8. Series numéricas

Análisis de Variable Real

2014–2015

Resumen

Aquí veremos el concepto de serie, que no es más que el de suma infinita. Veremos que algunas de ellas se pueden sumar y otras no. Aprenderemos a sumar algunas de ellas, y, en muchos casos, aprenderemos métodos para dilucidar si una serie se puede sumar o no.

Índice

1. Definición y propiedades básicas

1.1. Introducción

Concepto de serie

Informalmente, una serie es una suma de infinitos sumandos. Estas sumas se usan implícitamente, por ejemplo, al considerar desarrollos decimales ilimitados de los números reales: así, la igualdad $7/3 = 2{,}333\dots$ significa

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots ,$$

suma con infinitos sumandos de la forma $3/10^n$, $n \in \mathbb{N}$. En general, consideraremos una sucesión cualquiera (a_n) y su suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ¿Qué sentido habrá que darle a esta suma? La respuesta se impone de modo natural: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene que ser $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n$.

Analizando el proceso anterior, se trata de formar mediante la sucesión de sumandos (a_n) una nueva sucesión de sumas (s_m) dada por $s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$, $m \in \mathbb{N}$, y determinar el límite (si existe) de esta última sucesión. Esquemáticamente,

lugar	1	2	3	4	$\dots$	n	$\dots$
término	a_1	a_2	a_3	a_4	$\dots$	a_n	$\dots$
suma	a_1	$a_1 + a_2$	$a_1 + a_2 + a_3$	$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$	$\dots$	$a_1 + \cdots + a_n$	$\dots$

Ahora bien: si, en definitiva, vamos a parar al estudio de la convergencia de una sucesión, ¿qué novedad vamos a encontrar respecto a lo que ya sabemos de sucesiones? El cambio radica en el punto de partida: tomando como dato la sucesión de sumandos (a_n), nos planteamos determinar propiedades de la sucesión de sumas (s_n) basándonos en propiedades de los términos a_n.

1.2. Series y sumas parciales

¿Qué es una serie?

Definición 8.1.

(I) Una *serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es un par ordenado de sucesiones $((a_n),(s_n))$ relacionadas por la condición de que para cada $n \in \mathbb{N}$ es

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

(II) El término n-ésimo de la primera sucesión, a_n, recibe el nombre de *término n-ésimo* de la serie.

(III) El término n-ésimo de la segunda sucesión, s_n, recibe el nombre de *suma parcial n-ésima* de la serie.

Series convergentes y divergentes

Definición 8.2.

(I) Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *convergente* si la sucesión (s_n) de sus sumas parciales es convergente, es decir, si existe y es finito el límite

$$\lim_n s_n = \lim_n \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(II) Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *divergente* a ∞ si la sucesión de sus sumas parciales es divergente a ∞ o a $-\infty$, respectivamente.

(III) Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *oscilante* si la sucesión de sus sumas parciales es oscilante.

(IV) Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente o divergente, se llama *suma* de dicha serie al límite de la sucesión de sus sumas parciales. Dicha suma se representa también $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

A veces es cómodo considerar series de la forma $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$, donde m es un número entero: las sumas parciales estarán entonces definidas solo a partir de m y serán $s_m = a_m$, $s_{m+1} = a_m + a_{m+1}, \dots, s_n = a_m + \dots + a_{m-1} + a_m, \dots$

Se utiliza también la notación $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ en vez de $a_m + a_{m+1} + \dots + a_n + \dots$ y, cuando no da lugar a confusión, se abrevia como $\sum a_n$.

Ejemplos.

- (Serie geométrica) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$.

  La suma parcial de esta serie es de la forma

  $$\begin{aligned} s_m &= a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \\ &= a(1 + r + r^2 + \dots + r^{m-1} + r^m) \\ &= \begin{cases} a \cdot \frac{1-r^{m+1}}{1-r}, & \text{si } r \neq 1, \\ (m+1)a, & \text{si } r = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

  Excluyendo el caso trivial en que $a = 0$, se obtiene:

  (a) si $|r| < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ es convergente y su suma es $a/(1-r)$.

  (b) Si $r \geqslant 1$, la serie es divergente a ∞ si $a > 0$ o a $-\infty$ si $a < 0$.

  (c) Si $r = -1$ la serie oscila entre 0 y a.

(d) Si $r < -1$ la serie oscila entre $-\infty$ e ∞.

- (Serie armónica) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

  Sus sumas parciales se suelen denotar como h_m, y tenemos

$$h_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \geqslant \sum_{n=1}^{m} \int_{n}^{n+1} \frac{dx}{x} = \int_{1}^{m+1} \frac{dx}{x} = \log(m+1).$$

  Luego la serie armónica diverge a ∞ a pesar de que $\lim_n (1/n) = 0$.

La convergencia no depende de los primeros términos

Un hecho importante es que el comportamiento de una serie no se ve afectado por el valor de los primeros términos de la misma.

Proposición 8.3. *Considérense una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y un natural $m > 1$. Entonces las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ tienen siempre el mismo carácter. Más específicamente:*

(I) *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si, y solo si, lo hace $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$. Si convergen, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^{\infty} a_n.$$

(II) *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a ∞ si, y solo si, lo hace $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$.*

(III) *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a $-\infty$ si, y solo si, lo hace $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$.*

(IV) *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es oscilante si, y solo si, lo es $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$.*

Demostración. Basta observar que para cada $p > m$ es

$$\sum_{n=1}^{p} a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^{p} a_n,$$

y que $\sum_{n=1}^{m-1} a_n$ es una cantidad fija (independiente de p), y aplicar la Definición 8.2 y los resultados conocidos para sucesiones. $\square$

1.3. Propiedades básicas de las series

Linealidad de la suma de series

Proposición 8.4. *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes. Cualesquiera que sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ es convergente y se tiene*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Demostración. Basta tener en cuenta que

$$\sum_{n=1}^{p}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{p} a_n + \beta \sum_{n=1}^{p} b_n$$

para todo natural p. □

Corolario 8.5. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ no converge, entonces no converge $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$.*

Demostración. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ convergiera, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \big((a_n + b_n) + (-1)a_n\big)$$

también convergería, según la Proposición 8.4. □

Ejemplo. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n})$ no converge.

En efecto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge, mientras que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ sí.

1.4. Series telescópicas

Series telescópicas

Proposición 8.6. *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $a_n = b_n - b_{n+1}$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (denominada serie telescópica) es convergente si, y solo si, la sucesión (b_n) converge, en cuyo caso tenemos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_n b_n.$$

Demostración. Basta tener en cuenta que las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ son

$$\begin{aligned} s_p &= \sum_{n=1}^{p} a_n \\ &= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{p-1} - b_p) + (b_p - b_{p+1}) \\ &= b_1 - b_{p+1}. \end{aligned}$$

$\square$

Ejemplos.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

  La suma parcial p-ésima es simplemente

  $$s_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{p} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = 1 - \frac{1}{p+1},$$

  con lo que $\lim_p s_p = 1$. Es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y su suma es 1.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)$.

  La suma parcial de orden p es

  $$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{p} a_n = \sum_{n=1}^{p} \log\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) &= \sum_{n=1}^{p} \big(\log(n+1) - \log n\big) \\ &= \log(p+1) - \log 1 = \log(p+1), \end{aligned}$$

  que tiende a ∞. Es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + 1/n)$ diverge a ∞.

1.5. Criterios del Resto y de Cauchy

El Criterio del Resto

Proposición 8.7 (Criterio del Resto)**.** *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, debe cumplirse que* $\lim_n a_n = 0$.

Demostración. Si (s_p) es la sucesión de las sumas parciales, es decir $s_p = \sum_{n=1}^{p} a_n$, entonces, si la serie converge, existe y es finito el límite $l = \lim_p s_p$. Teniendo en cuenta que $a_p = s_p - s_{p-1}$, para $p \geqslant 2$, deducimos que

$$\lim_p a_p = \lim_p s_p - \lim_p s_{p-1} = l - l = 0.$$

$\square$

Ejemplos.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n.$

  Como
  $$\lim_n\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n=\lim_n\frac{1}{\big(1+\frac{1}{n}\big)^n}=\frac{1}{e}\neq 0,$$
  el Criterio del Resto 8.7 nos permite asegurar de esta manera que la serie estudiada no converge.

- (Serie armónica) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$

  Hay que ser muy cuidadosos con la aplicación del Criterio del Resto 8.7. Esta serie no converge, como ya hemos visto anteriormente. *Sin embargo,* obsérvese que el término general de la serie verifica la condición del Criterio del Resto 8.7, ya que $\lim_n(1/n)=0$. Esto evidencia que dicho criterio es una condición *necesaria, pero no suficiente*.

El Criterio de Cauchy

Como ocurría con las sucesiones, o con las integrales impropias, a veces podemos comprobar si una serie converge o no, sin necesidad de hallar su suma. Veremos numerosos criterios que nos permiten decidir esto. El que vamos a ver a continuación es especialmente importante, pues está en la base de muchos de los demás.

