

Ejercicios (Integral de Riemann)

7.1. Calcular las primitivas de las siguientes funciones:

- | | | |
|--|---|--|
| (1) $\frac{(1 + \sqrt{x})^3}{x^{1/3}}$, | (2) $\frac{(\arcsen x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$, | (3) $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$, |
| (4) $4 \cos^3 x - 3 \cos x \sen x$, | (5) $\frac{\sen^3 x}{\sqrt{\cos x}}$, | (6) $\frac{1}{a^2 e^x + b^2 e^{-x}}$, |
| (7) $x^5 \sqrt{1-x^3}$, | (8) $\frac{1}{x(x^7+1)}$, | (9) $\frac{1}{\sen x + \cos x}$, |
| (10) $\arcsen x$, | (11) $\cos x \log(1 + \cos x)$, | (12) $\log^2 x$, |
| (13) $\frac{\cos 2x}{e^x}$, | (14) $\frac{x \arcsen x}{\sqrt{1-x^2}}$, | (15) $x \tan^2 x$, |
| (16) $\frac{x e^x}{(1+x)^2}$, | (17) $\frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 3x + 2}$, | |
| (18) $\frac{1}{(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5)}$, | | (19) $\frac{3x + 5}{(x^2 - 2x + 2)^2}$, |
| (20) $\frac{x}{x^4 + (a+b)x^2 + ab}$, | (21) $\frac{1}{x^4 + x^2 + 1}$, | (22) $\frac{1}{x^4 + 1}$, |
| (23) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, | (24) $\frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4}$, | (25) $\frac{(1+\sqrt{x})^2}{2+\sqrt{x}}$, |
| (26) $\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}$, | (27) $\frac{1}{x\sqrt{2x+1}}$, | (28) $\frac{1}{x(\sqrt{1+x}-2)}$, |
| (29) $\frac{3x^{2/3} - 7}{x - 7x^{1/3} + 6}$, | (30) $\frac{3}{x + 3(x+4)^{2/3}}$, | (31) $\frac{x + \sqrt{x+1}}{x - \sqrt{x+1}}$, |
| (32) $\frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}}$, | (33) $\frac{1}{x+1} \sqrt{\frac{3+x}{x-1}}$, | (34) $\sec^3 x$, |
| (35) $\frac{1}{(a+b \cos x) \sen x}$, | (36) $\frac{1}{2+3 \tan x}$, | (37) $\frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$, |
| (38) $\frac{x^2 - 3x + 7}{\sqrt{2x^2 + 4x + 5}}$, | (39) $\frac{x^2}{\sqrt{3x^2 - x + 1}}$. | |

7.2. Calcular los límites siguientes mediante integrales definidas:

a) $\lim_n \frac{1}{n} \left(\cos \frac{x}{n} + \cos \frac{2x}{n} + \dots + \cos \frac{nx}{n} \right)$,

b) $\lim_n \left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right)$,

$$\text{c) } \lim_n \left(\frac{1}{\sqrt{n^4 + 1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4 + 2^4}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4 + n^4}} \right),$$

$$\text{d) } \lim_n \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}, \quad k \geq 0.$$

7.3. Sea f continua en $[0, a]$. Comprobar que

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

y calcular, para $n = 1$ y $n = 3$, $\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen}^n x}{1 + \cos^2 x}$.

7.4. Calcular las integrales definidas siguientes:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx, & \text{b) } \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx, & \text{c) } \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{3 + \operatorname{sen}^2 x} dx, \\ \text{d) } \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx, & \text{e) } \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{(1+x)^2} dx & \text{f) } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx. \end{array}$$

7.5. Probar que las siguientes funciones son derivables y hallar sus derivadas:

$$\text{a) } F(x) = \int_a^{x^3} \operatorname{sen}^3 t dt,$$

$$\text{b) } F(x) = \int_a^b f(x+t) dt, \text{ con } f \text{ continua,}$$

$$\text{c) } F(x) = \int_0^x x f(t) dt, \text{ con } f \text{ continua,}$$

$$\text{d) } F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t) dt, \text{ con } h \text{ continua y } f \text{ y } g \text{ derivables.}$$

7.6. Demostrar que, si f es continua,

$$\int_0^x f(u)(x-u) du = \int_0^x \int_0^u f(t) dt du.$$

7.7. Hallar el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{x^2}^x \frac{e^t - 1}{\operatorname{sen} t^2} dt}{\log x}.$$

7.8. Demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx,$$

para cada $n \geq 2$. Probar que para cada $n \geq 1$ se tiene:

a)
$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x \, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)},$$

b)
$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}.$$

7.9. Hallar el área de la figura limitada por la parábola $y = -x^2 - 2x + 3$, su tangente en el punto $(2, -5)$ y el eje y .

