6. Derivación

Análisis de Variable Real

2014–2015

Resumen

Se verá en este tema un concepto que parte del concepto geométrico de recta tangente a una curva, y que tiene numerosas aplicaciones en muchas áreas, por ejemplo, en física. La utilidad principal de este concepto será su aplicación a la representación de funciones. Veremos algunos teoremas clave en este contexto, como el Teorema del Valor Medio y el de Taylor.

Índice

1. Generalidades

1.1. Concepto de derivada

Definición de derivada

Definición 6.1. Sea f una función real definida en un intervalo I y sea a un punto de I.

(I) Se dice que f es *derivable* en a si existe y es finito el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

(II) Cuando f es derivable en a, el valor del límite anterior recibe el nombre de *derivada* de f en a, y suele denotarse por $f'(a)$. Es decir,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

También se utilizan otras notaciones, como $\frac{d}{dx}f(a)$, $\frac{df}{dx}\Big|_{x=a}$, etc.

Interpretación geométrica y física de la derivada

El cociente incremental $(f(x)-f(a))/(x-a)$ corresponde gráficamente a la pendiente de la cuerda que une el punto $(a, f(a))$ con el punto $(x, f(x))$, con lo que, pasando al límite, tenemos que la derivada $f'(a)$ (suponiendo que exista) corresponde a la pendiente de la tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$.

En Física, si a cada valor x de una determinada magnitud (la variable independiente) le corresponde el valor $f(x)$ de una segunda magnitud (la variable dependiente), el cociente incremental $(f(x)-f(a))/(x-a)$ corresponde a la variación media de la variable dependiente en el intervalo $[a, x]$ de variación de la variable independiente, y la derivada $f'(a)$ (suponiendo que exista) corresponde a la variación instantánea de la variable dependiente. Por ejemplo, si la variable independiente es el tiempo, cuando la variable dependiente es el espacio tenemos los conceptos de velocidad media y velocidad instantánea; cuando la variable dependiente es la velocidad, pasamos a la aceleración media y la aceleración instantánea.

Función derivada

Cuando consideramos la derivada obtenida en todos los puntos, obtenemos lo siguiente:

Definición 6.2. Sea f una función real definida en un intervalo I. Sea $D = \{x \in I \mid f \text{ es derivable en } x\}$. La función $f'\colon D \to \mathbb{R}$ que a cada $x \in D$ le hace corresponder la derivada $f'(x)$ se denomina *función derivada* de f.

Ejemplos.

- $f(x) = c$.

  Si $x \neq a$, el cociente incremental es igual a

  $$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{c - c}{x - a} = 0.$$

  Por tanto,

  $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0.$$

- $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

  En este caso, si utilizamos la Identidad Ciclotómica, obtenemos que el cociente incremental es, para todo $x \neq a$,

  $$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{x^n - a^n}{x - a} \\ &= \frac{(x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})}{x - a} \\ &= x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}.\end{aligned}$$

  En consecuencia,

  $$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}) = na^{n-1}.\end{aligned}$$

- $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

  Supongamos que $a, x \neq 0$, $x \neq a$, y calculemos el cociente incremental, utilizando de nuevo la Identidad Ciclotómica:

  $$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{x^{-n} - a^{-n}}{x - a} = \frac{a^n - x^n}{a^n x^n (x - a)} \\ &= -\frac{x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}}{a^n x^n}\end{aligned}$$

  De aquí que

  $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\frac{na^{n-1}}{a^{2n}} = -na^{-n-1}.$$

- $f(x) = \operatorname{sen} x$.

  Si $x \neq a$, el cociente incremental es

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a} \\ &= \frac{2\cos\frac{x+a}{2}\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}}{x-a} \\ &= \cos\frac{x+a}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}.\end{aligned}$$

  Teniendo en cuenta que $\lim_{u\to 0}(\operatorname{sen} u)/u = 1$, obtenemos que

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos a\cdot 1 = \cos a.$$

- $f(x) = \cos x$.

  Aquí, para $x \neq a$ el cociente incremental es igual a

$$\frac{\cos x - \cos a}{x-a} = -\frac{2\operatorname{sen}\frac{x+a}{2}\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}}{x-a} = -\operatorname{sen}\frac{x+a}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}},$$

  obteniendo de esta manera que

$$f'(a) = -\lim_{x\to a}\operatorname{sen}\frac{x+a}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = -\operatorname{sen} a\cdot 1 = -\operatorname{sen} a.$$

- $f(x) = e^x$.

  Podemos escribir el cociente incremental, siempre que $x \neq a$, como

$$\frac{e^x - e^a}{x-a} = e^a\cdot\frac{e^{x-a}-1}{x-a}.$$

  Teniendo ahora en cuenta que $\lim_{u\to 0}(e^u - 1)/u = 1$, llegamos a que

$$f'(a) = e^a\lim_{x\to a}\frac{e^{x-a}-1}{x-a} = e^a\cdot 1 = e^a.$$

- $f(x) = \log x$.

  Si $a, x > 0$, $x \neq a$, el cociente incremental es

$$\frac{\log x - \log a}{x-a} = \frac{\log\frac{x}{a}}{x-a} = \frac{1}{a}\cdot\frac{\log(1+(\frac{x}{a}-1))}{\frac{x}{a}-1}.$$

  Teniendo en cuenta que $\lim_{u\to 0}\log(1+u)/u = 1$, se obtiene

$$f'(a) = \frac{1}{a}\cdot 1 = \frac{1}{a}.$$

Derivadas laterales

Frecuentemente es útil para estudiar la derivada, considerar el concepto de derivada lateral.

Definición 6.3. Sea f una función real definida en un intervalo I y sea a un punto de I.

(I) Se dice que f es *derivable por la derecha* (resp. *por la izquierda*) en a si existe y es finito el límite

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \text{(resp. } \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\text{)}.$$

(II) Cuando f es derivable por la derecha (resp. por la izquierda) en a, el valor del límite anterior recibe el nombre de *derivada por la derecha* (resp. *por la izquierda*) de f en a, y suele denotarse por $f'(a+)$ (resp. $f'(a-)$). Es decir,

$$f'(a+) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \text{(resp. } f'(a-) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\text{)}.$$

Derivada y derivadas laterales

Teniendo en cuenta lo que sabemos sobre límites laterales, podemos decir lo siguiente:

Observación. Sea I un intervalo abierto. Una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ es derivable en $a \in I$ si, y solo si, lo es tanto por la derecha como por la izquierda y, además, $f'(a+) = f'(a-)$.

Ejemplo.

$$f(x) = |x|.$$

Estudiemos las derivadas laterales de f en el 0. Se tiene

$$f'(0+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

mientras que

$$f'(0-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = -1.$$

Al observar que las dos derivadas laterales no coinciden, concluimos en este caso que la función no es derivable en el 0.

1.2. Derivabilidad y continuidad

Continuidad de las funciones derivables

Proposición 6.4. *Si f es una función derivable en un punto a, entonces f es continua en el punto a.*

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\Big(f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\Big)\\ &= f(a) + f'(a)\cdot 0 = f(a).\end{aligned}$$ □

El recíproco no es siempre cierto, como se ve en los ejemplos siguientes.

Ejemplos.

(I) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x) = |x|$.

Esta función es continua en el 0, pero, según ya hemos visto, no es derivable en 0. La razón, como se vio, es que las derivadas laterales no coinciden.

(II) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0,\\ 0, & x = 0.\end{cases}$$

Esta función tampoco es derivable en 0, pero en esta ocasión el motivo es más profundo, ya que no existen ni siquiera derivadas laterales. En efecto, si consideramos el cociente incremental para $x \neq 0$, este es

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x} = \operatorname{sen}\frac{1}{x},$$

que, según ya hemos estudiado, no tiene límites laterales en el 0.

(III) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0,\\ 0, & x = 0.\end{cases}$$

Para esta función, en cambio, aunque es parecida a la anterior, sí que hay derivabilidad en el 0. En efecto,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x} = x\operatorname{sen}\frac{1}{x},$$

de donde $f'(0) = 0$.

(IV) La función de Thomae $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, 1, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, \quad \mathrm{m.\,c.\,d.}(p,q) = 1. \end{cases}$$

Esta función no es derivable en ningún punto $a \in [0,1]$. En efecto, si $a \in \mathbb{Q}$, f trivialmente no es derivable en a, ya que se vio en su momento que f no es continua en los racionales. Supongamos ahora que $a \notin \mathbb{Q}$. Evidentemente,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \notin \mathbb{Q}}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0.$$

Por tanto, si existe la derivada en a, debe ser $f'(a) = 0$. Vamos a ver que esto no puede ser, por lo que f no es derivable en a.

Se ve con facilidad que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un $p_n \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $|p_n/n - a| \leqslant 1/n$. Obsérvese que $f(p_n/n) \geqslant 1/n$. Se tendrá entonces que

$$\left| \frac{f(p_n/n) - f(a)}{p_n/n - a} \right| = \frac{f(p_n/n)}{|p_n/n - a|} \geqslant \frac{1/n}{1/n} = 1.$$

Esto implica que

$$\lim_n \frac{f(p_n/n) - f(a)}{p_n/n - a} \neq 0,$$

y como $\lim_n (p_n/n) = a$, obtenemos que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \neq 0.$$

Por tanto, no existe $f'(a)$.

1.3. Cálculo de derivadas

Propiedades algebraicas de las derivadas

Teorema 6.5. *Sean I un intervalo, $a \in I$, $c \in \mathbb{R}$, y $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ funciones derivables en a. Se tiene:*

(I) *$f + g$ es derivable en a, con derivada $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*

(II) *cf es derivable en a, con derivada $(cf)'(a) = cf'(a)$.*

(III) *fg es derivable en a, con derivada $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*

(IV) *Si $g(a) \neq 0$, entonces f/g es derivable en a, con derivada $(f/g)'(a) = (f'(a)g(a) - f(a)g'(a))/g(a)^2$.*

Demostración. Se deducen fácilmente de la definición y las siguientes propiedades:

(I)
$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$

(II)
$$\frac{(cf)(x) - (cf)(a)}{x-a} = c \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

(III) f es continua en a y
$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a).$$

(IV) g es continua en a, así que $g(x) \neq 0$ cuando x está cerca de a. Además
$$\begin{aligned}\frac{(f/g)(x) - (f/g)(a)}{x-a}& \\ &= \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a) - f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) \cdot \frac{1}{g(x)g(a)}.\end{aligned}$$ □

Ejemplos.

(I) $f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

Utilizando las reglas anteriores es evidente que
$$f'(x) = c_n n x^{n-1} + c_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \cdots + c_1.$$

(II) $f(x) = \tan x$.

Basta darse cuenta de que $f(x) = \operatorname{sen} x / \cos x$. Utilizando (IV), obtenemos que, para $x \neq \pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$,
$$f'(a) = \frac{\operatorname{sen}' a \cos a - \operatorname{sen} a \cos' a}{\cos^2 a} = \frac{\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a}.$$

También resulta útil en ocasiones la expresión
$$f'(a) = \frac{\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a} = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a.$$

1.4. La Regla de la Cadena y el Teorema de la función inversa

La Regla de la Cadena

Nuestro siguiente resultado nos proporciona una nueva regla de cálculo de derivadas, cuando consideramos la composición de dos funciones derivables f y g. Primero, vamos a intentar llegar a la fórmula adecuada.

Supongamos que f es derivable en un punto a, y g es derivable en el punto $f(a)$. Entonce4s, según la definición de derivada, y haciendo el cambio de variable $y = f(x)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
&= \lim_{y \to f(a)} \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a}{x - a} = g'(f(a))f'(a).
\end{aligned}$$

Los cálculos anteriores, si bien orientativos, no son del todo correctos. Obsérvese que en la segunda línea aparece una fracción cuyo denominador es $f(x) - f(a)$. Puede ocurrir que haya muchos puntos x cerca de a, de forma que $f(x) = f(a)$. Eso convertiría al límite de la segunda línea en algo que ni siquiera tiene sentido.

Daremos ahora el enunciado formal de nuestro teorema. Para probarlo, nos basaremos en los cálculos anteriores, pero "parcheando" el posible mal comportamiento en algunos puntos de la fracción arriba mencionada.

Teorema 6.6 (Regla de la Cadena)**.** *Sean I y J dos intervalos, y sean $f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon J \to \mathbb{R}$ dos funciones, donde $f(I) \subset J$. Supongamos que f es derivable en un punto $a \in I$, y que g es derivable en $f(a)$. Entonces la función compuesta $g \circ f$ es derivable en a y su derivada en este punto viene dada por*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Demostración. Definamos la función $h\colon J \to \mathbb{R}$ por

$$h(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)}, & y \neq f(a), \\ g'(f(a)), & y = f(a). \end{cases}$$

Entonces, $\lim_{y \to f(a)} h(y) = g'(f(a))$, de donde h es continua en el punto $f(a)$. Además

$$(y - f(a))h(y) = g(y) - g(f(a))$$

para todo $y \in J$. En efecto, si $y \neq f(a)$, es cierto por la definición de h, mientras que si $y = f(a)$, la igualdad es simplemente $0 = 0$. En particular, como para todo $x \in I$ se tiene $f(x) \in J$, obtenemos

$$(f(x) - f(a))h(f(x)) = g(f(x)) - g(f(a)).$$

De aquí que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(h \circ f)(x) = \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a}$$

cualquiera que sea $x \in I \backslash \{a\}$. Pero, por un lado,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

y, por otro,

$$\lim_{x \to a} (h \circ f)(x) = (h \circ f)(a),$$

ya que f es continua en a y h es continua en $f(a)$. Por consiguiente,

$$\lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = f'(a)h(f(a)) = f'(a)g'(f(a)). \qquad \square$$

Ejemplos.

(I) $f(x) = b^x$, $b > 0$.

Si escribimos esta función de la forma $f(x) = e^{\log b \cdot x}$, podemos aplicar la Regla de la Cadena 6.6, y obtenemos que

$$f'(x) = e^{\log b \cdot x} \log b = b^x \log b.$$

(II) $f(x) = x^r$, $x > 0$.

De igual manera que en el ejemplo anterior, podemos escribir $f(x) = e^{r \log x}$. Así, empleando la Regla de la Cadena 6.6, se tiene

$$f'(x) = e^{r \log x} \cdot \frac{r}{x} = x^r \cdot \frac{r}{x} = r x^{r-1}.$$

(III) $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ya hemos visto que esta función no es derivable en 0. Pero en los demás puntos sí que lo es. En efecto, si $a \neq 0$, existe un entorno alrededor de a en el cual $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$, por lo que se obtiene como producto y composición de funciones derivables. Además, podemos emplear 6.5 (III) y la Regla de la Cadena 6.6, para obtener la derivada. En efecto,

$$f'(a) = 1 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{a} + a \cos \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{a^2}\right) = \operatorname{sen} \frac{1}{a} - \frac{1}{a} \cos \frac{1}{a}.$$

El Teorema de la Función Inversa

El resultado con el que continuamos nos proporciona la derivada de la función inversa de una función inyectiva y derivable.

Teorema 6.7 (de la Función Inversa)**.** *Sea f una función continua e inyectiva en un intervalo I y sea $J = f(I)$. Si f es derivable en $a \in I$ y $f'(a) \neq 0$, entonces su inversa f^{-1} es derivable en $b = f(a)$ con derivada*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Demostración. Por comodidad, sea $g = f^{-1}$. Pretendemos hallar el límite

$$g'(a) = \lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b}.$$

Como f es inyectiva, $f(x) = f(a)$ si, y solo si, $x = a$. Como f es continua, también lo será g, por el Teorema 5.57, y resulta que $x = g(y) \to g(b) = a$ cuando $y \to b$. Así, podemos hacer el cambio de variable $y = f(x)$, obteniendo

$$\begin{aligned} \lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}. \end{aligned}$$ □

Ejemplos.

- $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$.

  La función arco seno $\operatorname{arc\,sen} \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ es la inversa de la restricción del seno al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Aplicando el Teorema 6.7, podemos decir que esta función es derivable salvo en las imágenes de los puntos en que la derivada del seno, (es decir, el coseno) se anule. Esto ocurre solo en los puntos $-\pi/2$ y $\pi/2$, así que el arco seno no será derivable en los puntos $-1 = \operatorname{sen}(-\pi/2)$ y $1 = \operatorname{sen}(\pi/2)$. Si $b \in (-1, 1)$, en cambio, tenemos

$$f'(b) = \frac{1}{\operatorname{sen}'(\operatorname{arc\,sen} b)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} b)}.$$

Ahora bien,

$$1 = \operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} b) + \cos^2(\operatorname{arc\,sen} b) = b^2 + \cos^2(\operatorname{arc\,sen} b),$$

Por tanto, deberá ser

$$\cos(\operatorname{arc\,sen} b) = \pm\sqrt{1 - b^2},$$

Teniendo en cuenta además que la función arco seno es creciente, su derivada debe ser no negativa, y obtenemos que

$$f'(b) = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}}.$$

- $f(x) = \arctan x$.

  Un proceso similar al del ejemplo anterior nos da la derivada de la arco tangente. En efecto, la arco tangente es la inversa de la tangente en $(-\pi/2, \pi/2)$. La función derivada de la tangente, que es $1/\cos^2 x$, no se anula nunca en este intervalo. Por tanto, aplicando el Teorema de la Función Inversa 6.7, obtenemos

  $$f'(b) = \frac{1}{\tan'(\arctan b)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan b)} = \frac{1}{1 + b^2}.$$

- $f(x) = \log x$.

  Ya hemos calculado de otra forma las derivadas de la exponencial y del logaritmo. Vamos ahora a ver cómo están ligadas una a la otra, teniendo en cuenta que estas dos funciones son inversas una de la otra.