Teorema 8.8 (Criterio de Cauchy para series)**.** *Una serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es convergente si, y solo si, para todo $\varepsilon>0$ existe un $n_0\in\mathbb{N}$ tal que, cualesquiera que sean $m,n\in\mathbb{N}$ con $m\geqslant n\geqslant n_0$, se cumple*
$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\right|<\varepsilon.$$

Demostración. La serie es convergente si, y solo si, lo es la sucesión (s_n) de sus sumas parciales, lo que equivale a que (s_n) sea una sucesión de Cauchy, y esto a su vez no es otra cosa que la afirmación de que para cada $\varepsilon>0$ exista un n_0 tal que para cualesquiera $m,n\in\mathbb{N}$ con $m\geqslant n\geqslant n_0$ sea $|s_m-s_{n-1}|<\varepsilon$; pero
$$s_m-s_{n-1}=\sum_{k=1}^{m}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k=\sum_{k=n}^{m}a_k. \qquad \square$$

Ejemplos.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

  Veremos una vez más que la serie armónica no converge, comprobando esta vez que no se cumple la condición de Cauchy 8.8. Para ello, sea $\varepsilon = 1/2$. Veremos que, dado un $n_0 \in \mathbb{N}$ arbitrario, siempre podemos encontrar $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m \geqslant n \geqslant n_0$ y $\sum_{k=n}^{m}(1/k) \geqslant \varepsilon$. En efecto, sean $n = 2^{n_0-1}+1$ y $m = 2^{n_0}$. Entonces, $m \geqslant n \geqslant n_0$ y

  $$\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} \geqslant (m-n+1)\frac{1}{m} = (2^{n_0} - 2^{n_0-1} - 1 + 1)\frac{1}{2^{n_0}} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

  Esta serie converge ya que verifica la condición del Criterio de Cauchy 8.8. (En realidad, ya sabemos por el Tema 5 que converge a e.) En efecto, para un $\varepsilon > 0$ arbitrario, fijemos un $n_0 \geqslant 4$ tal que $1/n_0 < \varepsilon$. Obsérvese entonces que $2^k \leqslant k!$ si $k \geqslant 4$, así que, si $m, n \in \mathbb{N}$ son tales que $m \geqslant n \geqslant n_0$, se obtendrá

  $$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{2^k} &= \frac{1}{2^n}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n}}\Big) \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{m-n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} < \varepsilon.\end{aligned}$$

2. Series de términos no negativos

2.1. Criterios de acotación y comparación

El Criterio de Acotación

El estudio del carácter de una serie se simplifica cuando esta es de términos no negativos.

Proposición 8.9 (Criterio de Acotación)**.** *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie tal que $a_n \geqslant 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si, y solo si, la sucesión (s_n) de sus sumas parciales está acotada superiormente. En caso contrario, la serie diverge a ∞.*

Demostración. Puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geqslant 0$, la sucesión (s_n) es creciente. Luego, o bien está acotada superiormente y converge, o bien no está acotada superiormente y diverge a ∞. □

Ejemplo.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Observemos que para $n \geqslant 1$, siempre es $n! \geqslant 2^{n-1}$. Por tanto, cualquiera que sea $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} &\leqslant 1 + \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) \\ &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} < 3.\end{aligned}$$

El Criterio de Comparación

Teorema 8.10 (Criterio de Comparación, de Gauss)**.** *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series tales que $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ para $n \geqslant n_0$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, también converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. En consecuencia, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, también lo hace $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Demostración. Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene el mismo carácter que $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, y que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tiene el mismo carácter que $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$. Denotando por (s_n) la sucesión de sumas parciales de $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ y por (t_n) la de $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$, se sigue que para cada $n \geqslant n_0$ es $s_n \leqslant t_n$, luego si (t_n) está acotada superiormente, también lo está (s_n). Basta aplicar ahora el Criterio de Acotación 8.9. □

El Criterio de Comparación Asintótica

Teorema 8.11 (Criterio de Comparación Asintótica)**.** *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ series de términos no negativos. Supongamos que existe $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.*

(I) *Si $l < \infty$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.*

(II) *Si $0 < l$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también diverge.*

(III) *Si $0 < l < \infty$ entonces las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter.*

Demostración. Observemos en primer lugar que para que exista $\lim_n a_n/b_n$ debe ser $b_n \neq 0$ a partir de un determinado término, así que supondremos que es $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pasemos ahora a probar cada uno de los apartados.

(I) Sea $r > l$. Entonces existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n/b_n < r$ para todo $n \geqslant n_0$, es decir, $0 < a_n < rb_n$ para todo $n \geqslant n_0$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces también la serie $\sum_{n=1}^{\infty} rb_n$ converge y, por el Criterio de Comparación 8.10, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(II) Basta intercambiar en (I) los papeles de (a_n) y (b_n) y tener en cuenta que una serie de términos no negativos solo puede converger o diverger.

(III) Basta aplicar los apartados (I) y (II). □

Un caso particular importante a la hora de aplicar el Criterio de Comparación Asintótica 8.11 es cuando (a_n) y (b_n) son sucesiones equivalentes. Observemos que en este caso se tiene $\lim_n a_n/b_n = 1$, por lo que podemos aplicar el apartado (III), y así las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tendrán el mismo carácter.

Ejemplo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Basta observar que la sucesión $\log(1 + 1/n)$ es equivalente a la sucesión $1/n$, por lo que nuestra serie tendrá el mismo carácter que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, es decir, diverge.

Hecho de otra forma,

$$\lim_n \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \log e = 1.$$

Por tanto, llegamos también así a la conclusión de que esta serie tiene el mismo carácter que la armónica y, por tanto, diverge.

2.2. Criterios de la Raíz y del Cociente

Criterios de la Raíz y del Cociente

La comparación con las series geométricas proporciona dos criterios muy útiles en la práctica: el Criterio de la Raíz 8.12 y el Criterio del Cociente 8.13. Después veremos, en los teoremas 8.24 y 8.25, versiones más generales para series de términos cualesquiera, así que dejamos la demostración para entonces.

Teorema 8.12 (Criterio de la Raíz, de Cauchy). *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no negativos.*

(I) *Si $\limsup_n \sqrt[n]{a_n} < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.*

(II) *Si* $\operatorname{lím\,sup}_n \sqrt[n]{a_n} > 1$*, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente.*

Teorema 8.13 (Criterio del Cociente, de D'Alembert)**.** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos.*

(I) *Si* $\operatorname{lím\,sup}_n a_{n+1}/a_n < 1$*, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente.*

(II) *Si* $\operatorname{lím\,inf}_n a_{n+1}/a_n > 1$*, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente.*

Observaciones.

- Fijémonos en que en el Criterio de la Raíz 8.12 solamente aparece implicado el límite superior, mientras que en el del Cociente 8.13 hay que considerar límite superior e inferior. De todas formas, en la mayor parte de los casos prácticos, aparece un límite, así que en general no es necesario hacer esta distinción.

- Si los límites que aparecen en los dos criterios anteriores valen 1, estos no dan información.

- Siempre que el Criterio del Cociente 8.13 da información, también da información el Criterio de la Raíz 8.12. A veces, este último da más información que el primero. Esto se debe a que, como hemos visto en el Tema 5, los límites superior e inferior de $\sqrt[n]{a_n}$ están situados entre los límites superior e inferior de a_{n+1}/a_n, así que cuando, por ejemplo, $\operatorname{lím\,sup}_n a_{n+1}/a_n < 1$, también se cumple que $\operatorname{lím\,sup}_n \sqrt[n]{a_n} < 1$.

- Sin embargo, en muchos casos prácticos, ambos dan exactamente la misma información. En efecto, la mayoría de las veces no nos hará falta considerar límites superior e inferior, ya que existe límite. Obsérvese que, cuando existe $\operatorname{lím}_n a_{n+1}/a_n$, también existe $\operatorname{lím}_n \sqrt[n]{a_n}$, y además ambos coinciden. Así que ambos criterios dan en este caso la misma información.

- En el Criterio del Cociente 8.13, la condición utilizada para la divergencia de que $\operatorname{lím\,inf}_n(a_{n+1}/a_n) > 1$ puede ser sustituida por la más débil $a_{n+1}/a_n \geqslant 1$, si $n \geqslant n_0$. En efecto, en este caso la sucesión (a_n) será creciente a partir del término n_0-ésimo, lo cual hará imposible que la serie verifique el Criterio del Resto 8.7.

Ejemplos.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

En este caso, ninguno de los dos criterios nos resuelve el problema. En efecto, si llamamos $a_n = 1/n$, tenemos que

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{1/(n+1)}{1/n} = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1,$$

así que el Criterio del Cociente 8.13 no da información. Por las observaciones que hemos hecho hace un momento, podemos adivinar que tampoco dará información el Criterio de la Raíz 8.12, pero vamos a hacer los cálculos de todas maneras. Se tiene

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

con lo que el Criterio de la Raíz 8.12 no da información, como ya habíamos vaticinado.

