1$ hay una discontinuidad en la fase

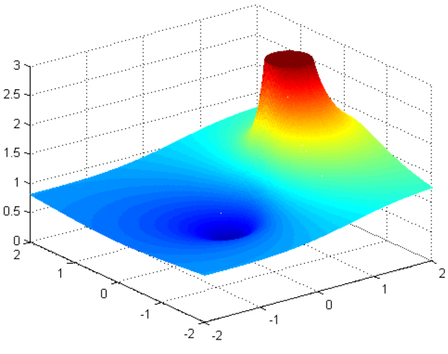


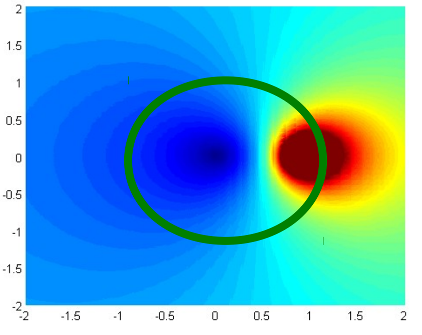
Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Probl Pro: 4.50

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo polo

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - z_0 e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}}$$





Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Probl Opp: 5.60

Probl Pro: 4.65, 4.66*

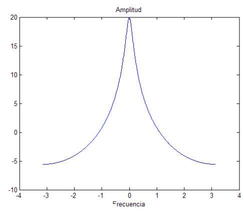
Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo polo

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - z_0 e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - re^{j\theta} e^{-j\omega}}$$

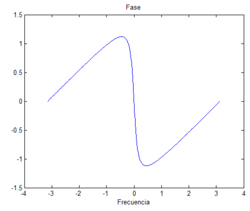
$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = \frac{1}{1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta)}$$

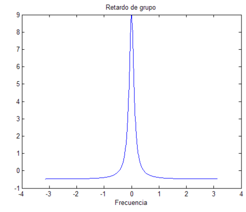
$$ARG\left\{H(e^{j\omega})\right\} = -\arctan\frac{r\sin(\omega - \theta)}{1 - r\cos(\omega - \theta)}$$

$$grd\left\{H(e^{j\omega})\right\} = -\frac{r^2 - r\cos(\omega - \theta)}{\left|H(e^{j\omega})\right|^2}$$



Los valores obtenidos son los opuestos a los obtenidos con un solo cero.



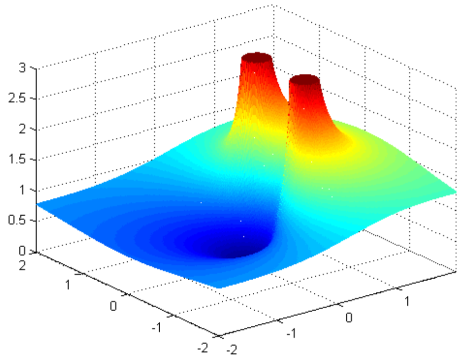


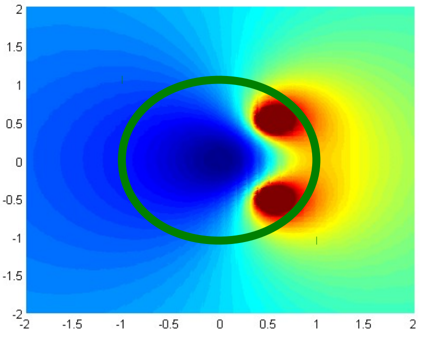
Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Probl Pro: 4.62

Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{\left(1 - z_0 e^{-j\omega}\right)\left(1 - z_0^* e^{-j\omega}\right)} = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$$





Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Probl Opp: 5.26

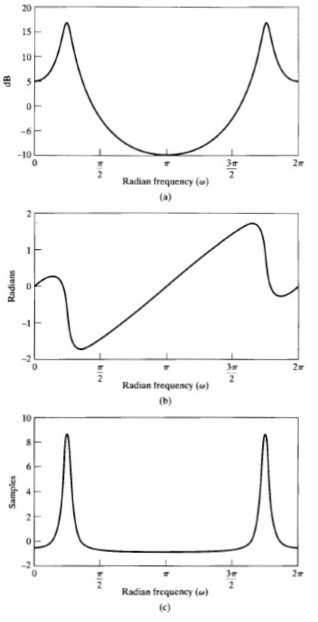
Probl Pro: 4.56, 4.60, 4.67, 4.68*

Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden IIR

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = \left(\frac{1}{1+r^2-2r\cos(\omega-\theta)}\right)\left(\frac{1}{1+r^2-2r\cos(\omega+\theta)}\right)$$

$$ARG\left\{H(e^{j\omega})\right\} = -\arctan\frac{r\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)} - \arctan\frac{r\sin(\omega+\theta)}{1-r\cos(\omega+\theta)}$$

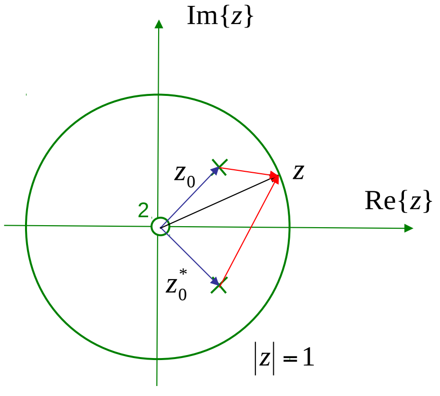
$$grd\left\{H(e^{j\omega})\right\} = -\frac{r^2-r\cos(\omega-\theta)}{1+r^2-2r\cos(\omega-\theta)} - \frac{r^2-r\cos(\omega+\theta)}{1+r^2-2r\cos(\omega+\theta)}$$



Los valores obtenidos son los opuestos a los obtenidos con dos ceros.

Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden



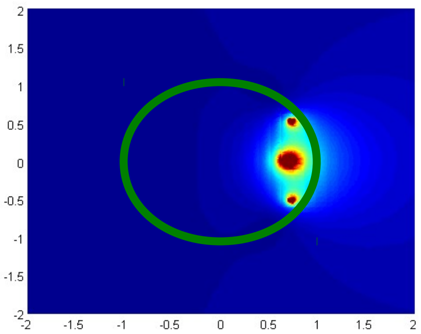
$$|H(z)| = \frac{|z|^2}{|z - z_0||z - z_0^*|}$$

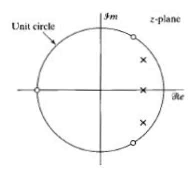
$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|e^{j\omega} - z_0||e^{j\omega} - z_0^*|}$$

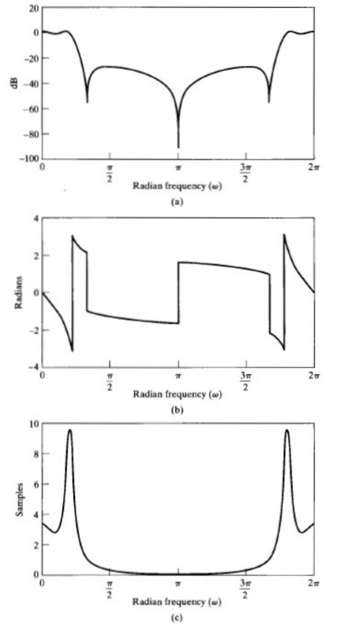
Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Respuesta en frecuencia de un sistema racional

Ejemplo: $$H(z)=\frac{0.05634(1+z^{-1})(1-1.0166z^{-1}+z^{-2})}{(1-0.683z^{-1})(1-1.4461z^{-1}+0.7957z^{-2})}$$







Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Probl Pro: 4.49, 4.51*, 4.53, 4.63, 4.64

Relación entre fase y magnitud para sistemas definidos por una ED

En general, no hay ninguna relación entre magnitud y fase para un sistema LTI. Sin embargo, si el sistema está definido por una ED, una vez especificada una de ellas, la otra queda determinada dentro de un número reducido de opciones.

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = H(z)H^*(\tfrac{1}{z^*})\Big|_{z=e^{j\omega}} = C(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} [1]$$

$$\left.\begin{aligned} H(z) &= \frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=0}^{M}(1-z_k z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N}(1-p_k z^{-1})} \\ H^*(\tfrac{1}{z^*}) &= \frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=0}^{M}(1-z_k^* z)}{\prod_{k=0}^{N}(1-p_k^* z)} \end{aligned}\right\}$$

$$C(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=0}^{M}(1-z_k z^{-1})(1-z_k^* z)}{\prod_{k=0}^{N}(1-p_k z^{-1})(1-p_k^* z)}$$

Polos $p_k, \left(p_k^*\right)^{-1}$

Ceros $z_k, \left(z_k^*\right)^{-1}$

Si uno está dentro del círculo unidad, el otro debe estar fuera. Los polos de un sistema estable y causal están automáticamente determinados, pero no así los ceros.

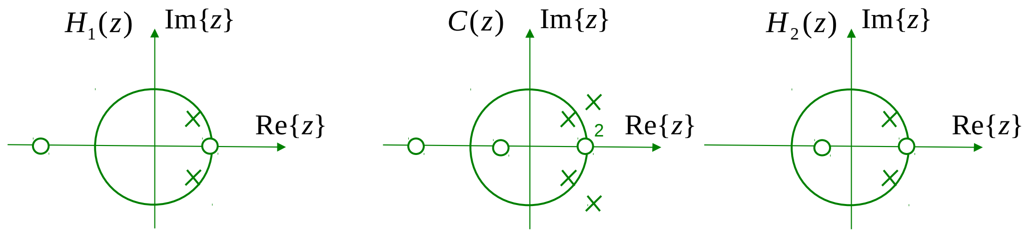
Bibliografía: Oppenheim 5.4

Relación entre fase y magnitud para sistemas definidos por una ED

Ejemplo:

$$C(z)=\frac{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})(1-z)(1+2z)}{(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z)(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z)}$$

$$=\frac{2(1-z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})2(1-z)(1+\frac{1}{2}z)}{(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z)(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z)}$$



$$H_1(z)=\frac{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})}{(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})}\qquad H_2(z)=\frac{2(1-z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})}{(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})}$$

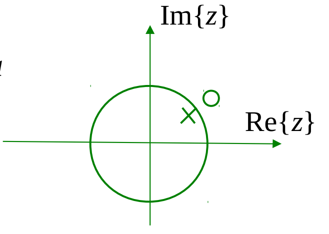
Bibliografía: Oppenheim 5.4

Ejercicio: Calcular la respuesta de fase y de amplitud

Sistemas paso-todo

Ejemplo:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \longrightarrow \quad z_1 = \frac{1}{a^*} \quad p_1 = a$$



$$H_{ap}(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}} = e^{-j\omega}\frac{1 - a^* e^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} = e^{-j\omega}\frac{(1 - ae^{-j\omega})^*}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$\left|H_{ap}(e^{j\omega})\right| = \left|e^{-j\omega}\frac{(1 - ae^{-j\omega})^*}{1 - ae^{-j\omega}}\right| = \left|e^{-j\omega}\right|\left|\frac{(1 - ae^{-j\omega})^*}{1 - ae^{-j\omega}}\right| = 1$$

Bibliografía: Oppenheim 5.5

Ejercicio: Calcular la fase y el retardo de grupo

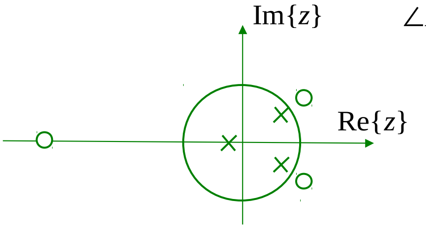
Sistemas paso-todo

Sistema paso todo de respuesta real

$$H_{ap}(z) = A\prod_{k=1}^{M_r}\frac{z^{-1}-a_k}{1-a_k z^{-1}}\prod_{k=1}^{M_c}\frac{z^{-1}-c_k^*}{1-c_k z^{-1}}\frac{z^{-1}-c_k}{1-c_k^* z^{-1}} \qquad a_k \in R, c_k \in C$$

$2M_c + M_r$ polos y ceros $z_r = \frac{1}{a_k}$ $p_r = a_k$ $z_c = \frac{1}{c_k^*}, \frac{1}{c_k}$ $p_c = c_k, c_k^*$

