

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.5 Sistemas de ecuaciones lineales

LIBRO
LAS MATRICES SON FÁCILES
José Manuel Casteleiro

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS LINEALES

SISTEMAS LINEALES

TIENE SOLUCIÓN
SISTEMA COMPATIBLE

NO TIENE SOLUCIÓN
SISTEMA INCOMPATIBLE

SOLUCIÓN ÚNICA
SISTEMA COMPATIBLE
DETERMINADO

INFINITAS SOLUCIONES
SISTEMA COMPATIBLE
INDETERMINADO

EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x + b_{12}y + c_{13}z + \dots e_{1m}t &= D_1 \\ a_{21}x + b_{22}y + c_{23}z + \dots e_{2m}t &= D_2 \\ a_{31}x + b_{32}y + c_{33}z + \dots e_{3m}t &= D_3 \\ &\vdots \\ a_{n1}x + b_{n2}y + c_{n3}z + \dots e_{nm}t &= D_n \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} & \dots & e_{1m} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} & \dots & e_{2m} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} & \dots & e_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_{n2} & c_{n3} & \dots & e_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \vdots \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix} \longrightarrow AX = D$$

MATRIZ DE COEFICIENTES A
VECTOR DE INCÓGNITAS X

VECTOR DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES D

Ejemplo 4.4 Expresar el siguiente sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas en forma matricial

$$\left. \begin{aligned} 3x + 6y + z - t &= 1 \\ 2x + 3y + 3z + 5t &= -2 \\ x + 2y + 8t &= 3 \\ -5x + y + 4z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

x y z t

VECTOR DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES D

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \\ -5 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE COEFICIENTES A

VECTOR DE INCÓGNITAS X

\rightarrow $AX = D$

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR EL MÉTODO DE GAUSS

PROCESO

Situación inicial

1º) Expresar sistema en forma de matriz ampliada.

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x + b_{12}y + c_{13}z + d_{14}t &= D_1 \\ a_{21}x + b_{22}y + c_{23}z + d_{24}t &= D_2 \\ a_{31}x + b_{32}y + c_{33}z + d_{34}t &= D_3 \\ a_{41}x + b_{42}y + c_{43}z + d_{44}t &= D_4 \end{aligned} \right\}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} x & y & z & t & \\ a_{11} & b_{12} & c_{13} & d_{14} & D_1 \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} & d_{24} & D_2 \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} & d_{34} & D_3 \\ a_{41} & b_{42} & c_{43} & d_{44} & D_4 \end{bmatrix}$$

2º) Triangular superiormente.

3º) Analizar la situación final y resolver.

Situación final: Hay 3 posibles

$$A^* = \begin{bmatrix} x & y & z & t & \\ a_{11} & b_{12} & c_{13} & d_{14} & D_1 \\ 0 & b_{22} & c_{23} & d_{24} & D_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & d_{34} & D_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & D_4 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow (a_{11})x + (b_{12})y + (c_{13})z + (d_{14})t &= D_1 & \rightarrow x \\ \rightarrow (b_{22})y + (c_{23})z + (d_{24})t &= D_2 & \rightarrow y \\ \rightarrow (c_{33})z + (d_{34})t &= D_3 & \rightarrow z \\ \rightarrow (d_{44})t &= D_4 & \rightarrow t \end{aligned} \right\}$$

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR EL MÉTODO DE GAUSS PROCESO

Situaciones finales

1a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ 0 & b'_2 & c'_2 & d'_2 & e'_2 \\ 0 & 0 & c''_3 & d''_3 & e''_3 \\ 0 & 0 & 0 & d''''_4 & e''''_4 \end{array} \right]$$

**SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO
SOLUCIÓN ÚNICA**

VALOR DISTINTO DE CERO

2a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ 0 & b'_2 & c'_2 & d'_2 & e'_2 \\ 0 & 0 & c''_3 & d''_3 & e''_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

**SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO
INFINITAS SOLUCIONES**

FILA DE CEROS

3a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ 0 & b'_2 & c'_2 & d'_2 & e'_2 \\ 0 & 0 & c''_3 & d''_3 & e''_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e''''_4 \end{array} \right]$$

**SISTEMA INCOMPATIBLE
SIN SOLUCIÓN**

VALOR DISTINTO DE CERO

Ejemplo 4.7. Hallar la solución del siguiente sistema:

MÉTODO DE GAUSS

$$\left. \begin{array}{l} -x - 2y + 3t = 1 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ -2x - 2y - 3z + t = 0 \\ x + y + 2z = -1 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{cccc|c} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{t} & \\ \hline -1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}$$

COLUMNA DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES

COLUMNA PARA EMPEZAR

$$\begin{array}{cccc|c}
 \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{t} & \\
 \hline
 -1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\
 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\
 -2 & -2 & -3 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 2 & 0 & -1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} & \\
 \hline
 3 & -2 & 0 & -1 & 1 \\
 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\
 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & -1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} & \\
 \hline
 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\
 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\
 3 & -2 & 0 & -1 & 1 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & -1
 \end{array}$$

(-3)

$$\begin{array}{cccc|c}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} & \\
 \hline
 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\
 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\
 0 & 4 & 9 & 5 & 1 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & -1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} & \\
 \hline
 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\
 0 & 4 & 9 & 5 & 1 \\
 0 & 2 & 2 & 1 & 0
 \end{array}$$

$(-2)(-4)$

$$\begin{array}{cccc|c}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} & \\
 \hline
 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\
 0 & 0 & -2 & -1 & 2
 \end{array}$$

(2)

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO SOLUCIÓN ÚNICA

$$\begin{array}{cccc|c} \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} & \\ \hline 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}$$

$$\rightarrow t - 2y - 3z - 2x = 0$$

$$\rightarrow y + 2z + x = -1$$

$$\rightarrow z + x = 5$$

$$\rightarrow x = 12$$

$$\rightarrow t = 5$$

$$\rightarrow y = 1$$

$$\rightarrow z = -7$$

$$\rightarrow x = 12$$

VALOR DISTINTO DE CERO

Ejemplo 4.7. Hallar la solución del siguiente sistema:

MÉTODO DE GAUSS

$$\left. \begin{array}{l} -x - 2y + 3t = 1 \\ 2y + 2z = 0 \\ -2x - 2y - 3z + t = 0 \\ x + y + 2z = -1 \end{array} \right\}$$

| x | y | z | t | |
|----------|----------|----------|----------|----|
| -1 | -2 | 0 | 3 | 1 |
| 0 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| -2 | -2 | -3 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 2 | 0 | -1 |

COLUMNA DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES

COLUMNA PARA EMPEZAR

$$\begin{array}{cccc|c}
 \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{t} & \\
 \hline
 -1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\
 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\
 -2 & -2 & -3 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 2 & 0 & -1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} & \\
 \hline
 3 & -2 & 0 & -1 & 1 \\
 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\
 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & -1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} & \\
 \hline
 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\
 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\
 3 & -2 & 0 & -1 & 1 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & -1
 \end{array}$$

(-3)

$$\begin{array}{cccc|c}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} & \\
 \hline
 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\
 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\
 0 & 4 & 9 & 5 & 1 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & -1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} & \\
 \hline
 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\
 0 & 4 & 9 & 5 & 1 \\
 0 & 2 & 2 & 0 & 0
 \end{array}$$

$(-2)(-4)$

$$\begin{array}{cccc|c}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} & \\
 \hline
 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\
 0 & 0 & -2 & -2 & 2
 \end{array}$$

(2)

SISTEMA INCOMPATIBLE SIN SOLUCIÓN

$$\begin{array}{cccc|c} \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} & \\ \hline 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}$$

VALOR DISTINTO DE CERO

Ejemplo 4.9. Hallar la solución del siguiente sistema:

MÉTODO DE GAUSS

$$\left. \begin{array}{l} -x - 2y + 3t = 1 \\ 2y + 2z = -12 \\ -2x - 2y - 3z + t = 0 \\ x + y + 2z = -1 \end{array} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{t} & \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \mathbf{0} & -12 \\ -2 & -2 & -3 & \mathbf{1} & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \mathbf{0} & -1 \end{array} \right]$$

COLUMNA DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES

COLUMNA PARA EMPEZAR

$$\begin{array}{cccc|c}
 \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{t} & \\
 \hline
 -1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\
 0 & 2 & 2 & 0 & -12 \\
 -2 & -2 & -3 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 2 & 0 & -1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} & \\
 \hline
 3 & -2 & 0 & -1 & 1 \\
 0 & 2 & 2 & 0 & -12 \\
 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & -1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} & \\
 \hline
 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\
 0 & 2 & 2 & 0 & -12 \\
 3 & -2 & 0 & -1 & 1 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & -1
 \end{array}$$