Observemos que en este caso, en que el límite sale 1 en cualquiera de los dos criterios, ya sabíamos anteriormente que la serie no converge.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

  Tampoco para esta serie nos da información ninguno de los dos criterios. En efecto, si $a_n = 1/n^2$, se tiene

  $$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1.$$

  El lector podrá verificar fácilmente que el límite del Criterio de la Raíz 8.12 también vale 1.

  En este caso, a diferencia de lo que ocurría en el ejemplo anterior, podemos comprobar fácilmente que la serie sí que converge. En efecto, si $n \geqslant 2$, tenemos que

  $$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

  Como la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \big(1/(n-1) - 1/n\big)$ converge (por ser telescópica), el Criterio de Comparación **??** nos dice que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ también converge.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

  Aunque hemos comentado que, en líneas generales, ambos criterios dan la misma información, frecuentemente hay que elegir uno u otro dependiendo de cuál de ellos nos dé cálculos más sencillos. Para la serie que estudiamos en este momento, la existencia de un factorial en el denominador nos hace pensar que la aplicación del Criterio del Cociente 8.13 es más sencilla, ya que se produce una conveniente simplificación. En efecto, si llamamos $a_n = 1/n!$, obtenemos

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

En consecuencia, la serie converge (cosa que ya habíamos visto anteriormente de unas cuantas maneras).

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$.

  En este otro caso, la presencia de una potencia n-ésima en el denominador nos sugiere utilizar el Criterio de la Raíz 8.12. Sea $a_n = \frac{1}{(\log n)^n}$. Entonces

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \frac{1}{\log n} = 0 < 1,$$

  y el Criterio de la Raíz 8.12 nos da la convergencia de la serie.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, donde $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{si } n = k!,\ k \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{3^n}, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

  Este es un ejemplo en que el Criterio del Cociente 8.13 no da información, mientras que el Criterio de la Raíz 8.12, sí.

  Intentemos primero aplicar el Criterio del Cociente 8.13. Estudiemos los diferentes valores de a_{n+1}/a_n según que n o $n+1$ sean o no factoriales. Si $n = 1$, tanto n como $n+1$ son factoriales, así que

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1/2^2}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

  Si $n = k!$ para un $k \neq 1$, observamos que $n+1$ no es un factorial, así que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/3^{n+1}}{1/2^n} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

  Si $n = k! - 1$, donde $k \in \mathbb{N} \backslash \{1, 2\}$, entonces n no es un factorial, pero $n+1$ sí, de modo que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/2^{n+1}}{1/3^n} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

En todos los demás casos, resulta que ni n ni $n+1$ son factoriales, y por tanto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/3^{n+1}}{1/3^n} = \frac{1}{3}.$$

Resumiendo,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 1/2, & \text{si } n = 1, \\ \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n, & \text{si } n = k!,\ k \in \mathbb{N} \backslash \{1\}, \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n, & \text{si } n = k! - 1,\ k \in \mathbb{N} \backslash \{1, 2\}, \\ 1/3, & \text{todos los demás casos.} \end{cases}$$

Observamos así que la sucesión (a_{n+1}/a_n) tiene tres límites subsecuenciales, que son 0, $1/3$ e ∞. En consecuencia, $\liminf_n a_{n+1}/a_n = 0 < 1$ y $\limsup_n a_{n+1}/a_n = \infty > 1$, y ninguna de las dos cosas sirven para obtener información del Criterio del Cociente 8.13.

Veamos ahora qué pasa si aplicamos el Criterio de la Raíz 8.12. Es inmediato que

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } n = k!,\ k \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{3}, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Esto nos dice que los límites subsecuenciales de la sucesión $(\sqrt[n]{a_n})$ son $1/2$ y $1/3$. Por tanto, $\limsup_n \sqrt[n]{a_n} = 1/2 < 1$. El Criterio de la Raíz 8.12 nos dice de esta forma que la serie converge.

El Criterio de Raabe

El Criterio de Raabe 8.14, que estudiamos a continuación, es un interesante complemento para los dos anteriores. Normalmente conduce a cuentas más complicadas que las que produce el Criterio del Cociente 8.13, pero funciona a veces cuando este no. Por eso, la estrategia general será intentar aplicar el Criterio del Cociente 8.13 y, *si esto no funciona*, pasar al Criterio de Raabe 8.14 a continuación.

Teorema 8.14 (Criterio de Raabe)**.** *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos.*

(I) *Si* $\liminf_n n(1 - a_{n+1}/a_n) > 1$, *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente.*

(II) *Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n(1 - a_{n+1}/a_n) < 1$ para todo $n \geqslant n_0$, en particular si* $\limsup_n n(1 - a_{n+1}/a_n) < 1$, *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente.*

Demostración.

(I). Sea $l = \operatorname{lím\,inf}_n n(1 - a_{n+1}/a_n)$, y elijamos un r tal que $1 < r < l$. Como

$$\operatorname*{lím\,inf}_n n\Big(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\Big) > r,$$

existe un $n_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$n\Big(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\Big) > r \qquad \text{si } n \geqslant n_0.$$

de donde

$$na_{n+1} < (n-r)a_n \qquad \text{si } n \geqslant n_0.$$

De aquí obtenemos que

$$\begin{aligned}(n-1)a_n - na_{n+1} &> (n-1)a_n - (n-r)a_n \\ &= (r-1)a_n \qquad \text{si } n \geqslant n_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Como $(r-1)a_n > 0$, esta última desigualdad implica que la sucesión $((n-1)a_n)$ es decreciente a partir del n_0-ésimo término. Como además resulta que es positiva, queda probado así que la sucesión $((n-1)a_n)$ es una sucesión convergente. Esto implica que la serie telescópica $\sum_{n=1}^{\infty}((n-1)a_n - na_{n+1})$ es convergente. Teniendo en cuenta la desigualdad (1), el Criterio de Comparación 8.10 asegura que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

(II) Supongamos ahora que para un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ (que supondremos diferente de 1) se tiene

$$n\Big(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\Big) < 1 \qquad \text{para todo } n \geqslant n_0.$$

Esta desigualdad puede ser reescrita como sigue:

$$na_{n+1} > (n-1)a_n \qquad \text{para todo } n \geqslant n_0.$$

Por tanto, la sucesión $((n-1)a_n)$ es una sucesión creciente a partir del n_0-ésimo término. En consecuencia,

$$(n-1)a_n \geqslant (n_0-1)a_{n_0} \qquad \text{para todo } n \geqslant n_0,$$

o sea,

$$a_n \geqslant \frac{(n_0-1)a_{n_0}}{n-1} \qquad \text{para todo } n \geqslant n_0.$$

Empleando el Criterio de Comparación 8.10, y teniendo en cuenta que la serie $\sum_{n=2}^{\infty}(1/(n-1))$ es divergente (¡la serie armónica!), resulta que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente. $\square$

Observaciones.

- Hagamos notar, comparando con el papel que tienen los límites en los criterios del Cociente 8.13 y la Raíz 8.12, que en el Criterio de Raabe 8.14 este papel aparece completamente invertido. Queremos decir con esto que en el Criterio del Cociente 8.13, por ejemplo, si el límite inferior es mayor que 1, entonces la serie diverge; en el Criterio de Raabe 8.14, en cambio, es cuando el límite superior es menor que 1 cuando se obtiene la divergencia.

- Siempre que el Criterio del Cociente 8.13 da información, también la da el de Raabe 8.14. El recíproco es falso.

  En efecto, supongamos que el Criterio del Cociente 8.13 nos informa de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, es decir, tenemos que

  $$\operatorname*{lím\,sup}_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha < 1.$$

  Entonces

  $$\operatorname*{lím\,inf}_n \Big(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\Big) = 1 - \alpha > 0,$$

  de donde

  $$\operatorname*{lím\,inf}_n n\Big(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\Big) = \infty \cdot (1-\alpha) = \infty > 1.$$

  Por tanto, el Criterio de Raabe 8.14 también nos avisa de la convergencia de la serie.

  Si, por el contrario, el Criterio del Cociente 8.13 nos da que la serie diverge, es decir, se tiene

  $$\operatorname*{lím\,inf}_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \beta > 1,$$

  entonces será

  $$\operatorname*{lím\,sup}_n \Big(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\Big) = 1 - \beta < 0,$$

  de donde

  $$\operatorname*{lím\,sup}_n n\Big(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\Big) = \infty \cdot (1-\beta) = -\infty < 1,$$

  así que también en este caso el Criterio de Raabe 8.14 coincide en que la serie diverge.

  Sin embargo, cuando el Criterio del Cociente 8.13 da información, los límites que aparecen en el Criterio de Raabe 8.14 dan siempre los valores extremos, es decir, ∞ y $-\infty$. Como veremos, estos límites en ocasiones resultan ser números reales y, si son ambos menores que 1 o ambos mayores que 1, en estos casos el Criterio de Raabe 8.14 da información, mientras que el del Cociente 8.13, no.

