ANÁLISIS DE VARIABLE REAL

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID**

Cuarto día de revisión

Doble grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Doble grado en Matemáticas y Físicas
Universidad Complutense de Madrid

David Peñas
Curso 2011-2012

Supongamos que no
Aníbal

Resumen

El análisis de variable real es, junto con el álgebra, la herramienta básica con la que todo matemático comienza a formarse, y es por ello que desde el principio de su aprendizaje debe tener plena consciencia y dominio de las herramientas que ha de necesitar para otros campos de la matemática más complejos y abstractos.

Este manual contiene la transcripción de las clases de *Análisis de variable real*, impartidas por el catedrático de Matemática Aplicada D. Aníbal Rodríguez-Bernal durante el curso 2011-2012, a los alumnos de sendos dobles grados de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Esperamos que estas breves notas ayuden al estudiente en sus inicios, al desarrollar completas muchísimas de las demostraciones, y que con el tiempo el alumno adquiera la destreza necesaria para, por sí mismo, obtener resultados de las demostraciones que en ocasiones, por analogía, quedan incompletas. Se incluyen además más de 200 ejercicios con lo que el matemático *amateur* podrá no sólo ejercitar los contenidos aprendidos, sino también ampliar la teoría.

Análisis de variable real

David Peñas

Cuarto día de revisión

Índice general

Introducción

Comencemos introduciendo brevemente las notaciones y convenios que seguiremos a lo largo del desarrollo de estas notas.

¿Por desarrollar?

Capítulo 1

Conjuntos de números

1.1. Introducción. Estructura y orden del cuerpo

Distinguimos, en primer lugar, los siguientes conjuntos:

- Los números naturales, designados por $\mathbb{N}.\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$
- Los números enteros, designados por $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z} = \{\ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- Los número racionales, desigados por $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \shortparallel p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
- Los números reales, desigandos por $\mathbb{R}$, en el que se incluyen todos los decimales.
- Los números complejos, designados por $\mathbb{C}$, que además incluye los imaginarios.

Luego es claro que $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$

1.1.1. Operaciones. Adicción y producto

Definición 1. Propiedades de la adición sobre un conjunto.

1. Operación interna, esto es, todos los elementos de la suma son del mismo conjunto, al igual que el resultado. Es decir que la suma $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$
2. Propiedad conmutativa: $\forall a, b \in \mathbb{K} \quad a + b = b + a$
3. Propiedad asociativa: $\forall a, b, c \in \mathbb{K} \quad (a + b) + c = a + (b + c)$
4. Elemento neutro: $a + 0 = a \qquad \forall a \in \mathbb{K}$
5. Elemento opuesto: $a + (-a) = 0 \qquad \forall a \in \mathbb{K}$

De estra operación se obtiene su opuesta, la sustracción: $a + (-b) = c$. $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$ poseen estas propiedades, luego forman por ello un grupo conmutativo. Los número naturales sólo cumplen las tres primeras.

Notación. Designamos por $\mathbb{K}$ a un cuerpo arbitrario.

Definición 2. Propiedades del producto sobre un conjunto

1. Operación interna: $(\cdot) : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$
2. Propiedad conmutativa: $\forall a, b \in \mathbb{K} \quad a \cdot b = b \cdot a$
3. Propiedad asociativa: $\forall a, b, c \in \mathbb{K} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
4. Elemento neutro: $a \cdot 1 = a \qquad \forall a \in \mathbb{K}$
5. Elemento inverso: $a \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a} = 1 \qquad \forall a \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$

De esta operación se obtiene su opuesta, la división.
Además, ambas operaciones tienen en común una propiedad: la distributiva. $\forall a, b, c \in \mathbb{K} \quad a\,(b + c) = ab + ac$

1.1.2. Consecuencias de la estructura de un cuerpo

Sólo válidos para $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

Proposición 1. *Consecuencia de la estructura de un cuerpo*

1. *El elemento neutro de la adición y el producto es único.*
2. *Si* $x + a = a \Rightarrow x = 0$
3. *Si* $x \cdot a = a, a \neq 0 \Rightarrow x = 1$
4. $x \cdot 0 = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{K}$
5. $-x = (-1)\, x$
6. *La ecuación* $x + a = b$, *conocidos* a, b, *tiene una única solución. Si* $a \neq 0$, *entonces la ecuación* $ax = b$ *tiene una única solución.*
7. *Si* $ab = ac \Rightarrow b = c$
8. *Si* $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ *ó* $b = 0$
9. *Si* $a \neq 0$ *y* $b \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$

Demostración.

1. Para el caso de la adición: Supongamos que hay dos elementos neutros para la adición. Sean e_n y e'_n esos elementos neutros. Entonces: $a = a + e_n = a + e'_n \Rightarrow e_n = e'_n$. Para el del producto es análogo.
2. $x + a + (-a) = a + (-a); x + (a - a) = 0; x = 0$
3. $x \cdot a \cdot {}^1\!/\!_a = a \cdot {}^1\!/\!_a; x\,(a \cdot {}^1\!/\!_a) = 1 \Rightarrow x = 1$
4. $0 = 0 + 0$; $x \cdot 0 = x\,(0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 \rightarrow x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0$, que sumando el opuesto a ambos lados: $(-x \cdot 0) + x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = 0 \Rightarrow x \cdot 0$
5. Sumamos el opuesto de $(-x)$ y sacamos factor común: $-x = (-1)x; -x{+}x = (-1)\,x{+}x \rightarrow 0 = x(-1{+}1) \Rightarrow 0 = x \cdot 0$. Como se cumple 4., 5. se cumple.
6.
7. $\frac{1}{a}ab = \frac{1}{a}ac \Rightarrow b = c$
8. Supongamos que $a = 0$, entonces todo perfecto.
   Ahora, su suponemos que $a \neq 0 \rightarrow \frac{1}{a}ab = 0 \Rightarrow b = 0$
9. Partimos de que $ab\frac{1}{ab} = 1; b\left(\frac{1}{ab}\right) = \frac{1}{a}; \frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$

□

1.1.3. Propiedades de orden

Existen un subconjunto $P \in \mathbb{R} \shortparallel P = \{p \in \mathbb{R}, p > 0\}$.

- Si $a, b \in P \Rightarrow a + b \in P$
- Si $a, b \in P \Rightarrow ab \in P$
- Tricotomía de orden. Si $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a \in P \\ a = 0 \\ -a \in P \end{cases}$

Notación. $a > 0 \Leftrightarrow a \in P$ y $a < 0 \Leftrightarrow -a \in P$

Definición 3.
Sean $a, b \in \mathbb{R}$

1. $a > b$ si $a - b > 0$
2. $a \geq b$ si $a - b \geq 0$, esto es, $a - b \in P \cup \{0\}$

1.1.3.1. Consecuencias de las propiedades de orden

Proposición 2. *Consecuencias del orden*

1. $a \geq a$, $a - a = 0 \in P \cup \{0\} \qquad \forall a \in \mathbb{R}$
2. *Si* $a \geq b$ *y* $b \geq c$, *entonces* $a \geq c$
3. *Si* $a \geq b$ *y* $b \geq a$, *entonces* $a = b$
4. *Si* $a > b$ *y* $b > c$, *entonces* $a > c$
5. *Si* $a \neq 0$, *entonces* $a^2 > 0$
6. $1 > 0$
7. *Si* $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$
8. *Si* $a > b$, *entonces* $a + x > b + x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
9. *Si* $a > b$ *y* $c > b$, *entonces* $a + c > b + d \qquad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$
10. *Si* $a > b$ *y* $\begin{array}{ll} c > 0 & \Rightarrow ac > bc \\ c < 0 & \Rightarrow ac < bc \end{array}$
11. *Si* $a > 0$ *y* $b < 0 \Rightarrow ab < 0$
12. *Si* $\begin{array}{l} a > 0 \Rightarrow 1/a > 0 \\ a < 0 \Rightarrow 1/a < 0 \end{array}$
13. *Si* $a > b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$
14. *Si* $0 \leq a < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a = 0$
15. *Si* $ab > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0, & b > 0 \\ a < 0, & b < 0 \end{cases}, \; a \neq 0, b \neq 0$
16. *Si* $ab < 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0, & b > 0 \\ a > 0, & b < 0 \end{cases}, \; a \neq 0, b \neq 0$
17. *Si* $a > b > 0$ *y* $a > c > 0 \Rightarrow ac > bd$
18. *Si* $0 < a < b \Rightarrow \begin{cases} a^2 < b^2 \\ \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \end{cases}$
19. *Si* $\begin{array}{l} a > 1 \Rightarrow 1/a < 1 \\ a < 1 \Rightarrow 1/a > 1 \end{array}$
20. *Si* $a > 1 \Rightarrow 1 < a < a^2 < a^3 < \ldots < a^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$
    Si $a < 1 \Rightarrow 1 > a > a^2 > a^3 > \ldots > a^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Demostración.

1. Trivial
2. $a - b \in P \cup \{0\}$ y $b - c \in P \cup \{0\}$, $(a - b) + (b - c) \in P \cup \{0\}$, $a - c \in P \cup \{0\} \Rightarrow a \geq c$
3. $a - b \in P \cup \{0\}$ y $b - a \in P \cup \{0\}$.
   $b - a = -(a - b)$, por tricotomía, si $a - b > 0$, su opuesto no puede serlo.
   Si $\begin{cases} a - b = 0 & OK! \\ a - b \in P & \begin{cases} -(a - b) \notin P \\ a - b \neq 0 \end{cases} \Rightarrow a = b \end{cases}$
4. Similar a 2.
5. Si $a > 0 \Rightarrow a \cdot a \in P \Rightarrow a^2 > 0$
   Si $a < 0 \Rightarrow -a \in P \Rightarrow (-a)(-a) \in P \Rightarrow a^2 > 0$

6. Por 5, $1 \cdot 1 > 0$

7. $1 > 0 \Rightarrow 2 > 1 > 0 \Rightarrow 3 > 2 > 1 > 0$
   Sea $S = \{k \in \mathbb{N} \shortparallel k > 0\}$. Entonces $1 \in S$. Si $k \in S \Leftrightarrow k > 0 \Leftrightarrow k+1 > 1 > 0 \Rightarrow k+1 \in S$

8. Si $a - b > 0 \in P \Rightarrow (a+x) - (b+x) > 0 \in P \Rightarrow a + x > b + x$

9. Tenemos que $a - b > 0$ y $c - d > 0$, luego $a - b + c - d > 0 \Rightarrow (a+c) - (b+d) > 0 \Rightarrow a + c > b + d$

10. Si $a > b \Rightarrow a - b > 0$ y $c > 0 \Rightarrow c\,(a-b) > 0 \Rightarrow ac - bc > 0 \Rightarrow ac > bc$
    Si $a > b \Rightarrow a - b > 0$ y $-c > 0 \Rightarrow -c\,(a-b) > 0 \Rightarrow -ac + bc > 0 \Rightarrow bc > ac$

11. Como $a > 0$ y $-b > 0 \Rightarrow a\,(-b) > 0 \Rightarrow ab < 0$, por 10.

12. Para $a > 0$, supongamos que ${}^1\!/_a < 0 \Rightarrow a \cdot {}^1\!/_a = 1 < 0$, lo cual es absurdo. Luego si $a > 0 \Rightarrow {}^1\!/_a > 0$
    Para $a < 0$, supongamos que ${}^1\!/_a > 0 \Rightarrow -a \cdot {}^1\!/_a = -1 > 0$, lo cual es absurdo. Luego si $a < 0 \Rightarrow {}^1\!/_a < 0$

13. Como $a < b \Rightarrow a + a < a + b \Rightarrow 2a < a + b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2}$
    Por otro lado, como $a < b \Rightarrow a + b < b + b \Rightarrow a + b < 2b \Rightarrow \frac{a+b}{2} < b$
    En particular, si $0 < b \Rightarrow 0 < {}^b\!/_2 < b$, lo cual quiere decir que no hay un menor número positivo.

14. Si $a > 0$, por ejemplo supongamos $0 \leq {}^a\!/_2 < a$, llamando $\varepsilon = {}^a\!/_2$, tenemos que $0 \leq \varepsilon < a$, lo cual contradice la hipótesis. Entonces, $a = 0$

    Consecuencia 1: Si $a < b + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a \leq b$
    Consecuencia 2: Si $a - \varepsilon < b \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a \leq b$

15. Si $a > 0 \Rightarrow {}^1\!/_a > 0 \Rightarrow {}^1\!/_a\,(ab) > 0 \cdot (ab) \Rightarrow b > 0$
    Si $a < 0 \Rightarrow {}^1\!/_a < 0 \Rightarrow {}^1\!/_a\,(ab) > 0 \cdot (ab) \Rightarrow b < 0$

16. Para $a < 0$, ${}^1\!/_a < 0 \Rightarrow {}^1\!/_a\,(ab) > 0 \Rightarrow b > 0$
    Para $a > 0$, ${}^1\!/_a > 0 \Rightarrow {}^1\!/_a\,(ab) < 0 \Rightarrow b < 0$

17. Como $\begin{array}{c} a - b > 0 \\ c - d > 0 \end{array} \rightarrow \begin{cases} c\,(a-b) > 0 \cdot c \Rightarrow ac - ab > 0 \\ b\,(c-d) > 0 \cdot b \Rightarrow bc - bd > 0 \end{cases}$,que al sumar, queda: $ac - bc + bc - bd > 0 \Rightarrow ac - bd > 0 \Rightarrow ac - bd$

18. Si $b^2 > a^2 \Rightarrow b^2 - a^2 > 0 \Rightarrow (b-a)\,(b+a) > 0$. Como, por hipótesis, tenemos que $b - a > 0$, entonces $b + a > 0$ también.
    Análogo para $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

19. $a > 1 > 0$, multiplicando por el inverso de a a ambos lados: $a \cdot {}^1\!/_a > {}^1\!/_a \Rightarrow 1 > {}^1\!/_a$
    De la misma forma $0 < a < 1 \Rightarrow a < 1 \Rightarrow a - 1 < 0$, y al multiplicar por el inverso de a: ${}^1\!/_a\,(a-1) < 0 \Rightarrow 1 - {}^1\!/_a \Rightarrow 1 < {}^1\!/_a$

20. Caso $a > 1$: $a > 1$, luego $a \cdot a > a \Rightarrow a^2 > a$. Entonces $a^2 \cdot a > a \cdot a \Rightarrow a^3 > a^2$...
    Caso $a < 1$: $a < 1$, luego $a \cdot a < a \Rightarrow a^2 < a$. Entonces $a^2 \cdot a < a \cdot a \Rightarrow a^3 < a^2$...

