Física Cuántica. 3° Físicas. Grupo 34

Curso 1999-2000. Examen Final. 26 Junio 2000

1. Un protón moviendose en un nucleo puede describirse como una partícula de masa m confinada a un pozo unidimensional de paredes infinitas y anchura a. Supongamos que el protón se halla en un estado tal que la probabilidad de que al medir su energía se obtenga un valor mayor que $\frac{8\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ es cero.
a) ¿Entre qué valores está comprendida la energía media del protón?
b) Si en $t = 0$ el valor esperado de la energía es $\langle E\rangle = \frac{5\hbar^2\pi^2}{4ma^2}$ y el valor medio del momento es $\langle P\rangle = \frac{8\hbar}{3a}$, ¿Cuál es su función de onda?
c) Escribir la función de onda para $t_* = \frac{2ma^2}{3\hbar\pi}$. Calcular los valores medios de la energía y del momento para ese tiempo. Discutir el significado físico de t_*.
d) Esta función de onda da origen a una distribución de carga que oscila en el tiempo con la misma frecuencia que las oscilaciones de la densidad de probabilidad. Calcúlese la energía del fotón que es emitido por la distribución oscilante de carga cuando el protón pasa del estado excitado al fundamental. ¿En qué región del espectro electromágnetico estaría tal fotón?

[Ayuda: Los autovalores del pozo infinito de anchura a son: $E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ La masa del protón es $m = 938.3$ MeV/c^2 y la anchura del pozo es $a = 5$ fm. La constante de Planck satisface $\hbar c = 197.33$ MeV fm.]

Repasar

2. La molécula de Hidrógeno ionizada, H_2^+, se puede describir por un potencial unidimensional

$$V(x) = -V_0\, a\, [\delta(x + a) + \delta(x - a)]$$

$V_0 = 11{,}43 \cdot 10^{-6}$ MeV $a = 10^5$ fm

con $V_0 = 11.43$ eV y $a = 1$ Å.
a) Calcúlense las energías de los estados ligados.
b) Determinar las funciones de onda normalizadas asociadas a dichos estados ligados. ¿Qué forma tienen?
c) ¿Cuál es la energía y longitud de onda del fotón emitido en la desintegración del primer estado excitado al fundamental?

[Ayuda: Para el cálculo de las condiciones de continuidad integrar la ecuación de Schrödinger en un entorno de $x = \pm a$.
La masa del electrón es $m = 0.511$ MeV/c^2.]

$m = 0{,}511 \frac{\text{MeV}}{c^2} \frac{10^6 \text{ eV}}{1 \text{ MeV}} (3 \cdot 10^8)^2 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg

$a = 10^{-10}$ m $V = 1{,}8288 \cdot 10^{-18}$

$\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-34}$

$\cancel{\frac{\text{MeV}\ \text{MeV}\ \text{fm}^2}{\text{MeV}^2\ \text{fm}^2}}$

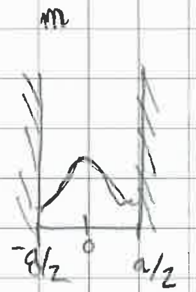
$\cos(\frac{\pi}{a}x)$

1,3,5 $\quad u_{par} = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos(Kx) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos(\frac{n\pi}{a}x)$

Junio 2000

2,4,6 $\quad u_{impar} = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$

1. $\quad E > \frac{8\hbar^2\pi^2}{2ma^2} \qquad P = 0$



a) ¿Entre que valores se encuentra $\langle E \rangle$?

Para un pozo infinito sabemos que $E = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}$

Empezamos a contabilizar desde $n=1$ (estado fundamental)

$$E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} \;;\; E_2 = \frac{\hbar^2 4\pi^2}{2ma^2} \;;\; E_3 = \frac{\hbar^2 9\pi^2}{2ma^2}$$

El protón se encuentra en una superposición del estado fundamental y el primer excitado.

Si en $t=0$ $\langle E \rangle = \frac{5\hbar^2\pi^2}{4ma^2} = \langle \Psi | E | \Psi \rangle$ y $\langle P \rangle = \frac{8\hbar}{3a}$, ¿Cuál es su función de onda.