Ejemplos.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

  Sea $a_n = 1/n^2$. Ya hemos visto que el Criterio del Cociente 8.13 no resuelve la convergencia de esta serie. Vamos a aplicar ahora el Criterio de Raabe 8.14. Tenemos

  $$n\Big(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\Big) = n\Big(1 - \frac{n^2}{(n+1)^2}\Big) = \frac{2n^2+n}{n^2+2n+1} \underset{n}{\longrightarrow} 2 > 1.$$

  En consecuencia, esta serie converge.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!}$.

  Si escribimos

  $$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!},$$

  entonces

  $$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)/(2^{n+1}(n+1)!)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)/(2^n n!)} \\ &= \frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2} \underset{n}{\longrightarrow} 1,\end{aligned}$$

  así que el Criterio del Cociente 8.13 no resuelve nuestro problema.

  Con el Criterio de Raabe 8.14, en cambio, obtenemos

  $$n\Big(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\Big) = n\Big(1 - \frac{2n+1}{2n+2}\Big) = \frac{n}{2n+2} \underset{n}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1.$$

  De aquí se sigue que la serie diverge.

2.3. Criterios para series de términos no negativos y decrecientes

El Criterio de Abel-Pringsheim

Cuando trabajamos con series de términos no negativos y decrecientes, se puede obtener una mejora del Criterio del Resto 8.7.

Teorema 8.15 (Criterio de Abel-Pringsheim)**.** *Sea (a_n) una sucesión decreciente de términos no negativos. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_n na_n = 0$.*

Demostración. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, verificará el Criterio de Cauchy 8.8 y por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant m \geqslant n_0$ entonces $\sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon/2$. En particular, para todo $n \geqslant n_0$, será $\sum_{k=n_0}^{n} a_k < \varepsilon/2$. Como la sucesión (a_n) es decreciente, obtenemos que

$$(n - n_0 + 1)a_n \leqslant a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, si $n \geqslant 2n_0$ será

$$n = 2n - n \leqslant 2n - 2n_0 < 2(n - n_0 + 1).$$

Teniendo en cuenta que además $2n_0 \geqslant n_0$, se tendrá para todo $n \geqslant 2n_0$ que

$$na_n \leqslant 2(n - n_0 + 1)a_n < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hemos probado de esta manera que $\lim_n na_n = 0$. □

Ejemplos.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

  Obviamente, si $a_n = 1/n$, obtenemos que $na_n = 1 \nrightarrow 0$, así que el Criterio de Abel-Pringsheim 8.15 prueba de forma extremadamente sencilla que la serie armónica diverge.

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$.

  Si $a_n = 1/\log n$, la sucesión (a_n) es positiva y decreciente y además $na_n = n/\log n \to \infty$, así que nuestra serie diverge.

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$.

  Veremos con este ejemplo que el recíproco del Criterio de Abel-Pringsheim 8.15 no es cierto. Es decir, este criterio, como ocurría con el del Resto 8.7, es una condición necesaria, pero no suficiente.

  Si $a_n = 1/(n \log n)$ es el término general de esta serie, podemos observar que la sucesión (a_n) (que está definida solo a partir de $n = 2$) es decreciente y positiva. Además, la sucesión $na_n = 1/\log n$ tiende obviamente a 0. Vamos a ver que, sin embargo, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ diverge.

En efecto, si desarrollamos las sumas parciales (de orden una potencia de 2) de esta última serie y agrupamos términos de forma conveniente, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{2^k} \frac{1}{n\log n} &= \frac{1}{2\log 2} + \Big(\frac{1}{3\log 3} + \frac{1}{4\log 4}\Big) + \cdots \\
&\quad + \Big(\frac{1}{(2^{k-1}+1)\log(2^{k-1}+1)} \\
&\qquad + \frac{1}{(2^{k-1}+2)\log(2^{k-1}+2)} + \cdots + \frac{1}{2^k\log 2^k}\Big) \\
&\geqslant \frac{1}{2\log 2} + \Big(\frac{1}{4\log 4} + \frac{1}{4\log 4}\Big) + \cdots \\
&\quad + \Big(\frac{1}{2^k\log 2^k} + \frac{1}{2^k\log 2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k\log 2^k}\Big) \\
&= \frac{1}{2\log 2} + \frac{2}{4\log 4} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{2^k\log 2^k} \\
&= \frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{2\log 4} + \cdots + \frac{1}{2\log 2^k} \\
&= \frac{1}{2\log 2}\Big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\Big).
\end{aligned}$$

Como las sumas parciales de la serie armónica no están acotadas, esto obliga a que las de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n\log n)$ tampoco lo estén, así que, por el Criterio de Acotación 8.9, esta serie diverge.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, donde $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es un cuadrado,} \\ \frac{1}{n^2} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

  Con este ejemplo mostraremos que la hipótesis de monotonía que aparece en el Criterio de Abel-Pringsheim 8.15 no es superflua.

  Es evidente que

$$na_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es un cuadrado,} \\ \frac{1}{n} & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

  así que la sucesión (na_n) no converge a 0, ya que tiene una subsucesión (la $(k^2 a_{k^2})$) que claramente converge a 1. Sin embargo, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, ya que si consideramos una de sus sumas parciales, podemos descomponerla en dos, obteniendo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} a_n &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ es un cuadrado}}}^{k} a_n \;+\; \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ no es un cuadrado}}}^{k} a_n \\
&= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ es un cuadrado}}}^{k} \frac{1}{n} \;+\; \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ no es un cuadrado}}}^{k} \frac{1}{n^2} \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Como la sucesión $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ converge, sus sumas parciales estarán acotadas superiormente y, según la desigualdad que acabamos de probar, también estarán acotadas superiormente las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Esto implica, según el Criterio de Acotación 8.9, que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Así pues, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, pero la sucesión (na_n) no converge a 0. Esto parece contradecir el Criterio de Abel-Pringsheim 8.15, pero no es así. Lo que ocurre es que la sucesión (a_n) no es decreciente. Esto resulta evidente si enumeramos sus primeros términos:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{4}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \frac{1}{49}, \frac{1}{64}, \frac{1}{9}, \ldots$$

El Criterio de Condensación

El siguiente criterio muestra que para ver el comportamiento de una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ de términos positivos y decrecientes no es necesario considerar todos los términos, ya que dicho comportamiento se “condensa” en tan solo unos pocos, por ejemplo, los de la forma (a_{2^k}).

Teorema 8.16 (Criterio de Condensación, de Cauchy)**.** *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tal que (a_n) es una sucesión decreciente. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si, y solo si, lo hace la serie $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.*

Demostración. De acuerdo con el Criterio de Acotación 8.9, solo debemos preguntarnos cuándo las sumas parciales $s_p = \sum_{n=1}^{p} a_n$ de la serie constituyen una sucesión acotada. Por otra parte, dado que la sucesión (s_p) es claramente creciente, pueden darse solo dos casos.

- Si (s_p) está acotada, es evidente que todas sus subsucesiones serán también acotadas.
- Si (s_p) no está acotada, entonces diverge a ∞, y todas sus subsucesiones también tenderán a ∞ y, por tanto, no estarán acotadas.

Esto quiere decir que todas las subsucesiones de (s_p) comparten la misma conducta en cuanto a acotación: o son todas acotadas, o son todas no acotadas. Por tanto, para ver si la sucesión de sumas parciales (s_p) es acotada o no, bastará que estudiemos una de sus subsucesiones, por ejemplo, (s_{2^p}). En consecuencia, consideraremos a partir de ahora tan solo las sumas parciales de la forma $s_{2^p} = \sum_{k=0}^{2^p} a_k$.

Definamos, por otra parte, las sumas parciales $t_p = \sum_{k=0}^{p} 2^k a_{2^k}$. Desarrollando la suma parcial s_{2^p} y agrupando términos, y teniendo en cuenta que la sucesión (a_n) es decreciente, obtenemos

$$\begin{aligned}
s_{2^p} &= \sum_{n=1}^{2^p} a_n \\
&= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots \\
&\quad + (a_{2^{p-1}+1} + \cdots + a_{2^p}) \\
&\geqslant a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{p-1} a_{2^p} \\
&= \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p} 2^k a_{2^k} \geqslant \frac{1}{2} t_p.
\end{aligned}$$

Por otro lado, podemos optar por agrupar los términos de s_{2^p} de manera diferente:

$$\begin{aligned}
s_{2^p} &= \sum_{n=1}^{2^p} a_n \\
&= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots \\
&\quad + (a_{2^{p-1}} + \cdots + a_{2^p-1}) + a_{2^p} \\
&\leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^{p-1} a_{2^{p-1}} + 2^p a_{2^p} \\
&= \sum_{k=0}^{p} 2^k a_{2^k} = t_p.
\end{aligned}$$

Hemos probado así que

$$\frac{1}{2} t_p \leqslant s_{2^p} \leqslant t_p.$$

En consecuencia, las sucesiones de sumas parciales (t_p) y (s_{2^p}) son, o ambas acotadas, o ambas no acotadas. □

Ejemplos.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Dado que la sucesión $(1/n)$ es positiva y decreciente, podemos aplicar el Criterio de Condensación 8.16, concluyendo que esta serie diverge, ya que también lo hace la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^k(1/2^k) = \sum_{n=0}^{\infty} 1$.