  Supongamos conocido que la función derivada de la función exponencial es ella misma. El Teorema de la Función Inversa 6.7 nos dice que

  $$f'(b) = \frac{1}{e^{\log b}} = \frac{1}{b}.$$

- $f(x) = e^x$.

  Supongamos ahora conocido que la función derivada del logaritmo es $1/x$. Entonces

  $$f'(b) = \frac{1}{1/e^b} = e^b.$$

2. El Teorema del Valor Medio

2.1. Extremos relativos y el Lema de Fermat

Extremos relativos

Los teoremas que hemos visto hasta ahora solo nos informan acerca de cómo podemos calcular la derivada, pero no justifican el esfuerzo que hemos invertido en el estudio de este concepto. A continuación, veremos resultados en los que, conociendo la derivada de una función, obtenemos información acerca de la función original.

Definición 6.8. Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$.

(I) Se dice que f tiene un *máximo relativo* (o *máximo local*) en a si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $0 < |x - a| < \delta$ es $f(x) \leqslant f(a)$.

(II) Se dice que f tiene un *mínimo relativo* (o *mínimo local*) en a si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $0 < |x - a| < \delta$ es $f(x) \geqslant f(a)$.

(III) Se dice que f tiene un *máximo relativo estricto* (o *máximo local estricto*) en a si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $0 < |x - a| < \delta$ es $f(x) < f(a)$.

(IV) Se dice que f tiene un *mínimo relativo estricto* (o *mínimo local estricto*) en a si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $0 < |x - a| < \delta$ es $f(x) > f(a)$.

Obsérvese que un extremo relativo de una función siempre es un extremo (es decir, máximo o mínimo) de la misma. El recíproco no es cierto. Resulta sencillo dar ejemplos de extremos relativos que no son ni el máximo ni el mínimo de la función. Los extremos de la función, para ser distinguidos claramente de los extremos relativos, reciben a veces el nombre de *extremos absolutos*.

El Lema de Fermat

El siguiente resultado nos permite utilizar la derivada de una función para hallar los extremos relativos de esta.

Teorema 6.9 (Lema de Fermat)**.** *Sean I un intervalo, $f\colon I \to \mathbb{R}$ y a un punto interior de I. Si f es derivable en a y tiene en a un extremo relativo, entonces $f'(a) = 0$.*

Demostración. Supóngase que I tiene extremos α y β, donde $\alpha < \beta$. Supongamos también que f tiene en a un máximo relativo, donde $\alpha < a < \beta$. (Si tiene un mínimo relativo solo hay que cambiar de sentido algunas desigualdades o pasar a la función opuesta). Como a es un punto interior de I y f es derivable en a, se deduce que existen las dos derivadas laterales en a. Además,

$$f'(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Pero según las hipótesis, existe un $\delta_1 > 0$ tal que $f(x) \leqslant f(a)$ siempre que $x \in I$ y $|x-a| < \delta_1$. Definamos $\delta = \min\{\delta_1, a-\alpha, \beta-a\}$. Encontramos que

(I) Si $x \in (a-\delta, a)$, entonces $x \in I$ y

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0.$$

(II) Si $x \in (a, a+\delta)$, entonces $x \in I$ y

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0.$$

Esto implica claramente que

$$f'(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0,$$
$$f'(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0.$$

En conclusión, $f'(a) = 0$. □

Definición 6.10. Sean I un intervalo, $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $a \in I$. Se dice que a es un *punto crítico* de f si f es derivable en a y $f'(a) = 0$.

Con esta terminología, el Lema de Fermat 6.9 se puede reenunciar de la siguiente manera, que establece que los extremos relativos siempre hay que buscarlos en tres grupos bien definidos de puntos:

Corolario 6.11. *Sea I un intervalo y supongamos que $f\colon I \to \mathbb{R}$ tiene un extremo relativo en un punto a. Entonces, o bien a es un punto crítico de f, o bien a es un extremo del intervalo I, o bien f no es derivable en a.*

Ejemplos.

- $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

  Sus extremos absolutos (estrictos) son 1 y -1, que no son puntos interiores del dominio ni puntos críticos.

- $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

  Sus extremos absolutos (estrictos) son 1 y -1, que de nuevo no son puntos interiores del dominio ni puntos críticos, y 0, que es un punto crítico.

- $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

  Sus extremos absolutos (estrictos) son 1 y -1, que no son puntos interiores del dominio ni puntos críticos. Hay un punto crítico, el 0, que no es extremo relativo.

- $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

  Sus extremos absolutos (estrictos) son 1 y -1, que no son puntos interiores ni puntos críticos, y 0, en el que la función no es derivable.

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$.

  Todo real no entero es un punto crítico y también un extremo relativo (máximo y mínimo relativo a la vez). En cuanto a los enteros, son máximos relativos, pero no puntos críticos, ya que f no es ni siquiera continua en estos puntos. Vemos así que todos los puntos son extremos relativos de f. (Además, podemos observar que ninguno de ellos es estricto.)

- $f(x) = x^4 - 6x^2 - 8x + 5$.

  Veamos dónde pueden estar los extremos relativos de esta función. Según el Lema de Fermat 6.9, estos extremos relativos han de ser puntos críticos de la función. La derivada de esta función es $f'(x) = 4x^3 - 12x - 8 = 4(x+1)^2(x-2)$. Por tanto, los únicos puntos críticos son -1 y 2. Si $x \neq 2$,

  $$\begin{aligned} f(x) - f(2) &= x^4 - 6x^2 - 8x + 24 \\ &= (x-2)^2(x^2 + 4x + 6) \\ &= (x-2)^2\big((x+2)^2 + 2\big) > 0. \end{aligned}$$

  Por tanto, resulta que $f(x) > f(2)$ si $x \neq 2$, de donde 2 es un mínimo absoluto estricto de f. Si $x \neq -1$, entonces

  $$f(x) - f(-1) = x^4 - 6x^2 - 8x - 3 = (x+1)^3(x-3),$$

  de donde $f(x) < f(-1)$ si $-1 < x < 3$ y $f(x) > f(-1)$ si $x < -1$. En consecuencia, -1 no es ni máximo ni mínimo relativo.

2.2. Teoremas de Rolle y del Valor Medio

El Teorema de Rolle

El resultado que aparece a continuación nos asegura que en cierta situación es segura la existencia de puntos críticos.

Teorema 6.12 (de Rolle)**.** *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ (donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b) y supongamos que $f(a) = f(b)$. Entonces existe al menos un $x \in (a,b)$ tal que $f'(x) = 0$*

Demostración. Puesto que f es continua en $[a,b]$, tiene máximo y mínimo absolutos en $[a,b]$ por el Teorema de Acotación de Weierstrass 5.47.

Si ambos extremos absolutos están en $\{a,b\}$, entonces f tiene que ser constante, ya que $f(a) = f(b)$, y por tanto f' se anula en todos los puntos de (a,b).

En caso contrario, f tiene algún extremo absoluto (que también es relativo) en un punto interior $x \in (a,b)$. Además, es derivable en x, así que sabemos que $f'(x) = 0$. □

Geométricamente, que la función valga lo mismo en dos puntos obliga a que haya tangente horizontal en algún punto intermedio de la gráfica.

El Teorema del Valor Medio

El Teorema de Rolle 6.12 se puede generalizar, obteniendo uno de los teoremas más importantes en la teoría de derivación.

Teorema 6.13 (del Valor Medio)**.** *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ (donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b). Entonces existe al menos un $x \in (a,b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(x)(b-a).$$

Demostración. Basta definir en el intervalo $[a,b]$ la función

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

que cumple las hipótesis del Teorema de Rolle 6.12, ya que $g(a) = g(b) = f(a)$. Por lo tanto, existe al menos un $x \in (a,b)$ tal que $g'(x) = 0$, es decir, $f'(x) = (f(b)-f(a))/(b-a)$. □

Dicho de otra manera, la variación media de f en el intervalo coincide con la variación instantánea en algún punto del intervalo. Por ejemplo, si un vehículo ha recorrido 180 km en 2 horas, en algún instante ha marchado exactamente a 90 km/h.

Geométricamente, la pendiente de la cuerda que une los extremos de la gráfica coincide con la pendiente de la tangente en algún punto.

El Teorema del Valor Medio 6.13 tiene un aspecto muy inocente, pues se limita a darnos cierta información sobre la derivada, a partir de determinada información sobre la función original: tan solo nos dice que la derivada debe tomar un valor determinado, y en un punto que ni siquiera sabemos cuál es. Sin embargo, esta información, aparentemente tan nimia, es de una naturaleza tal que en muchas situaciones se puede volver del revés, y deducir muchas características de la función a partir del conocimiento que tengamos de la derivada. A continuación veremos algunas de las numerosísimas consecuencias que tiene este teorema.

3. Aplicaciones del Teorema del Valor Medio

3.1. Funciones con derivada nula y funciones constantes

Funciones con derivada nula

Corolario 6.14. *Sea f una función continua en un intervalo I y derivable en el interior de I. Entonces f es constante en I si, y solo si, $f'(x) = 0$ para todo x del interior de I.*

Demostración. Una de las implicaciones ya es conocida. Supongamos que $f'(x) = 0$ en todo x interior a I, para probar la otra. La función f toma el mismo valor en todos los puntos de I, pues dados dos puntos cualesquiera $a, b \in I$ (por ejemplo, con $a < b$), como f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), será

$$f(b) - f(a) = f'(x)(b - a)$$

para algún $x \in (a, b)$, por el Teorema del Valor Medio 6.13. Por tanto,

$$f(b) - f(a) = 0. \qquad \square$$

Corolario 6.15. *Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo I y derivables en el interior de I. Si $f'(x) = g'(x)$ en cada x del interior de I, entonces hay una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + c$ para todo $x \in I$.*

Demostración. Basta aplicar el Corolario 6.14 a la función $f - g$. $\square$

3.2. Signo de la derivada y monotonía

Signo constante de la derivada

Corolario 6.16. *Sea f una función continua en un intervalo I y derivable en el interior de I. Se tiene:*

(I) *Si $f'(x) > 0$ para todo x en el interior de I, entonces f es estrictamente creciente en I.*

(II) *Si $f'(x) < 0$ para todo x en el interior de I, entonces f es estrictamente decreciente en I.*

(III) *$f'(x) \geqslant 0$ para todo x en el interior de I si, y solo si, f es creciente en I.*

(IV) *$f'(x) \leqslant 0$ para todo x en el interior de I si, y solo si, f es decreciente en I.*

Demostración. Probemos (I). Sean $a, b \in I$ con $a < b$. Como f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), será

$$f(b) - f(a) = f'(x)(b - a)$$

para algún $x \in (a, b)$, por el Teorema del Valor Medio 6.13. Dado que x es interior a I, $f'(x) > 0$ por hipótesis, y se sigue

$$f(b) - f(a) > 0,$$

o sea, $f(a) < f(b)$, que es lo que necesitábamos probar.

La demostración de (II) es similar, así como las implicaciones directas de (III) y (IV). Falta demostrar las implicaciones recíprocas de estas últimas. Supongamos, por ejemplo, que f es creciente en el intervalo I. Si x es un punto interior de I, entonces existe $y \in I$ tal que $x < y$. Para este y, se tiene

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0,$$

ya que f es creciente. Luego

$$f'(x) = f'(x+) = \lim_{y \to x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0.$$

Esto demuestra la implicación recíproca de (III). La de (IV) es análoga. $\square$

Ejemplo. $f(x) = x^3$.

Esta función es estrictamente creciente y derivable en todos los puntos, pero hay algún punto donde su derivada se anula. Esto nos indica que los recíprocos de (I) y (II) no son ciertos.

Por otro lado, este ejemplo resulta interesante desde otro punto de vista. Como vamos a ver, podemos deducir que esta función es estrictamente creciente a partir de la derivada, a pesar de que esta no es positiva en todos los puntos, sino que se anula en algún punto. En efecto, aplicando el Corolario 6.16 en el intervalo $[0, \infty)$, como f es continua en $[0, \infty)$ y $f'(x) > 0$ en $(0, \infty)$, deducimos que f es estrictamente creciente en $[0, \infty)$. De la misma forma, como f es continua en $(-\infty, 0]$ y $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 0)$, se tiene que f es también estrictamente creciente en $(-\infty, 0]$. Combinando las dos cosas, obtenemos que f es estrictamente creciente en $\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup [0, \infty)$.

Extraemos así la idea de que la anulación de la derivada en una cantidad finita de puntos no supone ningún problema para concluir a través de esta que una función sea estrictamente monótona.

3.3. Funciones con derivada acotada

Funciones con derivada acotada

La siguiente consecuencia es que, para funciones derivables, resulta muy fácil decidir si la función es o no una función de Lipschitz

Corolario 6.17. *Sea f una función continua en un intervalo I y derivable en el interior de I. Entonces f es una función de Lipschitz si, y solo si, su derivada está acotada.*

Demostración. Supongamos primero que la derivada está acotada. Hay alguna constante $K > 0$ tal que $|f'(x)| \leqslant K$ en todo punto x interior a I. Sean dos puntos cualesquiera $a, b \in I$ (por ejemplo, con $a < b$). Como f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), será

$$f(b) - f(a) = f'(x)(b - a)$$

para algún $x \in (a, b)$, y por lo tanto

$$|f(b) - f(a)| = |f'(x)||b - a| \leqslant K|b - a|.$$

En consecuencia, f es una función de Lipschitz.

Recíprocamente, supongamos que f es una función de Lipschitz, con constante de Lipschitz $K > 0$. Sea a un punto interior de I. Entonces,

$$|f'(a)| = \left|\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right| = \lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} \leqslant \lim_{x \to a} \frac{K|x - a|}{|x - a|} = K.$$

Se sigue así que f' está acotada. $\square$

Ejemplo. $f(x) = \operatorname{sen} x$.

La derivada cumple que $|f'(x)| = |\cos x| \leqslant 1$. El resultado anterior nos dice entonces que f es una función de Lipschitz. Además, obsérvese que

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leqslant |x - y|.$$

3.4. Demostración de desigualdades

Lo que hemos visto últimamente permite con frecuencia dar demostraciones sencillas de muchas desigualdades.

Ejemplos.

(I) Para todo $x > 0$, $\arctan x > x - \frac{1}{3}x^3$.

Consideremos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \arctan x - x + \frac{1}{3}x^3$. Es una función derivable y su derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - 1 + x^2 = \frac{x^4}{1 + x^2}.$$

Por lo tanto, $f'(x) > 0$ para todo $x \in (0, \infty)$ y la función f es estrictamente creciente en el intervalo cerrado $[0, \infty)$. En particular, para todo $x > 0$ se tiene $f(0) < f(x)$, es decir,

$$0 < \arctan x - x + \frac{1}{3}x^3.$$

que es lo que queríamos demostrar. (*¿Qué pasa si $x < 0$?*)

(II) $e^x \geqslant 1 + x$. La igualdad solo se cumple para $x = 0$.

Definamos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = e^x - x$. Su derivada es $f'(x) = e^x - 1$, que es positiva en $(0, \infty)$. Esto indica que f es estrictamente creciente en $[0, \infty)$. En consecuencia, si $x > 0$,

$$e^x - x = f(x) > f(0) = 1,$$

es decir, $e^x > 1 + x$.

En $(-\infty, 0)$, en cambio, la derivada es negativa, así que f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$. Así, pues, si $x < 0$, también es $f(x) > f(0)$ de donde, también en este caso, es $e^x > 1 + x$.

(III) $|\operatorname{sen} x| \leqslant |x|$. La igualdad se cumple solo para $x = 0$.

Se probó anteriormente algo más general, ya que vimos que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leqslant |x-y|$, lo que, haciendo $y = 0$, nos da la presente desigualdad. No obstante, vamos a probarlo ahora de otra manera.

Como $\pi/2$ es mayor que 1, la desigualdad estricta es cierta si $|x| > \pi/2$, así que es suficiente probar dicha desigualdad para $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Para ello, definamos la función $f\colon [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x - \operatorname{sen} x$. Esta función es derivable, y su derivada es $f'(x) = 1 - \cos x$.

Esta es positiva en $(0, \pi/2]$, lo cual indica que f es estrictamente creciente en $[0, \pi/2]$, así que para todo $x \in (0, \pi/2]$ debe ser

$$x - \operatorname{sen} x = f(x) > f(0) = 0,$$

es decir, $0 < \operatorname{sen} x < x$ y, en consecuencia, $|\operatorname{sen} x| < |x|$

La derivada también es positiva en $[-\pi/2, 0)$. Por tanto, f también es estrictamente creciente en $[-\pi/2, 0]$. De aquí se obtiene que, si $x \in [-\pi/2, 0)$, entonces

$$x - \operatorname{sen} x = f(x) < f(0) = 0,$$

o sea, $x < \operatorname{sen} x < 0$. También en este caso se concluye que $|\operatorname{sen} x| < |x|$.

(IV) $\log x \leqslant x/e$, si $x > 0$. La igualdad solo se cumple para $x = e$.

Sea $f(x) = x - e \log x$, definida en $(0, \infty)$. Es una función derivable y para cada $x > 0$

$$f'(x) = 1 - \frac{e}{x} = \frac{x-e}{x}.$$

Luego $f'(x) < 0$ si $x \in (0, e)$. Por lo tanto, f es estrictamente decreciente en el intervalo $(0, e]$. (Observemos que podemos incluir el punto e, pero no 0.) Por otra parte, $f'(x) > 0$ si $x \in (e, \infty)$, así que f es estrictamente creciente en el intervalo $[e, \infty)$. (De nuevo, podemos incluir el punto e.) Es fácil deducir de aquí que, tanto si $x \in (0, e)$ como si $x \in (e, \infty)$, se tiene

$$x - e \log x = f(x) > f(e) = 0.$$

Puesto de otra forma: $e \log x < x$, o $\log x < x/e$.

