Importante: Recuerde mencionar los resultados teóricos que usa para la resolución de los problemas, y justificar por qué se pueden usar verificando las condiciones de los resultados cuando sea necesario.
Duración del examen: 2 horas. Recuerde distribuir su tiempo para contestar los problemas de cada parte de la asignatura. Se permite el uso de calculadora no programable.

Parte A. Ecuaciones diferenciales

Problema 1. (2,5 puntos)

El modelo de dinámica de poblaciones biológicas de Holling-Tanner para una interacción entre una presa X y un depredador Y. Si sus poblaciones respectivas son $x(t)$ y $y(t)$, las ecuaciones del modelo son:

$$\frac{dx}{dt} = x\left(1 - \frac{x}{7}\right) - \frac{6xy}{(7+7x)}; \quad \frac{dy}{dt} = 0,2y\left(1 - \frac{2,5y}{x}\right)$$

a) Halle únicamente los puntos críticos con sentido físico, su estabilidad lineal y diga de qué tipo son.
b) Dibuje a mano alzada un esquema del plano de fases del sistema no lineal original. No necesita ser preciso, solo el esquema.
(Ayuda: $\sqrt{1024} = 32$)

Parte B. Variable compleja

Problema 2. (2,5 puntos)

Calcular, usando las técnicas de la asignatura, la integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{(4+x^2)^2}\,dx\,.$$

Parte C. Espacios de Hilbert

Problema 3. (2 puntos)

Determinar la norma (quizá infinita) del siguiente funcional lineal definido en $L_2(\mathbb{R})$:

$$T(f) = \int_0^2 \frac{(1+i)f(x) + f(x+2)}{x^{1/4}}dx\,.$$

¿Es T continuo?

Problema 4. (3 puntos)
Sea η una raíz séptima de la unidad ($j \in \mathbb{N}$), y $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} = (\frac{1}{2}, \eta, \frac{1}{4}, \eta^2, \frac{1}{8}, \eta^3, \frac{1}{16}, \eta^4, ...)$. Y sea $T : \ell_2 \to \ell_2$ el operador dado por

$$T(x_1, x_2, ...) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, ...) = (\lambda_n x_n)_{n=1}^{\infty}.$$

a) Decidir si T es acotado, y calcular $\|T\|$ en su caso. ¿Es T continuo?
b) Calcular el adjunto de T.
c) Calcular las componentes puntual y continua del espectro de T.
d) Determinar cada autoespacio y su dimensión.