AII - PEC - 2014

1. Contestar, justificando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. Si la función f presenta mínimos locales ¿la longitud del gradiente de la función f, $|\nabla f|$ es mínima en un mínimo local?

(vale 1 punto)

b. Si $\vec{\mathbf{r}}(t)$ parametriza la curva obtenida mediante la intersección de $y = 0$ con $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ entonces ¿el vector binormal $\vec{\mathbf{B}}$ es tangente a la superficie?

(vale 1 punto)

---

2. **a**. Encontrar el plano tangente a la superficie $S : 3x^{2/3} + 3y^{2/3} + 6z^{2/3} = 12$, en el punto $(1,1,1)$.

(vale 1 punto)

b. Cuando la superficie S, se corta mediante el plano $y = 1$, se tiene la curva $3x^{2/3} + 6z^{2/3} = 9$. Encontrar la recta tangente que tiene la forma $ax + bz = d$, en $(x,z) = (1,1)$.

(vale1 punto)

---

3. Sea S: $r = 2 + \sin(z)$ una superficie en coordenadas cilíndricas. Encontrar una parametrización $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ de dicha superficie.

(vale 1 punto)

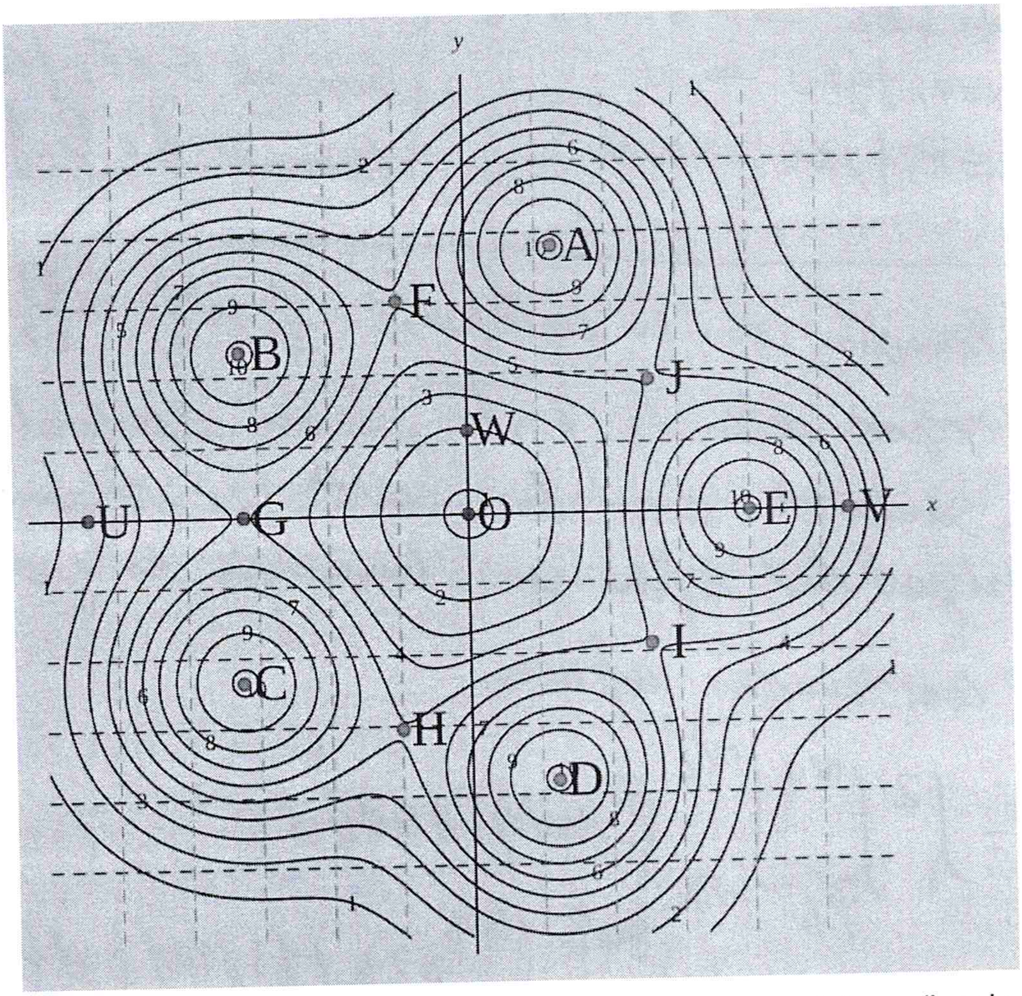
---

4. Encontrar y clasificar los puntos críticos de la función $f(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$.

(vale 1 punto)

---

5. Una función de dos variables , $f(x,y)$ se presenta como un mapa de contornos



¿Qué puntos del gráfico se pueden clasificar como máximos, minimos (locales) o puntos silla ? ¿En qué puntos son $\partial f/\partial x = 0, \partial f/\partial y \neq 0$?¿En qué puntos son $\partial f/\partial x \neq 0, \partial f/\partial y = 0$?¿Cúal es el valor máximo para f cuando se camina en linea recta de U a V?¿y el valor mínimo? ¿Hay un cámino de G a F sobre el cual f es constante?¿Hay un camino de A a B para el cual f es constante?

(vale 2 puntos)

---

6 Una región W en $\mathbb{R}^3$ esta definida por las relaciones:

$$x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 3(x^2 + y^2), \quad 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad x \geq 0 \ .$$