(V) (Desigualdad de Bernouilli) Si $\alpha > 1$ y $x > -1$, entonces $(1+x)^\alpha \geqslant 1+\alpha x$. La igualdad solo se da para $x = 0$.

Consideremos la función $f\colon (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = (1+x)^\alpha - \alpha x$. Su derivada es

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha = \alpha((1+x)^{\alpha-1} - 1).$$

En $(0, \infty)$, esta derivada es positiva, mientras que en $(-1, 0)$ es negativa. De aquí se deduce que f es estrictamente decreciente en $(-1, 0]$ y es estrictamente creciente en $[0, \infty)$. Por tanto, si $x \in (-1, \infty)$, $x \neq 0$,

$$(1 + x)^\alpha - \alpha x = f(x) > f(0) = 1,$$

o, lo que es lo mismo, $(1 + x)^\alpha > 1 + \alpha x$.

3.5. La propiedad de los valores intermedios para las derivadas

Derivadas que no se anulan y el signo constante de las derivadas

Una nueva consecuencia del Teorema del Valor Medio nos da que, bajo condiciones bastante generales, cuando una derivada no se anula en ningún punto de un intervalo, entonces su signo debe ser el mismo en todos los puntos de ese mismo intervalo. En consecuencia, en él la función es estrictamente monótona.

Proposición 6.18. *Sea f una función continua en un intervalo I y derivable en todos los puntos interiores del intervalo. Si la derivada f' no se anula en ninguno de esos puntos, entonces la función f es estrictamente monótona en I (bien estrictamente creciente, o estrictamente decreciente). Dicho de otra forma, el signo de la derivada f' es constante en el interior de I.*

Demostración. Sean $a, b \in I$, $a < b$. Por el Teorema del Valor Medio 6.13, existe un $x \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(x)(b - a) \neq 0.$$

Por tanto, $f(b) \neq f(a)$. Así pues, f es inyectiva y, como además es continua en I, se deduce que es estrictamente monótona. $\square$

Ejemplo. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 4$.

La derivada de esta función es $f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$, que tiene como únicas raíces $x = -2$ y $x = 1$. Estudiemos el signo de esta derivada. La Proposición 6.18 nos informa que esta derivada tiene signo constante en $(-\infty, -2)$, así como en $(-2, 1)$ y en $(1, \infty)$. Por tanto, para averiguar este signo, bastará calcularlo en algún punto concreto de cada uno de estos intervalos. Así, $f'(x) < 0$ en $(-\infty, -2)$ ya que, por ejemplo, $f'(-3) = -64$. En $(-2, 1)$ siempre es $f'(x) > 0$, ya que $f'(0) = 8$. En $(1, \infty)$ es $f'(x) > 0$, ya que $f'(2) = 16$. Por tanto, f es estrictamente decreciente en $(-\infty, -2]$ y estrictamente creciente en $[-2, \infty)$. (*¿Por qué?*)

El Teorema de Darboux

Si una función es la derivada de otra en un intervalo, puede que no sea continua (como veremos en algún ejemplo). Pero en el siguiente resultado se prueba que, lo mismo que las funciones continuas, tiene la propiedad de los valores intermedios.

Teorema 6.19 (de los Valores Intermedios, de Darboux)**.** *Sea f una función derivable en un intervalo I. Si la derivada f' toma dos valores diferentes, entonces toma también todos los valores intermedios: es decir, si $a, b \in I$, $a < b$, y λ está entre $f'(a)$ y $f'(b)$ (es decir, $f'(a) < \lambda < f'(b)$ o $f'(b) < \lambda < f'(a)$), existe al menos un $x \in (a, b)$ tal que $f'(x) = \lambda$.*

Demostración. Supongamos, por ejemplo, que $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Si fuera $f'(a) > \lambda > f'(b)$ se procedería de manera análoga. Supongamos, además (para llegar a contradicción), que $f'(x) \neq \lambda$ para todo $x \in (a, b)$.

Definamos en $[a, b]$ la función $g(x) = f(x) - \lambda x$. Esta función es derivable, por que f lo es. Además, $g'(x) = f'(x) - \lambda$. Como $f'(x) \neq \lambda$ para todo $x \in (a, b)$, se deduce que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Así, por la Proposición 6.18, concluimos que g es monótona. Sin embargo, esto lleva a contradicción porque, como vemos a continuación, g no puede ser creciente ni decreciente.

La función g no puede ser creciente porque entonces debería ser $g'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$. Sin embargo, $g'(a) = f'(a) - \lambda < 0$. Tampoco puede ser decreciente porque de la misma manera sería $g'(x) \leqslant 0$ y esto no se da ya que $g'(b) = f'(b) - \lambda > 0$. □

Ejemplos.

(I) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

La derivada de esta función es

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Obsérvese que f' no es una función continua, ya que tiene una discontinuidad oscilatoria en 0. Sin embargo, según el Teorema de Darboux 6.19, f cumple la propiedad de los valores intermedios.

(II) La función de Heaviside $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Teniendo en cuenta el Teorema de Darboux 6.19, llegamos a la conclusión de que la función de Heaviside no es la derivada de ninguna función, ya que no cumple la propiedad de los valores intermedios. En efecto, aunque toma los valores 0 y 1, no toma, por ejemplo, el valor $1/2$.

Hemos visto que para dos clases diferentes de funciones, las funciones continuas (mediante el Teorema de Bolzano 5.49) y las funciones derivadas (mediante el Teorema de Darboux 6.19), se cumple la propiedad de los valores intermedios. Cuando se haya definido la integral, se verá que cualquier función continua es la derivada de alguna función, así que el Teorema de Bolzano 5.49 es en realidad un caso particular del Teorema de Darboux 6.19.

3.6. La discontinuidad de las derivadas

Paso al límite en las derivadas

Proposición 6.20. *Sean I un intervalo, $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $a \in I$. Supongamos que f es derivable en $I \backslash \{a\}$ y que es continua en a. Supóngase además que existe* $\lim_{x\to a} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$. *Entonces*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l.$$

En consecuencia,

(I) *Si $l \in \mathbb{R}$, entonces f es derivable en a y $f'(a) = l$.*

(II) *Si $l \in \{-\infty, \infty\}$, entonces f no es derivable en a.*

Demostración. Por el Teorema del Valor Medio, para cada $x \in I\backslash\{a\}$ existe un c_x situado entre a y x, tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Obsérvese que, como c_x está entre a y x, se tiene $\lim_{x\to a} c_x = a$. Además, c_x nunca vale a. Por tanto, haciendo el cambio de variable $u = c_x$,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} f'(c_x) = \lim_{u\to a} f'(u) = l. \qquad \square$$

Observación. Esta proposición sigue siendo cierta si se sustituye $\lim_{x\to a} f'(x)$ por $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ (o $\lim_{x\to a^-} f'(x)$), y $f'(a)$ por $f'(a+)$ (o $f'(a-)$). En estos casos basta con que f sea continua por la derecha (o por la izquierda).

Ejemplos.

(I)

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0, \\ x^3, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Claramente, si $x > 0$, $f'(x) = 2x$, y si $x < 0$, $f'(x) = 3x^2$. Nos queda así por estudiar tan solo la derivada en 0. Según la Proposición 6.20, la forma más fácil es obtener las derivadas laterales mediante paso al límite en la derivada en puntos diferentes de 0. Así, $f'(0+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0$ y $f'(0-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 3x^2 = 0$. Por tanto, $f'(0) = 0$.

(II)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Calculemos la derivada en los $x \neq 0$. Se obtiene

$$f'(x) = 3x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}.$$

Como f es continua en 0, la Proposición 6.20 nos permite deducir que $f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x) = 0$.

(III)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Este es un caso que evidencia que la Proposición 6.20 puede ser mal interpretada.

Si calculamos la derivada en los puntos distintos de 0, obtenemos

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Obsérvese que no existen $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ ni $\lim_{x\to 0^-} f'(x)$, debido al término $-\cos \frac{1}{x}$ que aparece en la expresión de la derivada. Esto nos podría hacer pensar que no existe $f'(0)$. Sin embargo, hay que hacer notar que el resultado anterior solo da información *cuando existe* el límite de la derivada. En este caso en concreto, resulta que la función es derivable en 0, lo que podemos comprobar utilizando directamente el cociente incremental. En efecto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

Por tanto, $f'(0) = 0$.

(IV) $f(x) = \sqrt{x}$.

Si $x \neq 0$, obtenemos que $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$, y se comprueba fácilmente que $\lim_{x \to 0} f'(x) = \infty$. Como f es continua en 0, la Proposición 6.20, nos dice que no existe $f'(0)$.

Tipos de discontinuidad en las derivadas

Corolario 6.21. *Sea f una función derivable en un intervalo I. Entonces, las discontinuidades de f' son oscilatorias (finitas o infinitas).*

Demostración. Sea a un punto de discontinuidad. Veremos que en a no hay discontinuidades de salto (finitas o infinitas), ni evitables, ni polos.

Veamos primero que no puede haber una discontinuidad evitable. En efecto, si existiera el límite $\lim_{x \to a} f'(x) = l \in \mathbb{R}$, entonces, según la Proposición 6.20, debería ser $f'(a) = l$, con lo que f' sería continua en a.

Tampoco puede tener una discontinuidad tipo polo o de salto infinito, porque si un límite lateral en a de la derivada es infinito, entonces la función no es derivable en a.

Supongamos ahora que a es un punto interior de I, y mostremos que la discontinuidad en a tampoco puede ser de salto. En efecto, por el resultado anterior, si existen $\lim_{x \to a^-} f'(x)$ y $\lim_{x \to a^+} f'(x)$, tiene que ser $f'(a-) = \lim_{x \to a^-} f'(x)$ y $f'(a+) = \lim_{x \to a^+} f'(x)$. Pero como, por hipótesis, f es derivable en a, $f'(a-) = f'(a+)$, de donde $\lim_{x \to a^-} f'(x) = \lim_{x \to a^+} f'(x)$. En conclusión, la discontinuidad no es de salto. $\square$

Ejemplos.

(I) $f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

La derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

que es continua en todo $\mathbb{R}$.

(II) $f(x) = |x|$.

Esta función no es derivable en 0, cosa que ya se dedujo anteriormente. A esta conclusión podemos llegar también de otra forma. Si $x > 0$, entonces $f'(x) = 1$, y si $x < 0$, entonces $f'(x) = -1$. Si f fuera derivable en 0, entonces habríamos obtenido una función derivada en $\mathbb{R}$ que no cumple la propiedad de los valores intermedios. Sin embargo, la Proposición 6.20 nos dice que $f'(0+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$ y $f'(0-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1$, así que la función es derivable por la derecha y por la izquierda.

(III) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

La derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Resulta en este caso que, aunque no existe el límite $\lim_{x\to 0} f'(x)$, la función sí es derivable en 0. Obsérvese que en este caso la derivada tiene una discontinuidad oscilatoria.

(IV) $f(x) = \begin{cases} |x|^{3/2} \operatorname{sen} \frac{1}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

La derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}|x|^{1/2} \operatorname{sen} \frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x|^{1/2}} \cos \frac{1}{|x|}, & x > 0, \\ -\frac{3}{2}|x|^{1/2} \operatorname{sen} \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x|^{1/2}} \cos \frac{1}{|x|}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

y en este caso la discontinuidad es oscilatoria infinita.

4. La Regla de L'Hôpital

Una aproximación a la Regla de L'Hôpital

El siguiente resultado es bastante útil a la hora de salvar indeterminaciones del tipo $0/0$ o ∞/∞.

Proposición 6.22. *Sean I un intervalo, $a \in I$ y $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ derivables en a. Supongamos además que $g(x) \neq 0$ si $x \in I\setminus\{a\}$, y que $f(a) = g(a) = 0$ y $g'(a) \neq 0$. Entonces,*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Demostración. Como $f(a) = g(a) = 0$,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \qquad \square$$

La pregunta inmediata es ¿qué pasa si no existen $f'(a)$ o $g'(a)$, o si $g'(a) = 0$, y, en consecuencia, no tiene sentido hablar de $f'(a)/g'(a)$? Evidentemente, el resultado en este caso no es válido como lo acabamos de formular, pero a veces puede existir $f'(x)/g'(x)$ en los alrededores del punto a, y puede ocurrir que exista el límite $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$. ¿Podrá entonces darse una propiedad similar a la anterior, sustituyendo $f'(a)/g'(a)$ por $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$? La respuesta a esta pregunta (afirmativa y con condiciones en cierto sentido más generales que las anteriores) la da el teorema conocido como *Regla de L'Hôpital*, que veremos en breve.

Intentemos en primer lugar adaptar la demostración anterior para probar este nuevo caso. Supongamos, para simplificar, que nuestras funciones f y g son continuas en a, y que f y g son derivables en $I\backslash\{a\}$, y además la derivada de g no se anula. Entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}},$$

si este último límite existe. El Teorema del Valor Medio asegura que, para cada $x \in I\backslash\{a\}$, existen c_x y d_x entre a y x tales que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x), \qquad \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(d_x),$$

así que tenemos que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(c_x)}{g'(d_x)}.$$

Como c_x y d_x están entre a y x, resulta que ambos tienden a a cuando x tiende a a. Cabría esperar entonces que

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(c_x)}{g'(d_x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Si fuera siempre $c_x = d_x$, esto sería verdad, desde luego, por que bastaría hacer el cambio de variable $u = c_x$. El problema es que, si c_x y d_x no son iguales, pueden converger hacia a a diferentes ritmos, con lo que el límite del cociente puede cambiar. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-4x}{x^2-2x} = 2, \quad \text{pero} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^3-4x}{(2x)^2-2(2x)} = \frac{3}{4}.$$

Esta diferencia en el resultado se debe precisamente a que x y $2x$ no convergen a 0 con la misma rapidez.

Para poder solucionar este inconveniente, tendremos que dar una versión del Teorema del Valor Medio 6.13 para la que los puntos c_x y d_x resulten ser iguales.

El Teorema del Valor Medio Generalizado

Teorema 6.23 (del Valor Medio Generalizado, de Cauchy)**.** *Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ (donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) y derivables en el intervalo abierto (a, b). Existe al menos un $x \in (a, b)$ tal que*

$$f'(x)(g(b) - g(a)) = g'(x)(f(b) - f(a)).$$

Demostración. Basta definir en el intervalo $[a, b]$ la función

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a)),$$

que cumple las hipótesis del Teorema de Rolle 6.12, ya que

$$h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b).$$

Por tanto existe al menos un $x \in (a, b)$ tal que $h'(x) = 0$, es decir,

$$f'(x)(g(b) - g(a)) = g'(x)(f(b) - f(a)). \qquad \square$$

Obsérvese que, en el caso particular en el que $g(x) = x$, se obtiene precisamente el Teorema del Valor Medio 6.13. De ahí el nombre de *Teorema del Valor Medio Generalizado*.

La Regla de L'Hôpital

Teorema 6.24. *Sean I un intervalo, y $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto de acumulación de I. Sean $f, g\colon I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ y supongamos que*

(I) *f y g son derivables en $I\backslash\{a\}$ y $g'(x)$ no se anula en ningún $x \in I\backslash\{a\}$.*

(II) *Se verifica alguna de las tres condiciones siguientes:*

- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.
- $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$.
- $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$.

(III) *Existe* $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Entonces, existe el límite de $f(x)/g(x)$ y es igual a l, es decir,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Demostración. Para empezar, veamos que basta considerar el caso en que $a = 0$ es el extremo izquierdo de I o, lo que es lo mismo: es suficiente calcular el límite cuando $x \to 0^+$. En efecto, una vez demostrado este caso se deducen los demás:

- Si $a \in \mathbb{R}$ es el extremo izquierdo de I, es decir, si el límite calculado es cuando $x \to a^+$, hacemos el cambio $u = x - a$, aplicamos la regla en el caso conocido y deshacemos el cambio:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{f(u+a)}{g(u+a)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{f'(u+a)}{g'(u+a)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- Si $a \in \mathbb{R}$ es el extremo derecho de I, o sea, si estamos calculando el límite cuando $x \to a^-$, hacemos el cambio $u = -x$.

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u\to(-a)^+} \frac{f(-u)}{g(-u)} = \lim_{u\to(-a)^+} \frac{-f'(-u)}{-g'(-u)} = \lim_{x\to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- Si a es un punto interior de I, dividimos el intervalo en los intervalos $I \cap (-\infty, a]$ e $I \cap [a, \infty)$, y aplicamos los dos casos anteriores para obtener así los dos límites laterales.

- Si $a = \infty$ o $a = -\infty$, hacemos el cambio $u = 1/x$. Por ejemplo, en el caso $a = \infty$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{u\to 0^+} \frac{f(1/u)}{g(1/u)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{-\frac{1}{u^2} f'(1/u)}{-\frac{1}{u^2} g'(1/u)} \\ &= \lim_{u\to 0^+} \frac{f'(1/u)}{g'(1/u)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.\end{aligned}$$

Así que a partir de ahora supondremos que $a = 0$ es el extremo izquierdo de I.

Aparte de esto, el caso $\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ se deduce del caso $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \infty$, tomando la función $G(x) = -g(x)$ en lugar de g. Por otra parte, el caso

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$$

se deduce del caso

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$$

sin más que tomar la función $F(x) = -f(x)$ en lugar de f.

En resumen, solo necesitamos considerar los siguientes casos:

(I) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$.