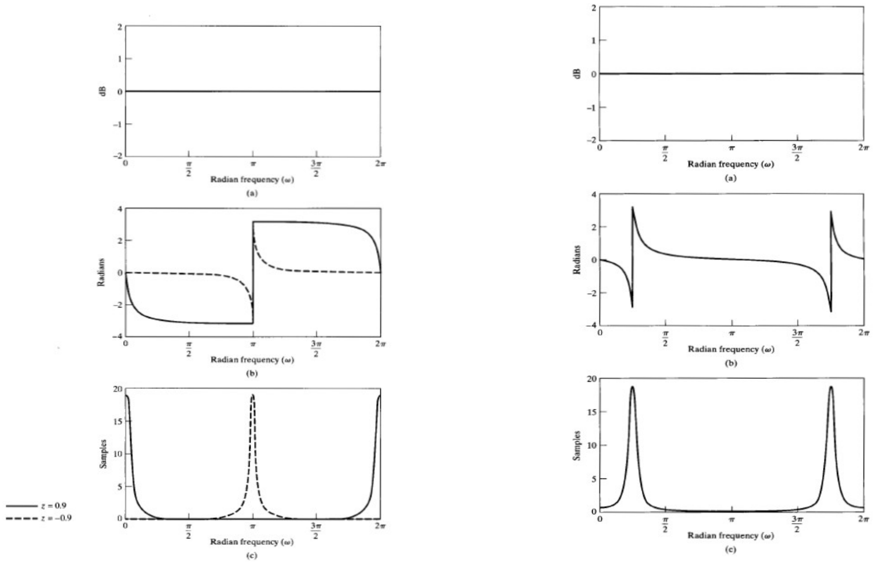
$$\boxed{\left|H_{ap}(e^{j\omega})\right| = A}$$



$$\angle H_{ap}(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^{M_r}\left(-\omega - 2\arctan\frac{r_k\sin(\omega-\theta_k)}{1-r_k\cos(\omega-\theta_k)}\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{M_c}\left(-2\omega - 2\arctan\frac{r_k\sin(\omega-\theta_k)}{1-r_k\cos(\omega-\theta_k)} - 2\arctan\frac{r_k\sin(\omega+\theta_k)}{1-r_k\cos(\omega+\theta_k)}\right)$$

Bibliografía: Oppenheim 5.5

Sistemas paso-todo



Bibliografía: Oppenheim 5.5

Sistemas paso-todo

$$\boxed{grd H_{ap}(e^{j\omega})} = \underbrace{\sum_{k=1}^{M_r}\left(\frac{1-r_k^2}{\left|1-r_k e^{j\theta_k} e^{-j\omega}\right|^2}\right)}_{>0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{M_c}\left(\frac{1-r_k^2}{\left|1-r_k e^{j\theta_k} e^{-j\omega}\right|^2} + \frac{1-r_k^2}{\left|1-r_k e^{-j\theta_k} e^{-j\omega}\right|^2}\right)}_{>0} \boxed{>0}$$

Sistema causal y estable $\Rightarrow |r_k| < 1$

$$H_{ap}(e^{j0}) = A\prod_{k=1}^{M_r}\frac{1-a_k}{1-a_k}\prod_{k=1}^{M_c}\frac{1-c_k^*}{1-c_k}\frac{1-c_k}{1-c_k^*} = A \Rightarrow \angle H_{ap}(e^{j0}) = 0$$

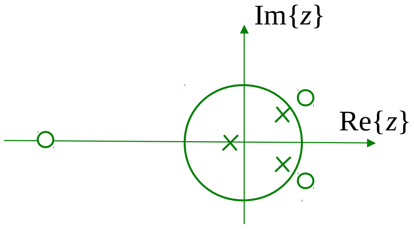
$$\boxed{\arg\{H_{ap}(e^{j\omega})\}} = \arg\{H_{ap}(e^{j0})\} - \int_0^{\omega} grd\{H_{ap}(e^{j\phi})\}d\phi \boxed{<0}$$

Bibliografía: Oppenheim 5.5

Usos: Compensadores de fase; convertir filtros paso bajo en paso banda o paso alto; filtros de fase mínima

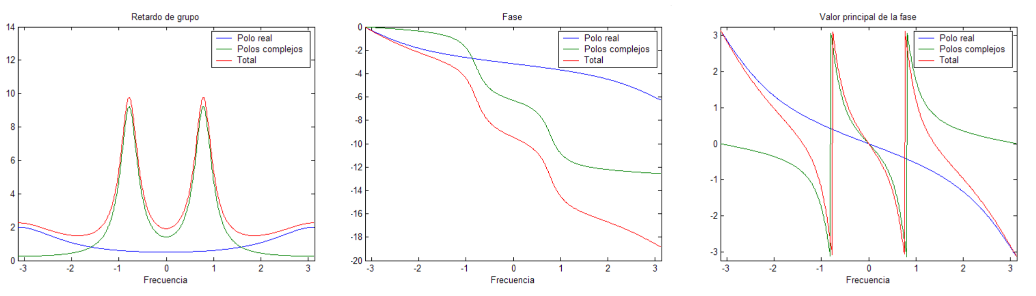
Probls Opp: 5.13, 5.24*

Sistemas paso-todo



$$z_r = -3 \qquad z_c = \tfrac{5}{4}e^{j\frac{\pi}{4}}, \tfrac{5}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$p_r = -\tfrac{1}{3} \qquad p_c = \tfrac{4}{5}e^{j\frac{\pi}{4}}, \tfrac{4}{5}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$



Bibliografía: Oppenheim 5.5

Sistemas de fase mínima

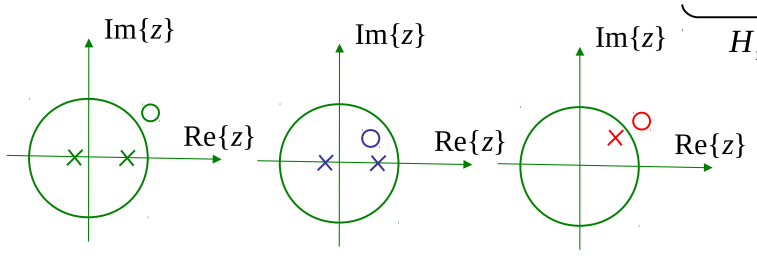
Un sistema es de fase mínima si todos sus polos y ceros están en el interior del círculo unidad.