□

1.1.3.2. El principio de inducción

Definición 4. Buen orden
Un conjunto A se dice que tiene un buen orden, si y sólo si, existe $a \in A$ tal que $a \leq b \quad \forall b \in A$, es decir, existe un elemento que es menor que todos los demás del conjunto.
Todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ poseen esta propiedad.

Proposición 3.
Si $S \subset \mathbb{N}$:

1. $1 \in S$

2. $k \in S \Rightarrow k+1 \in S \Rightarrow S = \mathbb{N}$

Demostración. Supongamos que $S \subsetneq \mathbb{N}$. Entonces:

Sea $A = \mathbb{N} \backslash S$, $A \neq \emptyset$

Por la propiedad de buen orden, $\exists m \in A \shortparallel m \leq a \quad \forall a \in A$. Dicho m no puede ser 1, ya que $1 \in S$, y hemos construido A eliminando S de los números naturales. Luego: $1 \notin A \Rightarrow m \neq 1 \Rightarrow m > 1 \Rightarrow m - 1 < m \Rightarrow m - 1 \in S$, porque si m es el primer elemento de A, $m - 1$ no está en A, sino que está en S.

Inferimos ahora que el sucesor de $m - 1$ está en $S \Rightarrow (m-1) + 1 \in S \Rightarrow m \in S$. La conclusión entra en contradicción con la hipótesis inicial.

Como m lo obtuvimos suponiendo que $\mathbb{N} \backslash S \neq \emptyset$, esto resulta ser falso, con lo cual $\mathbb{N} \backslash S = \emptyset \Rightarrow \mathbb{N} = S$. ☐

Proposición 4. *Principio de inducción*

Sea $P(n)$ una propiedad que se cumple para $n \in \mathbb{N}$. Si $P(1)$ es cierta, $P(k)$ es cierta si y sólo si $P(k+1)$.

Demostración.

$$S = \{k \shortparallel P(k) \text{ es cierta}\} \Rightarrow \begin{cases} 1 \in S \\ \text{Si } k \in S \Rightarrow k+1 \in S \end{cases} \Rightarrow S = \mathbb{N}$$

☐

1.2. Propiedades de los números reales

1.2.1. Desigualdades notables

Proposición 5. *Ecuación de segundo grado.*

Si se tiene $ax^2 + bx + c = 0$, para ciertos $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Demostración. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ buscamos $x \in \mathbb{R} \shortparallel ax^2 + bx + c = 0$

1. Tomamos $ax^2 + bx + c = 0$ y dividimos entre a: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
2. Sumamos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ a la igualdad y pasamos $\frac{c}{a}$ al otro lado: $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$
3. En el lado izquierdo de la igualdad lo que tenemos es la expresión extendida de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, por lo que la juntamos. Hemos "completado el cuadrado": $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b^2}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$
4. Reducimos a común denominador el lado derecho: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2+4ac}{4a^2}$.
5. Pasamos la raíz y despejamos x: $x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \to x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

☐

Observación 1. Llamamos discriminante, Δ, a: $\Delta = b^2 - 4ac$

1. Si $\Delta < 0$, entonces $\nexists x \in \mathbb{R} \shortparallel ax^2 + bx + c = 0$
2. Si $\Delta \geq 0$, entonces, si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones en $\mathbb{R}$. Si $\Delta = 0$, la ecuación tienen una solución doble en $\mathbb{R}$

Proposición 6. *Desigualdad de segundo grado*

Si tenemos que $ax^2 + bx + c \geq 0$, para ciertos $a, b, c \in \mathbb{R}, a > 0$. Entonces:

$$x_1 \geq \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 \leq \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Demostración. Similar a la de la proposición anterior, teniendo en cuenta el cambio de desigualdad. ☐

Observación 2. Sea $D = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

1. Si $D \leq 0$, entonces todo $x \in \mathbb{R}$ verifica la desigualdad.

2. Si $D > 0$, entonces. Sea $y = x + \frac{b}{2a}$ y $A = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

$$y \geq A \Rightarrow y^2 \geq A^2 \Rightarrow y^2 - A^2 \geq 0 \Rightarrow (y-A)(y+A) \geq 0 \begin{cases} y \geq A & \text{e } y \geq -A \Leftrightarrow y \geq A \\ y \leq A & \text{e } y \leq -A \Leftrightarrow y \leq -A \end{cases}$$

Proposición 7. *La desigualdad de Cauchy*
Sean $a_1, \dots, a_n$ y $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, con $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq \left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^n + \ldots + b_2^n\right)$$

Demostración. Sea $F(t) = (a_1 - tb_1)^2 + \ldots + (a_n - tb_n)^2 \geq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$
Si desarrollamos la función, queda como sigue:
$F(t) = \left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right) + t\left(b_1^2 + \ldots + b_n^2\right) - 2t\left(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n\right) \geq 0$
Llamemos $A = \left(b_1^2 + \ldots + b_n^2\right), B = 2\left(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n\right), C = \left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)$, tenemos que $F(t) = At^2 - Bt + C \geq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

Puesto que $F(t)$ es siempre positiva para todo t real, no puede tener dos raíces diferenctes (como mucho tendrá una, o ninguna, ya que la parábola es siempre positiva o al menos corta al eje X en un punto), luego su discriminante $\Delta = (-2B)^2 - 4AC = 4(B^2 - AC)$ debe cumplir que $B^2 \leq AC$, que es precisamente la desigualdad que tenemos enuncuada arriba. □

Observación 3. La igualdad se da unicamente si $B^2 = AC$, y en este caso $\exists! s \in \mathbb{R} \shortparallel As^2 - 2Bs + C = 0 \Leftrightarrow (a_i - sb_i)^2 = 0 \qquad \forall i \Leftrightarrow a_i = sb_i$, esto es, que a_i es múltiplo de b_i

Corolario 1. *Propiedad triangular: desigualdad de Minkowski*
Sean $a_1, \dots, a_n$ y $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, con $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + \ldots + (a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}$$

Demostración. $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left(a_i^2 + b_i^2 + 2a_ib_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2\sum_{i=1}^n a_ib_i$.
Llamemos $A = \sum_{i=1}^n a_i$ y $B = \sum_{i=1}^n b_i$.

Aplicando la desigualdad de Cauchy, tenemos que $\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2\sum_{i=1}^n a_ib_i \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}\right)^2$.

Entonces, tenemos que $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$ □

Observación 4. La igualdad se alcanza si, y sólo si $\exists s \in \mathbb{R} \shortparallel a_i = sb_i \qquad \forall i = 1, \dots, n$

1.2.2. Valor absoluto

Definición 5. Valor absoluto
Decimos que el valor absoluto de $a \in \mathbb{R}, |a|$, es:

$$|a| = \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Definición 6. Orden total
Decimos que sobre un conjunto $\mathcal{A}$ existe un orden total, $\sqsubseteq$, si $\forall a, b, c \in \mathcal{A}$ se tiene que:

1. Si $a \sqsubseteq b$ y $b \sqsubseteq a \Rightarrow a = b$ (antisimétrica)

2. Si $a \sqsubseteq b$ y $b \sqsubseteq c \Rightarrow a \sqsubseteq c$ (transitiva)

3. $a \sqsubseteq b$ ó $b \sqsubseteq a$. (completa)

En el caso de los reales (y sus subconjuntos), éste orden es el orden usual, $\leq$, que le confiere a $\mathbb{R}$ una estructura de orden total.

Proposición 8. *Propiedades del valor absoluto*

1. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2. $|-a| = |a| \qquad \forall a \in \mathbb{R}$
3. $|ab| = |a| \cdot |b| \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$
4. *Sea* $c \geq 0$. *Entonces* $|a| \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c \qquad \forall a \in \mathbb{R}$
5. $-|a| \leq a \leq |a| \qquad \forall a \in \mathbb{R}$

Demostración.

1. Si $a \neq 0 \Leftrightarrow -a \neq 0 \Leftrightarrow |a| \neq 0 \Rightarrow$Si $a = 0 \Rightarrow |a| = 0$
2. Si $a > 0 \Rightarrow -a < 0 \Rightarrow |a| = a = -(-a)$. Si $a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow |a| = -a = |-a|$
3. Si a ó b son 0, es claro que $|ab| = |a| \cdot |b| = 0$. Si ambos son positivos, $a \cdot b > 0$, de donde $|ab| = |a| \cdot |b|$. Si $a > 0$ y $b < 0$, entonces $ab < 0 \Rightarrow |ab| = -ab = a(-b) = |a| \cdot |b|$. El caso $a < 0, b > 0$ es enteramente análogo.
4. Supongamos que $|a| \leq c$. Entonces $a \leq c$ y $-a \leq c$, de lo que se deduce que $-c \leq a \leq c$, por lo que se tiene que $a \leq c$ y $-a \leq c$ *¿por qué?,* porque $|a| \leq c$
5. Procedamos de forma similar, partiendo ahora de que $c = a$. Supongamos que $a \leq a$. Entonces $a \leq a$ y $-a \leq a$. También se deduce que $-a \leq a \leq a$////////no me convence.

$\square$

Proposición 9. *Desigualdad del triángulo.*

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Demostración. Por la propiedad 5 anterior, sabemos que $-|a| \leq a \leq |a|$ y $-|b| \leq b \leq |b|$. Si sumamos miembro a miembro, tenemos:

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

Aplicando 4, tenemos que $|a + b| \leq |a| + |b|$. De forma general podemos aplicacar la regla a la suma de n términos: $|a_1 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + \ldots + |a_n|$ $\square$

Corolario 2. *Más propiedades del valor absoluto.*
A partir de la propiedad triangular, es fácil deducir que:

1. $||a| - |b|| \leq |a - b|$
2. $|a - b| \leq |a| + |b|$

Demostración.

1. Podemos escribir $a = a+b-b$ y aplicamos la propiedad tringular, entonces: $|a| = |(a + b) - b| \leq |a - b|+|b|$. Restamos $|b|$ a ambos lados y obtenemos:

   $$|a| - |b| \leq |a - b|$$

   De la misma forma obramos con b :$b = b - a + a$, que aplicando valor absoluto y la propiedad triangular queda como: $|b| \leq |b - a| + |a|$, y restando $|a|$:

   $$|b| - |a| \leq |b - a|$$

   Es decir, si multiplicamos por -1: $-|b - a| = -|a - b| \leq |a| - |b|$. Juntandolo todo, tenemos:

   $$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

2. Sustituimos en la propiedad triagular b por $-b$: $|a - b| \leq |a| + |-b|$, pero como $|b| = |-b|$, entonces: $|a - b| \leq |a| + |b|$

$\square$

1.3. Los números complejos

Definición 7. Número complejo

Un número complejo describe la suma de un número real y un número imaginario (que es un múltiplo real de la unidad imaginaria, que se indica con la letra i). Son de la forma:

$$z = a + bi \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Definición 8. Espacio vectorial

Un conjunto $\mathcal{A}$ es espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ si, y sólo si es cerrado para la **suma** y el **producto por escalares**, esto es:

1. Si $a, b \in \mathcal{A}$, entoces $a + b \in \mathcal{A}$
2. Si $a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{K}$, entonces $\lambda \cdot a \in \mathcal{A}$

Definición 9. Los números complejos tienen estructura de espacio vectoral.

1. Suma de complejos: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, esto es, es operación **interna**.
   a) Propiedad conmutativa: $(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b) \qquad \forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$
   b) Propiedad asociaiva: $[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)] \qquad \forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{C}$
   c) Elemento neutro: $(0, 0)$. $(a, b) + (0, 0) = (a, b) \qquad \forall (a, b) \in \mathbb{C}$
   d) Elemento opuesto: Dado $(a, b) \in \mathbb{C} \quad \exists - (a, b) \shortmid\shortmid (a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$
2. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(a, b) \in \mathbb{C}$, entonces $\lambda (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$, esto es, es operación **externa.**
   a) Propiedad asociativa: $\lambda (\mu (a, b)) = \lambda\mu (a, b) \qquad \forall (a, b) \in \mathbb{C}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
   b) Elemento neutro: 1. $1 \cdot (a, b) = (a, b) \qquad \forall (a, b) \in \mathbb{C}$
   c) Propiedad distributiva: $(\lambda + \mu)(a, b) = \lambda (a, b) + \mu (a, b) \qquad \forall (a, b) \in \mathbb{C}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ç

1.3.1. Producto de números complejos

Definición 10. Producto de numeros complejos.

Dados $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$, entonces

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \qquad \forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$$

Proposición 10. *Propiedades del producto de números complejos*

1. *Propiedad conmutativa:* $(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b) \qquad \forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$
2. *Propiedad asociativa:* $[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)] \qquad \forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{C}$
3. *Elemento neutro:* $(1, 0) \cdot (a, b) = (a - 0, b + 0) = (a, b) \qquad \forall (a, b) \in \mathbb{C}$
4. *Elemento inverso:* $\forall (a, b) \neq (0, 0) \quad \exists (a, b)^{-1} \shortmid\shortmid (a, b) \cdot (a, b)^{-1} = (1, 0)$
5. *Propiedad distributiva:* $(a, b)((c, d) + (e, f)) = (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f) \qquad \forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{C}$

Por tanto $\mathbb{C}(+, \cdot)$ es una espacio vectorial. Además $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ es grupo conmutativo.

Observación 5.

1. Identificamos $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}$: $x \to (x, 0); y \to (y, 0); xy \to (xy - 0, 0 + 0) = (xy, 0)$
2. Llamamos $i = (0, 1)$ ***unidad imaginaria***. Entonces cualquier $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + b(0, 1) = a + bi$
3. $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0 + 0) = -1$
4. Así $(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + adi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Notación. Si $a + bi \in \mathbb{C}$, llamamos a a ***parte real***, y a bi ***parte imaginaria***.

1.3.2. Propiedades de los números complejos

Definición 11. Módulo y argumento de un número complejo.
Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$

1. Entonces el **módulo** de z es:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observación: Si $b = 0, z = a \in \mathbb{R}$, luego $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$

2. Sea $\theta \in [0, 2\pi]$. Decimos que θ es el **argumento de** z, y verifica:

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

3. Si $\theta \in \mathbb{R}$ (en radianes), entonces:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)$$

Proposición 11. *Más propiedades de los números complejos*

1. $\left|e^{i\theta}\right| = 1$
2. *Si* $z = a + bi \in \mathbb{C}$, *siendo* θ *es argumento, entonces:*

$$z = |z|\, e^{i\theta} = |z| \cos(\theta) + |z| \operatorname{sen}(\theta)$$

3. $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$
4. *Si* $z, w \in \mathbb{C}$ *con* $z = |z|\, e^{i\alpha}$ *y* $w = |w|\, e^{i\beta}$, *entonces:*

$$zw = |z| \cdot |w|\, e^{i(\alpha+\beta)}$$

Demostración.