(II) $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \infty$ y $\lim_{x\to 0^+} f'(x)/g'(x) = l \in \mathbb{R}$.

(III) $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \infty$ y $\lim_{x\to 0^+} f'(x)/g'(x) = \infty$.

Dado que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ salvo quizá $x = 0$, que es el extremo izquierdo de I, podemos observar también que g es estrictamente monótona y por tanto inyectiva en $I\backslash\{0\}$. Como consecuencia, existe como mucho un $x \in I\backslash\{0\}$ tal que $g(x) = 0$. Así que, tomando un subintervalo si es necesario, podemos suponer también, sin pérdida de generalidad, que para todo $x \in I\backslash\{0\}$ se tiene $g(x) \neq 0$ y por tanto tiene sentido la fracción $f(x)/g(x)$.

Caso (I). Supongamos que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$. Puede que las funciones f y g no estén definidas en 0. Definamos, por tanto, en $I \cup \{0\}$ las siguientes funciones:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si} \in I\backslash\{0\}, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si} \in I\backslash\{0\}, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

Las dos funciones F y G son continuas en 0 y derivables en $I\backslash\{0\}$. Por el Teorema del Valor Medio Generalizado 6.23, para cada $x \in I\backslash\{0\}$ existe algún c_x tal que $0 < c_x < x$ y

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x) - F(0)}{G(x) - G(0)} = \frac{F'(c_x)}{G'(c_x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Obviamente, $c_x \to 0$ cuando $x \to 0$. Haciendo así el cambio de variable $u = c_x$, obtenemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{f'(u)}{g'(u)} = l.$$

Veamos ahora qué ocurre cuando $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \infty$, que es lo que se da en los casos (II) y (III). Ahora no será posible definir la función G como en el caso (I), así que, dado un $x \in I\backslash\{0\}$, en lugar de aplicar el Teorema del Valor Medio Generalizado 6.23 entre 0 y x, nos tendremos que contentar con aplicarlo entre r y x, donde $r \in I \cup \{0\}$ es un número escogido de antemano (y bastante cercano a 0). Obsérvemos que, una vez que hemos fijado r, si x está muy próximo a 0 se tendrá $x < r$, así que sería mejor decir que aplicamos dicho teorema "entre x y r".

Fijemos, pues, $r \in I\backslash\{0\}$. Para cada x tal que $0 < x < r$, podemos escribir

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(r)}{g(x)} + \frac{f(r)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(r)}{g(x) - g(r)} \cdot \frac{g(x) - g(r)}{g(x)} + \frac{f(r)}{g(x)}.$$

Por el Teorema del Valor Medio Generalizado 6.23, existe c_x, $x < c_x < r$, tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \cdot \left(1 - \frac{g(r)}{g(x)}\right) + \frac{f(r)}{g(x)}. \tag{1}$$

Estudiemos a partir de ahora los dos casos que nos quedan por separado.

Caso (II). Supongamos que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \infty$ y $\lim_{x\to 0^+} f'(x)/g'(x) = l \in \mathbb{R}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{x\to 0^+} f'(x)/g'(x) = l$, podemos escoger $r \in I\backslash\{0\}$ en la fórmula (1) de forma que

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

si $0 < x < r$. Obsérvese que entonces será $|f'(x)/g'(x)| < |l| + \varepsilon/2$.

Para cada $x \in (0, r)$, la fórmula (1) nos lleva a que

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \cdot \left(1 - \frac{g(r)}{g(x)}\right) + \frac{f(r)}{g(x)} \\ &= \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} + \frac{1}{g(x)}\left(-\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \cdot g(r) + f(r)\right).\end{aligned}$$

Por tanto, teniendo en cuenta que $0 < x < c_x < r$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| &\leqslant \left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - l\right| + \frac{1}{|g(x)|}\left(\left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\right| \cdot |g(r)| + |f(r)|\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{|g(x)|}\left(\left(|l| + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot |g(r)| + |f(r)|\right).\end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$ existe un δ, con $0 < \delta < r$, tal que

$$g(x) > \frac{2}{\varepsilon} \cdot \left(\left(|l| + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot |g(r)| + |f(r)|\right),$$

si $0 < x < \delta$. Entonces, para cada x con $0 < x < \delta$ se tiene

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto prueba que $\lim_{x\to 0^+} f(x)/g(x) = l$.

Caso (III). Supongamos que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \infty$ y que $\lim_{x\to 0^+} f'(x)/g'(x) = \infty$.

Como $\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, dado $M > 0$, podemos elegir r en (1) de forma que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > 2(M+1)$$

si $0 < x < r$. Por otro lado, existe δ_1, $0 < \delta_1 < r$, tal que

$$1 - \frac{g(r)}{g(x)} > \frac{1}{2}$$

si $0 < x < \delta_1$, y también algún δ, $0 < \delta < \delta_1$ tal que

$$\frac{f(r)}{g(x)} > -1$$

si $0 < x < \delta$. Para cada x con $0 < x < \delta$, teniendo en cuenta también que $0 < x < c_x < r$, de la fórmula (1) resulta que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \cdot \left(1 - \frac{g(r)}{g(x)}\right) + \frac{f(r)}{g(x)} > 2(M+1) \cdot \frac{1}{2} - 1 = M.$$

Esto prueba que $\lim_{x\to 0^+} f(x)/g(x) = \infty$. $\square$

Ejemplos.

- $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x^3}$.

  Hay que tener mucho cuidado y comprobar que la Regla de L'Hôpital 6.24 se esté aplicando en una indeterminación del tipo $0/0$ o ∞/∞. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x^3} = 1, \quad \text{pero} \quad \lim_{x\to 1} \frac{2x}{3x^2} = \frac{2}{3}.$$

- $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x}$.

  Aquí si nos encontramos con una indeterminación del tipo $0/0$. Si derivamos numerador y denominador, obtenemos la fracción

$$\frac{2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{1} = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

  que obviamente no tiene límite en 0. Esto podría hacernos pensar (equivocadamente) que el límite que pretendemos calcular no existe. Sin embargo, podemos verificar directamente que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

Obsérvese que la Regla de L'Hôpital 6.24 da información acerca del límite $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ *solo cuando existe* el límite $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$. De no existir este último, no da ninguna información.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

  Nos encontramos de nuevo con una indeterminación del tipo $0/0$. Aplicando la Regla de L'Hôpital 6.24,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

  De nuevo es el caso $0/0$. Si aplicamos la Regla de L'Hôpital 6.24,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$.

  Caso $0/0$. Apliquemos la Regla de L'Hôpital 6.24.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/(1+x)}{1} = 1.$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$.

  Caso $0/0$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\cos x = 0.$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

  Caso $0/0$. Obsérvese que, implícitamente, aquí se aplica la Regla de L'Hôpital 6.24 dos veces. (El límite de $\operatorname{sen} x/x$ ya se obtuvo en un apartado anterior.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x}$.

  En este caso se trata de una indeterminación del tipo ∞/∞, que también entra en los supuestos de la Regla de L'Hôpital 6.24. Obtenemos así:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$.

  Caso ∞/∞. Obtenemos, aplicando la Regla del L'Hôpital 6.24 dos veces,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log(\operatorname{sen} x)}{\log x}$.

  De nuevo una indeterminación ∞/∞.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{\log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x/\operatorname{sen} x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cos x = 1.$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$.

  A veces, realizando alguna operación previa, la Regla de L'Hôpital 6.24 se puede utilizar para salvar indeterminaciones que no aparecen explícitamente en su enunciado. Por ejemplo, este límite nos da una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Pero si calculamos la diferencia de las dos fracciones podemos aplicar la Regla de L'Hôpital 6.24 (dos veces).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} x}{2\cos x - x \operatorname{sen} x} = 0.\end{aligned}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} x \log x$.

  Ahora nos encontramos con una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

  Esta es una indeterminación del tipo 0^0. Teniendo en cuenta la fórmula $a^b = a^{b\log a}$, obtenemos

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\log x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\log x} = e^0 = 1.$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+1/x)^x$.

  La indeterminación es en este caso del tipo ∞^0.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} (1+1/x)^x &= \lim_{x\to 0^+} e^{x\log(1+1/x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\log(1+1/x)}{1/x}} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-x^{-2}/(1+1/x)}{-x^{-2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{1+1/x}} = e^0 = 1.\end{aligned}$$

- $\lim\limits_{x\to\infty} (1+1/x)^x$.

  La indeterminación obtenida es del tipo 1^∞. Con la Regla de L'Hôpital 6.24, obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} (1+1/x)^x &= \lim_{x\to\infty} e^{x\log(1+1/x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(1+1/x)}{1/x}} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x^{-2}/(1+1/x)}{-x^{-2}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+1/x}} = e^1 = e.\end{aligned}$$

5. Aproximación local y el Teorema de Taylor-Young

5.1. Aproximación local

Derivadas sucesivas o de orden superior

En lo que resta de capítulo, será importante el concepto de *derivadas sucesivas*. Cuando derivamos una función, obtenemos una nueva función, la función derivada. Esta será a veces derivable a su vez, con lo que podemos obtener su función derivada, que será la *derivada segunda*, y así sucesivamente.

A continuación realizamos por inducción la definición formal.

Definición 6.25. Sea f una función en un intervalo abierto I, y sea $c \in I$.

(I) Se dice que la función f es *una vez derivable* en c si es derivable en c. En ese caso, se define la *primera derivada* de f en c como $f^{(1)}(c) = f'(c)$. Si $D \subset I$ es el conjunto de puntos a en los que existe $f^{(1)}(x)$, a la función definida en D que a cada x le asocia $f^{(1)}(x)$ la llamaremos *función derivada primera* de f y la denotaremos $f^{(1)}$.

(II) Si $n \geqslant 2$, se dice que f es n *veces derivable* en c si existe un intervalo abierto J, con $c \in J \subset I$, tal que para todo $x \in J$ existe $f^{(n-1)}(x)$ y la función derivada $(n-1)$-ésima $f^{(n-1)}$ es derivable en c. En tal caso, se define la *derivada n-ésima* de f en c como $f^{(n)}(c) = (f^{(n-1)})'(c)$. Si $D \subset I$ es el conjunto de puntos a en los que existe $f^{(n)}(x)$, a la función definida en D que a cada x le asocia $f^{(n)}(x)$ la llamaremos *función derivada n)-ésima* de f y la denotaremos $f^{(n)}$.

Observación. Para los n pequeños, se denota en general

$$f'(x), \qquad f''(x), \qquad f'''(x), \qquad f^{\text{iv}}(x), \qquad f^{\text{v}}(x), \qquad \dots$$

en lugar de

$$f^{(1)}(x), \quad f^{(2)}(x), \quad f^{(3)}(x), \quad f^{(4)}(x), \quad f^{(5)}(x), \quad \dots$$

Propiedades algebraicas para las derivadas sucesivas

Vemos a continuación que las funciones n veces derivables se conservan por las operaciones usuales entre funciones, cumpliendo reglas similares a las del Teorema 6.5.

Teorema 6.26. *Sean I un intervalo, $a \in I$, $c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ funciones n veces derivables en a. Entonces:*

(I) *$f + g$ es n veces derivable en a.*

(II) *cf es n veces derivable en a.*

(III) *fg es n veces derivable en a.*

(IV) *Si $g(a) \neq 0$, entonces f/g es n veces derivable en a.*

Demostración. Probaremos solamente (III). Las demostraciones de los otros apartados son similares, y en el caso de (I) y (I), son más sencillas.

(III) Procederemos por inducción sobre n. Para $n = 1$, es simplemente la propiedad 6.5 (III). Supongamos que, para cierto n, fg es n veces derivable en a siempre que f y g lo son. Veamos qué ocurre si f y g son $n+1$ veces derivables en a. En este caso, se tendrá que f' y g' (y también f y g) son n veces derivables en a. Podemos así aplicar la hipótesis de inducción, y entonces tanto $f'g$ como fg' son n veces derivables en a. Por tanto, según (I), también es n veces derivable en a la función $(fg)' = f'g + fg'$. O sea, fg es $n+1$ veces derivable en a. $\square$

También se prueba de manera similar el siguiente análogo de la Regla de la Cadena:

Teorema 6.27. *Sean I y J dos intervalos, y sean $f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon J \to \mathbb{R}$ dos funciones, donde $f(I) \subset J$. Supongamos que f es n veces derivable en un punto $a \in I$, y que g es n veces derivable en $f(a)$. Entonces la función compuesta $g \circ f$ es n veces derivable en a.*

Polinomio de Taylor

Un concepto importante, que nos conducirá más tarde a una generalización del Teorema del Valor Medio, es el de *polinomio de Taylor*. La idea consiste en hallar un polinomio que, alrededor de un punto c, aproxime la función f de la mejor forma posible.

Naturalmente, si el polinomio $P(x)$ buscado es, efectivamente, una *buenísima* aproximación de f alrededor del punto c, parece lógico pensar que f y P tengan varias derivadas sucesivas iguales en dicho punto; es decir,

$$f(c) = P(c), \quad f'(c) = P'(c), \quad f''(c) = P''(c), \quad f'''(c) = P'''(c), \quad \dots$$

Si consideramos cualquier polinomio $P(x)$ de grado menor o igual que n, este siempre se puede escribir en la forma

$$P(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots + a_n(x-c)^n.$$

Vamos a ver a continuación que siempre podemos escoger sus coeficientes a_0, a_1, …, a_n de forma que coincidan todas las derivadas sucesivas en a hasta la derivada n-ésima. En efecto, $P(c) = a_0$, así que si definimos $a_0 = f(c)$ se tendrá entonces $P(c) = f(c)$. También se tiene $P'(c) = a_1$, de forma que bastará definir $a_1 = f'(c)$ para que se cumpla $P'(c) = f'(c)$. La segunda derivada de $P(x)$ en c es $P''(c) = 2a_2$, así que tendremos que definir $a_2 = f''(c)/2$. Procediendo de esta misma manera para todas las derivadas hasta la n-ésima, obtenemos que para todo $k = 0, 1, 2, \dots, n$ basta escoger $a_k = f(k)/k!$ para que se cumpla $P^(k)(c) = f(k)(c)$.

Esto motiva la siguiente definición:

Definición 6.28. Dada una función f derivable n veces en un punto c, se llama *polinomio de Taylor* de f de orden n (o de grado n) centrado en c al polinomio

$$P_{n,c,f}(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Como se ve en la definición, el cálculo de los coeficientes de un polinomio de Taylor exigen conocer varias derivadas sucesivas de la función. Veamoslo con algunos ejemplos.

Ejemplos. Procederemos a continuación a dar los polinomios de Taylor de ciertas funciones elementales. Estos pueden estar centrados en muchos puntos, pero nosotros daremos solo los polinomios centrados en 0. Estos son conocidos generalmente como *polinomios de MacLaurin* o de *Taylor-MacLaurin*.

- $f(x) = e^x$.

  Sabemos que $f'(x) = e^x$. Si volvemos a derivar, observamos que también es $f''(x) = e^x$. Deducimos (se puede probar por inducción) que para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ es $f^{(n)}(x) = e^x$. (En este contexto, resulta cómodo escribir $f^{(0)}(x) = f(x)$.) Por tanto, $f^{(n)}(0) = 1$, y. en consecuencia,

$$\begin{aligned} P_{n,0,f}(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^2 \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^m}{n!}. \end{aligned}$$

- $f(x) = \operatorname{sen} x$.

  Derivando sucesivas veces, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x, & f''(x) &= -\operatorname{sen} x, \\ f'''(x) &= -\cos x, & f^{\text{iv}}(x) &= \operatorname{sen} x, \quad \ldots \end{aligned}$$

  con lo que se observa inmediatamente que estas derivadas se van repitiendo cada cuatro iteraciones. Lo mismo ocurre, por tanto, con las derivadas en 0, obteniéndose

$$f^{(2k)}(0) = 0, \qquad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

  para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. El polinomio de Taylor será, por tanto (resulta más cómodo en este caso considerar solo los de grado impar $2n + 1$, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$),

$$P_{2n+1,0,f}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

  Obsérvese que en este caso se tiene $P_{2n+2,0,f}(x) = P_{2n+1,0,f}(x)$.

- $f(x) = \cos x$.

  Teniendo en cuenta los cálculos del apartado anterior, tenemos que

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k, \qquad f^{(2k+1)}(0) = 0.$$

para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por tanto, el polinomio de Taylor será (en este caso, solo expresaremos los de grado par)

$$P_{2n,0,f}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

En este caso se tiene $P_{2n+1,0,f}(x) = P_{2n,0,f}(x)$.

- $f(x) = \log(1 + x)$.

  Si intentamos dar el polinomio de Taylor de la función logaritmo, nos encontramos con el problema de que esta función no está definida en 0. Esto tiene dos soluciones: o bien se calcula este polinomio centrado en otro punto (por ejemplo, 1), o bien se desplaza la función y se calcula el polinomio centrado en 0 de la función $\log(1 + x)$. Esta es la solución más habitual.

  Si calculamos las derivadas, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x}, & f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, \\ f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}, & f^{\mathrm{iv}}(x) &= -\frac{3!}{(1+x)^4}, \quad \ldots \end{aligned}$$

  y, en general,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

  si $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$, si $n \in \mathbb{N}$. En conclusión,

$$\begin{aligned} P_{n,0,f}(x) &= 0 + x - \frac{1!}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{n!}x^n \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}. \end{aligned}$$

- $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $\alpha \neq 0$.