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$.

  Según el Criterio de Condensación 8.16, basta ver si converge o no la serie

  $$\sum_{n=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{\log 2^k} = \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}.$$

  Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(2^k/k)$ diverge, llegamos a la conclusión de que también lo hace $\sum_{n=2}^{\infty}(1/\log n)$.

  Podemos observar en este ejemplo que este criterio es generalmente bastante útil cuando el término general de la serie contiene un logaritmo. La razón es que al pasar de una serie a la otra, $\log n$ se transforma en $\log 2^k = k \log 2$, con lo que el logaritmo queda incorporado a una constante que no depende de k, lo que puede simplificar notablemente la serie. Esto lo veremos también en el siguiente ejemplo.

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$.

  Esta serie tiene la misma conducta que la serie

  $$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \log 2^k} = \frac{1}{\log 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

  Como la serie armónica diverge, concluimos que la serie que estamos estudiando también diverge.

El Criterio de la Integral

El criterio que vamos a estudiar ahora es especialmente interesante, pues evidencia una fuerte relación entre las series y las integrales impropias.

Teorema 8.17 (Criterio de la Integral, de Cauchy)**.** *Sea* $f\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$ *una función decreciente. Entonces*

(I) *El límite* $\lim_n(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f)$ *existe y es finito.*

(II) *La integral impropia* $\int_1^{\infty} f$ *es convergente si, y solo si, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *converge.*

Demostración.

(I). Sea

$$d_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f.$$

Para ver que (d_n) es una sucesión convergente, veremos que es monótona y acotada. Observemos en primer lugar que, por ser f decreciente, se tiene

$$f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n) \qquad \text{si } x \in [n, n+1],$$

de donde

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f \leqslant f(n).$$

De aquí obtenemos por un lado que

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f \right) - \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \sum_{k=1}^{n} f(k) \right) - \left(\int_1^{n+1} f - \int_1^n f \right) \\ &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f \leqslant 0. \end{aligned}$$

Esto nos indica que la sucesión (d_n) es decreciente.

Por otro lado, podemos escribir

$$d_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f = f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f \right) \geqslant 0.$$

Así, resulta que la sucesión (d_n) es siempre positiva y, por tanto, acotada inferiormente. Concluimos, según el Teorema de la Convergencia Monótona 4.9, que dicha sucesión tiene límite finito.

(II). Llamemos

$$C = \lim_n \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f \right).$$

Según el apartado (I), sabemos que C existe y es finito. Podemos escribir

$$\sum_{n=1}^{k} f(n) = \left(\sum_{n=1}^{k} f(n) - \int_1^k f \right) + \int_1^k f.$$

Pasando al límite en ambos miembros, obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = C + \int_1^{\infty} f,$$

lo que nos permite concluir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ y la integral impropia $\int_1^{\infty} f$ son, o ambas finitas, o ambas infinitas. $\square$

Ejemplos.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

  El Criterio de la Integral 8.17 resulta útil para tratar series porque nos permite pasar al estudio de una integral impropia. ¿Qué ventaja ofrece esto? Pues que en numerosas ocasiones la integral impropia se puede calcular explícitamente, mientras que no es tan fácil hacer lo mismo con una serie.

  En el caso que nos ocupa, el Criterio de la Integral 8.17 nos dice que, en lugar de la serie, podemos estudiar la integral impropia $\int_1^{\infty} (1/x)\,dx$. Calculando la integral (cosa que en realidad ya hemos hecho antes), podemos ver que diverge, ya que

  $$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \log x \Big|_1^{\infty} = \infty.$$

  En consecuencia, $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ diverge.

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$.

  Aplicando el Criterio de la Integral 8.17, debemos estudiar la convergencia de la integral impropia $\int_2^{\infty} \big(1/(x \log x)\big)\,dx$. Calculemos explícitamente esta integral, realizando el cambio de variable $u = \log x$, $du = dx/x$.

  $$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log x} = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{du}{u} = \log u \Big|_{\log 2}^{\infty} = \infty.$$

  Se concluye de esta manera que la serie que estudiamos diverge.

- $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

  El Criterio de la Integral 8.17 tiene la particularidad de que también se puede usar en el sentido contrario, para estudiar convergencia de integrales impropias, pasando de ellas al estudio de series. La ventaja en este caso es que a las series se les pueden aplicar muchos criterios que no existen para integrales impropias.

En el ejemplo que estamos viendo, la integral impropia no se puede calcular explícitamente de forma sencilla; sin embargo, la convergencia de la serie correspondiente es muy fácil de establecer. Según el Criterio de la Integral 8.17, deberemos estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$. Si aplicamos el Criterio de la Raíz 8.12, obtenemos

$$\lim_n \sqrt[n]{e^{-n^2}} = \lim_n e^{-n} = 0 < 1,$$

así que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ converge, y también lo hace la integral impropia $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Algunas aplicaciones

(I) La *constante de Euler* o *Euler-Mascheroni*

$$\gamma = \lim_n \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \Big).$$

Aplicando el Criterio de la Integral 8.17 a la función f dada por $f(x) = 1/x$, y teniendo en cuenta que

$$\int_1^n \frac{dx}{x} = \log n,$$

podemos ver que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dx}{x}$$

tiene un límite finito.

(II) La *función ζ de Riemann*, definida para $s > 1$ por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

El Criterio de la Integral 8.17 permite comprobar con facilidad que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ converge si, y solo si, $s > 1$. La función zeta de Riemann tiene múltiples aplicaciones, especialmente en Teoría de Números (está muy relacionada con la distribución de los números primos), aunque también en otras áreas tales como la Física, la Teoría de Probabilidades y Estadística Aplicada. Hay expresiones más o menos sencillas para $\zeta(2n)$, $n \in \mathbb{N}$, que fueron halladas por Euler. Se sabe, por ejemplo, que $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90\ldots$ Sin embargo, hasta fechas muy recientes (Apéry, 1978) no se había podido probar tan siquiera que $\zeta(3)$ es irracional.

3. Criterios para series con términos sin signo fijo

3.1. Criterio de Comparación general

El Criterio de Comparación, de nuevo

El Criterio de Comparación 8.10, que ya vimos para series de términos no negativos, puede ser generalizado a una versión del mismo válida para series con términos sin signo fijo.

Proposición 8.18 (Criterio de Comparación, de Gauss)**.** *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ tres series. Supongamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ convergen, también lo hace $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Demostración. Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ convergen, también lo hará $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n)$. Como además se tiene $0 \leqslant b_n - a_n \leqslant c_n - a_n$, el Criterio de Comparación (para series de términos no negativos) 8.10 nos da que $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$ converge. Se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + (b_n - a_n))$ también converge. □

3.2. La series alternadas y el Criterio de Leibniz

El Criterio de Leibniz

Una *serie alternada* es aquella en que el signo de los términos va alternando entre positivo y negativo. O sea:

Definición 8.19. Decimos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *alternada* si para todo $n \in \mathbb{N}$ es $a_n a_{n+1} < 0$.

Para este tipo de series, obtenemos un criterio de una sorprendente simplicidad:

Teorema 8.20 (Criterio de Leibniz)**.** *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie alternada tal que $(|a_n|)$ es decreciente y convergente a 0. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

Demostración. Si s_n denota la suma parcial n-ésima, tenemos que mostrar que la sucesión (s_n) tiene límite finito. Para ello, consideraremos por separado las subsucesiones (s_{2n}) y (s_{2n-1}).

Supongamos, sin falta de generalidad, que $a_1 > 0$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $a_n = (-1)^{n+1}|a_n|$. Teniendo en cuenta que $|a_{2n+1}| \geqslant |a_{2n+2}|$, obtenemos que

$$s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+1} + a_{2n+2} = |a_{2n+1}| - |a_{2n+2}| \geqslant 0.$$

Esto prueba que la sucesión (s_{2n}) es creciente. Del mismo modo,

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = a_{2n} + a_{2n+1} = -|a_{2n}| + |a_{2n+1}| \leqslant 0,$$

así que (s_{2n-1}) es decreciente. Por otra parte,

$$s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} = s_{2n-1} - |a_{2n}| \leqslant s_{2n-1}.$$

En consecuencia, (s_{2n}) está acotada superiormente por $s_1 = a_1$ y (s_{2n-1}) está acotada inferiormente por $s_2 = a_1 + a_2$. En resumen, ambas subsucesiones son convergentes puesto que son monótonas y acotadas. Además como $s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n}$ y $a_{2n} \to 0$, las dos deberán tener el mismo límite, así que (s_n) converge, que es lo que deseábamos probar. □

Ejemplos.