1. $\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \Rightarrow e^{i\theta}$ es vector unitario.
2. El argumento verifica que $\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$ y que $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{b}{|z|} \Leftrightarrow a = |x| \cos(\theta)$ y $b = |x| \operatorname{sen}(\theta) \Leftrightarrow z = a+bi = |z| (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) = |z|\, e^{i\theta}$
3. $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = (\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha)) \cdot (\cos(\beta) + i \operatorname{sen}(\beta)) = [\cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)] + [i \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)]$ $e^{i(\alpha+\beta)}$
4. Claro a partir de 3).
Observación: Multiplicar un vector z *por* $w = |w|\, e^{i\theta}$ *hace girar* z *un ángulo* θ *y multiplica los módulos.*

□

Teorema 1. *Teorema fundamental del álgebra*
Sea $P(z)$ *un polinomio de grado* n *con coeficientes complejos:*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \qquad a_i, z \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$$

Entonces $P(z)$ *tiene al menos* ***una raíz*** $z_0 \in \mathbb{C}$.

Observación 6.

1. z_0 es raíz de $P(z) \Leftrightarrow P(z_0) = (z - z_0) \cdot Q(z)$, siendo $Q(z)$ otro polinomio que resulta de factorizar $P(z)$
2. z_0 es una raíz de multiplicidad m de $P(z) \Leftrightarrow P(z) = (z - z_0)^m \cdot Q(z)$, $Q(z) \neq 0$.

Corolario 3. *Raíces de un polinomio complejo.*
Sea $P(z)$ un polinomio de orden n con coeficientes complejos.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \qquad a_i, z \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$$

Entonces $P(z)$ tiene n raíces (contando las dobles, triples... m-ésimas, las veces que se repitan)
Luego $\exists z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$ y $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ $\quad k \leq n \shortparallel \sum_{i=1}^{n} m_i = n$ y $\prod_{i=1}^{n} (z - z_i)^m = P(z)$

Demostración. Por el teorema fundamental del álgebra, $P(z)$ tiene una raíz compleja, z_0, de multiplicidad $m \quad 1 \leq m \leq n$. Luego $P(z) = (z - z_0)^m \cdot Q(z)$, y el grado de $Q(z)$ es $m - n$. Como también es un polinomio complejo, tiene otra raíz compleja, con lo cual $Q(z) = (z - z_1)^k R(z)$, con lo cual $P(z) = (z - z_0)^m (z - z_1) R(z)$, y $R(z)$ es otro poliniomio complejo... Así sucesivamamente, hasta que descomponemos $P(z)$ en $j \leq n$ raíces, y la suma de las multiplicidades es igual a n. $\square$

Definición 12.
Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$

$$e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a (\cos(b) + i \operatorname{sen}(b))$$

1. Si $b = 0 \Rightarrow e^{\alpha + 0 \cdot i} = e^a$, luego $|e^z| = e^a$
2. $e^{a+bi} = e^{a(b+2\pi k)i} \qquad k \in \mathbb{Z}$
3. Si $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, entonces $e^x \neq e^y$
4. El conjugado de $z, \bar{z} = a - bi$

1.3.2.1. Raíces de números complejos

Sea $w \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Buscamos entonces $\{z \in \mathbb{C} \shortparallel z^n = w\}$.
Escribimos w en forma polar: $z^n = |z|^n e^{i\alpha n} = w = |w| = e^{i\theta}$. Entonces, es claro que $|z|^n = w$. Además $e^{i\alpha n} = e^{i\theta} \Rightarrow \alpha n = \theta + 2\pi k \qquad k \in \mathbb{Z}$

Luego $\alpha_k = \frac{\theta + 2\pi k}{n} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$, lo que implica n soluciones para α
¿Por qué? Cuando $k = n$, entonces $\alpha_n = \frac{\theta}{n} + 2\pi k$, el número complejo vuelve a repetirse, porque $\alpha_0 = \frac{\theta}{n}$, luego existen desde 0 hasta $n - 1$ soluciones.

1.4. Los numeros reales y la propiedad del supremo

Definición 13. Cotas superiores e inferiores.
Sea $A \subset \mathbb{R}$

1. $M \in \mathbb{R}$ es cota superior de $A \Leftrightarrow a \leq M \qquad \forall a \in A$
2. A de dice acotado superiormente si tiene cota superior.
3. $m \in \mathbb{R}$ es cota inferior de $A \Leftrightarrow m \leq a \qquad \forall a \in A$
4. A se dice acotado inferiormente si tiene cota inferior.
5. A se dice acotado si tiene cota superior e inferior

Definición 14. Supremo e ínfimo
Sea $A \subset \mathbb{R}$

1. $S \in \mathbb{R}$ es supremo de A si, y sólo si:
   a) S es cota superior de A
   b) S es la menor de las cotas superiores de A, esto es, siendo M otra cota superior de A, entonces $S \leq M$
2. $s \in \mathbb{R}$ es ínfimo de A si, y sólo si:

a) s es cota inferior de A

b) s es la menor de las cotas inferiores de A, esto es, siendo m otra cota inferior de A, $m \leq s$

Observación 7. Ni el supremo ni el ínfimo tienen porqué pertenecer al conjunto. Si así fuera, decimos que son máximo y mínimo del conjunto, respectivamente.

Hecho. *Propiedad del supremo*
Si $A \subset \mathbb{R}$ *está acotado superiormente, entonces* $\exists \sup(A) \in \mathbb{R}$

Observación 8. Los números racionales no cumplen esta propiedad.

Consecuencias.

- El supremo de un conjunto es único.

  Demostración. Supongamos $S_1, S_2 \shortparallel S_1 \neq S_2$, ambos supremos de A. Entonces, por tricotomía, $S_1 < S_2$ ó $S_1 > S_2$, lo cual contradice que uno de los dos sea supremo, porque no sería la mínima de las cotas superiores de A. Luego $S_1 = S_2$ □

- Si $A \neq \emptyset \Rightarrow S \in \mathbb{R}$ es el supremo de A si, y sólo si:
  - S es cota superior de A
  - Si $y \in \mathbb{R} \shortparallel y < S \Rightarrow \exists a \in A \shortparallel y < a \leq S$

  Demostración. Primero el sólo si, luego el si.

  $\Rightarrow)$

  1. el primer punto es claro, por definición.
  2. Sea $y \in \mathbb{R} \shortparallel y < S$. Supongamos que lo dicho no se cumple. Entonces $\forall a \in A \quad a \leq y \Leftrightarrow y$ es cota superior de A ya que $y < S$, y $S = \sup(A) \Rightarrow$contradicción.

     $(\Leftarrow$
     Suponemos que ambas propiedades son ciertas. Entonces S es cota superior de A, pero hay que probar que es la menor de las cotas superiores, esto es, que es supremo.

     Sea M cota superior de A, luego $S \leq M$. Supongamos que no, entonces $M < S$. Por la segunda afirmación se tendría que $\exists a \in A \shortparallel M < a \leq S \Rightarrow M$ no puede ser supremo de A

  □

- Podemos definir entonces el supremo de la siguiente forma: En $A \subset \mathbb{R} \shortparallel A \neq \emptyset$, $S = \sup(A)$ si, y solo si:
  - S es cota superior de A
  - Si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \shortparallel S - \varepsilon < a \leq S$

- Sean $E \subset F \subset \mathbb{R} \qquad (E \neq \emptyset \Rightarrow F \neq \emptyset)$. Si F está acotado superiormente $\Rightarrow E$ también lo está y $\sup(E) \leq \sup(F)$

  Demostración. Si M es cota superior de $F \Leftrightarrow x \leq M \quad \forall x \in F \Rightarrow M$ es cota superior de $E \Leftrightarrow x \leq M \quad \forall x \in E$. Como $\sup(F)$ es cota superior de F, y las cotas de F lo son también de E, entonces $\sup(E) \leq \sup(F)$ □

- De forma análoga, $\inf(F) \leq \inf(E)$.

Hecho. *Propiedad de ínfimo.*
Si $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ *y está acotado inferiormente, entonces* $\exists A = \inf(A) \in \mathbb{R}$

Demostración. Como A es acotado inferiormente, existe $m \in \mathbb{R} \shortparallel m \leq a \quad \forall a \in A$. Entonces $-m \geq -a \quad \forall a \in A$. Sea $-A = \{-a, a \in A\} \neq \emptyset$. Es claro que $-m$ es cota superior de $-A$, luego existe el supremo de $-A$, al que denotaremos por $-S$. Entonces $-S = \sup(A) \Rightarrow -S \geq -a \quad \forall -a \in -A \Leftrightarrow S \leq a \quad \forall a \in A$. Luego acabamos de probar que S es una cota inferior de A

- S es cota inferior de A, como acabamos de probar.
- Sea y una cota inferior de A, veamos que $y \leq S$. Como $y \leq a \quad \forall a \in A \Leftrightarrow -y \geq -a \quad \forall -a \in -A \Leftrightarrow -y$ es cota superior de $-A \Rightarrow -y \geq -S \Leftrightarrow y \leq S$. Luego S es ínfimo de A

□

1.4.1. Existencia de raíces de números reales

Teorema 2. *Existencia de raíces en los números reales.*
Sea $a > 0$ *y* $n \in \mathbb{N}$ $\quad n \geq 2$ *fijo. Entonces*

$$\exists! r > 0 \parallel r^n = a$$

y podremos decir que $r = \sqrt[n]{a}$

Demostración. Probemos primero la unicidad, luego la existencia.

1. **Unicidad.** Supongamos $r_1, r_2 > 0$ tales que $r_1 = \sqrt[n]{a}$ y $r_2 = \sqrt[n]{a}$. Si $r_1 \neq r_2$ entonces, supongamos (spdg) que $r_1 < r_2 \Rightarrow (r_1)^n < (r_2)^2 \Rightarrow a < a \Rightarrow$ contradicción. Luego sólo existe un r que verifica que $r^n = a$.

2. **Existencia.** Sea $A = \{x > 0 \parallel x^n \leq a\}$. Probemos que A es no vacío:

$$\frac{a}{a+1} < a \text{ y } \frac{a}{a+1} < 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{a+1}\right)^n < \frac{a}{a+1} \Rightarrow \frac{a}{a+1} \in A$$

Ahora veamos que A está acotado superiormente.

a) Si $a \leq 1 \Rightarrow M = 1$ es, claramente, cota superior de A. Si $\exists x \in A \parallel x > 1 \Rightarrow x^n > 1 \geq a \Rightarrow$contradicción, porque los elementos de A, al elevarlos a n son siempre menores estrictos que 1.

b) Si $a > 1$, entoces el propio a acota al conjunto A, luego $M = a$. Si $\exists x \in A \parallel x > a\,(> 1) \Rightarrow x^n > a \Rightarrow$ contradicción, ya que suponíamos que $x \in A$ y a es una cota superior de A, luego entonces x sería también cota superior de A, porque hemos dicho que $x > a$

Bien, hemos visto que ambos casos A está acotado superiormente, luego ha de existir un supremo para este conjunto.
Veamos que $r = \sqrt[n]{a}$

a) Supongamos que $r^n \neq a$, sino que $r^n < a$. Sea $\varepsilon = a - r^n, r > 0$ y sea $h \parallel 0 < h < 1$.

$$(r+h)^n = r^n + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j} r^j h^{n-j} = r^n + h\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j} r^j h^{n-j-1} \leq r^n + h\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j} r^j = r^n + h\left((1+r)^n - r^n\right) < a.$$

/////retocar: Despejamos la desigualdad y queda que $h < \frac{a-r^n}{(1+r)^n - r^n} < 1 \Rightarrow (r+h)^n \leq r^n + h < \frac{a-r^n}{(1+r)^n - r^n} < 1 \Rightarrow (r+h)^n \in A$, pero r es cota superior de A, luego $(r+h)^n$ no puede estar en A, entonces estamos ante una contradicción. Luego no es cierto que $r^n < a$.

b) Supongamos ahora que $r^n > a$ y vuelva a ser $\varepsilon = r^n - a$ y $h \parallel 0 < h < 1$.

$$(r-h)^n = r^n + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}(-1)^{n-j} r^j h^{n-j} = r^n + h\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j} r^j (-1)^{n-j} h^{n-j-1} \geq r^n - h\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j} r^j h^{n-j-1} \geq r^n - h\sum$$

Despejando de forma similar: $(r-h)^n \geq r^n - h\left[(1+r)^n - r^n\right]$.Escogemos $h \parallel h < \frac{r^n - a}{(1+r)^n - r^n}$ y así: $(r-h)^n \geq r^n - h\left[(1+r)^n - r^n\right] > a$, lo que me lleva a decir que $r - h$ es cota superior de A. Supongamos que $\exists x \in A \parallel r - h < x \Rightarrow (r-h)^n < x^n \leq a \Rightarrow$ contradicción. Luego no es cierto que $r^n > a$.

Sólo queda entonces que $r^n = a$, lo cual prueba que existen las raíces en $\mathbb{R}$ (de números positivos).

□

1.4.2. La propiedad arquimediana

Teorema 3. *Propiedad arquimediana de los números reales.*
Sea $x \in \mathbb{R}, x > 0$, *entonces*

$$\exists n \in \mathbb{N} \parallel x < n$$

Demostración. Supongamos que no ocurre. Entonces se tiene que $\forall n \in \mathbb{N} \quad x \geq n \Rightarrow x$ es cota superior de $\mathbb{N} \Rightarrow \exists S = \sup(\mathbb{N}) \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \shortparallel S - 1 < m \leq S$.

¿Cómo sabemos eso? Bien, supongamos lo contrario. $m \leq S - 1 < S$, que contradice que S es la menor de las cotas superiores.