  Calculemos las derivadas sucesivas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1}, & f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \\ f'''(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}, & \ldots \end{aligned}$$

  y, en general,

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

si $n \in \mathbb{N}$. Se sigue que $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$. Finalmente,

$$P_{n,0,f}(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

Si definimos

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

la fórmula anterior se podrá escribir en la forma más compacta

$$P_{n,0,f}(x) = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n.$$

Obsérvese que, para $\alpha \in \mathbb{N}$ y $n \geqslant \alpha$, esto no es más que el binomio de Newton.

El Teorema de Taylor-Young

La siguiente es una caracterización del polinomio de Taylor. Obtendremos de ella numerosas consecuencias. Entre otras cosas, nos permitirá muchas veces calcular dicho polinomio de una manera más sencilla.

Teorema 6.29 (de Taylor-Young)**.** *Sean I un intervalo, f una función definida en I y $c \in I$. Supongamos que f es $n-1$ veces derivable en I y que existe $f^{(n)}(c)$. Entonces el polinomio de Taylor de f de orden n centrado en c, $P_{n,c,f}(x)$, es el único polinomio $P(x)$ de grado menor o igual que n tal que*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - P(x)}{(x-c)^n} = 0.$$

Demostración. Para ver que el polinomio de Taylor verifica que el límite del enunciado es nulo, utilizaremos inducción sobre n. Es decir, probaremos lo siguiente:

Para toda función $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivable en todos los puntos hasta el orden $n-1$ y tal que existe $f^{(n)}(c)$, se cumple

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - P_{n,c,f}(x)}{(x-c)^n} = 0.$$

Para $n = 1$, esta proposición es cierta, ya que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} \frac{f(x) - P_{1,c,f}(x)}{x-c} &= \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c) - f'(c)(x-c)}{x-c} \\ &= \lim_{x\to c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x-c} - f'(c) \right) = 0.\end{aligned}$$

Supongamos ahora que la proposición es cierta para un cierto $n \in \mathbb{N}$, y consideremos una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivable n veces en I y tal que existe $f^{(n+1)}(c)$. Su función derivada $f'\colon I \to \mathbb{R}$ es $n-1$ veces derivable en I y tiene derivada n-ésima en c. Por la hipótesis de inducción,

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x) - P_{n,c,f'}(x)}{(x-c)^n} = 0.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}P_{n+1,c,f}(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 \\ &\qquad + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.\end{aligned}$$

La derivada de este polinomio es

$$\begin{aligned}P'_{n+1,c,f}(x) &= f'(c) + f''(c)(x-c) + \frac{f'''(c)}{2!}(x-c)^2 \\ &\qquad + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n = P_{n,c,f'}(x).\end{aligned}$$

Empleando ahora la Regla de L'Hôpital, obtenemos entonces

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} \frac{f(x) - P_{n+1,c,f}(x)}{(x-c)^{n+1}} &= \lim_{x\to c} \frac{f'(x) - P'_{n+1,c,f}(x)}{(n+1)(x-c)^n} \\ &= \lim_{x\to c} \frac{f'(x) - P_{n,c,f'}(x)}{(n+1)(x-c)^n} = 0.\end{aligned}$$

Como esto es cierto para cualquier función f en las condiciones antes requeridas, hemos visto que la proposición enunciada antes es también cierta para $n+1$.

Para ver la unicidad, supongamos que $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios de grado menor o igual que n tales que

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - P(x)}{(x-c)^n} = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-c)^n} = 0.$$

Veremos que entonces $P(x) = Q(x)$.

En efecto, como $P(x) - Q(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que n, se tendrá que

$$P(x) - Q(x) = a_0 + a_1(x-c) + \cdots + a_n(x-c)^n$$

para ciertos coeficientes a_0, a_1, $\ldots$, a_n. Y como

$$\lim_{x\to c} \frac{P(x) - Q(x)}{(x-c)^n} = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-c)^n} - \lim_{x\to c} \frac{f(x) - P(x)}{(x-c)^n} = 0,$$

resulta en primer lugar que

$$a_0 = \lim_{x\to c}(P(x) - Q(x)) = \lim_{x\to c} \frac{P(x) - Q(x)}{(x-c)^n} \cdot (x-c)^n = 0.$$

Luego realmente es

$$P(x) - Q(x) = a_1(x-c) + \cdots + a_n(x-c)^n.$$

Pero entonces

$$a_1 = \lim_{x\to c} \frac{P(x) - Q(x)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{P(x) - Q(x)}{(x-c)^n} \cdot (x-c)^{n-1} = 0.$$

Reiterando este proceso, obtenemos que $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$, es decir, $P(x) = Q(x)$. $\square$

Símbolo "o" de Landau

Definición 6.30. Sean f, g y h dos funciones en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, y sea $c \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto de acumulación de A.

(I) Se dice que $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \to c$ si

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

(o lo que es lo mismo, si $f(x) = u(x)g(x)$, donde u es una función que tiende a 0 en c).

(II) Se escribe $f(x) = h(x) + o(g(x))$ cuando $x \to c$, si $f(x) - h(x) = o(g(x))$ cuando $x \to c$, es decir, si

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - h(x)}{g(x)} = 0.$$

El Teorema de Taylor-Young, reenunciado

Teorema 6.31 (de Taylor-Young, segunda versión)**.** *Sean I un intervalo, f una función definida en I y $c \in I$. Supongamos que f es $n-1$ veces derivable en I y que existe $f^{(n)}(c)$. Entonces el polinomio de Taylor de f de orden n centrado en c, $P_{n,c,f}(x)$, es el único polinomio $P(x)$ de grado menor o igual que n tal que*

$$f(x) = P(x) + o((x-c)^n)$$

cuando $x \to c$.

Aproximación polinómica local

Definición 6.32. Sean I un intervalo, f una función definida en I y $c \in I$. Decimos que un polinomio $P(x)$ es una *aproximación polinómica local* de orden $n \in \mathbb{N}$ de f en el punto c si $P(x)$ es de grado menor o igual que n y

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - P(x)}{(x-c)^n} = 0,$$

o, lo que es equivalente, si

$$f(x) = P(x) + o((x-c)^n)$$

cuando $x \to c$.

Observación. Si una función tiene una aproximación polinómica local de orden n, esta es única.

El Teorema de Taylor-Young, reenunciado ¡otra vez!

Teorema 6.33 (de Taylor-Young, tercera versión)**.** *Sean I un intervalo, f una función definida en I y $c \in I$. Supongamos que f es $n-1$ veces derivable en I y que existe $f^{(n)}(c)$. Entonces el polinomio de Taylor de f de orden n centrado en c, $P_{n,c,f}(x)$, es la única aproximación polinómica local de orden n de f en c.*

Ejemplos.

(I) $f(x) = e^x$.

Una aproximación local de orden 3 de f en 0 es $P(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$, que es su polinomio de Taylor de tercer grado centrado en 0. En consecuencia,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

cuando $x \to 0$.

(II) $f(x) = \cos x$.

Del mismo modo que en el apartado anterior, una aproximación local de cuarto orden de f en 0 es $P(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24$, por ser su polinomio de Taylor. En consecuencia,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

cuando $x \to 0$. Obsérvese que, en este caso, este mismo polinomio es también el polinomio de Taylor de quinto orden, así que se tiene algo un poco mejor:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

cuando $x \to 0$.

(III) $f(x) = \begin{cases} \cos x + x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

Esta función no tiene derivada segunda en el origen. En efecto, su derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x + 3x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

que no es derivable en el origen a causa del sumando $-x\cos(1/x)$. Por tanto, f no tiene polinomio de Taylor de segundo orden centrado en 0. Sin embargo, el polinomio $P(x) = 1 - x^2/2$ es una aproximación local de segundo orden de f en 0. Para ver esto, obsérvese que $P(x)$ es el polinomio de Taylor de segundo grado de la función $\cos x$, de donde

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

cuando $x \to 0$. Por otra parte, es fácil observar que $x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = o(x^2)$ cuando $x \to 0$. En consecuencia,

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

cuando $x \to 0$.

(IV) $f(x) = \begin{cases} x^2 \log x, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Esta función es derivable en el origen. Por tanto, admite una aproximación polinómica en el origen de primer orden. Sin embargo, no admite aproximaciones polinómicas de orden superior a 1. En efecto, si $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ fuera una aproximación local de orden $n \geqslant 2$ de esta función, sería

$$x^2 \log x - a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_nx^n = o(x^n)$$

cuando $x \to 0$. Esto implicaría que

$$-a_0 = \lim_{x\to 0}(x^2 \log x - a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_nx^n) = 0.$$

Por tanto,

$$x^2 \log x - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_nx^n = o(x^n),$$

cuando $x \to 0$ y, dividiendo por x,

$$x \log x - a_1 - a_2x - \cdots - a_nx^{n-1} = o(x^{n-1}).$$

cuando $x \to 0$. De aquí se obtendría que

$$-a_1 = \lim_{x\to 0}(x \log x - a_1 - a_2x - \cdots - a_nx^{n-1}) = 0.$$

Como consecuencia,

$$x \log x - a_2x - \cdots - a_nx^{n-1} = o(x^{n-1})$$

cuando $x \to 0$ y, volviendo a dividir por x,

$$\log x - a_2 - \cdots - a_nx^{n-2} = o(x^{n-2}).$$

Pero esto implicaría que

$$-\infty = \lim_{x\to 0}(\log x - a_2 - \cdots - a_nx^{n-2}) = 0,$$

lo que, por supuesto, es una contradicción.

5.2. Cálculo indirecto del polinomio de Taylor

Como hemos visto, el cálculo de un polinomio de Taylor exige el cálculo de muchas derivadas sucesivas. En ocasiones, el Teorema de Taylor-Young 6.29 nos permite obrar a la inversa: podemos calcular de forma indirecta el polinomio de Taylor y obtener de él el valor de las derivadas.

Ejemplos.

(I) Polinomio de Taylor de $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Para la función que acabamos de plantear, podemos observar que esta función tiene derivadas de todos los órdenes en 0, y por tanto tiene polinomios de Taylor de todos los grados. Por otra parte,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1}}{1-x} \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

cuando $x \to 0$. Como f es n veces derivable el Teorema de Taylor-Young 6.31 nos dice que $P(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ debe ser el polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f centrado en 0. Esto implica claramente que $f^{(n)}(0) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Otra forma de obtener el mismo resultado es teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= (1+x)^{-1} \\ &= \binom{-1}{0} + \binom{-1}{1} x + \binom{-1}{2} x^2 + \cdots + \binom{-1}{n} x^n + o(x^n) \\ &= 1 - x + x^2 + \cdots (-1)^n x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

cuando $x \to 0$. Cambiando x por $-x$, obtenemos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots x^n + o(x^n).$$

cuando $x \to 0$.

(II) Polinomio de Taylor de $f(x) = \log(1 + x^2)$.

Según un ejemplo anterior, el polinomio de Taylor centrado en 0 de la función $\log(1+x)$ es $x - x^2/2 + \cdots + (-1)^{n+1} x^n/n$. Por tanto,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

cuando $x \to 0$. Pero entonces, sustituyendo x por x^2, obtenemos

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n} + o(x^{2n})$$

cuando $x \to 0$. Teniendo en cuenta que f tiene derivadas de todos los órdenes en 0, el Teorema de Taylor-Young 6.31 nos dice que el polinomio de Taylor de grado $2n$ de f es

$$P_{2n,0,f}(x) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n}.$$

Obsérvese que este es también el de grado $2n+1$.

(III) Polinomio de Taylor de $f(x) = e^x + \sqrt{1+x}$.

Sabemos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= (1+x)^{1/2} \\
&= \binom{1/2}{0} + \binom{1/2}{1}x + \binom{1/2}{2}x^2 + \binom{1/2}{3}x^3 \\
&\quad + \cdots + \binom{1/2}{n} + o(x^n) \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \cdots + \binom{1/2}{n}x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

cuando $x \to 0$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
e^x + \sqrt{1+x} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\right) \\
&\quad + \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \cdots + \binom{1/2}{n}x^n + o(x^n)\right) \\
&= 2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{11}{48}x^3 + \cdots + \left(\frac{1}{n!} + \binom{1/2}{n}\right)x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

cuando $x \to 0$. El Teorema de Taylor-Young 6.31 nos da entonces que el polinomio de Taylor buscado es

$$P_{n,0,f}(x) = 2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{11}{48}x^3 + \cdots + \left(\frac{1}{n!} + \binom{1/2}{n}\right)x^n.$$

(IV) Polinomio de Taylor de quinto grado de $f(x) = \operatorname{sen} x \log(1+x)$.

Sabemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5), \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)
\end{aligned}$$

cuando $x \to 0$. Multiplicando ambas expresiones, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x \log(1+x) &= \Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\Big) \\
&\quad \times \Big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\Big) \\
&= \Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\Big)\Big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\Big) \\
&\quad + \Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\Big) o(x^5) \\
&\quad + \Big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\Big) o(x^5) \\
&\quad + o(x^5) o(x^5) \\
&= \Big(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{6}\Big) \\
&\quad + \Big(\frac{11}{72}x^6 + \frac{3}{80}x^7 - \frac{11}{360}x^8 - \frac{x^9}{480} + \frac{x^{10}}{600}\Big) + o(x^5) \\
&= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{6} + o(x^5)
\end{aligned}$$

cuando $x \to 0$. Conclusión: el polinomio de Taylor buscado es $P(x) = x^2 - x^3/2 + x^4/6 - x^5/6$. Obsérvese que en la práctica la mayor parte de las operaciones realizadas aquí no son necesarias, ya que solo hace falta calcular los monomios de grado menor o igual que 5.

(V) Polinomio de Taylor de quinto grado de $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.

Ya vimos en el ejemplo (II) cómo obtener el polinomio de Taylor de una función que se obtiene a partir de otra función cuyo polinomio de Taylor ya conocemos, componiendo con una función tipo x^k. Cuando se compone con una función que no es de este tipo, pero que tiende a 0 en el 0, los cálculos son más complicados, pero el Teorema de Taylor-Young 6.31 nos permite también llegar a buen puerto.

Tomando el polinomio de Taylor de quinto grado de la exponencial, obtenemos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

cuando $x \to 0$. Ahora bien, $\operatorname{sen} x \to 0$ cuando $x \to 0$, así que podemos escribir

$$e^{\operatorname{sen} x} = 1 + \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + \frac{\operatorname{sen}^3 x}{6} + \frac{\operatorname{sen}^4 x}{24} + \frac{\operatorname{sen}^5 x}{120} + o(\operatorname{sen}^5 x)$$

cuando $x \to 0$.

Ahora bien, si se tiene $\varphi(x) = o(\operatorname{sen}^5 x)$ cuando $x \to 0$, esto quiere decir que $\lim_{x\to 0} \varphi(x)/\operatorname{sen}^5 x = 0$, y, mediante una equivalencia, vemos que $\lim_{x\to 0} \varphi(x)/x^5 = 0$, o sea, $\varphi(x) = o(x^5)$, así que podemos escribir la igualdad $o(\operatorname{sen}^5 x) = o(x^5)$ cuando $x \to 0$. (En general, si dos funciones ξ y ψ son equivalentes cuando $x \to 0$, podemos escribir $o(\xi(x)) = o(\psi(x))$.)

Teniendo en cuenta esto, y que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

cuando $x \to 0$, se obtiene sustituyendo que

$$\begin{aligned}
e^{\operatorname{sen} x} &= 1 + \Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\Big) + \frac{1}{2}\Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\Big)^2 \\
&\quad + \frac{1}{6}\Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\Big)^3 + \frac{1}{24}\Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\Big)^4 \\
&\quad + \frac{1}{120}\Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\Big)^5 + o(x^5) \\
&= 1 + \Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\Big) + \frac{1}{2}\Big(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)\Big) \\
&\quad + \frac{1}{6}\Big(x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5)\Big) + \frac{1}{24}\big(x^4 + o(x^5)\big) \\
&\quad + \frac{1}{120}\big(x^5 + o(x^5)\big) + o(x^5) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)
\end{aligned}$$

cuando $x \to 0$. Esto indica que el polinomio buscado es

$$P_{5,0,f}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{2}{15}x^5.$$

(VI) Polinomio de Taylor de quinto grado de $f(x) = e^{\cos x}$.

La estrategia anterior realizando una sustitución no es válida directamente en este caso, ya que $\cos x$ no tiende a 0, sino a 1, cuando $x \to 0$. En esta ocasión, basta escribir

$$f(x) = e^{1+(\cos x - 1)} = e \cdot e^{\cos x - 1}.$$

Obsérvese que $\cos x - 1 \to 0$ cuando $x \to 1$, así que podremos ahora poner

$$\begin{aligned}
e^{\cos x} &= e\Big(1 + (\cos x - 1) + \frac{1}{2}(\cos x - 1)^2 + \frac{1}{6}(\cos x - 1)^3 \\
&\qquad + \frac{1}{24}(\cos x - 1)^4 + \frac{1}{120}(\cos x - 1)^5 + o\big((\cos x - 1)^5\big)\Big)
\end{aligned}$$

Por otra parte, sabemos que $\cos x - 1 \sim -x^2/2$, cuando $x \to 0$, lo que nos indica que $o((\cos x - 1)^5) = o(x^{10}) = o(x^5)$ cuando $x \to 0$. Teniendo en cuenta esto, y que

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

cuando $x \to 0$, podemos sustituir, para obtener que

$$\begin{aligned}
e^{\cos x} &= e\Bigg(1 + \Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\Big) + \frac{1}{2}\Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\Big)^2 \\
&\qquad + \frac{1}{6}\Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\Big)^3 + \frac{1}{24}\Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\Big)^4 \\
&\qquad + \frac{1}{120}\Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\Big)^5 + o(x^5)\Bigg) \\
&= e\Bigg(1 + \Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{x^4}{4} + o(x^5)\Big) \\
&\qquad + o(x^5) + o(x^5) + o(x^5) + o(x^5)\Bigg) \\
&= e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^5)
\end{aligned}$$

cuando $x \to 0$. Por tanto, el polinomio buscado es

$$P_{5,0,f}(x) = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4.$$

(VII) Polinomio de Taylor de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Una estrategia similar a la de (II) nos daría este polinomio sin más que sustituir x por $-x^2$ en el polinomio de Taylor de segundo grado de la función $1/(1-x)$. En efecto, como

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n),$$

resulta que

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}).$$

con lo que el polinomio de Taylor buscado, cuando el grado es par, es igual a

$$P_{2n,0,f}(x) = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n}.$$

Obsérvese también que $P_{2n+1,0,f}(x) = P_{2n,0,f}(x)$.