- (Serie armónica alternada) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

  Obviamente, esta serie es alternada. Como además $1/n \to 0$, el Criterio de Leibniz 8.20 dice que la serie converge.

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{n}$.

  Es obvio que la serie es alternada y que $\log n/n \to 0$. Bastaría ver que la sucesión $(\log n/n)$ es decreciente, lo que es falso, pero sí es cierto que es decreciente a partir de $n = 3$. En efecto, la función

  $$f(x) = \frac{\log x}{x},$$

  definida en $(0, \infty)$, tiene por derivada

  $$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

y, por tanto, será estrictamente decreciente en $[e, \infty)$. Esto implica que si $n \geqslant 3$ se tiene

$$\frac{\log n}{n} > \frac{\log(n+1)}{n+1}.$$

En consecuencia, aplicando el Criterio de Leibniz 8.20, la serie estudiada resulta ser convergente.

3.3. Series absolutamente convergentes

Series absolutamente convergentes

Otra estrategia para manejar series con términos sin signo fijo consiste en estudiar la serie de los valores absolutos de los términos.

Definición 8.21. Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice que es *absolutamente convergente* si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

Proposición 8.22. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son absolutamente convergentes y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ también es absolutamente convergente.*

Demostración. Este hecho se deduce de la desigualdad

$$|\alpha a_n + \beta b_n| \leqslant |\alpha||a_n| + |\beta||b_n|$$

y el Criterio de Comparación 8.10. □

La clave que da utilidad a la convergencia absoluta es lo que sigue a continuación.

Proposición 8.23. *Toda serie absolutamente convergente es convergente. Dicho de otro modo, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, también converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y, en ese caso,*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Demostración. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Como $-|a_n| \leqslant a_n \leqslant |a_n|$, el Criterio de Comparación 8.10 nos dice que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

Por otra parte, para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\left|\sum_{n=1}^{k} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{k} |a_n|$$

por la Desigualdad Triangular 1.29. Pasando al límite (una vez que ya sabemos que las dos series convergen),

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \qquad \square$$

Ejemplos.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \operatorname{sen} n}{n!}$.

  Esta serie no tiene signo fijo. Veamos qué ocurre si en vez de estudiar esta serie directamente, examinamos la serie de los valores absolutos de sus términos. Como esta última es de términos no negativos, podemos aplicarle muchos más criterios.

  Tenemos que
  $$\left|\frac{e^n \operatorname{sen} n}{n!}\right| \leqslant \frac{e^n}{n!}.$$
  Aplicando el Criterio del Cociente 8.13,
  $$\frac{e^{n+1}/(n+1)!}{2^n/n!} = \frac{e}{n+1} \longrightarrow 0 < 1,$$
  así que $\sum_{n=1}^{\infty} e^n/n!$ converge, y, por el Criterio de Comparación 8.10, la serie que estamos estudiando converge absolutamente.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

  Ya hemos visto que esta serie, la armónica alternada, es convergente. Sin embargo, la estrategia del ejemplo anterior no se puede utilizar en este caso, pues esta serie no es absolutamente convergente. En efecto,
  $$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$
  que diverge.

Volveremos a la convergencia absoluta un poco más adelante.

3.4. Criterios generales de la Raíz y del Cociente

El Criterio de la Raíz de nuevo

A continuación volvemos a los Criterios de la Raíz **??** y del Cociente 8.13, en unas versiones más generales que las que dimos anteriormente. Como se recordará, cuando vimos estos resultados nos saltamos las demostraciones. En esta ocasión sí que probamos estos resultados.

Teorema 8.24 (Criterio de la Raíz, de Cauchy)**.** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie.*

(I) *Si* $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$*, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente.*

(II) *Si* $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} > 1$*, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *no converge.*

Demostración.

(I) Sea $L = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, y consideremos c tal que $L < c < 1$. Entonces existirá algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < c$ para todo $n \geqslant n_0$. Por lo tanto,

$$0 \leqslant |a_n| < c^n, \qquad n \geqslant n_0.$$

Como $0 < c < 1$, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} c^n$ converge y, por el Criterio de Comparación 8.10, también lo hace la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(II) En este caso, tendremos que $\sqrt[n]{|a_n|} \geqslant 1$ para infinitos naturales n, y para estos mismos naturales se tendrá que $|a_n| \geqslant 1$. Se deduce que el límite de (a_n) no puede ser 0 y, en consecuencia, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge. □

Observación. Para la divergencia, la condición de que $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ se puede sustituir por la más débil de que existan infinitos naturales n tales que $\sqrt[n]{|a_n|} \geqslant 1$ (como se evidencia en la demostración).

El Criterio del Cociente de nuevo

Teorema 8.25 (Criterio del Cociente, de D'Alembert)**.** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos no nulos.*

(I) *Si* $\limsup_n |a_{n+1}|/|a_n| < 1$*, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente.*

(II) *Si* $\liminf_n |a_{n+1}|/|a_n| > 1$*, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *no converge.*

Demostración.

(I) Supongamos que $L = \limsup_n |a_{n+1}|/|a_n| < 1$ y sea c tal que $L < c < 1$. Entonces existirá algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1}|/|a_n| < c$ para todo $n \geqslant n_0$. Por lo tanto, $|a_{n+1}| \leqslant c|a_n|$ si $n \geqslant n_0$. Consideremos la sucesión de sumas parciales $s_k = \sum_{n=1}^{k} |a_n|$. Si $k \geqslant n_0$ se tendrá

$$|s_{k+2} - s_{k+1}| = |a_{k+2}| \leqslant c|a_{k+1}| = c|s_{k+1} - s_k|.$$

Es decir, la sucesión $(s_k)_{k \geqslant n_0}$ es contractiva y por tanto converge. Esto implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

(II) Existirá un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ entonces $|a_{n+1}|/|a_n| \geqslant 1$, es decir, $|a_{n+1}| \geqslant |a_n|$. En consecuencia, la sucesión $(|a_n|)_{n \geqslant n_0}$ es creciente y por tanto no puede converger a 0. Esto implica claramente que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge. □

Observación. La condición para la divergencia de que $\liminf_n |a_{n+1}|/|a_n| > 1$ puede ser sustituida por la condición de que exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1}|/|a_n| \geqslant 1$ para todo $n \geqslant n_0$. (Véase la demostración).

3.5. Criterios de Abel y Dirichlet

Una consecuencia de la Fórmula de Sumación

Recordemos la Fórmula de Sumación de Abel, que ya utilizamos anteriormente con el fin de probar uno de los teoremas del valor medio integral.

Lema (Fórmula de Sumación, de Abel)**.** *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones, y llamemos, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Este resultado tiene la siguiente consecuencia, que utilizaremos para probar los dos criterios siguientes.

Lema 8.26. *Sean (a_n) una sucesión y sea (b_n) una sucesión monótona y acotada. Supongamos que la sucesión de sumas parciales $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ es acotada y que la sucesión $(A_n b_{n+1})$ converge. Entonces también convergerá la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.*

Demostración. Teniendo en cuenta que la sucesión (b_n) es monótona y convergente, se tendrá que la serie (telescópica)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}| = \pm \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$$

es convergente. Además, si definimos $K = \sup\{\, A_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$, se tendrá

$$|A_n (b_n - b_{n+1})| \leqslant K |b_n - b_{n+1}|,$$

así que, por el Criterio de Comparación 8.10, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_n (b_n - b_{n+1})$ es (absolutamente) convergente. Como estamos suponiendo que $(A_n b_{n+1})$ también converge, por la Fórmula de Sumación de Abel podemos obtener en conclusión que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es convergente. $\square$

Los Criterios de Abel y Dirichlet

Teorema 8.27 (Criterio de Abel)**.** *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente y (b_n) es una sucesión monótona y acotada, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es convergente.*

Demostración. La sucesión (b_n) es, por hipótesis, monótona y acotada. Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, la sucesión de sumas parciales $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ es acotada. Para verificar las hipótesis del Lema 8.26, bastará comprobar que $(A_n b_{n+1})$ converge, lo que se cumple porque tanto (b_n) como (A_n) son convergentes. $\square$

Teorema 8.28 (Criterio de Dirichlet)**.** *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es una serie cuya sucesión de sumas parciales es acotada y* (b_n) *es una sucesión monótona y convergente a* 0*, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *es convergente.*

Demostración. También aquí la sucesión (b_n) es, por hipótesis, monótona y acotada. También por hipótesis, la sucesión de sumas parciales $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ es acotada. Además, como (b_n) converge a 0, se tendrá que la sucesión $(A_n b_{n+1})$ converge (a 0). El Lema 8.26 nos asegura finalmente que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es convergente. □

Observación. El Criterio de Leibniz 8.20 es un caso particular del Criterio de Dirichlet 8.28.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie alternada. Si $(|a_n|)$ es decreciente y convergente a 0 (recuérdese que estas son las hipótesis del Criterio de Leibniz 8.20), podemos definir las dos sucesiones $x_n = a_n/|a_n|$ e $y_n = |a_n|$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, x_n solo puede tomar los valores 1 o -1. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ es $a_n a_{n+1} < 0$, deberá también ser $x_n x_{n+1} < 0$. En consecuencia, o $x_n = (-1)^n$ para todo n, o $x_n = (-1)^{n+1}$ para todo n. En cualquiera de los dos casos, la sucesión de sumas parciales $X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ es acotada. Como (y_n) es decreciente y convergente a 0, el Criterio de Dirichlet nos dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ es convergente.