Si ahora sumamos 1: $S < m+1 \in \mathbb{N}$ y así infinitamente, luego $\mathbb{N}$ no tiene cotas superiores, no es un conjunto acotado. □

Corolario 4. *Propiedades derivadas de la propiedad arquimediana.*

1. *Si* $x < 0$, *entonces* $\exists z \in \mathbb{Z} \shortparallel z < x$
2. *Si* $x, y > 0$, *entonces* $\exists n \in \mathbb{N} \shortparallel y < nx$
3. *Si* $x > 0$, *entonces* $\exists n \in \mathbb{N} \shortparallel 0 < {}^1/_n < x$
4. *Si* $x > 0$, *entonces* $\inf\left\{\frac{x}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} = 0$
5. *Si* $x < 0$, *entonces* $\sup\left\{\frac{x}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} = 0$
6. *Si* $x > 0$, *entonces* $\exists n \in \mathbb{N} \shortparallel n - 1 \leq x < n$
7. *Si* $x \in \mathbb{R}$, *entonces* $\exists z \in \mathbb{Z} \shortparallel z - 1 \leq x < z$
8. *Si* $x > 0$ *e* $y \in \mathbb{R}$, *entonces* $\exists z \in \mathbb{N} \shortparallel x(z-1) \leq y < nx$

Demostración. Vayamos una por una:

1. Entonces $-x > 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \shortparallel -x < m \Leftrightarrow -m < z$
2. Como $x, y > 0$, entonces $\frac{y}{x} > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad \frac{y}{x} < n \Rightarrow y < nx$
3. $0 < \frac{1}{x} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{x} < n \Leftrightarrow \frac{1}{n} < x$
4. 0 es cota inferior de $A = \left\{\frac{x}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$, luego existe $I = \inf A$. Supongamos que $I \geq 0$. Si $I > 0$, entonces $I < \frac{x}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n < \frac{x}{I} \Rightarrow$ contradicción, ya que estamos acotando los naturales. Luego $I = 0$.
5. 0 es cota superior de $B = \left\{\frac{x}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$, luego existe $S = \sup B$. Supongamos que $S < 0 \Rightarrow S \leq \frac{-x}{n} \Rightarrow n \leq \frac{-x}{S} \Rightarrow$ contradicción, ya que estamos acotando los naturales. Luego $S = 0$.
6. Fijemos $x < 0$. Sea $A = \{m \in \mathbb{N} \shortparallel x < m\} \neq \emptyset$. Por el Buen Orden de los naturales, existe $n \in A \shortparallel n \leq m$, un primer elemento de A y además $n-1 \leq x$. Si suponemos lo contrario tenemos que $x < n-1 \Leftrightarrow n-1 \in A$, lo que contradice que n es el primer elemento de A.
7. Como $x \in \mathbb{R}$, por la propiedad arquimediana $\exists z \in \mathbb{Z} \shortparallel x < z \Rightarrow z - 1 \leq x < z$.
8. Para $\frac{y}{x}$ tenemos $m, n \shortparallel \frac{y}{x} < n$. Sea $A = \left\{m \in \mathbb{N} \shortparallel \frac{y}{x} < n\right\}$. Entonces existe un $n' \in \mathbb{N}$ tal que $n' \leq m$. Aplicamos 5. y por la propiedad arquimediana $\frac{y}{x} < n \Rightarrow n - 1 \leq \frac{y}{x} < n \Leftrightarrow x(n-1) \leq x < nx$

□

1.4.3. Principio de intervalos encajados de Cantor

Definición 15. Intervalo.

- Si $a, b \in \mathbb{R}$ y además $a < b$, llamamos intervalo:
  - Abierto, denotado por $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \shortparallel a < x < b\}$
  - Cerrado, denotado por $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \shortparallel a \leq x <\leq b\}$
  - Abierto por la izquierda, cerrado por la derecha, denotado por $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \shortparallel a < x \leq b\}$
  - Cerrado por la izquierda, abierto por la derecha, denotado por $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \shortparallel a \leq x < b\}$
- Si $a \in \mathbb{R}$
  - $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \shortparallel a < x\}$

- $[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R} \shortparallel a\leq x\}$
- $(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R} \shortparallel x<a\}$
- $(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R} \shortparallel x\leq a\}$

Teorema 4. *Densidad de los números racionales en los reales.*
Si $a,b\in\mathbb{R}$ y $a<c$, entonces

$$\exists r\in\mathbb{Q} \shortparallel r\in(a,b)$$

Demostración. Sea $h=b-a>0\Rightarrow\exists n \shortparallel \frac{1}{n}<h$ (h es la longitud del intervalo). Tenemos que $a\in\mathbb{R}$ y $h>0$, luego por la propiedad arquimediana tenemos que:

$$\exists m\in\mathbb{Z} \shortparallel m\leq an<m+1$$

Luego

$$\frac{m}{n}\leq a<\frac{m+1}{n}=\frac{m}{n}+\frac{1}{n}\leq a+\frac{1}{n}<a+h=a+(b-a)=b$$

con lo cual

$$a<\frac{m+1}{n}<b\Leftrightarrow r=\frac{m+1}{n}\in(a,b)$$

$\square$

Observación 9. De hecho, dados (a,b) hay infinitos numeros racionales en (a,b). Dado (a,r), entonces $\exists r_1\in\mathbb{Q} \shortparallel r_1\in(a,r)$. Y así sucesivamente...

Corolario 5. *Densidad de los irracionales en los reales.*
Si $a,b\in\mathbb{R}$ y además $a<b$, entonces

$$\exists x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \shortparallel x\in(a,b)$$

Demostración. Aplicamos el teorema anterior a $\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}$ $\left(\sqrt{2}\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},\text{ luego } \frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\right)\Rightarrow r\in\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{2}}<r\frac{b}{\sqrt{2}}\Rightarrow a<\sqrt{2}r<b\Leftrightarrow\sqrt{2}r\in(a,b)$ $\square$

Definición 16. Familia de intervalos encajados.
Sea $\mathcal{F}$ una familia de intervalos (finitos o infinitos) cerrados. Entonces se dice que $\mathcal{F}$ es un sistema de intervalos encajados si, y sólo si

$$\forall I_1,I_2\in\mathcal{F}\text{ cumplen que } I_1\subset I_2 \text{ ó } I_2\subset I_1$$

Teorema 5. *Principio de intervalos encajados de Cantor.*
Sea $\mathcal{F}$ una familia de intervalos encajados, y sea $\xi=\sup\{a \shortparallel [a,b]\in\mathcal{F}\}$ y $\eta=\inf\{b \shortparallel [a,b]\in\mathcal{F}\}$. Entonces $\xi\leq\eta$ y

$$[\xi,\eta]=\bigcap_{I\in\mathcal{F}}=\{x\in\mathbb{R} \shortparallel x\in I\quad\forall I\in\mathcal{F}\}$$

En $\mathbb{Q}$ no es posible, únicamente se da en $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea $A=\{a \shortparallel [a,b]\in\mathcal{F}\}\neq\emptyset$ y $B=\{b \shortparallel [a,b]\in\mathcal{F}\}\neq\emptyset$.
A es acotado superiormente porque fijado $b_0\in B \shortparallel [a_0,b_0]\in\mathcal{F}$, tenemos que $\forall a\in A\quad a\leq b_0$

Análogamente B está acotado inferiormente y si fijamos un $a_0\in A$, tenemos que $\forall b\in B\quad a_0\leq b$.

Sea $a\in A\Rightarrow[a,b]\in\mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es una sistema de intervalos encajados, entonces o bien $[a_0,b_0]\subset[a,b]$ ó $[a,b]\subset[a_0,b_0]$.

Por tanto $\xi=\sup\{a \shortparallel [a,b]\in\mathcal{F}\}$ y $\eta=\inf\{b \shortparallel [a,b]\in\mathcal{F}\}$ están bien definidos.

Además, es claro que $\xi\leq b\quad\forall b\in B$, con lo cual ξ es cota inferior de B. Y también $a\leq\eta\quad\forall a\in A$, con lo cual η es cota superior de A. Luego $\xi\leq\eta$ y

$$[\xi,\eta] = \bigcap_{I\in\mathcal{F}} = \{x \in \mathbb{R} \shortparallel x \in I \qquad \forall I \in \mathcal{F}\}$$

□

Proposición 12. *La intersección de una familia de intervalos encajados es un punto.*

Sea $\mathcal{F}$ un sistema de intervalos cerrados encajados, entonces

$$\bigcap_{I\in\mathcal{F}} I = \{x \in \mathbb{R} \shortparallel x \in I \qquad \forall I \in \mathcal{F}\}$$

es un único punto si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I \in \mathcal{F} \shortparallel l(I) < \varepsilon$$

siendo $l(I)$ la longitud del intervalo. Es decir, la intersección es un punto si puedo crear intervalo dentro de la familia tan pequeños como queramos.

Demostración. Veamos la implicación en ambos sentidos, primero el sólo si:

$\Rightarrow |$

Si $\cap_{I\in\mathcal{F}} I = [\xi,\eta]$ es un único punto $\Leftrightarrow \xi = \eta \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists I \in \mathcal{F} \shortparallel \xi - \frac{\varepsilon}{2} < a \leq \xi$. Como $\eta = \text{ínf } B \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists I' \in \mathcal{F} \shortparallel \eta \leq b' < \eta + \frac{\varepsilon}{2}$.

Dado $\varepsilon > 0$, entonces al ser $\mathcal{F}$ una familia de intervalos cerrados encajados, entonces $I \subset I'$ ó $I' \subset I$. Como $\xi = \eta$, tenemos que $\begin{cases} \xi - \frac{\varepsilon}{2} < a \leq \xi \\ \xi \leq b < \xi + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

Si $I \subset I' \Leftrightarrow a' \leq \xi - \frac{\varepsilon}{2} < a \leq b < \xi + \frac{\varepsilon}{2} \leq b' \Rightarrow b - a < \left(\xi + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\xi - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$

Si $I' \subset I \Leftrightarrow a \leq \xi - \frac{\varepsilon}{2} < a' \leq b' < \xi + \frac{\varepsilon}{2} \leq b \Rightarrow b' - a' < \left(\xi + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\xi - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$

$| \Leftarrow$

Supongamos que $\xi < \eta \Rightarrow l\left([\xi,\eta]\right) = \eta - \xi > 0$. Luego por el principio de intervalos encajados de Cantor, $[\xi,\eta] \subset I \quad \forall I \in \mathcal{F} \Rightarrow l(I) > \eta - \xi \qquad \forall I \in \mathcal{F}$, lo que implica que todos los intervalos de la familia $\mathcal{F}$ son de longitud mayor que $l\left([\xi,\eta]\right)$, lo que contradice la existencia de intervalos tan pequeños como deseemos. □

Capítulo 2

Conceptos métricos

2.1. El espacio $\mathbb{R}^n$

Definición 17. El espacio $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ ... \ \times \mathbb{R}}^{n\ veces} = \{(x_1,\ x_2,\ ...\ , x_n)\ \ x_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in [1, n]$$

- Espacio vectorial $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $x + y = (x_1 + y_1,\ ...\ , x_n + y_n)$ $\qquad \forall x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n)\ \in \mathbb{R}^n$
  Grupo conmutativo:
  - Conmutativa: $(x + y) = (y + x)\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}$
  - Asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z)\ \forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$
  - Elemento neutro: $0 = \overbrace{(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ ...\ , 0)}^{n}\ x + 0 = x\ \forall x \in \mathbb{R}$
  - Elemento opuesto: Dado $x \in \mathbb{R}^n\ \exists - x = (-x_1, -x_2,\ ...\ , -x_n) \shortparallel x + (-x) = 0$
- Operación externa
  - $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\ \to \mathbb{R}^n$
  - $(\delta, x)\ \mapsto \delta \times x = (\delta x_1, \delta x_2,\ ...\ , \delta x_n)$
    - Asociativa: $(\delta, \mu)x = \delta(\mu x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \delta, \mu \in \mathbb{R}$
    - Elemento neutro: $1 \cdot x = x\ \forall x \in \mathbb{R}^n$
- Propiedades distributivas:
  - $(\lambda, +\mu)x = \lambda x + \mu x\ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}^n$
  - $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- Definición producto escalar:
  $< . , . > \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
  $(x, y) \mapsto < x, y > \overset{def.}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Proposición 13. *Propiedades del producto escalar*

- *i)* $< x, y > = < y, x >\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

  Demostración. $< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = < y, x >$ □

- *ii) Bilineal:* $(x, y + z) = < x, y > + < y, z > \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$
  $< \lambda x, z > = \lambda < x, z > \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Demostración. $< x+y, z >= \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)z_i = \sum_{i=1}^{n}x_iz_i + y_iz_i = \sum_{i=1}^{n}x_iz_i + \sum_{i=1}^{n}y_iz_i =< x,z > + < y,z >$ $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$

$\lambda \in \mathbb{R} \quad < \lambda x, z > \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i)z_i = \sum_{i=1}^{n}\lambda(x_iz_i) = \lambda\sum_{i=1}^{n}x_iz_i = \lambda < x,z >$ □

- *iii) Definido positivo:* $< x,x >= 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$ *y* $< x,x >= 0 \iff x = 0 = (0,0,0, \ldots, 0)$

  Demostración. $< x,x >= \sum_{i=1}^{n}x_i^2 \geq \forall x \in \mathbb{R}^n$

  $0 =< x,x >= \sum_{i=1}^{n}x_i^2 \iff \forall i = 1,...,n \; x_i^2 = 0 \iff x_i = 0$

  □

Definición 18. Norma euclídea
Si $x \in \mathbb{R}^n$ se llama "norma" euclídea de x-a:

$$\boxed{\| x \|= \sqrt{< x,x >} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}}$$

Proposición 14. *Desigualdades del producto escalar*

- *i) Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Si* $x,y \in \mathbb{R}^n$

  $$\boxed{| \; x,y > | \leq \| x \|_2 \| y \|_2}$$

  Demostración. $\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \mid \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2} \implies \left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^2$ □

- *ii) Desigualdad de Minkowski.* $\| x+y \|_2 \leq \| x \|_2 + \| y \|_2 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$
  $\| x{+}y \|_2= \sqrt{< x+y \,,\, x+y >} = \sqrt{< x \,,\, x+y > + < y \,,\, x+y >} = \sqrt{< x,x > + < y,x > + < x,y > + < y,y >} = \sqrt{\| x \|_2^2 + \| y \|_2^2 + 2 < x,y >}$
  $\leq \sqrt{\| x \|_2^2 + \| y \|_2^2 + 2 \| x \|_2 \| y \|_2} = \sqrt{(\| x \|_2 + \| y \|_2)^2} =\| x \|_2 + \| y \|_2 \implies \| x+y \|_2 \leq \| x \|_2 + \| y \|_2$

Definición 19. Ángulos y producto escalar

- Si $x,y \in \mathbb{R}^n$ x e y son "ortogonales" $\iff < x,y >= 0 \;\; (x \perp y)$
- Si $x,y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ el ángulo entre x e y es $\alpha \in \mathbb{R}$ ıı $cos(\alpha) = \frac{<x,y>}{\|x\|_z \|y\|_z}$

  Observación. Por la desigualdad de Cauchy: $\mid \frac{<x,y>}{\|x\|_2\|y\|_2} \mid \leq 1 \;\; -1 \leq \frac{<x,y>}{\|x\|_2\|y\|_2} \leq 1 \; (cos\alpha)$

Teorema 6. *Teorema de Pitágoras*

Si $x,y \in \mathbb{R}^n, \; x \perp y$ *, entonces* $\| x+y \|_2= \sqrt{\| x \|_2^2 + \| y \|_2^2}$

Demostración. $\| x+y \|_2= \sqrt{\| x \|_2^2 + \| y \|_2^2 + 2 < x,y >}$donde $2 < x,y >= 0$ □

Si $x,y \in \mathbb{R}^n$ *se llama "distancia euclídea"* $d_2(x,y)$ a
$d_2(x,y) =\| x-y \|_2$

Proposición 15.

