Importante: Recuerde mencionar los resultados teóricos que usa para la resolución de los problemas, y justificar por qué se pueden usar verificando las condiciones de los resultados cuando sea necesario.
Aquellos estudiantes a los que se ha ofrecido una parte A alternativa, la encontrarán al final del examen.
Duración del examen: 2 horas. Recuerde distribuir su tiempo para contestar los problemas de cada parte de la asignatura. No se permite el use de ningún tipo de material ni calculadora.

Parte A. Variable compleja.

Problema 1. (1,25 puntos)
a) Enunciar el Principio del Argumento.
b) Calcular

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\ ,$$

siendo $f(z) = 2z^4 - 5z^3 + iz + 1$ y C la circunferencia $\{z, |z| = 2\}$ orientada en sentido negativo.

Problema 2. (1,25 puntos)
Calcular, usando teoría de residuos, la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx\,.$$

Parte B. Espacios de Hilbert.

Problema 3. (2 puntos)

a) Dar la definición de dual topológico de un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$, siendo E un espacio complejo.
b) Demostrar que

$$g : \ell_2 \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ g((x_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} i^n x_n/2^n$$

está en el dual topológico de ℓ_2. Calcular su norma.
c) Enunciar el Teorema de Riesz para funcionales, y encontrar el elemento correspondiente a la función g del apartado b) que verifica el teorema.

Problema 4. (3 puntos)

Sea $E = L^2[a,b]$, considerado éste como espacio de funciones reales de variable real.
a) Dar una base ortogonal explícita (no con una fórmula recursiva) de E, y la expresión de un elemento cualquiera $f \in E$ respecto a esa base.
b) Calcular el espectro del operador posición

$$\hat{x}(f(x)) = xf(x)$$

en $L^2[a,b]$. Determinar las componentes puntual, continua y residual del espectro.

Parte C. Ecuaciones Diferenciales.

Problema 5. (2,5 puntos)
El siguiente sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - x \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{5x^2}{4 + x^2} - y \\ 0 \le x < \infty&, \ 0 \le y < \infty \end{aligned}$$

ha sido propuesto como modelo para la diferenciación celular.
a) Determine los puntos críticos.
b) Determine la naturaleza de cada uno de ellos (p. ej., foco estable, nodo, punto de ensilladura, etc.)

Parte A (alternativa). Transformadas de Laplace. (Sólo para los que hayan podido optar por el temario alternativo.)

Problema 6. (2,5 puntos)
Resolver, usando transformadas de Laplace, el problema de valor inicial

$$y'' + 2y' = \delta(t-1), y(0) = 0, \ y'(0) = 1,$$

donde δ denota la función delta de Dirac.