Ejemplos.

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n}.$$

  Es evidente que la sucesión $(1/n)$ es decreciente y convergente a 0, así que, para poder aplicar el Criterio de Dirichlet 8.28 y ver que nuestra serie es convergente, solo tenemos que probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n$ tiene sumas parciales acotadas. Para ello, daremos una fórmula general para las sumas parciales.

  Si $k \in \mathbb{N}$, tenemos que

  $$\begin{aligned} \operatorname{sen}(k+1) &= \operatorname{sen} k \cos 1 + \cos k \operatorname{sen} 1, \\ \operatorname{sen}(k-1) &= \operatorname{sen} k \cos 1 - \cos k \operatorname{sen} 1. \end{aligned}$$

  Sumando ambas expresiones, obtenemos que

  $$2 \operatorname{sen} k \cos 1 = \operatorname{sen}(k-1) + \operatorname{sen}(k+1).$$

  y, por tanto,

  $$\begin{aligned} 2(1-\cos 1)\operatorname{sen} k &= 2\operatorname{sen} k - 2\operatorname{sen} k \cos 1 \\ &= 2\operatorname{sen} k - \operatorname{sen}(k-1) - \operatorname{sen}(k+1) \\ &= \big(\operatorname{sen} k - \operatorname{sen}(k-1)\big) - \big(\operatorname{sen}(k+1) - \operatorname{sen} k\big). \end{aligned}$$

Se sigue que

$$
\begin{aligned}
&2(1-\cos 1)(\operatorname{sen} 1+\operatorname{sen} 2+\operatorname{sen} 3+\cdots+\operatorname{sen}(n-1)+\operatorname{sen} n) \\
&\qquad = 2(1-\cos 1)\operatorname{sen} 1+2(1-\cos 1)\operatorname{sen} 2+2(1-\cos 1)\operatorname{sen} 3 \\
&\qquad\quad +\cdots+2(1-\cos 1)\operatorname{sen}(n-1)+2(1-\cos 1)\operatorname{sen} n \\
&\qquad = \big((\operatorname{sen} 1-\operatorname{sen} 0)-(\operatorname{sen} 2-\operatorname{sen} 1)\big) \\
&\qquad\quad + \big((\operatorname{sen} 2-\operatorname{sen} 1)-(\operatorname{sen} 3-\operatorname{sen} 2)\big) \\
&\qquad\quad + \big((\operatorname{sen} 3-\operatorname{sen} 2)-(\operatorname{sen} 4-\operatorname{sen} 3)\big) \\
&\qquad\quad +\cdots+ \big((\operatorname{sen}(n-1)-\operatorname{sen}(n-2))-(\operatorname{sen} n-\operatorname{sen}(n-1))\big) \\
&\qquad\quad + \big((\operatorname{sen} n-\operatorname{sen}(n-1))-(\operatorname{sen}(n+1)-\operatorname{sen} n)\big) \\
&\qquad = \operatorname{sen} 1+\operatorname{sen} n-\operatorname{sen}(n+1).
\end{aligned}
$$

Un razonamiento análogo al que hicimos antes nos dice que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} n &= \operatorname{sen}\big((n+\tfrac12)-\tfrac12\big) = \operatorname{sen}(n+\tfrac12)\cos\tfrac12-\cos(n+\tfrac12)\operatorname{sen}\tfrac12, \\
\operatorname{sen}(n+1) &= \operatorname{sen}\big((n+\tfrac12)+\tfrac12\big) = \operatorname{sen}(n+\tfrac12)\cos\tfrac12+\cos(n+\tfrac12)\operatorname{sen}\tfrac12
\end{aligned}
$$

y, restando,

$$
\operatorname{sen} n-\operatorname{sen}(n+1) = -2\cos(n+\tfrac12)\operatorname{sen}\frac12.
$$

En consecuencia,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} 1+\operatorname{sen} 2+\cdots+\operatorname{sen} n &= \frac{\operatorname{sen} 1+\operatorname{sen} n-\operatorname{sen}(n+1)}{2(1-\cos 1)} \\
&= \frac{2\cos\frac12\operatorname{sen}\frac12-2\cos(n+\frac12)\operatorname{sen}\frac12}{2(1-\cos^2\frac12+\operatorname{sen}^2\frac12)} \\
&= \frac{(\cos\frac12-\cos(n+\frac12))\operatorname{sen}\frac12}{2\operatorname{sen}^2\frac12} \\
&= \frac{\cos\frac12-\cos(n+\frac12)}{2\operatorname{sen}\frac12}.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}|\operatorname{sen} 1 + \operatorname{sen} 2 + \cdots + \operatorname{sen} n| &= \frac{|\cos\frac{1}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})|}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \frac{1+\cos\frac{1}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1+\cos^2\frac{1}{4} - \operatorname{sen}^2\frac{1}{4}}{4\cos\frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{1}{4}} \\ &= \frac{2\cos^2\frac{1}{4}}{4\cos\frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\operatorname{cotan}\tfrac{1}{4} \simeq 1,96 < 2.\end{aligned}$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \operatorname{sen} n}{n}$.

  Sabemos que la sucesión $(1+1/n)^n$ es monótona y acotada y, según acabamos de ver, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n/n$ es convergente, así que, por el Criterio de Abel 8.27, la serie estudiada es convergente.

4. Conmutatividad de las series

4.1. Reordenaciones

¿Cambia la suma si reordenamos la serie?

¿Qué sucede cuando en una serie se cambia el orden de los sumandos? En general, las series no mantienen la propiedad conmutativa de las sumas finitas, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Sea (s_n) la sucesión de sumas parciales de esta serie. Vamos a ver a qué convergen los términos pares de esta sucesión. Como $s_{2n+1} = s_{2n} + 1/(2n+1)$, está claro que la subsucesión de los términos impares tendrá también el mismo límite, con lo que habremos hallado el límite de toda la sucesión (s_n), es decir, la suma de la serie. Con este fin, nos vendrá bien echar mano de la Constante γ de

Euler-Mascheroni. (Recuérdese que $\gamma = \text{lím}_n(1 + 1/2 + \cdots + 1/n - \log n)$.)

$$\begin{aligned}
s_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\
&= \Big(1 + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1}\Big) - \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n}\Big) \\
&= \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\Big) \\
&\quad - 2\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n}\Big) \\
&= \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\Big) \\
&\quad - \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\Big) \\
&= \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \log(2n)\Big) \\
&\quad - \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \log n\Big) \\
&\quad + (\log(2n) - \log n) \underset{n}{\longrightarrow} \gamma - \gamma + \log 2 = \log 2.
\end{aligned}$$

Concluimos así que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \log 2.$$

Ahora vamos a cambiar de orden los sumandos de esta serie. Para ello, recolocaremos sus términos de forma que dos términos positivos se alternen siempre con un término negativo. Es decir, consideraremos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Para ver cuánto suma esta serie, como $a_n \to 0$, consideraciones similares a las hechas antes muestran que basta calcular el límite de las sumas parciales cuyo máximo índice es múltiplo de 3; es decir, vamos a calcular el límite $\text{lím}_n \sum_{k=1}^{3n} a_k$.

Tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3n} a_k &= \Big(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\Big)+\Big(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\Big)+\cdots+\Big(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\Big)\\
&= \Big(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}\Big)-\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\Big)\\
&= \Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n}\Big)\\
&\quad -\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n}\Big)-\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\Big)\\
&= \Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n}\Big)\\
&\quad -\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\Big)-\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\Big)\\
&= \Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n}-\log(4n)\Big)\\
&\quad -\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\log(2n)\Big)\\
&\quad -\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\Big)\\
&\quad +\Big(\log(4n)-\frac{1}{2}\log(2n)-\frac{1}{2}\log n\Big)\\
&\xrightarrow[n]{} \gamma-\tfrac{1}{2}\gamma-\tfrac{1}{2}\gamma+(2\log 2-\tfrac{1}{2}\log 2)=\tfrac{3}{2}\log 2.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{3}{2}\log 2.$$

Vemos así con este ejemplo que, cuando hay involucrados infinitos sumandos, el orden de los sumandos *sí que cambia* la suma.

¿Qué es una reordenación?

A continuación vamos a caracterizar qué tiene que cumplir una serie para que sí podamos aplicar la propiedad conmutativa. Para ello necesitaremos una definición precisa de qué significa "cambiar de orden una serie."