- *i)* $d_2(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

Demostración. $d_2(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \parallel x-y \parallel_2 = 0 \Longleftrightarrow x-y=0 \Longleftrightarrow x=y$ □

- *ii)* $d_2(x,y) = d_2(y,x)$

Demostración. $d_2(x,y) = ||x-y||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i-x_i)^2} = ||y-x||_2 = d_2\big(y,x\big)$ □

- *iii) Propiedad triangular:* Si $x,\ y,\ z\ \in \mathbb{R}^n$

$$d_2(x,y) \quad \leq \quad d_2(x,z) + d_2(z,y) \quad \forall x,\ y,\ x \in \mathbb{R}^n$$

Demostración. $d_2(x,y) = \parallel x-y \parallel_2 = \parallel (x-z)+(z-y) \parallel_2 \overset{Minkowski}{\leq} \parallel x-z \parallel_2 + \parallel z-y \parallel_2 = d_2(x,z)+d_2(z,y)$ □

2.2. Espacios métricos

Definición 20. Distantcia o métrica

Sea M un conjunto, una *distancia ó métrica* en M es una función que coge parejas de elementos de M y devuelve un número mayor o igual que cero

$$\boxed{d:\ M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}}$$

$$(x,y) \longmapsto d\,(x,y)$$

que verifica:

- $d\,(x,y) \geq 0\ \forall x,\ y \in M$
- $d\,(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d\,(x,y) = d\,(y,x)$
- **Propiedad triangular:**

$$\boxed{d\,\big(x,y\big) \leq d\,(x,z) + d(z,y)} \qquad \forall x,y,z \in M$$

$$d_2\,(x,y) = ||x-y||_2 = ||\,(x-z)+(z-y)\,||_2 \leq ||x-z||_2 + ||z-y||_2 = d_2\,(x,z) + d_2\,(z,y)$$

Definición 21. Espacio métrico

Se llama ***espacio métrico*** a un par $(M,\ d)$ donde M es un conjunto y d una métrica en M.

Ejemplo 1.

En $\mathbb{R}$ $d\,(x,y) = |x-y|$ $x,\ y \in \mathbb{R}$ es una métrica y por tanto $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio métrico ya que cumple a), b), y c). Veamos que pasa para la propiedad triangular (d)

$\forall x,y,z\ \in \mathbb{R};\ d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \underset{|a+b|\leq|a|+|b|}{\leq} |x-z| + |z-y|$

Ejemplo 2.

En $\mathbb{R}^n$, $d_2\,(x,y) = ||x-y||_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2}$ es una métrica y $(\mathbb{R}^n, d_2)$ es un espacio métrico.

Definición 22. Norma infinito

En $\mathbb{R}^n$, se llama *norma infinito* al máximo de un conjunto de elementos finito.

$$||x||_\infty = \max_{i=1\ldots n} |x_i|$$

y definimos $d_\infty(x,y) = ||x-y||_\infty = max_{i=1\ldots n}||x_i - y_i||$ es una métrica, ya que cumple a), b), c). Veamos que ocurre con la propiedad triangular:

Demostración. $x,y,z \in \mathbb{R}^n$ $d_\infty(x,y) = \max_{i=1,\ldots n} |x_i - y_i| = \max_{i=1\ldots n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq \max_{i=1\ldots n} \big(|x_i - z_i| + |z_i - y_i|\big) \leq \underbrace{\max_{i=1\ldots n} |x_i - z_i|}_{d_\infty(x,z)} + \underbrace{\max_{i=1\ldots n} |z_i - y_i|}_{d_\infty(z,y)}$ □

Definición 23. Norma 1

En $\mathbb{R}^n$, se llama *norma 1* a

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

y

$$d_1(x,y) = ||x-y||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

Cumple a), b), c). Veamos que ocurre con la propiedad triangular:

Demostración. $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i + z_i - z_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + |z_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| = d_1(x,z) + d_1(z,y)$

□

Definición 24. Distancia entre funciones. Norma infinito

Fijamos un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$,

Sea $V = \{f\,[a,b] \to \mathbb{R}\} \shortparallel \exists C \shortparallel |f(t)| \leq C \ \ \forall t \in [a,b]$

Definimos *norma infinito*

$$||f||_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \quad \forall f \in V$$

y

$$d_\infty(f,g) = ||f-g||_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - f(t)| \, \forall f,g \in V$$

Demostración. Es una métrica porque cumple a), b), c). Veamos que ocurre con la propiedad triangular:

$d_\infty(f,g) = ||f-g||_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)-g(t)| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)-h(t)+h(t)-g(t)| \leq \sup_{t\in[a,b]} \big(|f(t)-h(t)|+|h(t)-g(t)| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)-h(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |h(t)-g(t)| = d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g)$ □

- Definimos *norma 1*

$$||f||_1 = \int_a^b |f(t)|dt$$

y

$$d_1(f,g) = ||f-g||_1 = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt \quad \forall f,g \in V$$

Propiedades

a)

b) $d_1(f,g) = 0 \Leftrightarrow |f(t) - g(t)| = 0 \Leftrightarrow f(t) = g(t) \quad \forall t \in [a,b]$

c) $d_1(f,g) = d_1(g,f) \quad \forall f,g \in V$

d) Propiedad triangular:

$d_1(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt = \int_a^b |f(t) - h(t) + h(t) - g(t)|\, dt \leq \int_a^b \big(|f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)|\big)\, dt = \int_a^b |f(t) + h(t)|\, dt + \int_a^b |h(t) - g(t)|\, dt = d_1(f,h) + d_1(h,g)$

Observación.

En $\mathbb{C}$ $(a,b) = a + bi = z$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = ||(a,b)||_2$

$$d(z,w) = |z - w| = d_2\Big((a,b),(c,d)\Big) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

2.2.1. Elementos básicos de topología. Subconjuntos acotados

Definición. Sea (M,d) un espacio métrico, llamamos:

i) Bola Abierta

Si $x_0 \in M$ y $r > 0$ llamamos *bola abierta* centrada en x_0 y radio r a:

$$B(x_0, r) = \{x \in M \shortparallel d(x_0, x) < r\}$$

ii) Bola Cerrada

Si $x_0 \in M$ y $r > 0$ llamamos *bola cerrada* centrada en x_0 y de radio r a:

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in M \shortparallel d(x_0, x) \leq r\}$$

iii) Esfera

Si $x_0 \in M$ y $r > 0$ llamamos *esfera* de centro x_0 y radio r a:

$$S(x_0, r) = \{x \in M \shortparallel d(x_0, x) = r\}$$

Ejemplo 3.

En $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \shortparallel |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$$

Ejemplo 4.

En $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}, r > 0$

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \shortparallel |x - x_0| \leq r\} = [x_0 - r, x_0 + r]$$

Ejemplo 5.

En $\mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}, r > 0$

$$S(x_0, r) = \{x_0 - r, x_0 + r\}$$

Sea el espacio$\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$

Caso 1. con d_2

$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \shortparallel d_2(x_0, x) < r\}$

$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \shortparallel d_2(x_0, x) \leq r\}$

$S(x_0, x) = \{x \in \mathbb{R}^n \shortparallel d_2(x_0, x) = r\}$

Caso 2. con $d_\infty(x,y) = \underset{i=1\ldots n}{Sup}|x_i - y_i|$, $x_0 = 0$, $r = 1$

$B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}\}^n \shortparallel d_\infty(0,x) = \underset{i=1..n}{Sup}|x_i| < 1$

Caso 3. con d_1, $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|$, $x_0 = 0$

$B(0,1) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \shortparallel d_1(x,0) = \sum_{i=1}^{n}|x_i| < 1\right\}$

Definición. Conjunto acotado

Sea (M,d) un espacio métrico, y sea $A \subset M$, $A \neq \emptyset$

Decimos que A es un *conjunto* ***acotado***, si y sólo si el supremo de las distancias de x e y en A existe:

$$\exists\, sup\{d(x,y)\ \ x,y \in A\}$$

y en el caso de que sea acotado llamamos ***diámetro*** de A al supremo de las distancias entre dos puntos cualesquiera.

$$diam(A) = sup\{d(x,y)\ \ x,y \in A\}$$

Observación 10. Sea (M,d) un espácio métrico:

Una bola cerrada, $\bar{B}(x_0,r)$es acotada.

Demostración.

Sea $\bar{B} = \{x \in M \shortparallel d(x,x_0) \leq r\}$

Sean $x,y \in \bar{B}(x_0,r)$

$$d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(x_0,y) \leq r + r = 2r$$

La bola abierta es subconjunto de la bola cerrada, luego por la observación 2 (la siguiente), también las bolas abiertas son acotadas □

Observación 11. Todo subconjunto de un conjunto acotado es acotado.

Demostración.

Supongamos que $A \subset M$ es acotado y sea $B \subset A$

Veamos que B es acotado:

$$\overset{D_1}{\{d(x,y),x,y \in B\}} \subset \underbrace{\overset{D_2}{\{d(x,y),x,y \in A\}}}_{es\, cota\, superior}$$

Una cota superior de D_2 es también cota superior de D_1, luego D_2 tiene cotas superiores por hipótesis, por lo que D_1 también las tiene al estar contenido en $D_2 \Rightarrow D_1$ es acotado □

Observación 12. En un espacio métrico, A es acotado **si y solamente si** A se puede meter en una bola.

$$\boxed{A \text{ es acotado} \Longleftrightarrow A \text{ se puede meter en una bola}}$$

Demostración.

($\Leftarrow$ Es inmediata por observaciones 1) y 2). Sea $x \in A$, $r > 0$ y $B(x,r) \shortparallel A \subset B$, luego A seria subconjunto de la bola y por 2) estaría acotado.

$\Rightarrow$) Sea $x_0 \in A$ un punto fijo, sabemos $\exists R = sup\{d(x_0,y), y \in A\} \Rightarrow A \subset \bar{B}(x_0,R)$

La bola $\overline{B}(x_0,r)$ es la bola que encierra a $A \Rightarrow A \subset \overline{B}$ □

Proposición 16. *Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ es acotado si y solo si existe un número $C > 0$ tal que el valor absoluto de $|a|$ es menor o igual que C para todo a perteneciente a A,es decir A tiene cota superior y cota inferior*

$$\boxed{A \subset \mathbb{R}\,\text{es acotado} \Longleftrightarrow \exists C > 0 \shortparallel |a| \leq C \;\; \forall a \in A}$$

Demostración. Sale de la demostración de la proposición 5, con $n = 1$ (espacio real usual) $d\,(x, y) = |x-y|, x, y \in \mathbb{R}$

$$A \subset \mathbb{R}\, es\, acotado \Longleftrightarrow \exists\, sup\,\{|y|, y \in A\} \Longleftrightarrow \exists C > 0 \shortparallel |y| \leq C \quad \forall y \in A$$

□

Demostración. Demostración del segundo si y sólo si
$\Rightarrow$) Si $\exists C < 0 \shortparallel |a| \leq C \quad \forall a \in A \qquad C$ es cota superior de A y $-C$ es cota inferior de A

$$-C \leq a \leq C$$

($\Leftarrow$ A tiene una cota superior M y una cota inferior m

$$Sea \quad C = max\,\{|M| + 1, |m| + 1\} > 0$$

$\forall a \in A$

$$-C \leq -|m| - 1 \leq -|m| \leq m \leq a \leq M \leq |M| \leq |M| + 1 \leq C$$

□

Proposición 17. *Acotación de subconjuntos de* $\mathbb{R}^n$
Si en $\mathbb{R}^n$ *consideramos una métrica* d,

$$\boxed{A \subset \mathbb{R}^n\, es\;\; acotado \Longleftrightarrow \exists \sup\,\{d\,(0, y)\,, y \in A\}}$$

Demostración.
$\Rightarrow$) Si A es acotado, sea $x_0 \in A$ un punto fijo, entonces $\forall y \in A$

$$d\,(0, y) \leq d\,(y, x_0) + d\,(x_0, 0) \leq diam\,(A) + d\,(x_0, 0)$$

($\Leftarrow$ La hipótesis es equivalente a que $A \subset \bar{B}\,(0, R)$, siendo $R = sup\{d(x, y)\;\, x, y \in A\}$ □

Proposición 18. $A \subset \mathbb{R}^n$ *es acotado para* d_1, d_2, d_∞ *si y sólamente si* ***sus proyecciones son un conjunto acotado****. Es decir si*

$$P_i\,(A) = \{x_i \shortparallel \exists x = (..., x_i...) \in A\} \subset \mathbb{R} \quad i = 1...n$$

son acotadas.

Demostración.
$\Rightarrow$) Sea $x \in A$ y sea $i = 1, ..., n$ (fijo)
(Con d_1)

$$|x_i| \leq ||x||_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| = d_1\,(x, 0)$$

Como A es acotado (para d_1) $\Rightarrow \exists\, sup\,\{d_1\,(x, 0)\,, x \in A\} = R$ y asi $|x_i| \leq R_1 \quad \forall x \in A$

(Con d_2)

$$|x_i| \leq ||x_2|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} = d_2\,(x, 0)$$

Como A es acotado (para d_2) $\Rightarrow \exists\, sup\left\{d_2\left(x,0\right), x \in A\right\} = R_2$ y asi $|x_i| \leq R_2 \quad \forall x \in A$

(Con d_∞)

$$|x_i| \leq ||x||_\infty = max\left\{|x_j|, j = 1...n\right\} = d_{\infty(x,0)}$$

Como A es acotado (para d_∞) $\Rightarrow \exists\, R_\infty = sup\left\{d_\infty\left(x,0\right), x \in A\right\}$ y así $|x_i| \leq R_\infty \quad \forall x \in A$

Demostración. $\Leftarrow \forall i = 1...n \quad \exists C > 0 \shortparallel |x_i| \leq C_i \quad \forall x \in A$
(Con d_1)

$$||x||_1 = d_1\left(x,0\right) = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} C_j = R_1 \Rightarrow A \, \text{es acotado para}\, d_1$$

(Con d_2)

$$||x||_2 = d_2\left(x,0\right) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} C_j^2} = R_2 \Rightarrow A \, \text{es acotado para}\, d_2$$

(Con d_∞)

$$||x||_\infty = d_\infty\left(x,0\right) = max\left\{|x_j|, j = 1...n\right\} \leq max\left\{C_j, j = 1...n\right\} = R_\infty \Rightarrow A \text{ es acotado para } d_\infty$$

□

□

Observación. La afirmación inicial de la derecha *(en negrita)* es independiente de d_1, d_2, d_∞ y por tanto las métricas d_1, d_2, d_∞ tienen los mismos conjuntos acotados.