(-3)

$$\begin{array}{cccc|c}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} & \\
 \hline
 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\
 0 & 2 & 2 & 0 & -12 \\
 0 & 4 & 9 & 5 & 1 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & -1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} & \\
 \hline
 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\
 0 & 4 & 9 & 5 & 1 \\
 0 & 2 & 2 & 0 & -12
 \end{array}$$

$(-2)(-4)$

$$\begin{array}{cccc|c}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} & \\
 \hline
 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\
 0 & 0 & -2 & -2 & -10
 \end{array}$$

(2)

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO INFINITAS SOLUCIONES

$$\begin{array}{cccc|c}
 & \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} & \\
 \hline
 & 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\
 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

FILA DE CEROS

$$\begin{array}{cccc|c}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} & \\
 \hline
 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 5
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \rightarrow t - 2y - 3z - 2x = 0 \\
 \rightarrow y + 2z + x = -1 \\
 \rightarrow z + x = 5 \quad \rightarrow x = 5 - z
 \end{array}$$

RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{l}
 t - 2(-6 - z) - 3z - 2(5 - z) = 0 \\
 y + 2z + 5 - z = -1 \\
 x = 5 - z
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{cases}
 t = -z - 2 \\
 y = -6 - z \\
 x = 5 - z
 \end{cases}$$

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x + b_{12}y + c_{13}z + \dots e_{1m}t &= 0 \\ a_{21}x + b_{22}y + c_{23}z + \dots e_{2m}t &= 0 \\ a_{31}x + b_{32}y + c_{33}z + \dots e_{3m}t &= 0 \\ \vdots & \\ a_{n1}x + b_{n2}y + c_{n3}z + \dots e_{nm}t &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} & \dots & e_{1m} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} & \dots & e_{2m} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} & \dots & e_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_{n2} & c_{n3} & \dots & e_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \vdots \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{AX} = \mathbf{[0]}$$

MATRIZ DE COEFICIENTES A

VECTOR DE INCÓGNITAS X

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS HOMOGÉNEOS POR EL MÉTODO DE GAUSS

SITUACIÓN INICIAL

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



SITUACIÓN FINAL

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b'_2 & c'_2 & d'_2 \\ 0 & 0 & c''_3 & d''_3 \\ 0 & 0 & 0 & d''''_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t = 0 \\ &\rightarrow b'_2 y + c'_2 z + d'_2 t = 0 \\ &\rightarrow c''_3 z + d''_3 t = 0 \\ &\rightarrow d''''_4 t = 0 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow x = 0 \\ \rightarrow y = 0 \\ \rightarrow z = 0 \\ \rightarrow t = 0 \end{array} \right.$$

SOLUCIÓN TRIVIAL

**SISTEMA HOMOGÉNEO
COMPATIBLE DETERMINADO**

FORMA OPERATIVA

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{t} \\ \left[\begin{array}{cccc} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{array} \right] \end{array}$$

SITUACIONES FINALES

1ª SITUACIÓN FINAL

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{t} \\ \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b'_2 & c'_2 & d'_2 \\ 0 & 0 & c''_3 & d''_3 \\ 0 & 0 & 0 & d''''_4 \end{array} \right]}_{\mathbf{A}} & & & \\ & & & & \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right]}_{\mathbf{A}^*} \end{array}$$

$$\text{Rg}(\mathbf{A}) = \text{Rg}(\mathbf{A}^*)$$

SISTEMA COMPATIBLE

$$\text{Rg}(\mathbf{A}) = \text{N}^\circ \text{ incógnitas}$$

SISTEMA DETERMINADO

**VALOR DISTINTO DE CERO
SOLUCIÓN TRIVIAL**

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

SITUACIONES FINALES

1ª)

$$\begin{array}{cccc|c} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{t} & \\ \hline a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 \\ 0 & b'_2 & c'_2 & d'_2 & 0 \\ 0 & 0 & c''_3 & d''_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d'''_4 & 0 \end{array}$$