Definición 8.29. Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, decimos que otra serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una *reordenación* de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si existe una biyección $r\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, tal que $b_n = a_{r(n)}$para cada $n\in\mathbb{N}$.

Informalmente, una serie es una reordenación de otra si tiene exactamente los mismos términos, pero en otro orden.

Ejemplo. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$, reordenaciones suyas son

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \cdots$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \cdots$

En cambio, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$ no es reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Hagamos la observación, muy fácil de comprobar, de que "ser reordenación de" es una relación de equivalencia.

Convergencia incondicional

Que una serie tenga la propiedad conmutativa significará que tenga suma y que cualquier reordenación suya tenga la misma suma. Vamos a dar un nombre especial a las series convergentes con la propiedad conmutativa.

Definición 8.30.

(I) Una serie se denomina *incondicionalmente convergente* si todos sus reordenaciones son convergentes y tienen la misma suma.

(II) Decimos que una serie es *condicionalmente convergente* si es convergente, pero no es incondicionalmente convergente.

4.2. Teoremas de reordenación

Un par de lemas

En los teoremas que vamos a ver a continuación, probaremos que la propiedad conmutativa para las series está estrechamente relacionada con la convergencia absoluta. Concretamente, se verá que una serie es incondicionalmente convergente si, y solo si, es absolutamente convergente. El Teorema de Reordenación de Dirichlet 8.33, que probaremos en muy breve, establece una de las implicaciones. Para abordarlo, veamos antes un par de resultados auxiliares.

Lema 8.31. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie. Sean*

$$a_n^+ = \text{máx}\{a_n, 0\}, \qquad a_n^- = -\text{mín}\{a_n, 0\}.$$

Entonces

(I) *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ *convergen.*

(II) *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, pero no absolutamente, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ *divergen a* ∞.

Demostración. Es obvio que $a_n^+, a_n^- \geqslant 0$. Se comprueba además fácilmente que

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, \qquad |a_n| = a_n^+ + a_n^-,$$

de lo que se sigue que

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \qquad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2}.$$

De aquí se obtienen fácilmente las dos afirmaciones del enunciado. □

Lema 8.32. *Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos no negativos y una de sus reordenaciones $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, se tiene:*

(I) *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente con suma s, también $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tiene suma s.*

(II) *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a ∞, también $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge a ∞.*

Demostración. (I) Sea $r\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $b_n = a_{r(n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$M(n) = \text{máx}\{\, r(1), r(2), \dots, r(n) \,\}.$$

Denotando con t_n la suma parcial n-ésima de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, será entonces

$$\begin{aligned} t_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n \\ &= a_{r(1)} + a_{r(2)} + \cdots + a_{r(n)} \\ &\leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_{M(n)} \leqslant s, \end{aligned}$$

lo que prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente con suma menor o igual que s. Como a su vez $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, por el mismo motivo su suma s será menor o igual que la suma de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, lo que implica la igualdad entre ambas sumas.

(II) En caso contrario, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sería convergente, y entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, reordenación suya, también convergería. □

El Teorema de Reordenación de Dirichlet

Teorema 8.33 (de Reordenación, de Dirichlet)**.** *Toda serie absolutamente convergente es incondicionalmente convergente.*

Demostración. Supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, y sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ una de sus reordenaciones.

Por el Lema 8.31, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ son ambas convergentes. Utilizando el Lema 8.32, se obtiene que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^-$ son también convergentes, y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^-.$$

Se concluye de esta manera que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \qquad \square$$

El Teorema de Reordenación de Riemann

El Teorema de Reordenación de Riemann 8.34 establece la implicación recíproca a la que aparece en el Teorema de Dirichlet 8.33; es decir, prueba que si una serie converge pero no lo hace absolutamente, entonces la serie no cumple la propiedad conmutativa, y además deja de cumplirla de la peor forma posible: la suma reordenada puede dar como resultado cualquier valor o, incluso, no existir.

Teorema 8.34 (de Reordenación, de Riemann). *Sean $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha \leqslant \beta$, y sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente, pero no absolutamente. Entonces, dicha serie tiene una reordenación $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tal que*

$$\liminf_n \sum_{k=1}^{n} b_k = \alpha, \qquad \limsup_n \sum_{k=1}^{n} b_k = \beta.$$

Demostración. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

Sean (p_n) y (q_n) las subsucesiones de (a_n) formadas por sus términos positivos y negativos respectivamente, en el orden en que aparecen en la serie. Por el Lema 8.31, sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ son divergentes (a ∞). Esto implica que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ también son divergentes (la primera a ∞ y la segunda a $-\infty$): no hay más que observar que las sucesiones (p_n) y (q_n) se diferencian de las (a_n^+) y $(-a_n^-)$ solamente en algunos términos nulos intercalados.

Por otro lado, como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, está claro que (p_n) y (q_n) convergen ambas a 0.

Construiremos dos sucesiones crecientes de números naturales, (m_n) y (k_n), tales que la serie

$$p_1 + p_2 \cdots + p_{m_1} + q_1 + q_2 + \cdots + q_{k_1} + p_{m_1+1} + p_{m_1+2} \cdots + p_{m_2} \\ + q_{k_1+1} + q_{k_1+2} + \cdots + q_{k_2} + \cdots,$$

que claramente es una reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (salvo términos nulos), satisfaga lo que se dice en el enunciado.

Para ello, elijamos dos sucesiones (α_n) y (β_n) que converjan a α y β, respectivamente, y además $\alpha_n < \beta_n$.

Sean m_1, k_1 los menores naturales para los que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{m_1} > \beta_1,$$
$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n + q_1 + q_2 + \cdots + q_{k_1} < \alpha_1.$$

Sean m_2, k_2 los menores naturales para los cuales

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{m_1} + q_1 + q_2 + \cdots + q_{k_1} + p_{m_1+1} + p_{m_1+2} + \cdots + p_{m_2} > \beta_2,$$
$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \cdots + p_{m_1} + q_1 + q_2 + \cdots + q_{k_1} + p_{m_1+1} + p_{m_1+2} + \cdots + p_{m_2} \\ + q_{k_1+1} + q_{k_1+2} + \cdots + q_{k_2} < \alpha_2. \end{aligned}$$

Repetimos luego este proceso sucesivas veces, lo que es posible porque $\sum p_n$ y $\sum q_n$ divergen.

Si s_n y t_n representan las sumas parciales de la serie que acabamos de construir cuyos últimos términos son p_{m_n} y q_{k_n} respectivamente, será

$$|s_n - \alpha_n| \leqslant p_{m_n}, \qquad |t_n - \beta_n| \leqslant -q_{k_n}.$$

Como $p_n \to 0$ y $q_n \to 0$, vemos que $s_n \to \alpha$ y $t_n \to \beta$.

Finalmente, está claro que ningún número menor que α o mayor que β puede ser límite subsecuencial de las sumas parciales de la reordenación por nosotros construida. $\square$

Teniendo en cuenta el Teorema de Reordenación de Riemann 8.34, el lector será sin duda capaz de responder las siguientes preguntas acerca de la serie armónica alternada: ¿Se puede reordenar de forma que la suma de la reordenación valga π?¿Y de forma que valga e?¿Y de forma que diverja a ∞?¿Y de forma que oscile entre -1 y 1?¿Y para que oscile entre $-\infty$ e ∞?

(*Respuestas:* ¡Sí, sí, sí, sí y sí!)

En realidad, la situación que se da en el Teorema 8.34 es mucho más grave de lo que el enunciado predice. Si consideramos la reordenación construida en la demostración, se puede probar que los límites subsecuenciales de la sucesión de sus sumas parciales son todo el intervalo $[\alpha, \beta]$. En particular, escogiendo $\alpha = -\infty$, $\beta = \infty$, obtenemos una serie tal que los límites subsecuenciales de sus sumas parciales son toda la recta ampliada.

Los dos teoremas de reordenación se pueden combinar ahora para establecer la equivalencia que ya veníamos anunciando.

Corolario 8.35. *Una serie es incondicionalmente convergente si, y solo si, es absolutamente convergente.*

Referencias

[1] R. G. Bartle y D. R. Sherbert, *Introducción al Análisis Matemático de una variable*, Limusa, México, 1990.

[2] A. J. Durán, Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo. Alianza, Madrid, 1996.

[3] I. Grattan-Guinness, Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630–1910: Una introducción histórica. Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[4] M. Guzmán, El rincón de la pizarra: Ensayos de visualización en análisis matemático, Pirámide, Madrid, 1996.

[5] K. A. Ross, *Elementary analysis: The theory of calculus*, Springer, Berlín, 1980.

[6] M. Spivak, *Cálculo infinitesimal*, Reverté, 1994.

[7] T. M. Apostol, *Análisis Matemático* (2a. ed.). Reverté, Barcelona, 1991.

[8] V. A. Zorich, *Mathematical Analysis I*, Springer-Verlag, Berlín, 2003.