2.2.2. Elementos básicos de topología. Subconjuntos abiertos y cerrados.

Definición 25. Puntos interiores. Puntos frontera
Sea (M, d) espacio métrico y $A \subset M$,

1. Un punto $x_0 \in A$ es ***interior*** a $A \Longleftrightarrow \exists r > 0 \shortparallel B\left(x_0, r\right) \subset A$
2. $x_0 \in M$ es ***punto frontera*** de $A \Longleftrightarrow \forall r > 0 \quad B\left(x_0, r\right) \cap A \neq \emptyset \qquad$ y $\qquad B\left(x_0, r\right) \cap A^c \neq \emptyset$
3. **El conjunto de puntos interiores** de A se representa por **Å**
4. **El conjunto de los puntos frontera** de A se representa por $\partial(A)$
   $(A^c = M \backslash A)$

Definición 26. Conjuntos abiertos y cerrados
Sea (M, d) un espacio métrico, y $A \subset M$
I) Se dice que A es un **conjunto abierto** si y solo si **todos sus puntos son interiores** a A, es decir si $A = \mathring{A}$:

$$A \text{ es abierto} \Longleftrightarrow \forall x_0 \in A \;\; \exists r > 0 \shortparallel B\left(x_0, r\right) \subset A$$

Observación. M es abierto, y $\emptyset$ es abierto.
II) Se dice que A es un **conjunto cerrado** si y solo si **su complementario es abierto**.

$$A \text{ es cerrado} \Longleftrightarrow A^c = M \backslash A \text{ es abierto}$$

Observación. M es cerrado, y $\emptyset$ es cerrado

Proposición 19. *La unión de abiertos es abierta*

Sea (M,d) un espacio métrico y sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos abiertos de M (I = conjunto de índices)

Entonces $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \{x \in M \shortmid\shortmid \exists i \in I \shortmid\shortmid x \in A_i\}$ es abierto.

Demostración.
Sea $x_0 \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i \Rightarrow \exists i_0 \in I \shortmid\shortmid x_0 \in A_{i_0}$
Como A_{i_0}es abierto $\exists r > 0 \shortmid\shortmid B(x_0, r) \subset A_{i_0} \Rightarrow B(x_0, r) \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$

□

Proposición 20. *La intersección finita de abiertos es abierta*

Sea (M,d) un espacio métrico y sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos abiertos de M (I = conjunto de índices)

Si I es finito, $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \{x \in M \shortmid\shortmid x \in A_i, \quad \forall i \in I\}$ es un abierto.

Demostración.
Sea $x_0 \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i \Rightarrow \forall i \in I \qquad x_0 \in A_i$
Como $A_i$es abierto $\Rightarrow \exists r_i > 0 \shortmid\shortmid B(x_0 r_i) \subset A_i$
Sea $r = min\{r_i, i \in I\} \underset{I \text{ es finito}}{>} 0$
Veamos que $B(x_0, r) \subset A_i \shortmid\shortmid A_{i\in I} \left(\Longleftrightarrow B(x_0, r) \subset \bigcap\limits_{i\in I} A_i\right)$ ya que $B(x_0, r) \subset B(x_0, r_i) \subset A_i$

□

Observación. Para demostrar que la intersección es abierta se hace necesaria la condición de que el número de conjuntos sea finito, ya que si no lo fuera no puede asegurarse que el radio mínimo que se coge sea estrictamente mayor que 0. Tiene que ver con que el ínfimo de un conjunto está contenido en el conjunto si el conjunto es finito.

Proposición 21. *La interseción de cerrados es cerrada*

Sea (M,d) espacio métrico y $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos cerrados, entonces el conjunto
$\bigcap\limits_{i\in I} C_i = \{x \in M \shortmid\shortmid x \in C_i \quad \forall i \in I\}$ es cerrado

Demostración.
Veamos que $\left(\bigcap\limits_{i\in I} C_i\right)^c = \bigcup\limits_{i\in I} C_i^c$

$x \in \left(\bigcap\limits_{i\in I} C_i\right)^c \Longleftrightarrow \exists i \in I \shortmid\shortmid x \notin C_i \Rightarrow \exists i \in I \shortmid\shortmid x \in C_i^c \Longleftrightarrow x \in \bigcup\limits_{i\in I} C_i^c$

Ahora C_i^c es abierto $\forall i \in I \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} C_i$ es abierto $\Rightarrow \bigcap\limits_{i\in I} C_i$ es cerrado

□

Proposición 22. *La unión finita de cerrados es cerrada.*

Sea (M,d)espacio métrico y $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos cerrados, entonces si I es finito $\bigcup\limits_{i\in I} C_i$ es un conjunto cerrado.

Demostración. Veamos que $\left(\bigcup\limits_{i\in I} C_i\right)^c = \bigcap\limits_{i\in I} C_i^c$

$x \in \left(\bigcup\limits_{i\in I} C_i\right)^c \Longleftrightarrow x \notin C_i \quad \forall i \in I \Longleftrightarrow x \in C_i^c \quad \forall i \in I \Longleftrightarrow x \in \bigcap\limits_{i\in I} C_i^c$

Ahora C_i^c es abierto $\underbrace{\Longrightarrow}_{I \text{ es finito}} \bigcap\limits_{i\in I} C_i^c$ es abierto $\Longrightarrow \bigcup\limits_{i\in I} C_i$ es cerrado

□

Proposición 23. *Las bolas abiertas son abiertos*

Sea (M,d) espacio métrico y tomamos un punto $x_0 \in M$ y $r > 0$, entonces $B(x_0, r)$ es un conjunto abierto

Demostración.

Sea $y \in B(x_0, r) \Leftrightarrow d(x_0, y) < r$

Sea $R = r - d(x_0, y)$y veamos que $B(y, R) \subset B(x_0, r)$

Sea $z \in B(y, R) \shortparallel d(x_0, z) \leq d(x_o y) + d(y, z) < d(x_0, y) + R = d(x_0, y) + r - d(x_0, y) = r$ □

Proposición 24. *Las bolas cerradas son cerradas.*

Sea (M, d) espacio métrico y tomamos un punto $x_0 \in M$ y $r > 0$, entonces $\bar{B}(x_0, r)$es un conjunto cerrado

Demostración.

Veamos $\left(\bar{B}(x_0, r)\right)^c$ es abierto

Sea $y \in \left(\bar{B}(x_0, r)\right)^c$ y sea $R = d(x_0, y) - r$

Sea $z \in B(y, R) \longrightarrow$ ¿$d(x_0, z) > r$?

$(d_0, y) \leq d(x_0, z) + d(z, y) \Rightarrow d(x_0, z) \geq d(x_0, y) - d(z, y) > d(x_0, y) - R = r \Rightarrow d(x_0, z) > R$

□

Ejemplo 6.

Sea $A_n = \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R} \qquad n \in \mathbb{N}$

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \shortparallel 0 < x < 1 + \frac{1}{n} \qquad \forall n\right\} = (0, 1]$ es cerrado

$\forall r > 0 \qquad B(1, r) = (1 - r, 1 + r)$

$(1 - r, 1 + r) \cap (0, 1] \neq \emptyset$

$(1 - r, 1 + r) \cap (0, 1]^c \neq \emptyset$

Ejemplo 7. Ejemplo de que la unión infinita de intervalos cerrados no tiene por que ser cerrado

Sea $C_{n=\left[0,1-\frac{1}{n}\right]}$ cerrado

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n = \left\{x \in \mathbb{R} \shortparallel \exists n \in \mathbb{N} \shortparallel 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}\right\}$

$" \subset " \quad [0, 1)$

$" \supset "$ Si $x \in [0, 1)$ es decir $(0 \leq < 1)\, \exists n \in \mathbb{N} \shortparallel x < 1 - \frac{1}{n}$

Si no, $x \geq 1 - \frac{1}{n} \qquad \forall n$

$x - 1 \geq -\frac{1}{n} \qquad \forall n$

$x - 1 \geq Sup\left\{\frac{-1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} = 0$

$x \geq 1$ **Absurdo!**

Por tanto $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n = [0, 1)$no es cerrado, ya que su complementario $(-\infty, 0) \bigcup [1, \infty)$ no es abierto

Teorema 7. *En $\mathbb{R}$ todo abierto es unión finita o numerable de intervalos abierto, disjuntos dos a dos.*

Demostración.

Sea $A \subset \mathbb{R}$ abierto y $x \in A$

Sea $S = \{y \in \mathbb{R} \shortparallel x < y, \quad y \notin A\}$,

Si $S = \emptyset \Rightarrow [x, \infty) \subset A \Rightarrow \eta = \infty$

Si $S \neq \emptyset \Rightarrow x$ es cota inferior $\Rightarrow \exists\, \eta = inf(S)$

Sea $T = \{z \in \mathbb{R} \shortparallel z < x \shortparallel z \notin A\}$

Si $T = \emptyset \Rightarrow (-\infty, x] \subset A \Rightarrow \xi = -\infty$

Si $T \neq \emptyset \Rightarrow x$ es cota superior $\Rightarrow \exists\, \xi = sup(T)$

Entonces $x \in (\xi, \eta) \subset A \Rightarrow \eta \geq x \geq \xi$

Veamos que $\xi \notin A$ (Si $\xi \in A$, como A es abierto $\exists r > 0 \shortparallel (\xi - r, \xi + r) \subset A \Rightarrow \xi - r$ sería cota superior de T, lo cual es absurdo)

Idem para $\eta \notin A$ (Si $\eta \in A$, como A es abierto $\exists r > 0 \shortparallel (\eta - r, \eta + r) \subset A \Rightarrow \eta + r$ sería cota inferior de S, lo cual es absurdo)

En particular, $x \in (\xi, \eta)$.

$(\xi, \eta) \subset A$ si $x < h < \eta$. Supongamos que $h \notin A \Rightarrow h \in A$, ya que entre x y η hay elementos de A. Si $\xi < h < x$, supongamos que $h \notin A \Rightarrow h \in A$ ya que entre ξ y x hay elementos de A.

Si I es un intervamos abierto, $x \in I \subset A \Rightarrow I \subset (\xi, \eta)$, ya que (ξ, η) es el intervalo más grade que contiene a x, ya que si no:

$\exists\, h \in I \subset A \shortparallel h \notin (\xi, \eta) \Rightarrow h < \xi < x \Rightarrow \xi \in I \subset A$ **Absurdo!!**

$\exists\, h \in I \subset A \shortparallel h \notin (\xi, \eta) \Rightarrow h > \eta > x \Rightarrow \eta \in I \subset A$ **Absurdo!!**

Resumen: dado $x \in A \subset \mathbb{R}$ (abiertos)$\Rightarrow$Existe el intervalo "más grande" dentro de A, que contiene a x, intervalo que llamamos **componente conexa de** A

□

Definición 27. Componente conexa
Llamamos componente conexa de A al intervalo "más grande" dentro de A y que contiene a x

Veamos ahora que dos componentes conexas de A son disjuntas:
Si (ξ_1, η_1) y (ξ_2, η_2) son dos componentes de A, veamos $(\xi_1, \eta 1) \cap (\xi_2, \eta_2) = \emptyset$

Supongamos que $(\xi_1, \eta_1) \cap (\xi_2, \eta_2) \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \shortparallel \xi_1 < x < \eta_1,\ \xi_2 < x < \eta_2 \Rightarrow max\,\{\xi_1, \xi_2\} < min\,\{\eta_1, \eta_2\}$
$(min\,\{\xi_1, \xi_2\}\,, max\,\{\eta_1, \eta_2\} \subset (\xi_1, \eta_1) \cup (\xi_2, \eta_2) \subset A$ **Absurdo!!!**

Queda así demostrado que todo abierto es unión de intervalos abiertos, disjuntos dos a dos (unión de componentes), y veamos ahora que la unión es finita o numerable:
Si (ξ, η)es una componente de A, es decir $((\xi, \eta) \subset A, \xi, \eta \notin A)$
Sea $r \in \mathbb{Q} \shortparallel r \in (\xi, \eta)$
Asignamos un número racional a cada componente de A
$\{$Componentes de $A\} \longrightarrow \mathbb{Q}$
$(\xi, \eta) \longrightarrow r$
Al ser esa correspondencia inyectiva, ya que seguro que a dos componentes distintas le asignaremos dos números racionales distintos, por ser las componentes disjuntas. Y con esto queda demostrado que la unión es finita o numerable ya que $\mathbb{Q}$ es numerable, es decir $\exists\, f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ biyectiva.