<u>Descomposición de un sistema LTI causal y estable</u>

$$H(z) = H_{\min}(z) H_{ap}(z)$$

Supongamos que H(z) tiene un cero fuera del círculo unidad en $z = \frac{1}{c^*}\ ; |c| < 1$

$$H(z) = H_1(z)(z^{-1} - c^*) = \underbrace{H_1(z)(1 - cz^{-1})}_{H_{\min}(z)} \underbrace{\frac{z^{-1} - c^*}{1 - cz^{-1}}}_{H_{ap}(z)}$$



Bibliografía: Oppenheim 5.5

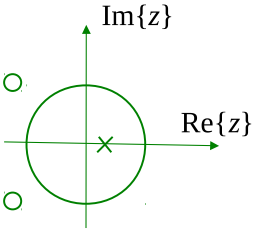
Sistemas de fase mínima

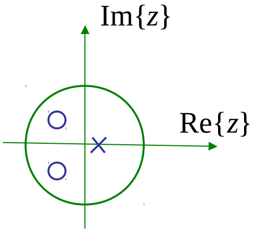
Ejemplo:

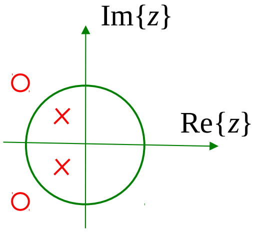
$$(1-z_0z^{-1})(1-z_1z^{-1}) = z_0z_1(z^{-1}-z_0^{-1})(z^{-1}-z_1^{-1})$$

$$H(z)=\frac{\left(1-\frac{3}{2}e^{j\frac{5\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{2}e^{-j\frac{5\pi}{4}}z^{-1}\right)}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{\frac{9}{4}\left(z^{-1}-\frac{2}{3}e^{-j\frac{5\pi}{4}}\right)\left(z^{-1}-\frac{2}{3}e^{j\frac{5\pi}{4}}\right)}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$=\frac{\frac{9}{4}\left(1-\frac{2}{3}e^{-j\frac{5\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-\frac{2}{3}e^{j\frac{5\pi}{4}}z^{-1}\right)}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\;\frac{\left(z^{-1}-\frac{2}{3}e^{-j\frac{5\pi}{4}}\right)\left(z^{-1}-\frac{2}{3}e^{j\frac{5\pi}{4}}\right)}{\left(1-\frac{2}{3}e^{-j\frac{5\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-\frac{2}{3}e^{j\frac{5\pi}{4}}z^{-1}\right)}$$





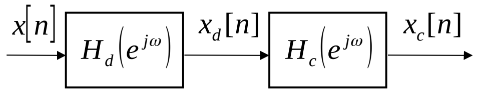


Bibliografía: Oppenheim 5.6

Probl Opp: 5.54

Sistemas de fase mínima

Compensación de la respuesta frecuencial



Caso Particular: $H_d(e^{j\omega})$ es de fase mínima, causal y estable

Se puede diseñar un sistema causal y estable tal que $x_c[n] = x[n]$

Caso General:

Se puede compensar la amplitud pero no la fase.

$$H_d(e^{j\omega}) = H_{d\min}(e^{j\omega})H_{ap}(e^{j\omega}) \longrightarrow H_c(e^{j\omega}) = H_{d\min}^{-1}(e^{j\omega})$$

$$X_c(e^{j\omega}) = H_{ap}(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

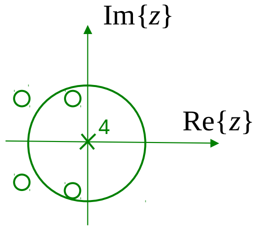
Bibliografía: Oppenheim 5.6

Probl Opp: 5.37

Sistemas de fase mínima

Ejemplo:

$$H_d(z) = (1-\tfrac{9}{10}e^{j\frac{3}{5}\pi}z^{-1})(1-\tfrac{9}{10}e^{-j\frac{3}{5}\pi}z^{-1})(1-\tfrac{5}{4}e^{j\frac{4}{5}\pi}z^{-1})(1-\tfrac{5}{4}e^{-j\frac{4}{5}\pi}z^{-1})$$



$$H_d(z) = (1-\tfrac{9}{10}e^{j\frac{3}{5}\pi}z^{-1})(1-\tfrac{9}{10}e^{-j\frac{3}{5}\pi}z^{-1})\,\tfrac{25}{16}\boxed{(z^{-1}-\tfrac{4}{5}e^{-j\frac{4}{5}\pi})(z^{-1}-\tfrac{4}{5}e^{j\frac{4}{5}\pi})} =$$

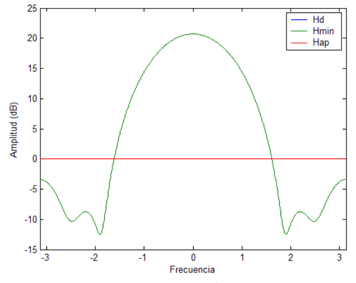
$$H_d(z) = \tfrac{25}{16}(1-\tfrac{9}{10}e^{j\frac{3}{5}\pi}z^{-1})(1-\tfrac{9}{10}e^{-j\frac{3}{5}\pi}z^{-1})\boxed{(1-\tfrac{4}{5}e^{j\frac{4}{5}\pi}z^{-1})(1-\tfrac{4}{5}e^{-j\frac{4}{5}\pi}z^{-1})}\,\frac{\boxed{(z^{-1}-\tfrac{4}{5}e^{-j\frac{4}{5}\pi})(z^{-1}-\tfrac{4}{5}e^{j\frac{4}{5}\pi})}}{\boxed{(1-\tfrac{4}{5}e^{j\frac{4}{5}\pi}z^{-1})(1-\tfrac{4}{5}e^{-j\frac{4}{5}\pi}z^{-1})}}$$

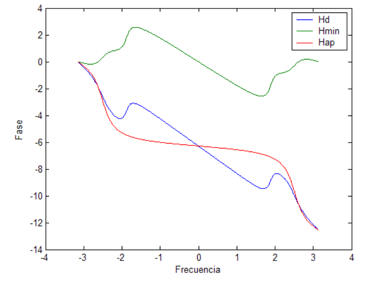
Bibliografía: Oppenheim 5.6

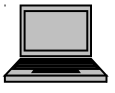
Éste es un sistema FIR, estable y causal