Otra estrategia, un poco más larga en este caso, podría tener en cuenta que la derivada de $\log(1+x^2)$ es $2x/(1+x^2)$. Vemos cómo desarrollar esto.

Sabemos que el polinomio de Taylor de grado $2n+2$ de $\log(1+x^2)$ es

$$x^2 - \frac{x^4}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n+1}.$$

Sea $p(x)$ el polinomio de Taylor de grado $2n+1$ de $2x/(1+x^2)$, y sea $q(x)$ otro polinomio de grado $2n+2$ tal que $q(0) = 0$ y $q'(x) = p(x)$. La regla de L'Hôpital nos dice que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2) - q(x)}{x^{2n+2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x/(1+x^2) - p(x)}{(2n+2)x^{2n+1}} = 0.$$

Esto nos indica que $q(x)$ es una aproximación polinómica local de orden $2n+2$ de $\log(1+x^2)$ en 0. Pero, por la unicidad de esta, deberá ser

$$q(x) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n+1}.$$

Y como $p(x) = q'(x)$, tendremos

$$p(x) = 2x - 2x^3 + \cdots + (-1)^n 2x^{2n+1},$$

así que

$$\frac{2x}{1+x^2} = 2x - 2x^3 + \cdots + (-1)^n 2x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

cuando $x \to 0$. Dividiendo por $2x$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{o(x^{2n+1})}{x} \\ &= 1 - x^2 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}). \end{aligned}$$

(*¿Por qué?*) Así que el polinomio buscado es

$$P_{2n,0,f}(x) = 1 - x^2 + \cdots + (-1)^n x^{2n}.$$

(VIII) Polinomio de Taylor de $f(x) = \arctan x$.

Teniendo en cuenta que la derivada de la arco tangente es $1/(1+x^2)$, siguiendo la segunda estrategia del ejemplo anterior, vemos que, como el polinomio de Taylor de grado $2n$ de esta última función es

$$1 - x^2 + \cdots + (-1)^n x^{2n},$$

el de la arcotangente de grado $2n+1$ debe tener a este como derivada y, además, su primer coeficiente debe ser $\operatorname{arc\,tan} 0 = 0$. En consecuencia, el polinomio de grado $2n+1$ buscado es

$$P_{2n+1,0,f}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

(IX) Polinomio de Taylor de $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$.

La derivada de f es $f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{-1/2}$. Sabemos que el polinomio de Taylor de grado n de $(1+x)^{-1/2}$ es

$$\binom{-1/2}{0} + \binom{-1/2}{1}x + \binom{-1/2}{2}x^2 + \cdots + \binom{-1/2}{n}x^n.$$

Por tanto, el polinomio de Taylor de grado $2n$ de $f'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ será

$$\binom{-1/2}{0} - \binom{-1/2}{1}x^2 + \binom{-1/2}{2}x^4 + \cdots + (-1)^n\binom{-1/2}{n}x^{2n}.$$

Esto quiere decir, teniendo en cuenta que $f(0) = 0$, que el polinomio de Taylor de grado $n+1$ de f es

$$\begin{aligned} P_{2n+1,0,f}(x) &= \binom{-1/2}{0}x - \frac{1}{3}\binom{-1/2}{1}x^3 + \frac{1}{5}\binom{-1/2}{2}x^5 + \cdots \\ &\quad + (-1)^n \frac{1}{2n+1}\binom{-1/2}{n}x^{2n+1} \\ &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}\binom{-1/2}{n}x^{2n+1}. \end{aligned}$$

(X) Polinomio de $f(x) = e^x$ centrado en 1.

Esta técnica se puede utilizar también para hallar polinomios de Taylor centrados en puntos distintos de 0 una vez que conocemos el polinomio centrado en 0. En este ejemplo concreto, sabemos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

cuando $x \to 0$. Tenemos que $x-1 \to 0$ cuando $x \to 1$, así que

$$e^{x-1} = 1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{n!} + o\big((x-1)^n\big)$$

cuando $x \to 1$. De esta manera,

$$\begin{aligned} e^x &= e \cdot e^{x-1} \\ &= e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \cdots + \frac{e}{n!}(x-1)^n + o\big((x-1)^n\big) \end{aligned}$$

cuando $x \to 1$. Se concluye que

$$P_{n,1,f}(x) = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \cdots + \frac{e}{n!}(x-1)^n.$$

(XI) Polinomio de $f(x) = \log(1+x)$ centrado en e.

En la misma línea del ejemplo anterior, obtenemos ahora el polinomio de Taylor centrado en e, a partir del centrado en 0. Sabemos que

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \tag{2}$$

cuando $x \to 0$. Escribamos nuestra función de otra manera.

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= \log(1+e+(x-e)) = \log\left((1+e)\left(1+\frac{x-e}{1+e}\right)\right) \\ &= \log(1+e) + \log\left(1+\frac{x-e}{1+e}\right) \end{aligned}$$

Por otra parte, $(x-e)/(e+1) \to 0$ cuando $x \to e$, así que, sustituyendo en (2), obtenemos

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= \log(1+e) + \left(\frac{x-e}{1+e}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x-e}{1+e}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-e}{1+e}\right)^3 \\ &\quad - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\left(\frac{x-e}{1+e}\right)^n + o\big((x-e)^n\big) \\ &= \log(1+e) + \frac{1}{1+e}(x-e) - \frac{1}{2(1+e)^2}(x-e)^2 \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n(1+e)^n}(x-e)^n + o\big((x-e)^n\big) \end{aligned}$$

cuando $x \to e$. Por tanto,

$$\begin{aligned} P_{n,c,f}(x) &= \log(1+e) + \frac{1}{1+e}(x-e) - \frac{1}{2(1+e)^2}(x-e)^2 \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n(1+e)^n}(x-e)^n. \end{aligned}$$

5.3. Aplicación al cálculo de límites

El Teorema de Taylor-Young 6.29 nos permite en muchos casos resolver indeterminaciones del tipo $0/0$ en el cálculo de límites. Esto nos proporciona un procedimiento que en algunos casos sustituye con ventaja a la aplicación repetida de la Regla de L'Hôpital 6.24. La idea es que esta técnica nos permite convertir una expresión muy complicada en algo que básicamente es un cociente de polinomios.

Ejemplos.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x - x)^2 - \frac{1}{36}x^6}{x^8}$.

  Por el Teorema de Taylor-Young 6.31, se deduce que

  $$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

  cuando $x \to 0$. Por lo tanto,

  $$\operatorname{sen} x - x = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

  cuando $x \to 0$. Elevando al cuadrado, es fácil comprobar que

  $$\begin{aligned}(\operatorname{sen} x - x)^2 &= \Big(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\Big)^2 \\ &= \Big(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\Big)^2 + 2\Big(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\Big)o(x^5) + o(x^5)^2 \\ &= \Big(\frac{x^6}{36} - \frac{x^8}{360} + o(x^8)\Big) + 2\Big(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\Big)x^3 o(x^5) + o(x^{10}) \\ &= \frac{x^6}{36} - \frac{x^8}{360} + o(x^8) + o(x^8) + o(x^8) \\ &= \frac{x^6}{36} - \frac{x^8}{360} + o(x^8).\end{aligned}$$

  cuando $x \to 0$. Entonces

  $$\frac{(\operatorname{sen} x - x)^2 - \frac{1}{36}x^6}{x^8} = -\frac{1}{360} + \frac{o(x^8)}{x^8}$$

  cuando $x \to 0$. Finalmente,

  $$\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x - x)^2 - \frac{1}{36}x^6}{x^8} = -\frac{1}{360}.$$

  Obsérvese que este límite puede también ser calculado mediante la aplicación (¡siete veces!) de la Regla de L'Hôpital 6.24.

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,tan} x - \operatorname{sen} x}{\tan x - \operatorname{arc\,sen} x}$.

  Debido al Teorema de Taylor-Young 6.31, cuando $x \to 0$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{arc\,tan} x - \operatorname{sen} x}{\tan x - \operatorname{arc\,sen} x} \\
&\qquad = \frac{\cos x(\operatorname{arc\,tan} x - \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x - \cos x \operatorname{arc\,sen} x} \\
&\qquad = \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left((x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))\right)}{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)} \\
&\qquad = \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(-\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)} \\
&\qquad = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}.
\end{aligned}$$

  En conclusión, si dividimos numerador y denominador por x^3 y pasamos al límite,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tan} x - \operatorname{sen} x}{\tan x - \operatorname{arc\,sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}} = -1.$$

5.4. Extremos relativos

Una condición suficiente para la existencia de un extremo

El Lema de Fermat 6.9 nos da una condición necesaria para que un punto interior de un intervalo sea un extremo relativo de una función derivable: tal punto tiene que anular la derivada. Como se vio, esto no es una condición suficiente: existen puntos críticos que no son ni máximos ni mínimos relativos. El Teorema de Taylor-Young 6.29 nos proporciona un criterio que nos ayuda a distinguir cuándo se da una situación u otra.

Teorema 6.34. *Sea f una función derivable $n-1$ veces derivable ($n \geqslant 2$) en un intervalo abierto I. Sea $a \in I$ y supongamos que existe $f^{(n)}(a) \neq 0$ y además*

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0.$$

Entonces,

(I) *Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, entonces a es un mínimo relativo estricto.*

(II) *Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, entonces a es un máximo relativo estricto.*

(III) *Si n es impar, entonces f no tiene un extremo relativo en a.*

Demostración. Obsérvese que, como $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ entonces

$$P_{n,a,f}(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Por el Teorema de Taylor-Young 6.29, tenemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{n,a,f}(x)}{(x-a)^n} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{(x-a)^n} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!},
\end{aligned}$$

es decir,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Como $f^{(n)}(a) \neq 0$, esto implica que, para algún $\delta > 0$, se cumple que para todo $x \in I$ con $0 < |x-a| < \delta$ se tiene

$$\operatorname{sgn} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \operatorname{sgn} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \operatorname{sgn} f^{(n)}(a).$$

Se pueden dar entonces tres casos:

(I) Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, para los $x \in I$ con $0 < |x-a| < \delta$, se tendrá

$$\operatorname{sgn}(f(x) - f(a)) = \operatorname{sgn} f^{(n)}(a) > 0.$$

Luego para todo $x \in I$ con $0 < |x-a| < \delta$, tiene que ser $f(x) > f(a)$, y así f tiene en a un mínimo relativo estricto.

(II) Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, el mismo argumento nos muestra que f tiene en a un máximo relativo estricto.

(III) Si n es impar, entonces $(x-a)^n < 0$ si $x < a$, mientras que $(x-a)^n > 0$ si $x > a$. Luego $f(x) - f(a)$ tiene un signo si $x \in I \cap (a-\delta, a)$ y el signo contrario si $x \in I \cap (a, a+\delta)$. Por tanto, f no tiene un extremo relativo en a. □

Ejemplos.

(I) $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - e^x$.

Como $f'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - e^x$, el 0 es un punto crítico de f. Tenemos qué ver si es un máximo relativo o un mínimo relativo, o si no es ninguna de las dos cosas. Para ello, calculamos algunas derivadas adicionales:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 1 + x - e^x, \\ f'''(x) &= 1 - e^x, \\ f^{\text{iv}}(x) &= -e^x. \end{aligned}$$

Obtenemos así que $f''(0) = f'''(0) = 0$, mientras que $f^{\text{iv}}(0) = -1 < 0$. En consecuencia, el Teorema 6.34 nos dice que f tiene en 0 un máximo relativo.

(II) $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \log(1 + x)$.

La derivada es

$$f'(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x} = \frac{x^3}{1+x},$$

con lo que el único punto crítico de f es $x = 0$. Si calculamos alguna derivada más, obtenemos

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1 + 2x + \frac{1}{(1+x)^2}, \\ f'''(x) &= 2 - \frac{2}{(1+x)^3}, \\ f^{\text{iv}}(x) &= \frac{6}{(1+x)^4}, \end{aligned}$$

y observamos que $f''(0) = f'''(0) = 0$, mientras que $f^{\text{iv}}(0) = 6 > 0$. Por tanto, f tiene en 0 un mínimo relativo.

(III) $f(x) = \operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{6}$.

Como $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$, el 0 es un punto crítico de f. Además,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\operatorname{sen} x + x, \\ f'''(x) &= -\cos x + 1, \\ f^{\text{iv}}(x) &= \operatorname{sen} x, \\ f^{\text{v}}(x) &= \cos x. \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que $f''(0) = f'''(0) = f^{\text{iv}}(x) = 0$ y $f^{\text{v}}(0) = 1 \neq 0$. En consecuencia, 0 no es un extremo relativo de esta función.

(IV) $f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

La derivada de esta función es

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Obviamente, 0 es un punto crítico de f. Sin embargo, no es difícil ver que f no tiene segunda derivada en 0. En efecto, el cociente incremental en 0 de f' es

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

que no tiene límite en 0. Se sigue por tanto que el resultado anterior no es aplicable en este caso. Observando directamente el signo de la función, podemos sin embargo deducir que esta función no tiene un extremo relativo en 0.

(V) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

El único punto crítico de f es $x = 0$. En efecto, en los puntos $x \neq 0$, la derivada es

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2},$$

que no se anula en ningún $x \neq 0$. Por otra parte, f es continua, y haciendo el cambio de variable $u = 1/x$, obtenemos

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} = \lim_{u \to \infty} \frac{2u^3}{e^{u^2}} = 0,$$

así que $f'(0+) = 0$. De forma análoga, se puede probar que $f'(0-) = 0$, así que $f'(0) = 0$.

Es evidente que 0 es un mínimo estricto de f, ya que $f(x) > 0$ si $x \neq 0$. No obstante, si para averiguar esto intentamos en cambio utilizar el teorema 6.34, no obtendremos ningún resultado, ya que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para ver esto, primero probaremos por inducción lo siguiente:

> Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un polinomio $P_n(x)$ tal que para todo $x \neq 0$, es $f^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x^2}$. Además, $f^{(n)}(0) = 0$ y $f^{(n)}$ es continua en 0.

En efecto, para $n = 1$, ya lo hemos probado en parte. Falta solo la trivial observación de que f' es continua en 0, ya que $f'(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$.

Supongamos que la proposición es cierta para n. Entonces, será $f^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x^2}$ para algún polinomio $P_n(x)$, si $x \neq 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= -\frac{1}{x^2}P'_n\Big(\frac{1}{x}\Big)e^{-1/x^2} + P_n\Big(\frac{1}{x}\Big)\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} \\ &= \Big(\frac{2}{x^3}P_n\Big(\frac{1}{x}\Big) - \frac{1}{x^2}P'_n\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)e^{-1/x^2}, \end{aligned}$$

así que basta definir $P_{n+1}(x) = 2x^3P_n(x) - x^2P'(x)$ para que la proposición se cumpla también en el caso $n + 1$.

Como $f^{(n)}$ es continua en 0, su derivada $f^{(n+1)}(0)$ la podemos hallar pasando al límite. Haciendo el cambio de variable $u = 1/x$, obtenemos que

$$\lim_{x\to 0^+} f^{(n+1)}(x) = \lim_{x\to 0^+} P_{n+1}\Big(\frac{1}{x}\Big)e^{-1/x^2} = \lim_{u\to\infty} \frac{P_{n+1}(u)}{e^{u^2}} = 0.$$

Análogamente se prueba que $\lim_{x\to 0^-} f^{(n+1)}(x) = 0$. Así se tiene que $\lim_{x\to 0} f^{(n+1)}(x) = 0$. También observamos que $f^{(n+1)}$ es continua en 0.

6. El Teorema de Taylor

6.1. Fórmula de Taylor con resto

¿Qué es el residuo?

Una idea fundamental cuando se estudia el polinomio de Taylor de una función es que esta puede ser aproximada por dicho polinomio. Naturalmente, es importante saber qué error se ha cometido cuando se realiza esta aproximación. Este queda reflejado en el siguiente concepto:

Definición 6.35. Sean I un intervalo, f una función definida en I y $c \in I$. Supongamos que f es $n-1$ veces derivable en I y que existe $f^{(n)}(c)$. Llamamos *residuo de Taylor* o *resto de Taylor* de f de grado n centrado en c a la expresión

$$R_{n,c,f}(x) = f(x) - P_{n,c,f}(x).$$

El Teorema de Taylor

El Teorema de Taylor-Young 6.31 hace un estudio cualitativo del comportamiento del residuo de Taylor: nos dice cómo tiende a 0 a medida que nos acercamos al centro del polinomio. Sin embargo, nada nos dice acerca del valor que toma este residuo en un punto determinado. El Teorema de Taylor 6.36, en cambio, nos da una información cuantitativa, más precisa, pero a cambio de unas hipótesis algo más fuertes. Este teorema tiene varias versiones, de las cuales vamos a presentar dos. Más adelante, al estudiar la integral de Riemann, se verá una tercera.

