Importante: Recuerde mencionar los resultados teóricos que usa para la resolución de los problemas, y justificar por qué se pueden usar verificando las condiciones de los resultados cuando sea necesario.
Duración del examen: 2 horas. Recuerde distribuir su tiempo para contestar los problemas de cada parte de la asignatura. Se permite el uso de calculadora no programable.

Parte A. Ecuaciones diferenciales

Problema 1. (2,5 puntos)

Considere el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x,y) = 8x - y^2\\ \frac{dy}{dt} &= g(x,y) = x^2 - y\end{aligned}$$

a) Halle los puntos críticos (fijos) de este sistema.
b) Dibuje las curvas $f(x,y) = 0$ y $g(x,y) = 0$, cuyas intersecciones señalan los puntos críticos.
c) Evalúe la estabilidad lineal de cada punto crítico y señale qué tipo de punto es (nodo, foco, etc.).

Parte B. Variable compleja

Problema 2. (2,5 puntos)

Calcular, usando las técnicas de la asignatura, la integral

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}dx\,.$$

Parte C. Espacios de Hilbert

Problema 3. (2 puntos)

Determinar, en $L_2[-1,1]$, los cuatro primeros polinomios de Legendre, a partir de los polinomios x^n, $n = 0,1,2,\ldots$. Calcular la proyección ortogonal de

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 3 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases},$$

en $L_2[-1,1]$, sobre el espacio generado por esos cuatro polinomios.

Problema 4. (3 puntos)

Dada la función

$$h(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ -1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases},$$

definimos el operador

$$\begin{array}{rccc} T: & L_2(\mathbb{R}) & \to & L_2(\mathbb{R}) \\ & f(x) & \mapsto & f(x)h(x) \end{array}.$$

Por simplicidad, consideremos $L_2(\mathbb{R})$ formado por funciones reales de variable real.
a) ¿Es T continuo?
b) Determinar el espectro puntual de T, los autoespacios asociados a los autovalores, y la dimensión de los mismos.
c) Determinar el espectro continuo de T, y sucesiones de Weyl asociados a los valores espectrales del espectro continuo.