Importante: Recuerde mencionar los resultados teóricos que usa para la resolución de los problemas, y justificar por qué se pueden usar verificando las condiciones de los resultados cuando sea necesario.
Aquellos estudiantes a los que se ha ofrecido una parte B alternativa, la encontrarán al final del examen.
Duración del examen: 2 horas. Recuerde distribuir su tiempo para contestar los problemas de cada parte de la asignatura. No se permite el uso de ningún tipo de material ni calculadora.

Parte A. Ecuaciones diferenciales.

Problema 1. (2,5 puntos)

Considere el sistema

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= 2u - uv \\ \frac{dv}{dt} &= -9v + 3uv \end{aligned}$$

a) Ecuentre los puntos críticos o de equilibrio.
b) Caracterice la naturaleza de cada uno de los puntos críticos (nodo, punto de ensilladura, etc.)

Parte B. Variable compleja.

Problema 2. (2,5 puntos)

Calcular, usando las técnicas de la asignatura, la integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{(4+x^2)^2}\,dx\,.$$

Parte C. Espacios de Hilbert.

Problema 3. (2 puntos)

Determinar la norma (quizá infinita) del siguiente funcional lineal definido en $L_2(\mathbb{R})$:

$$T(f) = \int_{-1}^{4} \frac{(1+i)f(x) + f(x+2)}{x^{1/4}}dx\,.$$

¿Es T continuo?

Problema 4. (3 puntos)

Determinar el espectro, y sus componentes puntual, continua y residual, del operador posición en $L_2[-2,2]$ (tómese, por simplicidad, el espacio real):

$$\begin{array}{rccc} \hat{x}: & L_2[-2,2] & \to & L_2[-2,2] \\ & f(x) & \mapsto & xf(x) \end{array} .$$

Parte B (alternativa). Transformadas de Laplace. (Sólo para los que hayan podido optar por el temario alternativo.)

Problema 5. (2,5 puntos)
Resolver, usando la transformada de Laplace, la ecuación íntegro-diferencial

$$y'(t) = 1 - \int_0^t y(t-v)e^{-2v}dv\,,\ y(0) = 1\,.$$