Teorema 6.36 (de Taylor)**.** *Sea f una función con derivada n-esima continua en un intervalo I y $n+1$ veces derivable en $I\backslash\{c\}$, donde $c \in I$. Entonces,*

(I) *(Residuo de Cauchy) Para todo $x \in I\backslash\{c\}$ existe un punto θ interior al intervalo de extremos c y x, tal que*

$$R_{n,c,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{n!}(x-\theta)^n(x-c)$$

(II) *(Residuo de Lagrange) Para todo $x \in I\backslash\{c\}$ existe un punto θ interior al intervalo de extremos c y x, tal que*

$$R_{n,c,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

Demostración. Fijemos $x \in I$, y definamos $h\colon I \to \mathbb{R}$ por $h(t) = P_{n,t,f}(x)$, es decir,

$$\begin{aligned} h(t) = f(t) + (x-t)f'(t) + (x-t)^2\frac{f''(t)}{2} \\ + \cdots + (x-t)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!} + (x-t)^n\frac{f^{(n)}(t)}{n!}. \end{aligned}$$

Obsérvese en primer lugar que $h(x) = f(x)$ y que $h(c) = P_{n,c,f}(x)$. En consecuencia, podemos escribir $R_{n,c,f}(x) = h(x) - h(c)$.

Enfaticemos que la variable de esta función es t, y que debemos considerar x como una constante. Según las hipótesis, h es continua en I y derivable en $I\backslash\{c\}$. Además, para cada $t \in I\backslash\{c\}$,

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(t) + \big(-f'(t) + (x-t)f''(t)\big) + \Big(-(x-t)f''(t) + (x-t)^2\frac{f'''(t)}{2}\Big) \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + \Big(-(x-t)^{n-2}\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-2)!} + (x-t)^{n-1}\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}\Big) \\ &\quad + \Big(-(x-t)^{n-1}\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} + (x-t)^n\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\Big) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \end{aligned}$$

Ahora estamos preparados para demostrar las fórmulas de Cauchy y Lagrange.

(I) Por el Teorema del Valor Medio 6.13, existe un valor θ comprendido entre x y c tal que

$$R_{n,c,f}(x) = h(x) - h(c) = h'(\theta)(x-c) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{n!}(x-\theta)^n(x-c).$$

(II) Consideremos la función $g(t) = (x-t)^{n+1}$. Obsérvese que $g(x) = 0$ y $g(c) = (x-c)^{n+1}$. Por tanto, $g(x) - g(c) = -(x-c)^{n+1}$. Por el Teorema del Valor Medio Generalizado 6.23, existe un θ comprendido entre x y c tal que

$$\begin{aligned} -\frac{R_{n,c,f}(x)}{(x-c)^{n+1}} &= \frac{h(x)-h(c)}{g(x)-g(c)} = \frac{h'(\theta)}{g'(\theta)} \\ &= \frac{\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{n!}(x-\theta)^n}{-(n+1)(x-\theta)^n} = -\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

es decir,

$$R_{n,c,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}. \qquad \square$$

Observaciones.

- Para el caso $n = 0$, ambas versiones nos dan el Teorema del Valor Medio 6.13.
- Hay que hacer observar que el Residuo de Cauchy ha quedado hoy día reducido a una curiosidad histórica. El Residuo de Lagrange y el Integral (que se verá más adelante), en cambio, se utilizan habitualmente.

Ejemplos.

(I) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \dfrac{1}{(1-\theta)^{n+2}}x^{n+1}$ para algún θ entre 0 y x.

Sea $f(x) = 1/(1-x)$. Ya sabemos que el polinomio de Taylor de grado n es $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$. Podemos probar por inducción que $f^{(n)}(x) = n!/(1-x)^{n+1}$. Así que, para cierto θ situado entre 0 y x,

$$\begin{aligned} R_{n,0,f}(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)!/(1-\theta)^{n+2}}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{1}{(1-\theta)^{n+2}}x^{n+1}. \end{aligned}$$

(II) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1}$ para algún θ entre 0 y x.

Definamos $f(x) = e^x$. Claramente, $f^{(n)}(x) = e^x$. Por tanto,

$$R_{n,0,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1}$$

donde θ es un número real entre 0 y x.

(III) $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}}$
para algún θ entre 0 y x.

Sea ahora $f(x) = \log(1+x)$ para $x > -1$. Tenemos que

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} R_{n,0,f}(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= \frac{(-1)^n n!/(1+\theta)^{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}} \end{aligned}$$

(IV) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \dbinom{\alpha}{n}x^n + \dbinom{\alpha}{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{(1+\theta)^{n-\alpha+1}}$
para algún θ entre 0 y x, si $x > -1$.

Si definimos ahora $f(x) = (1+x)^\alpha$, se puede probar que

$$f^{(n)}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(1+x)^{n-\alpha}}.$$

El residuo será, así,

$$\begin{aligned} R_{n,0,f}(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!(1+\theta)^{n-\alpha+1}}x^{n+1} \\ &= \binom{\alpha}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta)^{n-\alpha+1}} \end{aligned}$$

(V) $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{\cos\theta}{(2n+3)!} x^{2n+3}$ para algún θ entre 0 y x.

Definiendo $f(x) = \operatorname{sen} x$, como $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$, obtenemos que

$$R_{2n+2,0,f}(x) = \frac{f^{(2n+3)}(\theta)}{(2n+3)!} x^{2n+3} = (-1)^{n+1} \frac{\cos\theta}{(2n+3)!} x^{2n+3}$$

(Obsérvese que hemos utilizado que, en este caso, los polinomios de Taylor de grados $2n+1$ y $2n+2$ coinciden.)

(VI) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{\cos\theta}{(2n+2)!} x^{2n+2}$ para algún θ entre 0 y x, si $x > -1$.

6.2. Aplicación al cálculo numérico

El Teorema de Taylor resulta útil para dar estimaciones del resultado de algunas operaciones.

Ejemplos.

(I) Aproximación de $\sqrt[3]{1,3}$.

Consideramos la función $f(x) = (1+x)^{1/3}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{2,0,f}(x) + R_{2,0,f}(x) \\ &= \binom{1/3}{0} + \binom{1/3}{1} x + \binom{1/3}{2} x^2 + R_{2,0,f}(x) \\ &= 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + R_{2,0,f}(x), \end{aligned}$$

donde, según el Teorema de Taylor,

$$R_{2,0,f}(x) = \frac{f'''(\theta)}{3!} x^3 = \frac{5}{81}(1+\theta)^{-8/3} x^3$$

para algún θ entre 0 y x. En el caso particular en que $x = 0{,}3$, obtenemos como aproximación de $f(0,3) = \sqrt[3]{1{,}3}$ el número $P_{2,0,f}(0,3) = 1{,}09$. Como $\theta > 0$, será $(1+\theta)^{-8/3} < 1$, de donde el error cometido es como mucho

$$|R_{2,0,f}(0,3)| \leqslant \frac{5}{81}\left(\frac{3}{10}\right)^3 = \frac{1}{600} < 0{,}5 \times 10^{-2}.$$

Por tanto, el cálculo realizado es correcto hasta el segundo decimal.

(II) Aproximar e con un error menor que 10^{-5}.

Consideramos la función $f(x) = e^x$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{n,0,f}(x) + R_{n,0,f}(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n,0,f}(x), \end{aligned}$$

donde

$$R_{n,0,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} x^n = \frac{e^\theta}{(n+1)!} x^n$$

para algún θ situado entre 0 y x. En particular, para $x = 1$, una aproximación de e será

$$P_{n,0,f}(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

y el error cometido será, para un cierto θ entre 0 y 1,

$$|R_{n,0,f}(1)| = \frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Observamos que $9! = 362880 > 3 \times 10^5$, de manera que para $n = 8$ obtenemos que el error cometido es menor que 10^{-5}. Para este valor de n, obtenemos la aproximación

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{8!} \simeq 2{,}71828,$$

con un error cometido menor que 10^{-5} (que es menor que $0{,}5 \cdot 10^{-4}$, así que el resultado anterior es correcto hasta el cuarto decimal).

6.3. Aplicación a la demostración de desigualdades

El Teorema de Taylor se puede utilizar también para establecer determinadas desigualdades.

Ejemplos.

(I) $1 - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \cos x$. La igualdad se cumple solo para $x = 0$.

Está claro que se tiene la igualdad para $x = 0$. Veamos que en los demás puntos se tiene una desigualdad estricta.

Si $|x| > \pi$, entonces $1 - x^2/2 < 1 - 9/2 = -7/2 < \cos x$. En conclusión, la desigualdad estricta se cumple cualquiera que sea $x \neq 0$. Por tanto, bastará establecer la desigualdad para $x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$.

Tomemos la función $f(x) = \cos x$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\cos x &= P_{2,0,f}(x) + R_{2,0,f}(x)\\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + R_{2,0,f}(x),\end{aligned}$$

donde

$$R_{2,0,f}(x) = \frac{f'''(\theta)}{3!}x^3 = \frac{\operatorname{sen}\theta}{6}x^3$$

para cierto θ entre 0 y x. Si $0 < x \leqslant \pi$, entonces $0 < \theta < \pi$. Como tanto $\operatorname{sen}\theta$ como x^3 son positivos, se sigue que $R_{2,0,f}(x) > 0$. Si $-\pi \leqslant x < 0$, entonces $-\pi < \theta < 0$. Como en este caso tanto $\operatorname{sen}\theta$ como x^3 son negativos, se obtiene nuevamente que $R_{2,0,f}(x) > 0$. Por consiguiente, se obtiene que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + R_{2,0,f}(x) > 1 - \frac{x^2}{2}$$

si $|x| \leqslant \pi$, $x \neq 0$.

(II) Para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x > 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} + \cdots - \frac{x^{2n}}{2n} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Obsérvese que lo que estamos intentando probar en este caso es que, si $f(x) = \log(1+x)$, entonces, para todo $x > 0$,

$$P_{2n,0,f}(x) < f(x) < P_{2n+1,0,f}(x).$$

Sabemos que, cualquiera que sea $k \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = P_{k,0,f}(x) + R_{k,0,f}(x),$$

donde

$$R_{k,0,f}(x) = \frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}x^{k+1} = (-1)^k \frac{x^{k+1}}{(k+1)(1+\theta)^{k+1}},$$

para un cierto θ entre 0 y x. Como x, y por tanto θ, son positivos, este residuo será positivo para k par, y negativo para k impar. Por tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{2n,0,f}(x) + R_{2n,0,f}(x) > P_{2n,0,f}(x), \\ f(x) &= P_{2n+1,0,f}(x) + R_{2n+1,0,f}(x) < P_{2n+1,0,f}(x), \end{aligned}$$

que es lo que deseábamos probar.

7. Convexidad y concavidad. Representación de funciones

7.1. Convexidad y concavidad

Funciones convexas y cóncavas

Definición 6.37. Sean I un intervalo y $f\colon I \to \mathbb{R}$.

(I) Se dice que f es *convexa* si cualesquiera que sean $a, b \in I$ y $0 < \lambda < 1$ se tiene
$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

(II) Se dice que f es *cóncava* si cualesquiera que sean $a, b \in I$ y $0 < \lambda < 1$ se tiene
$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \geqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

Observaciones.

- Una función f es cóncava si, y solo si, $-f$ es convexa. En consecuencia, solo estudiaremos los resultados que vienen a continuación para las funciones convexas. Los resultados paralelos para funciones cóncavas se obtienen de manera similar.

- La idea geométrica de una función convexa es que, cualesquiera que sean los puntos $a < b$, la gráfica de la función entre $x = a$ y $x = b$ está por debajo del segmento que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Otras formas de definir la convexidad

A continuación damos varias caracterizaciones de las funciones convexas.

Proposición 6.38. *Sean I un intervalo y $f\colon I \to \mathbb{R}$. Son equivalentes:*

(I) *f es convexa.*

(II) *Cualesquiera que sean $a, b, x \in I$ con $a < x < b$, se tiene*

$$f(x) \leqslant f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

(Es decir, la gráfica de f está por debajo de la cuerda que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.)

(III) *Cualesquiera que sean $a, b, x \in I$ con $a < x < b$, se tiene*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(IV) *Cualesquiera que sean $a, b, x \in I$ con $a < x < b$, se tiene*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

(Obsérvese que lo que afirman (III) y (IV) conjuntamente es que la pendiente de la cuerda que une $(a, f(a))$ con $(x, f(x))$ va creciendo a medida que crece x.)

Demostración. Las proposiciones (II) y (III) son claramente equivalentes. La proposición (IV) también es equivalente a (II), si tenemos en cuenta que

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b),$$

ya que

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b). \end{aligned}$$

Para probar que (I) implica (II), basta hacer $\lambda = (b-x)/(b-a)$. Se tendrá entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= f\Big(\frac{b-x}{b-a}\cdot a + \frac{x-a}{b-a}\cdot b\Big) \\ &= f(\lambda a + (1-\lambda)b) \\ &\leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \\ &= (1-(1-\lambda))f(a) + (1-\lambda)f(b) \\ &= f(a) + (1-\lambda)(f(b)-f(a)) \\ &= f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b)-f(a)) \\ &= f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \end{aligned}$$

Para probar que (II) implica (I), no tenemos más que hacer la sustitución $x = \lambda a + (1-\lambda)b$ en (II). En efecto, se obtiene

$$\begin{aligned} f(\lambda a + (1-\lambda)b) &= f(x) \\ &\leqslant f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \\ &= f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(1-\lambda)(b-a) \\ &= \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b). \end{aligned}$$

Luego f es convexa. □

Continuidad y derivabilidad lateral de las funciones convexas y cóncavas

Teorema 6.39. *Sea f una función convexa o cóncava en un intervalo I. Entonces si a es un punto interior de I, f es derivable tanto por la derecha como por la izquierda en a. En consecuencia, f es continua en el interior de I.*

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que f es convexa. Consideremos la función $\varphi\colon I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Como f es convexa, (III) y (IV) de la Proposición 6.38 nos dicen que la función φ es creciente. Como se vio en la Proposición 5.29, esto implica que φ tiene límites por la derecha y por la izquierda en todos los puntos. Además, como a es un punto de acumulación bilátero de $I\backslash\{a\}$, por (III) de la misma proposición, dichos límites son finitos. Es decir, existen y son finitos $f'(a+) = \lim_{x\to a^+} \varphi(x)$ y $f'(a-) = \lim_{x\to a^-} \varphi(x)$.

Como consecuencia de la existencia de derivadas laterales en a, se sigue que f es continua en a por la derecha y por la izquierda. En conclusión, f es continua en a. $\square$

Ejemplos.

(I) $f(x) = x^2$.

Esta función es convexa en todo su dominio, que es $\mathbb{R}$. Obsérvese que tiene el comportamiento típico anunciado por el teorema anterior: es continua en todos los puntos; de hecho, es derivable en todos los puntos.

(II) $f(x) = |x|$.

De nuevo tenemos en este caso una función convexa en todo $\mathbb{R}$. No obstante, aunque la función tiene derivadas por la derecha y por la izquierda en todos los puntos, podemos observar que en el 0 estas no coinciden, así que esta función no es derivable en este punto. Veremos en el siguiente teorema que esto no puede ocurrir en demasiados puntos del dominio de una función convexa. Observemos, sin embargo, que en el 0 esta función sí que es continua.

(III) Sea f definida en $[0,1]$ por $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1), \\ 1, & x = 0, 1. \end{cases}$

Esta última función es convexa también. Sin embargo, tiene dos puntos de discontinuidad (el 0 y el 1), lo que parece contradecir el teorema anterior. Sin embargo, esto no es así. Nuestro teorema afirma que existe continuidad (y derivadas laterales) en los puntos *interiores* del intervalo de definición. Es posible que aparezcan discontinuidades en los extremos del intervalo.

Puntos de no derivabilidad de una función convexa o cóncava

Proposición 6.40. *Sea f una función convexa en un intervalo I. Entonces*

(I) *Si a es un punto interior de I, entonces*

$$f'(a-) \leqslant f'(a+).$$

(II) *Si $a, b \in I$, $a < b$, entonces*

$$f'(a+) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f'(b-).$$

Demostración.

(I) Sean $x, y \in I$ con $x < a < y$. Entonces,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leqslant \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant \frac{f(y)-f(a)}{y-a}.$$

Fijando y y tomando límite en x, obtenemos que

$$f'(a-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(y)-f(a)}{y-a}.$$

Tomando ahora límite en y, llegamos a que

$$f'(a-) \leqslant \lim_{y \to a^+} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'(a+).$$

(II) Si $a < x < b$, entonces

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

Por tanto,

$$f'(a+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

y también

$$f'(b-) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Se sigue de aquí que

$$f'(a+) \leqslant \frac{f(b-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b-).$$ □

Teorema 6.41. *Sea f una función convexa o cóncava en un intervalo I. Los puntos de I en que f no es derivable forman un conjunto contable.*

Demostración. Supondremos que f es convexa. Sea D el conjunto de los puntos interiores de I en que f no es derivable. Sea $d \in D$. Como siempre existen $f'(d-)$ y $f'(d+)$ y además $f'(d-) \leqslant f'(d+)$, deberá ser $f'(d-) < f'(d+)$. A cada $d \in D$, pues, le podemos asociar un intervalo abierto $I_d = (f'(d-), f'(d+))$. Por otra parte, si $e, d \in D$, $e < d$, se tiene $f'(e+) \leqslant f'(d-)$, así que $I_e \cap I_d = \varnothing$. Podemos así elegir, para cada $d \in D$, un número racional en el intervalo I_d. Como estos intervalos son disjuntos dos a dos, los racionales elegidos son distintos. Si D no fuera contable, esto nos llevaría a la existencia de un conjunto no contable de números racionales, lo que es una contradicción. □

Derivada y convexidad

Teorema 6.42. *Sea f una función derivable en un intervalo I. Son equivalentes:*

(I) *f es convexa en I.*

(II) *La función derivada f' es creciente en I.*

(III) *La gráfica de f está por encima de sus tangentes, es decir, si $a, x \in I$,*

$$f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a).$$

Demostración. Que (I) implica (II) es consecuencia inmediata de 6.40 (II).