Definición 28. Punto de adherencia, de acumulación y aislado
Sea (M, d) espacio métrico y sea $A \subset M$, entonces $x_0 \in M$

- Es un **punto de adherencia** de $A \Longleftrightarrow \forall r > 0 \quad B\,(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$
  El conjunto de todos los puntos de adherencia de A,se escribe $\bar{A}$(Adherencia de A, o cierre de A)
- Es un **punto de acumulación** de $A \Longleftrightarrow \forall r > 0 \quad (B\,(x_0, r) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$
  El conjunto de todos los puntos de acumulación de A se escribe A'
- Es un **punto aislado** de $A \Longleftrightarrow \exists r > 0 \shortparallel B\,(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$
  El conjunto de los puntos aislados de A se escribe $Ais\,(A)$

Proposición. $A \subset \bar{A}$

Demostración. Si $x_0 \in A \Rightarrow \forall r > 0 \qquad B\,(x_0, r) \cap A \supset \{x_0\}$

□

Proposición. $A' \subset \bar{A}$

Demostración. Si $x_0 \in A' \Rightarrow \forall r > 0 \qquad (B\,(x_0, r) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow B\,(x_0, r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x_0 \in \bar{A}$

□

Proposición. $\bar{A} = A' \cup Ais\,(A)$

Demostración.
" $\subset$ ", Si $x \in \bar{A}$, y si $x \notin A'$ veamos que $x \in Ais\,(A)$
Como $x \notin A' \Longleftrightarrow \exists r_0 > 0 \shortparallel (B\,(x_0, r_0) \setminus \{x_0\}) \cap A = \emptyset \Rightarrow x_0 \in A$ y $\exists r_0 > 0 \shortparallel B\,(x_0, r_0) \cap A = \{x_0\}$
" $\supset$ " , Sabemos $A' \subset \bar{A}$ y $Ais\,(A) \subset A \subset \bar{A}$
$A' \cup Ais\,(A) \subset \bar{A}$

□

Proposición. $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial\,(A)$

Demostración.
" $\supset$ ", es inmediata, puesto que $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$
$x \in \partial\,(A) \Rightarrow \forall r > 0 \qquad B\,(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$
" $\subset$ " , Sea $x \in \bar{A}$, si $x \notin \mathring{A}$ veamos que $x \in \partial\,(A)$
Si $x \notin \mathring{A} \Longleftrightarrow \forall r > 0 \qquad B\,(x_0, r) \cap A^c \neq \emptyset$
Si $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \forall r > 0 \qquad B\,(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$

□

Proposición 25. *$\mathring{A}$ es el abierto más grande contenido en A*

Demostración.
$\mathring{A}$ es abierto: si $x_0 \in \mathring{A} \to \exists r > 0 \shortparallel B(x_0, r) \subset A$
Afirmo: $B(x_0, r) \subset \mathring{A}$ por tanto todos los puntos de dicha bola son puntos interiores de A
Si $y \in B(x_0, r)$ sabemos $\exists R > 0 \shortparallel B(y, R) \subset B(x_0, r) \subset A \Rightarrow y \in \mathring{A}$
Veamos que es el mas grande:
Supongamos que no, supongamos G es abierto $\shortparallel \mathring{A} \subset G \subset A$
y supongamos $x \in G \backslash \mathring{A}$ entonces como G es abierto $\exists r > 0 \shortparallel B(x_0, r) \subset G \subset A \Rightarrow x_0 \in \mathring{A}$

□

Proposición 26. *$\bar{A}$ es el cerrado más pequeño que contiene a A*

Demostración.
$\bar{A}$ es cerrado: Veamos que $(\bar{A})^c$ es abierto.
Si $x_0 \in (\bar{A})^c \Leftrightarrow \exists r > 0 \shortparallel B(x_0, r) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow B(x_0, r) \subset (A)^c$
De hecho $B(x_0, r) \subset (\bar{A})^c$, si no: $\exists y \in \bar{A} \shortparallel y \in B(x_0, r) \Rightarrow \exists R > 0 \shortparallel B(y, R) \subset B(x_0 r), B(y, R)(\subset B(x_0, r)) \cap A \neq \emptyset$ **Absurdo!!**

Si C es un cerrado $\shortparallel C \supset A$, veamos que $A \subset \bar{A} \subset C$,
en caso contrario $\bar{A} \not\subset C \Leftrightarrow \exists x_0 \in \bar{A} \shortparallel x_0 \notin C \Leftrightarrow x_o \in C^c$(abierto)$\Rightarrow \exists r > 0 \shortparallel B(x_0, r) \subset C^c \Rightarrow B(x_0, r) \cap A = \emptyset$**Absurdo!!**

□

Proposición 27. $\bar{A} = \{y \in M \shortparallel \text{ínf}\{d(y, a), a \in A\} = 0\}$

Demostración.
" $\subset$ " Tenemos que $y \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall r > 0 \;\; B(y, r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in A \shortparallel d(y, a) < r \Leftrightarrow \text{ínf}\{d(y, a)\} = 0$
" $\supset$ " Sea $a \in A \Rightarrow \text{ínf}\{d(y, a)\} = 0 \Leftrightarrow \forall r > 0 \; \exists a \in A \shortparallel d(y, a) < r \Leftrightarrow \forall r > 0 \; B(y, r) \cap A \neq \emptyset$ □

Proposición 28. *A es acotado $\Longleftrightarrow$ $\bar{A}$ es acotado*

Demostración.
$\Rightarrow$) Sean $x, y \in \bar{A}$, $\exists p, q \in A \shortparallel d(x, p) < \varepsilon$ y $d(y, q) < \varepsilon \Rightarrow d(x, y) \leq d(x, p) + d(p, q) + d(q, y) \leq 2\varepsilon + d(p, q) \leq 2\varepsilon + diam\, A$
($\Leftarrow$ Trivial, ya que $A \subset \bar{A}$ □

Proposición 29. *A es cerrado $\Longleftrightarrow$ $A = \bar{A}$*

Demostración.
$\Rightarrow$) Supongamos que $A \subsetneq \bar{A} = \mathring{A} \cup \partial(A)$. Como $\mathring{A} \subset A \Rightarrow \exists x_0 \in \partial(A) \backslash A \Rightarrow x_0 \in A^c$, A^c abierto $\Rightarrow \exists r > 0 \shortparallel B(x_0, r) \subset A^c$ lo cual contradice que $x_0 \in \partial(A)$
($\Leftarrow$ Si $A = \bar{A}$ sea $x_0 \in A^c \Rightarrow x_0 \notin \partial(A) \Rightarrow \exists r > 0 \shortparallel B(x_0, r) \subset A \Rightarrow$ absurdo. Luego $\exists r > 0 \shortparallel B(x_0, r) \subset A^c$ por tanto A^c es abierto $\Rightarrow A$ es cerrado □

2.2.3. Sucesiones convergentes en espacios métricos.

Definición. Sucesión
Sea (M, d) espacio métrico. Una sucesión en (M, d) es un conjunto etiquetado con los números naturales $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \shortparallel x_n \in M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Definición. Sucesión convergente a cero
En $\mathbb{R}$, una sucesión $\{r_n\}$en $\mathbb{R}$ converge a $0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \shortparallel \forall n \geq n_0 \shortparallel |r_n| < \varepsilon \Leftrightarrow r_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$
Notación: Decimos que $\underset{n \to \infty}{lim} r_n = 0$ ó $\underset{n \to \infty}{r_{n \to 0}}$es lo mismo que decir que una sucesión $\{r_n\}$converge a cero.

Definición. Sucesión convergente a un número
En (M, d) una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $x_0 \in M \Leftrightarrow \underset{n \to \infty}{lim} d(x_n, x_0) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \shortparallel \forall n \geq n_0 \quad d(x_n, x_0) < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in B(x_0 \varepsilon)$
Notación: Diremos que $\underset{n \to \infty}{lim} x_n = x_0$ ó que $x_n \underset{n \to \infty}{\to} x_0$

Proposición 30. *Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$converge entonces su límite es único.*

Demostración.
Supongamos que no, supongamos $x_1, x_2 \in M \shortparallel x_1 \neq x_2$ verifican que $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_1$ y $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_2$
Sea $\varepsilon < \frac{d(x_1,x_2)}{2} \Rightarrow B(x_1,\varepsilon) \cap B(x_2,\varepsilon) = \emptyset$
y dado este $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0^1 \shortparallel \forall n \geq n_0^1 \quad x_n \in B(x_1,\varepsilon)$
$\varepsilon > 0 \quad \exists n_0^2 \shortparallel \forall n \geq n_0^2 \quad x_n \in B(x_2,\varepsilon)$ **Absurdo!!**

□

Proposición 31. *Toda sucesión convergente es acotada*

Demostración.
Si $\{x_n\}$ es convergente a $x_0 \in M$, tomando $\varepsilon = 1 \quad \exists n_0 \shortparallel \forall n \geq n_0 \quad x_n \in B(x_0, 1)$
Sea $R = \text{máx}\{d(x_j, x_0)\, j = 1, ...n_0 - 1\} + 1$,
claramente $\{x_n\} \subset B(x_0, R)$ □

Proposición 32. *Si* $\underset{n\to\infty}{lim} x_n = x_0$ *y* $\underset{n\to\infty}{lim} y_n = y_0 \Longrightarrow \underset{n\to\infty}{lim} d(x_n, y_n) = d(x_0, y_0)$

Demostración.
$|d(x_n,y_n) - d(x_0,y_0)| = |d(x_n,y_n) - d(x_n,y_0) + d(x_n,y_0) - d(x_0,y_0)| \leq |d(x_n,y_n) - d(x_n y_0)| + |d(x_n,y_0) - d(x_0,y_0)| \leq d(y_n,y_0) + d(x_n,x_0)$

Dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0^1 \in \mathbb{N} \shortparallel \forall n \geq n_0 \quad d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$
$\exists n_0^2 \in \mathbb{N} \shortparallel \forall n \geq n_0^2 \quad d(y_n, y_0) < \frac{\varepsilon}{2}$
Sea $n_0 = \text{máx}\left\{n_0^1, n_0^2\right\} \Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad |d(x_n,y_n) - d(x_0,y_0)| \leq d(y_n,y_0) + d(x_n,x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ □

Proposición. *En* $\mathbb{R}$ *para* d_1, d_2, d_∞, *se tiene que* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N \quad x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0 \left(\in \mathbb{R}^N\right) \Leftrightarrow \forall i = 1...N\ (x_n)_i \underset{n\to\infty}{\to} (x)_i$ *(en* $\mathbb{R}$*)*

Es decir, que el límite de una sucesión de vectores de N componentes tiende a un vector limite cuando cada componente de los vectores de la sucesión tiende a la correspondiente componente del vector limite.

Demostración.

$$" \Rightarrow " \text{ Para } d_1, d_2, d_\infty \text{ y } \forall i = 1...N \text{ se tiene que } |(x_n)_i - x_i| \leq d(x_n, x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N} |(x_n)_j - x_j| & \text{para } d_1 \\ \left(\sum_{j=1}^{N} \left|(x_n)_j - x_j\right|^2\right)^{1/2} & \text{para } d_2 \\ \underset{j=1...N}{Max} \left|(x_n)_j - x_j\right| & \text{para } d_\infty \end{cases}$$

Como $d(x_n, x) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \forall i = 1...N \quad |(x_n)_i - x_i| \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$
" $\Leftarrow$ "

$$d_1(x_n x) = \sum_{i=1}^{N} |(x_n)_i - x_i|$$

$$d_2(x_n, x) = \left(\sum_{i=1}^{N} |(x_n)_i - x_i|^2\right)^{1/2}$$

$$d_\infty(x_n, x) = \underset{i=1...N}{Max} |(x_n)_i - x_i|$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall i = 1...N \quad \exists n_0^i \quad \forall n \geq n_0^i$
tomando $n_0 = Max\left\{n_0^i, i = 1...N\right\} \Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad \forall i = 1...N \quad |(x_n)_i - x_i| < \varepsilon$
así:
$d_1(x_n, x) < N \cdot \varepsilon$
$d_2(x_n, x) < \sqrt{N} \cdot \varepsilon$
$d_\infty(x_n, x) < \varepsilon$ □

Observación. La propiedad antes mencionada que nos dice que para que un vector converja en otro, cada una de sus coordenadas tiene que converger a cada coordenada correspondiente no depende de la métrica (d_1, d_2, d_∞)
Por tanto (d_1, d_2, d_∞) tienen las mismas sucesiones convergentes.

Proposición 33. *Para todo punto de adherencia existe una sucesión que converge a él*

Sea (M, d) espacio métrico y sea $A \subset M$
$x_0 \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A \shortparallel x_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} x_0$

Demostración.
" $\Rightarrow$ " Sea $\forall n \in \mathbb{N} \qquad B\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ y sea $x_n \in B\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \cap A$
Veamos que $x_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} x_0$ya que $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ ya que

$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \shortparallel \frac{1}{n} < \varepsilon \left(\textit{ya que } \frac{1}{n} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \right) \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$

" $\Leftarrow$ " Sea $r > 0$ veamos que $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$
Como $x_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} x_0 \Longleftrightarrow d(x_n, x_0) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \shortparallel \forall n \geq n_0 \qquad d(x_n, x_0) < \varepsilon$
$x_n \in B(x_0, \varepsilon)$
Tenemos $\varepsilon = r \Rightarrow \exists x_0 \quad \exists n \shortparallel d(x_n, x_0) < r \Longleftrightarrow x_n \in B(x_0, r) \cap A$ □

Proposición 34. *Para todo punto de acumulación existe una sucesión que converge a él*
$x_0 \in A' \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A \shortparallel x_n \neq x_0 \forall n \shortparallel \; x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$

Demostración.
Igual que la anterior, sólo que añadiendo que $x_n \neq x_0 \forall n$ en la demostración. □

Teorema 8. *Teorema de Bolzano-Weierstrass*

Sea $a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$ y $A \subset [a, b]$ un subconjunto infinito, entonces A tiene al menos un punto de acumulación.

Demostración.
Sea $I_0 =[a, b]$
Observemos que $a < \frac{a+b}{2} < b$ y ahora consideramos $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ y $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ entonces uno de ellos contiene infinitos elementos de A y lo llamamos I_1, a I_1 le hacemos el mismo procedimiento y obtenemos I_2con infinitos elementos de A. Por inducción tenemos $\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n$ intervalo cerrado $\shortparallel I_{n+1} \subset I_n$; $I_n$tiene infinitos elementos de A y $l(I_n) = \frac{l(I_0)}{2^n}$

Asi $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son un sistema de intervalos cerrados encajados y $l(I_n) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x_0\}$
Veamos que x_0 es punto de acumulación de A.
Sea $\varepsilon > 0$ veamos que en $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ hay puntos de A
$\exists n \shortparallel l(I_n) < \frac{\varepsilon}{10} \Rightarrow x_0 \in I_n \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ y en I_n hay infinitos elementos de A.
□

Definición 29. Subsucesión
Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ (ó M espacio métrico)
Una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$es $\{x_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}...\} \shortparallel n_k < n_{k+1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$

Corolario 6. *Teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones*

Toda sucesion $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ acotada tiene (al menos) una subsucesión convergente.

Demostración.
Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada $\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} \quad a < b \shortparallel \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$ □

Caso 1. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto infinito, por el teorema de Bolzano -Weirstrass $\Rightarrow \exists x_0$ punto de acumulación de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$\exists n_1 \in \mathbb{N} \shortparallel x_{n_1} \in B(x_0, r_1) = (x_0 - r_1, x_0 + r_1)$

Sea $\rho_1 = d(x_{n_1}, x_0)$

$r_2 = \frac{\rho_1}{2} < \rho_1 \qquad \exists n_2 \in \mathbb{N} \shortparallel n_2 > n_1 \qquad x_{n_2} \in B(x_0, r_2)$

$\rho_2 = d(x_{n_2}, x_0)$

$r_3 = \frac{\rho_2}{2} < \rho_1 \qquad \exists n_3 \in \mathbb{N} \qquad n_3 > n_2 \shortparallel x_{n_3} \in B(x_0, r_3)$

Por inducción tenemos $\{x_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión y $\{m_k\} \subset \mathbb{N} \shortparallel d(x_{nk}, x_0) < r_k = \frac{1}{mk}$; asi $d(x_{nk}, x_0) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$ es decir $x_{nk} \underset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} x_0$

Caso 2. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$es un conjunto finito $\Rightarrow \exists$ un número en la sucesión que se repite infinitas veces. $\Longleftrightarrow$Subsucesión constante que es convergente.