Hacer un dibujo de dicha región.

Calcular el volumen de la región utilizando integrales multiples.

(vale 2 puntos)

Sol. PEC. AII.- 2014

1)- a) La longitud del gradiente de f $|\nabla f|$ es cero en un punto crítico y positiva siempre que se aleje uno de él.
b) El vector normal apunta al centro de la esfera, el vector binormal es ortogonal al vector tangente y al normal. Es decir, el vector binormal es tangente a la esfera.

2)- a) $\vec{\nabla} f(0,1,1)=(2,2,4)$, $2x+2y+4z=8$
b) $\vec{\nabla} f(1,2)=(2,4)$, $x+2z=3$

3)- La distancia al eje z es $2+\operatorname{sen}(z)$. Si se toma como segundo parámetro el ángulo de rotación θ, entonces
$$\vec{r}(\theta,z)=\left((2+\operatorname{sen}(z))\cos\theta,\ (2+\operatorname{sen}(z))\operatorname{sen}\theta,\ z\right)$$

4)- $\vec{\nabla} f(x,y)=(x^3-x,\ y^3+y)=(0,0) \Rightarrow$ que los puntos críticos son $(-1,0),(0,0)$ y $(1,0)$

si $D=f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2=(3x^2-1)(3y^2+1)$
$f_{xx}=-1+3x^2$

luego

punto	D	f_{xx}	tipo
(-1,0)	2	2	mínimo
(0,0)	-1	-1	silla
(1,0)	2	2	mínim.

5)
máximo local → A, B, C, D, E
mínimo local → O
punto silla → F, G, H, I, J.
$f_x=0,\ f_y\neq0$ → W
$f_y=0\ f_x\neq0$ → U, V

Valor máximo f en U a V = 10 en E
Valor mínimo f de U a V = 0 en O
Camino de G a F, f constante = Verdadero
Camino de A a B, f constante, falso

6)- La ecuación de un cono en coordenadas cartesianas es $x^2/a^2 + y^2/b^2 = z^2/c^2$,

La región definida por la primera desigualdad es un sandwich entre dos conos. La segunda desigualdad define un sandwich entre dos esferas.
Luego el volumen en coordenadas esféricas es

$$V = \int_1^2 \int_{\pi/6}^{\pi/4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \operatorname{sen}(\phi)\, d\theta\, d\phi\, dr + \int_1^2 \int_{3\pi/4}^{5\pi/6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \operatorname{sen}(\phi)\, d\theta\, d\phi\, d\rho =$$

$$= \boxed{\left(\frac{7}{3}\right)\pi\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}$$