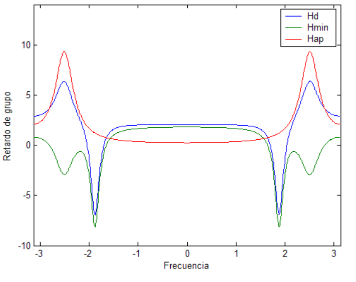
Sistemas de fase mínima

Ejemplo:









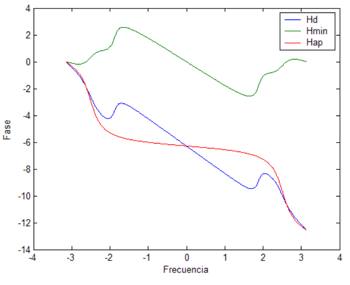
Bibliografía: Oppenheim 5.6

Ejercicio: Repetir estas gráficas

Ejercicio: Diseñar el sistema de compensación y estudiar su estabilidad, causalidad, etc. Dibujar su respuesta de amplitud, fase y respuesta al impulso.

Propiedades de los sistemas de fase mínima

<u>Fase (*phase-lag*) mínima</u>



$$H(z) = H_{\min}(z) H_{ap}(z)$$

$$\arg\{H(z)\} = \arg\{H_{\min}(z)\} + \arg\{H_{ap}(z)\}$$

$$< 0$$

$$phase - lag\{H(z)\} = -\arg\{H(z)\}$$

Luego,

$$phase - lag\{H_{\min}(z)\} < phase - lag\{H(z)\}$$

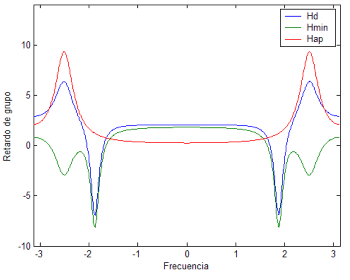
Hay que tener cuidado con que $H_{\min}(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] > 0$ porque

$h[n]$ y $-h[n]$ tienen los mismos polos y ceros pero un desfase de π

Bibliografía: Oppenheim 5.6

Propiedades de los sistemas de fase mínima

Retardo de grupo mínimo



$$H(z) = H_{\min}(z) H_{ap}(z)$$

$$grd\{H(z)\} = grd\{H_{\min}(z)\} + \underbrace{grd\{H_{ap}(z)\}}_{> 0}$$

Luego, $grd\{H_{\min}(z)\} < grd\{H(z)\}$

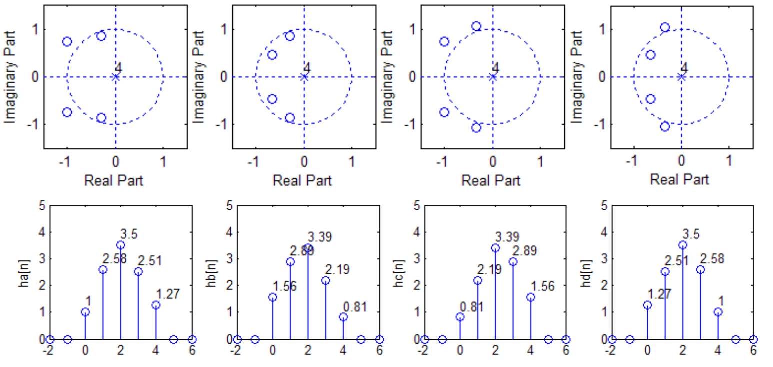
Bibliografía: Oppenheim 5.6

Propiedades de los sistemas de fase mínima

$$H_d(z) = (1-\tfrac{9}{10}e^{j\frac{3}{5}\pi}z^{-1})(1-\tfrac{9}{10}e^{-j\frac{3}{5}\pi}z^{-1})(1-\tfrac{5}{4}e^{j\frac{4}{5}\pi}z^{-1})(1-\tfrac{5}{4}e^{-j\frac{4}{5}\pi}z^{-1})$$

Retardo de energía mínimo

Ejemplo: $|H(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$



$|h[0]| \le |h_{\min}[0]|$

Bibliografía: Oppenheim 5.6

Todos estos sistemas tienen la misma respuesta en amplitud

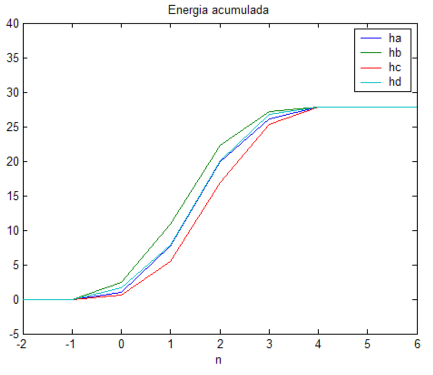
Probl Opp: 5.39, 5.61, 5.62, 5.63

Propiedades de los sistemas de fase mínima

<u>Retardo de energía mínimo</u>

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h_{\min}[n]|^2 \quad \text{pero} \quad \sum_{k=-\infty}^{n}|h[k]|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{n}|h_{\min}[k]|^2$$

Ejemplo:



Bibliografía: Oppenheim 5.6

La energía de hmin es la misma que las de h por el Tma. de Parseval.