Sabemos que: $\quad |\Psi\rangle_0 = \alpha|1\rangle + \beta e^{i\delta}|2\rangle$

$*\quad \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle \Rightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$*\quad \langle \Psi_0 | H | \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0 | \left(\alpha E_1 |1\rangle + \beta e^{i\delta} |2\rangle \right) =$

$= |\alpha|^2 E_1 + |\beta|^2 E_2 = \frac{\cancel{\hbar^2\pi^2}}{\cancel{2ma^2}}\left(|\alpha|^2 + 4|\beta|^2\right) = \frac{5\cancel{\hbar^2\pi^2}}{2\,\cancel{4ma^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow |\alpha|^2 + 4|\beta|^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow 1 + 3|\beta|^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6|\beta|^2 = 3 \Rightarrow \boxed{|\beta| = \frac{1}{\sqrt{2}}} \qquad \boxed{|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

Para calcular la fase γ usamos que $\langle P \rangle = \frac{8\hbar}{3a}$ $\qquad |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + e^{i\gamma}|2\rangle)$

$u_1 = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$

$u_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$

$$\langle \psi_0 | P | \psi_0 \rangle = \int_{-a/2}^{a/2} dx \; \langle \psi_0 | x \rangle \, (-i\hbar \partial x) \, \langle x | \psi_0 \rangle =$$

$$\frac{1}{2}\int dx \, (u_1 + e^{-i\gamma} u_2)\,(-i\hbar\,\partial x)\,(u_1 + e^{i\gamma} u_2) =$$

$$= -\frac{i\hbar}{a}\int dx \left[\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + e^{-i\gamma}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right]\left[-\frac{\pi}{a}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) + e^{i\gamma}\frac{2\pi}{a}\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right] =$$

$$= \frac{\pi\hbar i}{a^2}\int dx \left[\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + e^{-i\gamma}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right]\left[\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) - 2e^{i\gamma}\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right] =$$

$$= \frac{i\hbar\pi}{a^2}\int dx \left[\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) - 2e^{i\gamma}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) + \right.$$

$$\left. + e^{-i\gamma}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) - 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right] =$$

$$= \frac{i\hbar\pi}{a^2}\left\{\overbrace{\frac{1}{2}\frac{a}{\pi}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \frac{a}{2\pi}\cos^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)}^{\frac{a}{2\pi}} - \right.$$

$$-\int 2e^{i\gamma}\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) - \mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right)\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)dx \; +$$

$$+ 2e^{-i\gamma}\int \mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)dx =$$

$$= \frac{i\hbar\pi}{a^2}\left\{\frac{a}{2\pi} - 2\right.$$ (sigue en la siguiente)

(~~Revisar alguna forma eficiente de hacer los calculos y REPETIR entero~~)

$\left(\frac{8\hbar}{3a}\,\mathrm{sen}\gamma = \frac{8\hbar}{3a} \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{\pi}{2}}\right)$

$$\langle\psi_0|P|\psi_0\rangle = \int_{-a/2}^{a/2} dx \; \langle\psi_0|x\rangle(-i\hbar\,\partial x)\langle x|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}\int_{-a/2}^{a/2} dx \; (u_1 + e^{-i\gamma}u_2)(-i\hbar\partial_x)(u_1+e^{i\gamma}u_2) =$$

$$= \frac{\hbar\pi i}{a^2}\int_{-a/2}^{a/2} dx \left[\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) - 2e^{i\gamma}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) + e^{-i\gamma}\text{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right.$$

$$\left.\text{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) - 2\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right] \sim$$

$$* \int_{-a/2}^{a/2} dx \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) = 0 \qquad * \int_{-a/2}^{a/2} 2\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) = 0$$

$$* \int_{-a/2}^{a/2} dx \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) = \int \cos(u)\left[\cos^2 u - \text{sen}^2 u\right] =$$

$u = \cos^2 u \Rightarrow du = -\frac{2\pi}{a}\cos u\,\text{sen}\,u\; dx$

$dv = \cos u\, dx \Rightarrow v = \frac{a}{\pi}\text{sen}\,u$

$$= \int \cos^3 u - \left[\frac{a}{3\pi}\text{sen}^3\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right]_{-a/2}^{a/2} = [u\cdot v]_{-a/2}^{a/2} - \int_{-a/2}^{a/2} v\,du - \frac{2a}{3\pi} =$$

$$= 2\int_{-a/2}^{a/2} \cos u\,\text{sen}^2 u\; dx - \frac{2a}{3\pi} = \boxed{\frac{2a}{3\pi}}$$

$$* \int_{-a/2}^{a/2} dx\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) = 2\int_{-a/2}^{a/2} dx\; \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) = \frac{4a}{3\pi}$$

$$2i\,\text{sen}\,\alpha = e^{i\gamma} - e^{-i\gamma}$$

$$\sim = \frac{\hbar\pi i}{a^2}\left(-e^{i\gamma}\frac{4a}{3\pi} + e^{-i\gamma}\frac{4a}{3\pi}\right) = \frac{4\hbar}{3a}\frac{1}{i}\left(e^{i\gamma} - e^{-i\gamma}\right) = \frac{8\hbar}{3a}\text{sen}\,\alpha$$