7.10. Calcular el área de la figura limitada por la curva $y^2 = x(x-1)^2$.

7.11. La corona circular centrada en el origen y de radio interior $\sqrt{2}$ y radio exterior $\sqrt{6}$ se corta con la parábola de ecuación $x = y^2$. Hallar el área de una de las dos superficies que se forman.

7.12. Hallar el valor del parámetro λ para el que la curva $y = \lambda \cos x$ divide en dos partes de igual área la región limitada por el eje x , la curva $y = \operatorname{sen} x$ y la recta $x = \pi/2$.

7.13. Hallar la longitud del arco que la recta $x = 4/3$ corta en la curva $y^2 = x^3$.

7.14. Calcular la longitud del arco de la curva $y = \log \cos x$ entre los puntos de abscisas $x = 0$, $x = \pi/4$.

7.15. Calcular la longitud del arco de la curva $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \log y$ entre los puntos $y = 1$ e $y = 2$.

7.16. Hallar la longitud de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, donde $a > 0$.

7.17. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar la curva $a^2 y^2 = ax^3 - x^4$ alrededor del eje x ($a > 0$).

7.18. Calcular el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje x la figura limitada por $y = a \cosh \frac{x}{a}$ y las rectas $x = c$, $x = -c$ ($a, c > 0$).

7.19. La figura limitada por la senoide $y = \operatorname{sen} x$ ($0 \leq x \leq \pi/2$), el eje de ordenadas y la recta $y = 1$ gira alrededor del eje y . Calcular el volumen del sólido de revolución así engendrado.

7.20. Hallar el área del elipsoide formado al girar alrededor del eje x la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$).

7.21. Hallar el área de la superficie generada al girar alrededor del eje y la porción de la curva $y = x^2/2$ cortada por la recta $y = 3/2$.

7.22. Hallar el área de la superficie generada al girar alrededor del eje x la porción de la curva $y^2 = 4 + x$ cortada por la recta $x = 2$.

7.23. Determinar el carácter de las siguientes integrales impropias:

- | | | |
|---|---|---|
| a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, | b) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x+1}$, | c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{ x-1 }$, |
| d) $\int_0^1 \log x \, dx$, | e) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \log x}$, | f) $\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x} \, dx$, |
| g) $\int_0^{\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{x^4+3}}$, | h) $\int_1^2 \frac{dx}{(x^3-4x^2+4x)^{1/3}}$, | i) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$, |
| j) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, | k) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 \, dx}{x^4+1}$, | l) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^5)^{1/6}}$, |
| m) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$, | n) $\int_0^3 \frac{dx}{(x^2-1)^2}$, | ñ) $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$, |
| o) $\int_0^3 \frac{dx}{(x(3-x))^{1/3}}$, | p) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{1+x^2} \, dx$, | q) $\int_2^{\infty} e^{-x^3} \, dx$, |
| r) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2} \, dx$, | s) $\int_0^1 \log x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \, dx$, | t) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\log x}$. |

7.24. Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x(1-x^2)|}}$$

7.25. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales y, si convergen, calcular su valor:

- | | | |
|---|---|---|
| a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$, | b) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2-1}$, | c) $\int_{-\infty}^0 x e^x \, dx$, |
| d) $\int_0^1 x \log x \, dx$, | e) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$, | f) $\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x} \, dx$, |
| g) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, | h) $\int_{-2}^2 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{4-x^2}}$, | i) $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^x}$, |

$$\text{j) } \int_0^{\infty} |x - 3|e^{-x} dx, \quad \text{k) } \int_0^{\infty} xe^{|x-2|} dx, \quad \text{l) } \int_1^3 |x - 2| \log x dx,$$

$$\text{m) } \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$$

7.26 (Funciones gamma y beta de Euler).

a) Probar que, dados $x, y \in (0, \infty)$, las siguientes integrales son convergentes:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

b) Probar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ para todo $x > 0$.

c) Probar que $\Gamma(n+1) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

7.27. Teniendo en cuenta la función Γ y sabiendo que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, calcular las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx, \quad \text{b) } \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx, \quad \text{c) } \int_0^{\infty} 3^{-4x^2} dx,$$

$$\text{d) } \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x-1|} dx, \quad \text{e) } \int_0^1 x^2 \log^4 x dx, \quad \text{f) } \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx,$$

$$\text{g) } \int_0^{\infty} (x-3)e^{-x^2} dx, \quad \text{h) } \int_0^{\infty} (x^2+1)e^{-\sqrt{x}} dx.$$