Probl Opp: 5.17*, 5.18, 5.65, 5.66, 5.67

Probl Pro: 4.85, 4.94, 4.98, 4.101*, 4.102, 4.103*

Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Sistemas de fase lineal

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha} \qquad |\omega| < \pi \longrightarrow \begin{cases} |H(e^{j\omega})| = 1 \\ \angle H(e^{j\omega}) = -\omega\alpha \qquad |\omega| < \pi \\ grd\{H(e^{j\omega})\} = \alpha \\ h[n] = \sin c(n-\alpha) \qquad \alpha \in R \\ h[n] = \delta[n-\alpha] \qquad \alpha \in Z \end{cases}$$

En general, un sistema de fase lineal es tal que $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{-j\omega\alpha}$.
$h[n]$ es simétrica respecto a α si 2α es un entero, es decir, $h[2\alpha - n] = h[n]$

Si α es entero, entonces existe un sistema de fase 0 que es una versión desplazada de $h[n]$

Bibliografía: Oppenheim 5.7

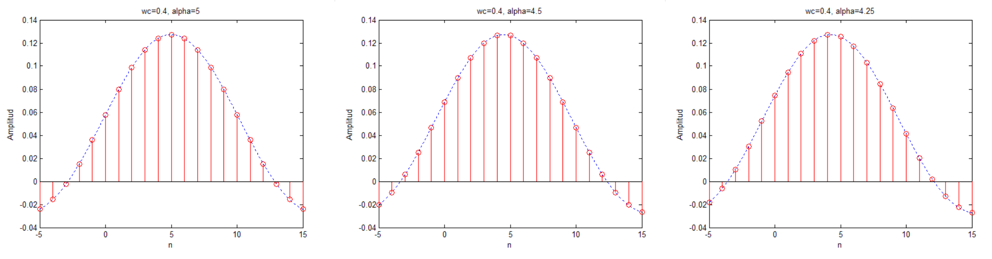
Para sistemas causales no se puede conseguir fase 0 (par). Pero nos gustaría que por lo menos sea una fase lineal que tiene un retardo de grupo constante.

Probl Opp: 5.35, 5.49

Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Ejemplo:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c \le |\omega| < \pi \end{cases} \longleftrightarrow h[n] = \tfrac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc} \tfrac{\omega_c}{\pi}(n-\alpha)$$



Bibliografía: Oppenheim 5.7

Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Sistemas de fase lineal generalizada

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{-j\omega\alpha} \longrightarrow H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{-j(\omega\alpha-\beta)} : A(e^{j\omega}) \in R$$

Fase lineal — Fase lineal generalizada (GLP)

Ejemplo:
$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c \le |\omega| < \pi \end{cases}$$

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{M+1} \frac{\sin\left(\frac{M+1}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)} e^{-j\omega\frac{M}{2}}$$

$$H_3(e^{j\omega}) = \frac{j\omega}{T_s} \qquad |\omega| < \pi$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|A(e^{j\omega})\right|$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = \beta - \omega\alpha + \angle A(e^{j\omega}) \qquad |\omega| < \pi$$

$$grd\{H(e^{j\omega})\} = \alpha$$

Bibliografía: Oppenheim 5.7

H1 es un filtro paso bajo con retardo. H2 es un moving average de tamaño M y retardado M/2 para que sea causal. Diferenciador de tiempo continuo implementado en tiempo discreto. El retardo de grupo es constante pero para ello hay que obviar las discontinuidades introducidas por la fase de A(e^jw)

Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Si $\forall\omega : \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\sin(\omega(n-\alpha)+\beta) = 0$, entonces el sistema es GLP

Si $\beta \in \{0,\pi\}, 2\alpha \in Z, h[2\alpha - n] = h[n]$, entonces el sistema es GLP y $A(e^{j\omega})$ es par

Si $\beta \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}, 2\alpha \in Z, h[2\alpha - n] = -h[n]$, entonces el sistema es GLP y $A(e^{j\omega})$ es impar

Un sistema de fase 0 tiene todos sus polos y ceros en pares recíprocos conjugados.

Un sistema de fase lineal generalizada es un sistema de fase cero con polos o ceros adicionales en $z = 0, \pm 1, \infty$

Bibliografía: Oppenheim 5.7

La segunda condición es la que habíamos impuesto a los sistemas de fase lineal

Probl Opp: 5.15*, 5.16, 5.20, 5.50, 5.51, 5.69

Probl Pro: 4.100*

Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Sistemas de fase lineal generalizada causales

Si $\forall\omega: \sum_{n=0}^{\infty} h[n]\sin(\omega(n-\alpha)+\beta)=0$, entonces el sistema es GLP

Si $h[n]$ es FIR, causal y $h[n]=\begin{cases} h[M-n] & 0\le n\le M \\ 0 & resto \end{cases}$, entonces el sistema es GLP y $A(e^{j\omega})$ es real y par. $H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\omega\frac{M}{2}}$

Si $h[n]$ es FIR, causal y $h[n]=\begin{cases} -h[M-n] & 0\le n\le M \\ 0 & resto \end{cases}$, entonces el sistema es GLP y $A(e^{j\omega})$ es real e impar. $H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j(\omega\frac{M}{2}-\frac{\pi}{2})}$

Bibliografía: Oppenheim 5.7

Existen sistemas IIR que son causales y GLP, pero no se pueden expresar como un cociente de polinomios, y por lo tanto, no se pueden implementar como una ecuación en diferencias

Probl Opp: 5.40, 5.41, 5.42, 5.43, 5.44, 5.48, 5.53

Sistemas de fase lineal FIR de tipo I

$$h[n] = \begin{cases} h[M-n] & 0 \le n \le M \\ 0 & resto \end{cases} \qquad M = 2m$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M} h[n]e^{-j\omega n} = h[\tfrac{M}{2}]e^{-j\omega\frac{M}{2}} + \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1}\left(h[n]e^{-j\omega n} + h[M-n]e^{-j\omega(M-n)}\right) =$$

$$= h[\tfrac{M}{2}]e^{-j\omega\frac{M}{2}} + \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h[n]e^{-j\omega\frac{M}{2}}\left(e^{j\omega(\frac{M}{2}-n)} + e^{-j\omega(\frac{M}{2}-n)}\right) = e^{-j\omega\frac{M}{2}}\left(h[\tfrac{M}{2}] + \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} 2h[n]\cos\left(\omega(\tfrac{M}{2}-n)\right)\right)$$