Por tanto

$$\langle\psi_0|P|\psi_0\rangle = \frac{8\hbar}{3a} = \frac{8\hbar}{3a}\text{sen}\,\gamma \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{\pi}{2}}$$

HECHO !!

Las Rozas (2.500), Pinto (4.000 viviendas), Colmenar Viejo (50 viviendas), Torrejón de Ardoz (865 viviendas), Arroyomolinos (791 viviendas), Algete (1.500 viviendas), El Álamo (19 viviendas), Pozuelo del Rey (200 viviendas), Pelayos de la Presa (28 viviendas), Fresno de Torote (339 viviendas), Valdemorillo (227 viviendas), Pezuela de las Torres (5 viviendas) y Villa del Prado (108 viviendas).

El Plan Joven llega a 73 localidades

El Plan Joven regional ya está presente en 73 localidades de toda nuestra región, donde vive más del 90 por ciento de los jóvenes de la Comunidad susceptibles de beneficiarse de esta iniciativa regional. "La mayoría de estas viviendas se encuentran en suelos públicos—recalcó la presidenta--, gracias a las aportaciones tanto de la Comunidad como de los Ayuntamientos que se han sumado a esta iniciativa".

De los catorce ayuntamientos que rubricaron el convenio sólo tres ya formaban parte del Plan Joven y hoy ampliaron el número de promociones (Las Rozas, Colmenar Viejo y Pezuela de las Torres), mientras que los otros once consistorios se integraron por primera vez en este plan de vivienda.

El Plan Joven nació con el objetivo de construir 79.000 viviendas de alquiler con opción a compra, un compromiso que a lo largo de la presente Legislatura se ampliará con el objeto de poner en marcha 150.000 pisos de esta tipología.

Esta iniciativa prevé la construcción de viviendas en régimen de alquiler con opción a compra destinadas a jóvenes de hasta 35 años con ingresos inferiores a 5,5 veces el IPREM. Los jóvenes que deciden ejercer la opción de compra del piso (de 70 metros cuadrados construidos), no pagan más de 140.000 euros por la vivienda a los 7 años de vivir en alquiler, amortizando la mitad de lo pagado hasta entonces en el arrendamiento.

Pionero en la Comunidad de Madrid, el modelo del Plan Joven ya se ha exportado a diez comunidades de todo color político (Andalucía,

Dirección General de Medios de Comunicación – Puerta del Sol, 7, planta baja / 28013 MADRID
Fax 91 580 20 75 / Web http://www.madrid.org/prensa

$C = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot \frac{1\ fm}{10^{-15} m} \Rightarrow C = 3 \cdot 10^{23} \frac{fm}{s}$

$t_* = \frac{2ma^2}{3\hbar\pi}$

$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + i|2\rangle)$ $\quad t=0 \quad$ Calcular $|\psi\rangle_{t^*}$, $\langle E\rangle$, $\langle P\rangle$.

$$|\psi\rangle_t = U(t)|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}(|1\rangle + i|2\rangle) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{-i\hbar\pi^2}{2ma^2}t}|1\rangle + i e^{\frac{-4\hbar\pi^2 i t}{2ma^2}}|2\rangle\right)$$

$$[H, P] = \left[\frac{P^2}{2m}, P\right] = 0 \qquad [H, H] = 0$$

Ambas son cantidades conservadas que no varían con t.

$$|\psi\rangle_{t^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}|1\rangle + i e^{-i\frac{4\pi}{3}}|2\rangle\right) = \frac{e^{-i\pi/3}}{\sqrt{2}}(|1\rangle - i|2\rangle)$$ ✓ fase global

En este tiempo el sistema ha evolucionado ha un estado ortogonal a $|\psi\rangle_0$, ya que el signo mutuo ha cambiado.