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

VALOR DISTINTO DE CERO

2ª)

$$\begin{array}{cccc|c} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{t} & \\ \hline a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 \\ 0 & b'_2 & c'_2 & d'_2 & 0 \\ 0 & 0 & c''_3 & d''_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

**SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO
INFINITAS SOLUCIONES**

FILA DE CEROS

Ejemplo 4.10. Hallar la solución del siguiente sistema:

**MÉTODO DE
GAUSS**

$$\left. \begin{array}{l} -x - 2y + 3t = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ -2x - 2y - 3z + t = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{array} \right\}$$

FORMA OPERATIVA

| x | y | z | t |
|----------|----------|----------|----------|
| -1 | -2 | 0 | 3 |
| 1 | 2 | 2 | 0 |
| -2 | -2 | -3 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |

COLUMNA PARA EMPEZAR

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{t} \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 -1 & -2 & 0 & 3 \\
 1 & 2 & 2 & 0 \\
 -2 & -2 & -3 & 1 \\
 1 & 1 & 2 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 3 & -2 & 0 & -1 \\
 0 & 2 & 2 & 1 \\
 1 & -2 & -3 & -2 \\
 0 & 1 & 2 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} \\
 \begin{array}{c} (-3) \\ \downarrow \\ \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc}
 1 & -2 & -3 & -2 \\
 0 & 2 & 2 & 1 \\
 3 & -2 & 0 & -1 \\
 0 & 1 & 2 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 1 & -2 & -3 & -2 \\
 0 & 2 & 2 & 1 \\
 0 & 4 & 9 & 5 \\
 0 & 1 & 2 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} \\
 \begin{array}{c} (-2)(-4) \\ \downarrow \downarrow \\ \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc}
 1 & -2 & -3 & -2 \\
 0 & 1 & 2 & 1 \\
 0 & 4 & 9 & 5 \\
 0 & 2 & 2 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} \\
 \begin{array}{c} (2) \\ \downarrow \\ \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc}
 1 & -2 & -3 & -2 \\
 0 & 1 & 2 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & -2 & -1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO SOLUCIÓN TRIVIAL

| t | y | z | x | | |
|----------|----------|----------|----------|---|------------------------|
| 1 | -2 | -3 | -2 | → | $t - 2y - 3z - 2x = 0$ |
| 0 | 1 | 2 | 1 | → | $y + 2z + x = 0$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | → | $z + x = 0$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | → | $x = 0$ |

VALOR DISTINTO DE CERO

$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow t = 0 \\ \rightarrow y = 0 \\ \rightarrow z = 0 \\ \rightarrow x = 0 \end{array} \right.$

Ejemplo 4.7. Hallar la solución del siguiente sistema:

**MÉTODO DE
GAUSS**

$$\left. \begin{array}{l} -x - 2y + 3t = 0 \\ 2y + 2z = 0 \\ -2x - 2y - 3z + t = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{array} \right\}$$

FORMA OPERATIVA

| x | y | z | t |
|----------|----------|----------|----------|
| -1 | -2 | 0 | 3 |
| 0 | 2 | 2 | 0 |
| -2 | -2 | -3 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |

COLUMNA PARA EMPEZAR

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{t} \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 -1 & -2 & 0 & 3 \\
 0 & 2 & 2 & 0 \\
 -2 & -2 & -3 & 1 \\
 1 & 1 & 2 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 3 & -2 & 0 & -1 \\
 0 & 2 & 2 & 0 \\
 1 & -2 & -3 & -2 \\
 0 & 1 & 2 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 1 & -2 & -3 & -2 \\
 0 & 2 & 2 & 0 \\
 3 & -2 & 0 & -1 \\
 0 & 1 & 2 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

(-3)

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 1 & -2 & -3 & -2 \\
 0 & 2 & 2 & 0 \\
 0 & 4 & 9 & 5 \\
 0 & 1 & 2 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 1 & -2 & -3 & -2 \\
 0 & 1 & 2 & 1 \\
 0 & 4 & 9 & 5 \\
 0 & 2 & 2 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$(-2)(-4)$

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 1 & -2 & -3 & -2 \\
 0 & 1 & 2 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & -2 & -2
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

(2)

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO INFINITAS SOLUCIONES

$$\begin{array}{cccc}
 & \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 1 & -2 & -3 & -2 \\
 0 & 1 & 2 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