Veamos ahora que (II) implica (III). Si $x > a$, por el Teorema del Valor Medio 6.13, existe un α tal que $a < \alpha < x$ de forma que $f(x)-f(a) = f'(\alpha)(x-a)$. Teniendo en cuenta que $x - a > 0$, que $\alpha > a$ y que f' es creciente, se obtiene que $f(\alpha) \geqslant f(a)$, de donde

$$f(x) = f(a) + f'(\alpha)(x-a) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a).$$

Si $x < a$, se tiene también un α tal que $x < \alpha < a$ y $f(x) - f(a) = f'(\alpha)(x-a)$. Pero ahora f' sigue siendo creciente, mientras que $x - a < 0$ y $\alpha < a$, por lo que $f'(\alpha) \leqslant f'(a)$ y, así,

$$f(x) = f(a) + f'(\alpha)(x-a) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a).$$

Veamos por último que (III) implica (I). Sean $a, b, x \in I$ tales que $a < x < b$. Por (III), se tiene que

$$f(a) \geqslant f(x) + f'(x)(a-x), \qquad f(b) \geqslant f(x) + f'(x)(x-b),$$

es decir,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{f(b)-f(a)}{b-a} &= \frac{f(b)-f(x)}{b-a} + \frac{f(x)-f(a)}{b-a} \\
&= \frac{b-x}{b-a} \cdot \frac{f(b)-f(x)}{b-x} + \frac{x-a}{b-a} \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\
&\geqslant \frac{b-x}{b-a} \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{x-a}{b-a} \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\
&= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.
\end{aligned}$$

Se sigue de 6.38 (III) que f es convexa. □

Se puede obtener fácilmente un análogo de lo anterior para funciones cóncavas.

Corolario 6.43. *Sea f una función derivable en un intervalo I. Son equivalentes:*

(I) *f es cóncava en I.*

(II) *La función derivada f' es decreciente en I.*

(III) *La gráfica de f está por debajo de sus tangentes, es decir, si $a, x \in I$,*

$$f(x) \leqslant f(a) + f'(a)(x - a).$$

Segunda derivada, convexidad y concavidad

Teniendo en cuenta todo lo anterior, podemos obtener un fácil criterio para caracterizar la convexidad y convexidad en el caso de funciones derivables dos veces.

Corolario 6.44. *Sea f con derivada continua sobre un intervalo I y dos veces derivable en el interior de I. Son equivalentes:*

(I) *f es convexa en I.*

(II) *$f''(x) \geqslant 0$ para todo x en el interior de I.*

Corolario 6.45. *Sea f con derivada continua sobre un intervalo I y dos veces derivable en el interior de I. Son equivalentes:*

(I) *f es cóncava en I.*

(II) *$f''(x) \leqslant 0$ para todo x en el interior de I.*

¿Qué es un punto de inflexión?

Un tipo muy importante de puntos cuando se estudia la convexidad, son aquellos en que la función pasa de ser convexa a ser cóncava, o viceversa.

Definición 6.46. Sean I un intervalo, $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y sea a un punto interior de I. Se dice que f tiene en a un *punto de inflexión* si existe $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \subset I$ y

(I) o bien f es convexa en $(a - \delta, a]$ y cóncava en $[a, a + \delta)$,

(II) o bien es cóncava en $(a - \delta, a]$ y convexa en $[a, a + \delta)$.

Una condición necesaria para la existencia de puntos de inflexión

A continuación, proporcionamos un criterio que permite delimitar con facilidad qué puntos son "sospechosos" de ser puntos de inflexión.

Proposición 6.47. *Sean I un intervalo, $f\colon I \to \mathbb{R}$ y a un punto interior de I. Supongamos que f es derivable en el interior de I. Entonces, si f tiene un punto de inflexión en a y existe $f''(a)$, necesariamente es $f''(a) = 0$.*

Demostración. Por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que f es convexa en $(a - \delta, a]$ y cóncava en $[a, a + \delta)$. (Si es al revés, se procede de forma análoga.) Por tanto, la función f' es creciente en $(a - \delta, a]$ y decreciente en $[a, a + \delta)$, por lo que tiene en a un máximo relativo. Como f' es derivable en a, en este punto su derivada se anula, por el Lema de Fermat 6.9. Es decir, $f''(a) = 0$. $\square$

Ejemplos.

(I) $f(x) = x^n$, $n \geqslant 2$.

Calculamos la segunda derivada y obtenemos $f''(x) = n(n - 1)x^{n-2}$, que se anula solo en $x = 0$, el cual será nuestro único candidato a punto de inflexión. Habrá que distinguir dos casos, según que n sea par o impar.

Si n es impar, entonces $f''(x) \geqslant 0$ para $x \in [0, \infty)$ y $f''(x) \leqslant 0$ para $x \in (-\infty, 0]$, así que f es convexa en $[0, \infty)$ y cóncava en $(-\infty, 0]$. Concluimos que en este caso 0 es un punto de inflexión.

Si n es par, se tiene $f''(x) \geqslant 0$ tanto si $x \in (-\infty, 0]$ como si $x \in [0, \infty)$. Esto implica que f es convexa en $(-\infty, 0]$ y en $[0, \infty)$. En consecuencia, 0 *no es* punto de inflexión. (Lo que sí se puede probar, estudiando la primera derivada, es que es un mínimo.)

(II) $f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Esta función es dos veces derivable y su segunda derivada es

$$f''(x) = \begin{cases} (12x^2 - 1) \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 6x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

En consecuencia, 0 anula la segunda derivada f''. Veremos que 0 no es un punto de inflexión de f, ya que f no es ni convexa ni cóncava en ningún intervalo ni de la forma $(0, \delta)$, ni de la forma $(-\delta, 0)$.

En efecto, en cualquier intervalo de la forma $(0, \delta)$, $\delta > 0$, existen puntos x en que $\cos(1/x) = 1$ y $\operatorname{sen}(1/x) = 0$. Para estos puntos, se tendrá $f''(x) =$

$-6x < 0$, de forma que f no puede ser convexa en $(0, \delta)$. También existen puntos en que $\cos(1/x) = -1$ y $\operatorname{sen}(1/x) = 0$. Para estos otros puntos lo que se tendrá es que $f''(x) = 6x > 0$, así que f tampoco puede ser cóncava en $(0, \delta)$. Lo que hace referencia a los intervalos de la forma $(-\delta, 0)$ se prueba de forma similar.

(III) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}, & x \geqslant 0. \end{cases}$

Podemos tener la falsa idea preconcebida de que los conceptos de *extremo* (absoluto o relativo) y *punto de inflexión* son mutuamente excluyentes. La función que estamos considerando tiene claramente un mínimo absoluto en el 0, ya que $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por otro lado, es convexa en $(-\infty, 0]$ y cóncava en $[0, \infty)$, así que el 0 es además un punto de inflexión.

(IV) $f(x) = |x|$.

Una función puede tener muchos puntos de inflexión, como le ocurre a esta. Obsérvese que cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ es punto de inflexión de f.

Una condición suficiente para la existencia de puntos de inflexión

El siguiente resultado complementa el Teorema 6.34, mostrando que, en el apartado (III) del mismo, lo que se tiene en realidad es un punto de inflexión.

Proposición 6.48. *Sea f una función derivable $n-1$ veces ($n \geqslant 3$) en un intervalo abierto I. Sea $a \in I$ y supongamos que existe $f^{(n)}(a) \neq 0$ y además*

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0.$$

Si n es impar, entonces f tiene en a un punto de inflexión.

Demostración. La función segunda derivada f'' es $n-3$ veces derivable y tiene derivada $(n-2)$-ésima en a. En lo que va a continuación, seguiremos la demostración del Teorema 6.34, aplicada a f'' en lugar de f.

Como las primeras derivadas de f'' se anulan, el polinomio de Taylor de grado $n-2$ de f'' centrado en a es

$$P_{n-2,a,f''}(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}.$$

Por el Teorema de Taylor-Young 6.29, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x\to a} \frac{f''(x) - P_{n-2,a,f''}(x)}{(x-a)^{n-2}} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f''(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}}{(x-a)^{n-2}} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{(x-a)^{n-2}} - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}, \end{aligned}$$

o sea,

$$\lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{(x-a)^{n-2}} = \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}.$$

Se deduce que existe un $\delta > 0$ tal que $f''(x)/(x-a)^{n-2}$ tiene signo constante en $(a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$. Por ser $n-2$ impar, resulta que $f''(x)$ tiene un signo en $(a-\delta, a)$ y el contrario en $(a, a+\delta)$. Por tanto, se deduce que o bien f es convexa en $(a-\delta, a)$ y cóncava en $(a, a+\delta)$, o al revés. Es decir, f tiene un punto de inflexión en a. □

7.2. Representación de funciones

Gráfica de una función

Si f es una función real de una variable real, su estudio y representación gráfica puede sistematizarse en los siguientes pasos (de los que han de llevarse a cabo tan solo los que resultan imprescindibles para responder a las cuestiones que se traten de resolver, y siempre de la manera más sencilla posible):

- *Determinación del dominio.*
- *Simplificación del estudio.* Paridad o imparidad. Periodicidad. Otras simetrías. Regiones planas sin puntos de la gráfica.

  Recordemos que una función f es *par* si $f(-x) = f(x)$ para todo x, e impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo x.
- *Continuidad y límites en los puntos de discontinuidad.*
- *Límites en la frontera.* Es decir, límites en los puntos de acumulación del dominio que no pertenezcan a él.
- *Comportamiento en el infinito.* Límites en el infinito. Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

- Si para algún punto de acumulación del dominio $a \in \mathbb{R}$ es $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$, se dice que la recta $x = a$ es una *asíntota vertical* de f.

- Si el dominio de f no está acotado, y para algún $b \in \mathbb{R}$ es $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$, se dice que la recta $y = b$ es una *asíntota horizontal* de f.

- Si el dominio de f no está acotado y existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0, \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0,$$

  entonces se dice que la recta $y = ax + b$ es una *asíntota oblicua* de f. En este caso

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax).$$

  (Obsérvese que una asíntota horizontal es un caso particular de asíntota oblicua, en el que $a = 0$.)

- Si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x$, la recta $y = ax$ se denomina *dirección asintótica* de f (aún cuando no exista asíntota). En este caso, si además $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax) = \pm\infty$, se dice que f tiene una *rama parabólica* con dirección asintótica $y = ax$.

- *Derivabilidad.* Cálculo de la derivada. Puntos con tangente vertical.

- *Puntos críticos.*

- *Signo de la derivada.* Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos y absolutos.

- *Crecimiento de la derivada.* Cálculo de la segunda derivada. Convexidad y concavidad. Puntos de inflexión.

Ejemplos.

- $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.
  - *Dominio.* El dominio de esta función es todo $\mathbb{R}$.
  - *Continuidad.* Esta función es continua en todo $\mathbb{R}$, por ser cociente de funciones continuas, y ser el denominador no nulo en todo $\mathbb{R}$.
  - *Comportamiento en el infinito.* Se tiene
  $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-2/x}{\sqrt{1+1/x^2}} = 1,$$
  $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-2/x}{-\sqrt{1+1/x^2}} = -1.$$
  Se deduce que $y = 1$ e $y = -1$ son asíntotas horizontales de f.
  - *Derivabilidad.* Esta función es derivable en todo $\mathbb{R}$, por ser cociente de dos funciones derivables y no anularse nunca el denominador. Su derivada es
  $$f'(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$$
  - *Puntos críticos.* El único punto crítico, por tanto, es $x = -1/2$. Para este punto tenemos la imagen $f(-1/2) = -\sqrt{5} \simeq -2{,}24$.
  - *Signo de la derivada.* Obviamente, $f'(x) < 0$ en $(-\infty, -1/2)$ y $f'(x) > 0$ en $(-1/2, \infty)$. En consecuencia, f es estrictamente decreciente en $(-\infty, -1/2]$ y estrictamente creciente en $[-1/2, \infty)$. En consecuencia, $-1/2$ es el mínimo absoluto.
  - *Crecimiento de la derivada.* Esta función tiene segunda derivada en todo $\mathbb{R}$. Esta vale
  $$f''(x) = -\frac{4x^2+3x-2}{\sqrt{(x^2+1)^5}},$$
  que se anula tan solo en los puntos $i_1 = (-3-\sqrt{41})/8 \simeq -1{,}18$ y $i_2 = (-3+\sqrt{41})/8 \simeq 0{,}43$. Es fácil ver que $f''(x) < 0$ en $(-\infty, i_1) \cup (i_2, \infty)$, mientras que $f''(x) > 0$ en (i_1, i_2). Se sigue que f es convexa en $[i_1, i_2]$ y cóncava en $(-\infty, i_1]$ y en $[i_2, \infty)$. Por tanto, i_1 e i_2 son puntos de inflexión. Sus imágenes son
  $$f(i_1) = \frac{-19-\sqrt{41}}{\sqrt{114+6\sqrt{41}}} \simeq -2{,}06,$$
  $$f(i_2) = -\frac{-19+\sqrt{41}}{\sqrt{114-6\sqrt{41}}} \simeq -1{,}44.$$

- $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$.
    - *Dominio.* El dominio de f es todo $\mathbb{R}$.
    - *Continuidad.* f es continua en todo $\mathbb{R}$.
    - *Simplificación del estudio.* f es una función par, así que su gráfica es simétrica respecto al eje $x = 0$. Basta estudiarla en $[0, \infty)$. Además, esta función es siempre negativa.
    - *Comportamiento en el infinito*. Se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}) \\ &= -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2(x^2+1)} + \sqrt[3]{(x^2+1)^2}} = 0.\end{aligned}$$

      así que $x = 0$ es una asíntota horizontal de f.
    - *Derivabilidad.* f es derivable en todos los puntos salvo quizá en 0. La derivada es

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}.$$

      Obsérvese que $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \infty$, lo que nos indica que f no es derivable en 0, y además, la gráfica de f va a tener una tangente vertical en 0.
    - *Puntos críticos.* La derivada no se anula en ningún punto.
    - *Signo de la derivada.* Como $f'(1) = (2 - \sqrt[3]{2})/3 > 0$, se sigue que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (0, \infty)$. Por tanto, f es estrictamente creciente en $[0, \infty)$. Como consecuencia, 0 es el mínimo absoluto de f. El valor en este punto es $f(0) = -1$.
    - *Crecimiento de la derivada.* La segunda derivada es

$$\begin{aligned}f''(x) &= -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} + \frac{8x^2}{9\sqrt[3]{(x^2+1)^5}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} \\ &= -\frac{2}{9}\frac{\sqrt[3]{(x^2+1)^5} + 3\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^{10}}}{\sqrt[3]{x^4(x^2+1)^5}},\end{aligned}$$

      que es negativa si $x \in (0, \infty)$. Por tanto, la función es cóncava en $[0, \infty)$. No tiene puntos de inflexión.

- $f(x) = \dfrac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{x}}$.
  - *Dominio.* El dominio de f es $(0,\infty)$.
  - *Simplificación del estudio.* Esta función es siempre positiva.
  - *Continuidad.* f es continua en todo su dominio.
  - *Comportamiento en el infinito.* Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, f tiene la asíntota vertical $x = 0$. Además,

    $$\frac{f(x)}{x} = \frac{(1+x)^{3/2}}{x^{3/2}} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{3/2} \xrightarrow{x\to\infty} 1,$$

    y

    $$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{(1+x)^{3/2} - x^{3/2}}{x^{1/2}} \\ &= \frac{3x^2+3x+1}{x^{1/2}((1+x)^{3/2}+x^{3/2})} \\ &= \frac{3+3/x+1/x^2}{(1+1/x)^{3/2}+1} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

    Por tanto, f tiene la asíntota oblicua $y = x + 3/2$.
  - *Derivabilidad.* f es derivable en todo su dominio. La derivada es igual a

    $$f'(x) = \frac{\frac{3}{2}(1+x)^{1/2}x^{1/2} - (1+x)^{3/2}\frac{1}{2}x^{-1/2}}{x} = \frac{(2x-1)\sqrt{1+x}}{2x^{3/2}}.$$

  - *Puntos críticos.* Observamos que f tiene un punto crítico en $x = 1/2$.
  - *Signo de la derivada.* $f'(x) > 0$ si $x \in (1/2,\infty)$ y $f'(x) < 0$ si $x \in (0,1/2)$. Por tanto f es decreciente en $(0,1/2]$ y creciente en $[1/2,\infty)$. El punto crítico $x = 1/2$ resulta así ser un mínimo absoluto. En $1/2$ la función toma el valor $f(1/2) = \frac{3}{2}\sqrt{3} \simeq 2{,}6$.
  - *Crecimiento de la derivada.* La segunda derivada es

    $$f''(x) = \frac{2}{4x^{5/2}\sqrt{1+x}} > 0.$$

    Por tanto, esta función es convexa.

Referencias

[1] R. G. Bartle y D. R. Sherbert, *Introducción al Análisis Matemático de una variable*, Limusa, México, 1990.

[2] M. Spivak, *Cálculo infinitesimal*, Reverté, 1994.

[3] T. M. Apostol, *Análisis Matemático* (2a. ed.). Reverté, Barcelona, 1991.

[4] V. A. Zorich, *Mathematical Analysis I*, Springer-Verlag, Berlín, 2003.