$$\langle H\rangle_{t^*} = \frac{5\hbar^2\pi^2}{4ma^2} \qquad \langle P\rangle_{t^*} = \frac{8\hbar}{3a}$$

~~La densidad de probabilidad la escribimos como:~~

$$\cancel{|\langle\psi|\psi\rangle_t|^2 = \frac{1}{2}\left|\left(e^{\frac{i\hbar\pi^2}{2ma^2}t}\langle 1| - i e^{\frac{i4\hbar\pi^2}{2ma^2}t}\langle 2|\right)\left(e^{\frac{-i\hbar\pi^2}{2ma^2}t}|1\rangle + i e^{\frac{-i4\hbar\pi^2}{2ma^2}t}|2\rangle\right)\right|^2 = \frac{1}{2}|(1+1)|^2}$$

La frecuencia ω del fotón al pasar de $|1\rangle$ a $|2\rangle$ viene dada por:

$$\hbar\omega = E_2 - E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}(4-1) \rightarrow \omega = \frac{3\hbar\pi^2}{2ma^2} = \frac{3}{2}\frac{\hbar c\,\pi^2 c}{mc^2 a^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \omega = 3{,}74 \cdot 10^{22}$ rad/s $\Rightarrow \boxed{\nu = 5{,}95 \cdot 10^{21}\ \text{Hz}}$ (Fotón gamma)

$$E = h\nu = 3{,}94 \cdot 10^{-12}\ \text{J} = 24{,}59\ \text{MeV}$$

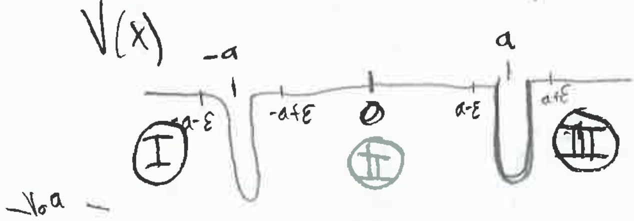
2. $H_2^+ \rightarrow V(x) = -V_0 a\left[\delta(x+a) + \delta(x-a)\right]$ $V_0 = 11{,}43\ \text{eV}$, $a = 1\ \text{Å}$

a) Energía de los estados ligados.

Resolver ecuación de autovalores $H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$. Base del espacio de x (infinita)

$$H\,\psi_n(x) = \frac{p^2}{2m}\psi_n(x) + V(x)\psi_n(x) = E\,\psi_n(x)$$

Simetría $\rightarrow$ paridad bien definida



En las zonas límite la función de onda es continua pero no la derivada.

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx} - E\psi = 0 \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx} = \overbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}^{\alpha^2}\psi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_n(x) = A e^{\alpha x} + B e^{-\alpha x}$$

Para la condición de continuidad en las derivadas escribimos:

Primer paso) $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-a-\varepsilon}^{-a+\varepsilon} dx\,\psi''(x) + \int_{-a-\varepsilon}^{-a+\varepsilon} dx\,V(x)\,\psi(x) = \int_{-a-\varepsilon}^{-a+\varepsilon} dx\,E\,\psi(x) \Rightarrow$ $\varepsilon \to 0$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi_{II}'(-a) - \psi_{I}'(-a)\right] - V_0 a\,\psi(-a) = 0}$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi_{III}'(a) - \psi_{II}'(a)\right] - V_0 a\,\psi(a) = 0}$$

(Condiciones de discontinuidad)

$$\begin{cases} \psi_I(x) = A_I e^{\alpha x} + \cancel{B_I e^{-\alpha x}} \\ \psi_{II}(x) = A_{II} e^{\alpha x} + B_{II} e^{-\alpha x} \xrightarrow[\text{bien definida}]{\text{Paridad}} A_{II}\cosh(\alpha x) \\ \psi_{III}(x) = \cancel{A_{III} e^{\alpha x}} + B_{III} e^{-\alpha x} \end{cases}$$