FILA DE CEROS

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{t} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 1 & -2 & -3 & -2 \\
 0 & 1 & 2 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1
 \end{array} \right] & \rightarrow & t - 2y - 3z - 2x = 0 \\
 & \rightarrow & y + 2z + x = 0 \\
 & \rightarrow & z + x = 0 & \rightarrow x = -z
 \end{array}$$

RESOLUCIÓN

$$t - 2(-z) - 3z - 2(-z) = 0$$

$$y + 2z - z = 0$$

$$x = -z$$

$$\longrightarrow x = y = t = -z$$

SISTEMAS DEPENDIENTES DE PARÁMETROS

Ejemplo 4.17. Discutir y, en los casos en que sea posible, resolver el siguiente sistema en función del parámetro a :

$$\left. \begin{aligned} x + y + az + at &= 2 \\ -x - ay - 3z + 4t &= -2 \\ x + y + az + 2at &= 2 \\ -x - y + 3z + 3t &= 1 + a \end{aligned} \right\}$$

FORMA OPERATIVA

$$\begin{array}{c} (1) \quad (-1) \quad (1) \\ \left[\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1 & 1 & a & a & 2 \\ -1 & -a & -3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & a & 2a & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & 1+a \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1 & 1 & a & a & 2 \\ 0 & 1-a & -3+a & 4+a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3+a & 3+a & 3+a \end{array} \right] \end{array}$$

SOLUCIONES EN FUNCIÓN DEL PARÁMETRO

$$\begin{array}{cccc|c} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{t} & \\ \hline 1 & 1 & a & a & 2 \\ 0 & 1-a & -3+a & 4+a & 0 \\ 0 & 0 & 3+a & 3+a & 3+a \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{array}$$

CEROS DIAGONAL PRINCIPAL

$$1) \rightarrow 1-a=0 \rightarrow a=1$$

$$2) \rightarrow 3+a=0 \rightarrow a=-3$$

$$3) \rightarrow a=0 \rightarrow a=0$$

$a = 1$

SOLUCIONES EN FUNCIÓN DEL PARÁMETRO

1ª SOLUCIÓN

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1 & 1 & a & a & 2 \\ 0 & 1-a & -3+a & 4+a & 0 \\ 0 & 0 & 3+a & 3+a & 3+a \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

SISTEMA INCOMPATIBLE

CERO EN LA DIAGONAL PRINCIPAL

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1 & 1 & a & a & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1 & 1 & a & a & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1 & 1 & a & a & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{t} & \\ \hline 1 & 1 & a & a & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}$$

VALOR DISTINTO DE CERO

SISTEMA INCOMPATIBLE

$$a = -3$$

2ª SOLUCIÓN

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1 & 1 & a & a & 2 \\ 0 & 1-a & -3+a & 4+a & 0 \\ 0 & 0 & 3+a & 3+a & 3+a \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1 & 1 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}$$

**SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO
INFINITAS SOLUCIONES**

FILA DE CEROS

RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1 & 1 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - 3z - 3t = 2 \\ 4y - 6z + t = 0 \\ -3t = 0 \longrightarrow t = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x + y - 3z = 2 \\ 4y - 6z = 0 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 3z = 2 \\ y = \frac{3}{2}z \end{array} \right\} x + \left(\frac{3}{2}z\right) - 3z = 2 \longrightarrow x = \frac{3}{2}z + 2$$

$$y = \frac{3}{2}z$$

$a = 0$

3ª SOLUCIÓN

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1 & 1 & a & a & 2 \\ 0 & 1-a & -3+a & 4+a & 0 \\ 0 & 0 & 3+a & 3+a & 3+a \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

**SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO
INFINITAS SOLUCIONES**

RESOLUCIÓN

FILA DE CEROS

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ y - 3z + 4t = 0 \\ 3z + 3t = 3 \rightarrow z = 1 - t \end{array} \right\} \begin{array}{l} y - 3(1 - t) + 4t = 0 \\ y = 3 - 7t \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ y = 3 - 7t \end{array} \right\} x + 3 - 7t = 2 \rightarrow x = 7t - 1$$

$$y = 3 - 7t$$

EJERCICIOS CASA

Página 276: 1 al 5

Vídeo explicación sistemas:

<https://www.youtube.com/watch?v=GBrv2sPIO6k>