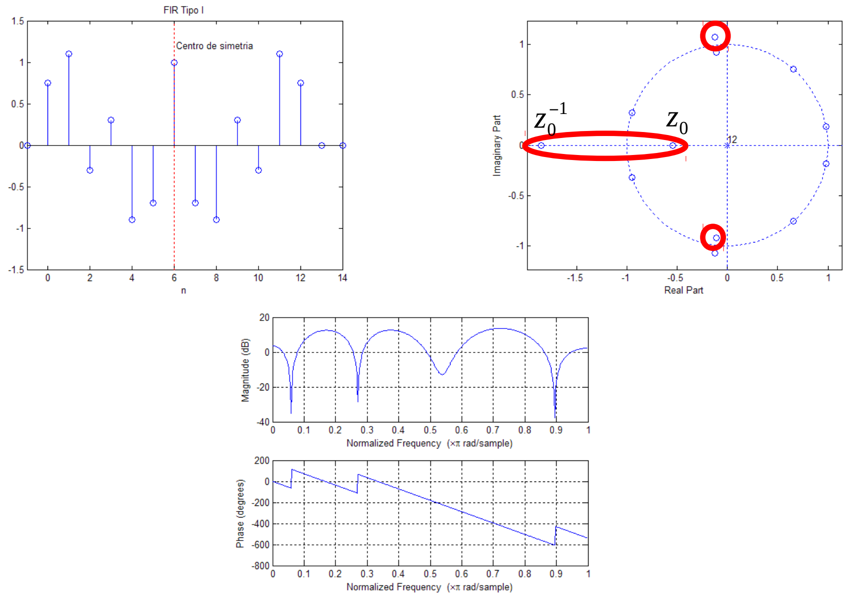
$$= e^{-j\omega\frac{M}{2}}\left(h[\tfrac{M}{2}] + \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} 2h[\tfrac{M}{2}-k]\cos\left(\omega k\right)\right) = A(e^{j\omega})e^{-j\omega\frac{M}{2}}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{M} h[M-n]z^{-n} = \sum_{k=0}^{M} h[k]z^{k-M} = z^{-M}H(z^{-1})$$

Si $H(z_0) = 0$, entonces $H(z_0^{-1}) = 0$

Bibliografía: Oppenheim 5.7

Sistemas de fase lineal FIR de tipo I

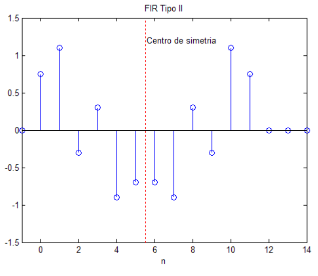


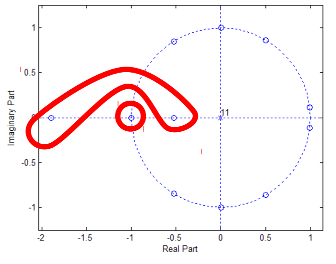
Bibliografía: Oppenheim 5.7

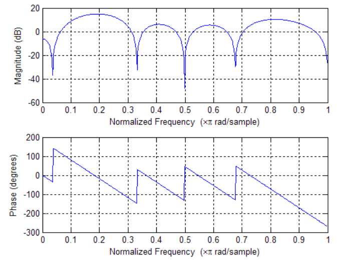
Sistemas de fase lineal FIR de tipo II

$$h[n]=\begin{cases} h[M-n] & 0\le n\le M \\ 0 & resto \end{cases} \qquad M=2m+1$$

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\omega\frac{M}{2}}\sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}}2h[\tfrac{M-1}{2}-k]\cos\left(\omega(k-\tfrac{1}{2})\right)$$







$$H(z)=z^{-M}H(z^{-1}) \xrightarrow{z=-1} H(-1)=-H(-1)\Rightarrow H(-1)=0$$

Bibliografía: Oppenheim 5.7

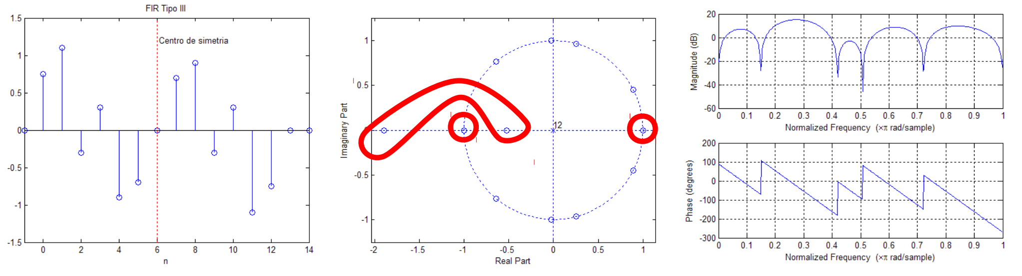
El cero en -1 es una cosa característica de estos filtros. H(z)=z^-MH(z^-1) viene del tipo I pero el desarrollo es el mismo para el tipo II. Ejercicio: calcular la TF

Probl Opp: 5.52

Sistemas de fase lineal FIR de tipo III

$$h[n] = \begin{cases} -h[M-n] & 0 \le n \le M \\ 0 & resto \end{cases} \qquad M = 2m$$

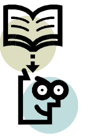
$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega\frac{M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} 2h[\tfrac{M}{2} - k]\sin(\omega k)$$



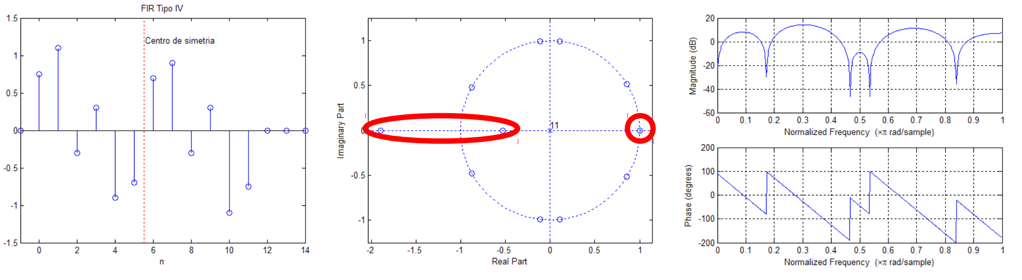
Bibliografía: Oppenheim 5.7

Sistemas de fase lineal FIR de tipo IV

$$h[n] = \begin{cases} -h[M-n] & 0 \le n \le M \\ 0 & resto \end{cases} \qquad M = 2m+1$$



$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega\frac{M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} 2h[\tfrac{M-1}{2} - k] \sin\left(\omega(k - \tfrac{1}{2})\right)$$