$\boxed{B_I = 0}$ $\boxed{A_{III} = 0}$

$$\left.\begin{array}{l} \psi_I(-a) = \psi_{II}(-a) \Rightarrow A_I e^{-\alpha a} = A_{II}\cosh(\alpha a) \\ \psi_{II}(a) = \psi_{III}(a) \Rightarrow B_{III} e^{-\alpha a} = A_{II}\cosh(\alpha a) \end{array}\right\} \boxed{A_I = B_{III} = A}$$

$$A_{II} = \frac{A e^{-\alpha a}}{\cosh(\alpha a)} = B \Rightarrow A = e^{\alpha a}\cosh(\alpha a) B$$

$$\begin{cases} \psi_I(x) = B e^{\alpha(x+a)}\cosh(\alpha a) \Rightarrow \psi_I'(x) = B\alpha e^{\alpha(x+a)}\cosh(\alpha a) \\ \psi_{II}(x) = B\cosh(\alpha x) \Rightarrow B\alpha\,\mathrm{senh}(\alpha x) = \psi_{II}'(x) \\ \psi_{III}(x) = B e^{\alpha(a-x)}\cosh(\alpha a) \Rightarrow \psi_{III}'(x) = -B\alpha e^{-(x-\alpha)}\cosh(\alpha a) \end{cases}$$

$$+\frac{\hbar^2}{2m}\left[+\cancel{B}\alpha\,\mathrm{senh}(\alpha a) + \cancel{B}\alpha\cosh(\alpha a)\right] - V_0\, a\, \cancel{B}\cosh(\alpha a) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha\,\mathrm{senh}(\alpha a) + \alpha\cosh(\alpha a) = \frac{2mV_0 a}{\hbar^2}\cosh(\alpha a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha a\left[\overbrace{\mathrm{senh}(\alpha a) + \cosh(\alpha a)}^{e^{\alpha a}}\right] = \overbrace{\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}}^{\varepsilon^2}\cosh(\alpha a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha a e^{\alpha a} = \frac{\varepsilon^2}{2}\left(e^{\alpha a} + e^{-\alpha a}\right) \Rightarrow 2\alpha a = \varepsilon^2\left(1 + e^{-2\alpha a}\right)$$

$$\boxed{X = \varepsilon^2\left(1 + e^{-X}\right)} \qquad \varepsilon^2 = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} = \frac{2(mc^2)V_0 a^2}{(\hbar c)^2} = 3$$

Hay que resolver la ecuación iterada $X = 3(1 + e^{-X})$

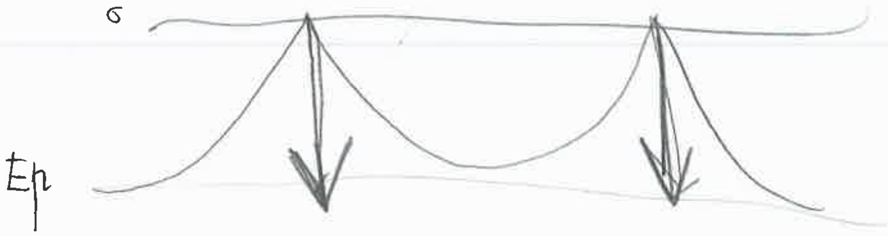
Comenzamos con $x_0=1$. Obtenemos: $\boxed{x = 3{,}131019}$

$\varepsilon^2 = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2ma^2} = \frac{V_0}{\varepsilon^2}$

$$x = 2\alpha a \Rightarrow \alpha = \frac{x}{2a} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{x^2}{4a^2}$$

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = \alpha^2 \Rightarrow E = \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m} = \frac{\hbar^2 x^2}{4\,2ma^2} = \frac{x^2V_0}{4\varepsilon^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{E_p = -9{,}337 \text{ eV}}$ (energía de la distribución par)



Energía del fotón emitido:

$E_p = h\nu \Rightarrow \boxed{\nu = 2{,}26\cdot 10^{15}\text{ Hz}}$

Resta normalizar:

$$\int_{-\infty}^{-a} |\psi_I|^2 dx = 1 \Rightarrow |B|^2 e^{2\alpha a}\cos^2 h(\alpha a)\int_{-\infty}^{-a} e^{2\alpha x}\,dx =$$

$$= |B|^2 e^{2\alpha a}\cos^2 h(\alpha a)\left[\frac{1}{2\alpha}e^{2\alpha x}\right]_{-\infty}^{-a} = |B|^2\frac{\cancel{e^{2\alpha a}}}{2\alpha}\cos^2 h(\alpha a)$$

$$(\cancel{e^{-2\alpha a}}) \Rightarrow \boxed{|B|^2 = \frac{2\alpha}{\cos^2 h(\alpha a)}}$$

El otro estado ligado correspondería a un desarrollo similar pero haciendo $\psi_{II}(x) = B\,\mathrm{senh}(\alpha x)$

$E_i = -7{,}58240$ eV