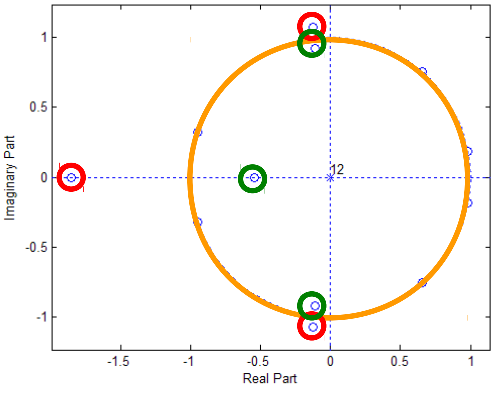
Bibliografía: Oppenheim 5.7

Probl Opp: 5.23, 5.56, 5.70

Probl Pro: 4.78

Descomposición de un sistema FIR

$$H(z) = k\, H_{\min}(z)\, H_{circ}(z)\, H_{\max}(z)$$



$$H_{\max}(z) = H_{\min}(z^{-1})z^{-M_i}$$

M_i es el número de ceros de $H_{\min}(z)$

$$\left|H_{\max}(e^{j\omega})\right| = \left|H_{\min}(e^{-j\omega})\right| = \left|H_{\min}(e^{j\omega})\right|$$

$$k = \frac{h[0]}{\prod |z_{\min}|}$$

Bibliografía: Oppenheim 5.7

hmax es el fliplr de hmin (todo en el dominio del tiempo)

Descomposición de un sistema FIR

Ejemplo:

$$h[n] = 0.75\delta[\mathrm{n}] + 1.1\delta[\mathrm{n-1}] - 0.3\delta[\mathrm{n-2}] + 0.3\delta[\mathrm{n-3}] - 0.9\delta[\mathrm{n-4}] - 0.7\delta[\mathrm{n-5}]$$

$$+\delta[\mathrm{n-6}]$$

$$+0.75\delta[\mathrm{n-7}] + 1.1\delta[\mathrm{n-8}] - 0.3\delta[\mathrm{n-9}] + 0.3\delta[\mathrm{n-10}] - 0.9\delta[\mathrm{n-11}] - 0.7\delta[\mathrm{n-12}]$$

$$H_{\min}(z) = \left(1 + 0.5412z^{-1}\right)\left(1 - 0.9242e^{j1.6881}z^{-1}\right)\left(1 - 0.9242e^{-j1.6881}z^{-1}\right)$$

$$h_{\min}[n] = \delta[\mathrm{n}] + 0.7574\delta[\mathrm{n-1}] + 0.9711\delta[\mathrm{n-2}] + 0.4622\delta[\mathrm{n-3}]$$

$$H_{\max}(z) = \left(0.9242^2 0.5412\right)\left(1 + 1.8479z^{-1}\right)\left(1 - 1.0821e^{j1.6881}z^{-1}\right)\left(1 - 1.0821e^{-j1.6881}z^{-1}\right)$$

$$h_{\max}[n] = 0.4622\delta[\mathrm{n}] + 0.9711\delta[\mathrm{n-1}] + 0.7574\delta[\mathrm{n-2}] + \delta[\mathrm{n-3}]$$

$$H_{circ}(z) = \left(1 + e^{j0.1852}z^{-1}\right)\left(1 + e^{-j0.1852}z^{-1}\right)\left(1 + e^{j0.8512}z^{-1}\right)\left(1 + e^{-j0.8512}z^{-1}\right)\left(1 + e^{j2.8118}z^{-1}\right)\left(1 + e^{-j2.8118}z^{-1}\right)$$

$$k = \frac{0.75}{0.9242^2 0.5412}$$

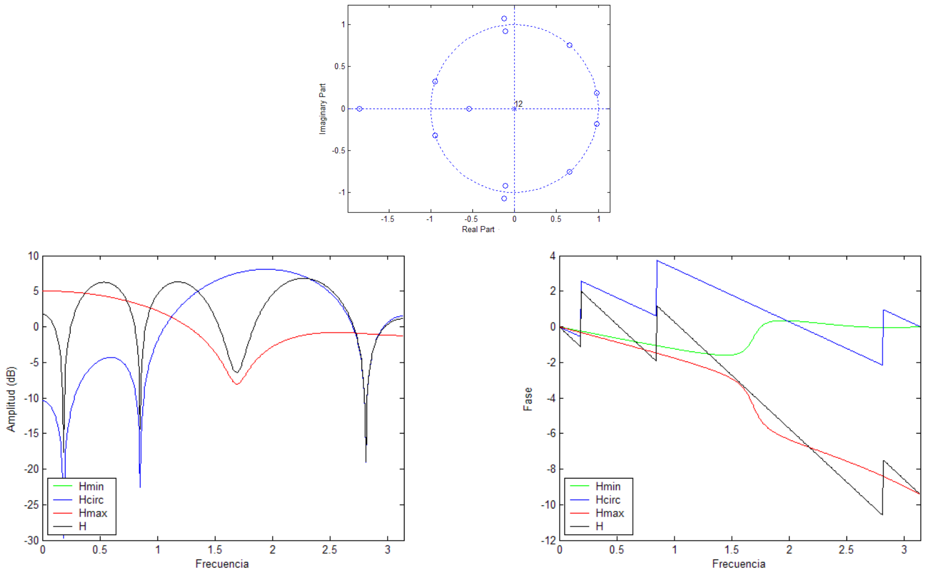
Bibliografía: Oppenheim 5.7

El 1/6.9034 de Hmax es para hacer que tenga ganancia 1 a frecuencia 0. 6.9034 es la suma de todos los coeficientes de hmax

Probl Opp: 5.12*, 5.38, 5.45, 5.46, 5.64

Probl Pro: 4.109*

Descomposición de un sistema FIR



Bibliografía: Oppenheim 5.7

Resumen

- Filtros definidos por un sistema racional
- Propiedades (estabilidad, causalidad, invertibilidad)
- Retardo de grupo
- Respuestas tipo: 1 cero, 1 polo, 2 polos
- Relación magnitud-fase
- Sistemas paso-todo
- Sistemas de fase mínima
- Sistemas de fase lineal generalizada
  - Filtros FIR

Probl Opp: 5.58, 5.68

Probl Pro: 4.95, 4.97, 4.105