Observación.
Sea (M, d) espacio métrico y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M \shortparallel$ que converge a $x_0 \in M \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \shortparallel \forall n \geq n_0 \qquad \underbrace{x_n \in B\left(x_0, \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{d(x_n,x_0)<\frac{\varepsilon}{2}} \Longrightarrow \forall\varepsilon > 0$ si $n, m \geq n_0 \qquad d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

2.3. Espacios completos. Espacios compactos. Teorema de Heine-Borel

2.3.1. Espacios completos

Definición. Sucesión de Cauchy
Sea (M, d) espacio métrico.
Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ se dice de Cauchy $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N} \shortparallel \forall n, m \geq n_0 \qquad d(x_n, x_m) < \varepsilon$

Definición. Espacio métrico **completo**
Un espacio métrico (M, d) se dice **completo** si y sólo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Observación.
En (M, d) espacio completo.

1. Toda sucesión convergente es de Cauchy
2. $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ no es completo. Por ejemplo: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q}$ y $x_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} e \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$
3. Toda sucesión de Cauchy es acotada.

Teorema 9. $\mathbb{R}$ *es completo*

Demostración.
Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión de Cauchy $\Rightarrow$ es acotada
$(\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \shortparallel \forall n, m \geq n_0 \quad |x_n - x_m| < \varepsilon)$
$\forall N \in \mathbb{N} \quad a_N = Inf\{x_n, n \geq N\}$
$b_N = Sup\{x_n, n \geq N\}$
Así $a_N \leq b_N$
$a_N \leq a_{N+1}$ y $b_{N+1} \leq b_N \Rightarrow [a_{N+1}, n_{N+1}] \subset [a_N, b_N]$
Veamos que $0 \leq b_N - a_N \underset{N\longrightarrow\infty}{\to} 0$

Demostración.
Sea $\varepsilon > 0$, como la sucesión es de Cauchy $\exists n_0 \shortparallel$ si $n, m \geq n_0 \quad |x_n - x_m| < \varepsilon \Rightarrow |a_{n0} - b_{n0}| < \varepsilon$ ya que $-\varepsilon < x_n - x_m < \varepsilon \Rightarrow x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$
fijado un $n \geq n_0$ y tomando ínfimo en $m \geq n_0$: $\quad a_{n_0} - \varepsilon \leq x_n \leq a_{n_0} + \varepsilon$
Ahora tomamos supremo en $n \geq n_0$: $a_{n_0} - \varepsilon \leq b_{n_0} \leq a_{n_0} + \varepsilon$
Recomponemos de nuevo y tenemos: $-\varepsilon \leq b_{n0} - a_{n0} \leq \varepsilon \Leftrightarrow |a_{n0} - b_{n0}| < \varepsilon$ $\square$

Como los intervalos son encajados $\forall n \geq n_0 \qquad |a_n - b_n| < \varepsilon$

Aplicando el teorema de Cantor se tiene que: $\exists! \, x^* \in \mathbb{R} \shortparallel \bigcap_{N=1}^{\infty} [a_N, b_N] = \{x^*\}$

Veamos que $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x^*$: $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < x_n < b_n$ y $a_n < x^* < b_n \Rightarrow |x_n - x^*| \leq b_n - a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ $\square$

Proposición 35. $\mathbb{R}^N$ *con* d_1, d_2, d_∞ *es completo*

Demostración.
Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ una sucesión de Cauchy
Veamos $\forall\, i = 1, \ldots, N$ se tiene que $\{(x_n)_i\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión de Cauchy. Si $n, m \in \mathbb{N}$

$$|\,(x_n)_i - (x_m)_i\,| \leq d\,(x_n, x_m) = \begin{cases} d_1\,(x_n, x_m) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} |\,(x_n)_j - (x_m)_j\,| \\ d_2\,(x_n, x_m) = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \left|(x_n)_j - (x_m)_j\right|^2\right)^{1/2} \\ d_\infty\,(x_n, x_m) = \displaystyle\max_{j=1\ldots N} \left|(x_n)_j - (x_m)_j\right| \end{cases}$$

Si $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n_0 \shortparallel \forall\, n, m \geq n_0 \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon \Rightarrow |(x_n)_i - (x_m)_i| < \varepsilon$
Por tanto, como $\mathbb{R}$ es completo, tenemos que $\forall\, i = 1, \ldots, N \qquad \exists\, x_i^* \in \mathbb{R} \shortparallel (x_n)_i \underset{n\to\infty}{\to} x_i^*$

Veamos que $x_n \to x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_N^* \end{pmatrix}$

$$d\,(x_n, x^*) = \begin{cases} d_1\,(x_n, x^*) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} |\,(x_n)_j - x_j^*| & \leq N \cdot \varepsilon \\ d_2\,(x_n, x^*) = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \left|(x_n)_j - x_j^*\right|^2\right)^{1/2} & \leq \sqrt{N} \cdot \varepsilon \\ d_\infty\,(x_n, x^*) = \displaystyle\max_{j=1\ldots N} \left|(x_n)_j - x_j^*\right| & \leq \varepsilon \end{cases}$$

Sabemos que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall\, i = 1, \ldots, N \;\; \exists\, n_0(j) \shortparallel \forall\, n \geq n_0(j) \quad \left|(x_n)_j - x_j^*\right| < \varepsilon$. Sea $n_0 = \displaystyle\max_{j=1,\ldots,N} \{n_0(j)\} \Rightarrow$ $\forall\, n \geq n_0$ (columnas de la derecha de las distancias) $\square$

Observación. Las columnas de la derecha provienen de acotar la distancia por el resultado de la suma (en caso de d_1 y d_2) y por el propio epsilon en el caso de d_∞al ser éste arbitrario.

Proposición 36. *En un subconjunto cerrado de un espacio métrico completo, $A \subset M$, (A, d_A) siendo d_A una métrica* inducida*, también es completo.*

Demostración.
Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ una sucesión de Cauchy $\Rightarrow$ es también sucesión de Cauchy en M.
Como M es completo $\Rightarrow \{x_n\}$ converge a $x_0 \in M$
$\left(A \ni x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0\right) \Rightarrow x_0 \in \bar{A} = A$ $\square$

2.3.2. Conjuntos compactos

Definición 30. Recubrimiento por abiertos
Sea (M, d) un espacio métrico, sea $A \subset M$ y sea $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de abiertos de M, se dice que $\{G_\alpha\}$ es un recubrimiento por abiertos de A si y sólo si $A \subset \displaystyle\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$

Definición 31. Conjunto compacto
Sea (M, d) un espacio métrico y sea $A \subset M$. Se dice que A es compacto si y sólo si de todo recubrimiento por abiertos de A puede extraerse un subrecubrimiento finito, es decir

$$\forall \{G_\alpha\}_{\alpha\in I} \;\; \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in I \,/\, A \subset \bigcup_{i=1}^{N} G_{\alpha_i}$$

Es decir, que para cualquier recubrimiento por abiertos de A podemos quedarnos con una cantidad finita de ellos y seguimos cubriento completamente a A

Observación 13. En $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$no es compacto

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ sea $I_n = \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}\right)$ un recubrimiento por abiertos de $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} \subset \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, pero no puede extraerse de ahí un subrecubrimiento finito, luego $\mathbb{N}$ no es compacto.

Proposición 37. *Un compacto es cerrado y acotado*

Sea (M, d) un espacio métrico. Si $K \subset M$ es compacto $\Rightarrow K$ es cerrado y acotado

Demostración.

Veamos primero que K es acotado:

Sea $\varepsilon > 0 \quad \forall\, x \in K,\ B(x, \varepsilon)$ se tiene que $K \subset \displaystyle\bigcup_{x\in K} B(x, \varepsilon) \rightarrow$ recubrimiento por abiertos de K

Como K es compacto $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $x_1, \ldots, x_N \in K \shortparallel K \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{N} B\left(x_i, \varepsilon\right) \Rightarrow K$ es acotado

Veamos ahora que K es cerrado:

Para ello, comprobemos que K^c es abierto: Sea $y \in K^c$, si $x \in K$ $\exists\, r_1(x),\ r_2(x) > 0 \shortparallel B\left(y, r_2(x)\right) \cap B\left(x, r_1(x)\right) = \emptyset$

Entonces, $K \subset \displaystyle\bigcup_{x\in K} B\left(x, r_1(x)\right)$, que es un recubrimiento por abiertos de K.

Como K es compacto, nos quedamos con un subrecubrimiento finito: $K \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{N} B\left(x_i, r_1(x_i)\right)$

Sea $r = \min\left\{r_2(x_i),\ i = 1, \ldots, N\right\} > 0$, entonces $B(y, r) \cap B\left(x_i, r_2(x_i)\right) = \emptyset \qquad \forall\, i = 1, \ldots, N$, ya que $B(y, r) \subset B\left(y, r_2(x_i)\right)$ no corta a $B\left(x_i, r_2(x_i)\right)$

Por tanto $B\left(y, r\right) \subset K^c$, por lo que K^c es abierto, luego K es cerrado. $\square$

Proposición 38. *Todo subconjunto cerrado de un compacto es compacto*

Sea $K \subset M$ compacto y $A \subset K$ cerrado $\Rightarrow A$ es compacto

Demostración.

Sea $\left\{G_\alpha\right\}_{\alpha\in I}$ un recubrimiento por abierto de A, entonces $A \subset \displaystyle\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$

Como A^c es abierto y $K \backslash A = \{x \in K \shortparallel x \notin A\} \subset A^c$, entonces $K \subset \left(\displaystyle\bigcup_{\alpha\in I} \{G_a\}\right) \cup A^c$, que es un recubrimiento por abiertos de K

Como K es compacto, extraigo un subrecubrimiento finito, es decir, $\exists\, N \in\mathbb{N} \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in I \shortparallel K \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{N} G_{\alpha_i} \cup A^c$ entonces, como $A \subset K \Rightarrow A \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{N} G_{\alpha_i}$ $\square$

Proposición 39. *La intersección de un cerrado y un compacto es compacta*

Si $K \subset M$ es compacto y $F \subset M$ es cerrado $\Rightarrow F \cap K$ es compacto

Demostración.

Sea $A = F \cap K \subset K$. A es cerrado porque K lo es, luego por la proposición anterior tenemos que A es compacto. $\square$

Proposición 40. *En $\mathbb{R}$ si $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, entonces $[a, b]$ es compacto*

Demostración.

Supongamos lo contario, supongamos que existe un recubrimiento por abiertos del que no puede extraerse un subrecubrimiento finito. Sea éste recubrimiento por abiertos $\left\{G_\alpha\right\}_{\alpha\in I}$

Denotemos $[a, b]$ por J_0 y sea $c = \frac{a+b}{2}$. Definimos $I_1 = [a, c]$ e $I_2 = [c, b]$, y decimos que alguno de los dos no puede cubrirse con una cantidad finita de abiertos de $\{G_\alpha\}$, y lo llamamos J_1

Partimos J_1 en dos, y entonces, de forma similar a la anterior, podemos decir que alguna de las nuevas partes no puede recubrirse con una cantidad finita de abiertos de $\{G_\alpha\}$, y lo llamamos J_2

Inductivamente tenemos que $\forall\, n \in \mathbb{N}, J_n$ intervalo cerrado que no se puede cubrir con una cantidad finita de abiertos de $\{G_\alpha\}$ de modo que $J_{n+1} \subset J_n$, $l(J_n) = \frac{b-a}{2^n}$.

Por el teorema de Cantor, $\exists!\, x^* \in \mathbb{R} \shortparallel \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \{x^*\}$

Ahora, $x^* \subset [a,b] \subset \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$

$\exists\, \alpha_0 \in I \shortparallel x^* \subset G_{\alpha_0} \Rightarrow \exists\, r > 0 \shortparallel (x^* - r, x^* + r) \subset G_{\alpha_0}$; $\exists\, n \shortparallel l(J_n) < r$ y $x^* \in J_n \Rightarrow J_n \subset (x^* - r, x^* + r) \subset G_{\alpha_0} \Rightarrow$ absurdo, ya que según esto, J_n está cubierto por un intervalo de la familia, y esto contradice la hipótesis de partida, ya que hemos construido J_n basándonos en que no era compacto. □

2.3.3. Teorema de Heine-Borel

Teorema 10. *Teorema de Heine-Borel*

En $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$, con d_1, d_2, d_∞ las siguientes afirmaciones equivalentes:

1. $A\,(\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n)$ es compacto
2. A es cerrado y acotado
3. Todo conjunto infinito de A tiene un punto de acumulación en A

Demostración.

1)⇒2): Proposición anterior. Válido en cualquier espacio métrico

2)⇒1): Si A es cerrado y acotado. En $\mathbb{R}$ $A \subset [a,b]$ $a,b \in \mathbb{R}$ $a \leq b$. En $\mathbb{R}^n$ las proyecciones son acotadas, entonces $\exists\, a_i \leq b_i$ $i = 1,\dots,N \shortparallel P_i(A) \subset [a_i, b_i] = C$. Entonces como C es compacto y $A \subset C \Rightarrow A$ es compacto

1)⇒3): Sea $S \subset A$ un subconjunto infinito tal que no tiene ningún punto de acumulación $\Rightarrow \forall\, x \in A\ \exists\, r\,(x) > 0$ $(B\,(x, r\,(x)) \setminus \{x\}) \cap S = \emptyset$ (Si hubiera un punto de acumulación $\exists\, x \in A \shortparallel \forall\, r > 0$ $B\,(x,r) \setminus \{x\} \cap S \neq \emptyset$

Asi, $A \subset \bigcup_{x\in A} B\,(x, r(x))$ y como A es compacto: $\exists\, N \in \mathbb{N}$ $x_1,\dots,x_N \in A \shortparallel S \subset A \subset \bigcup_{i=1}^{N} B\,(x_i, r(x_i)) \Rightarrow S \subset \{x_1,\dots,x_N\}$, que es finito, y entra en contradicción con la hipótesis de que S era infinito.

3)⇒2): Supongamos que A no acotado. Vamos a crear una sucesión que no converge.

Sea $k_1 = 1 \Rightarrow \exists\, x_1 \in A \shortparallel d(x_1, 0) > k_1$

Sea $k_2 = d(x_1,0) + 1 \Rightarrow \exists\, x_2 \in A \shortparallel d\,(x_2, 0) > k_2$

Inductivamente, tenemos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \shortparallel d(x_{n+1}, 0) > d(x_n, 0) + 1$, por tanto, si $n, m \in \mathbb{N}$ (supuesto $n > m$) $d(x_n, x_m) \geq d(x_n, 0) - d(x_m, 0)$, con lo cual $\{x_n\}$ no tiene puntos de acumulación, lo cual es absurdo

Veamos que A es cerrado, es decir que $A = \bar{A} = A \cup A'$

Si $x \in A' \Rightarrow \exists\, \{x_n\} \subset A \shortparallel x_n \to \bar{x}$ ¿Pertenece $\bar{x}$ a A?

Por 3), $\{x_n\}$ tiene un punto de acumulación en A, por lo tanto debe ser $\bar{x}$ y por lo tanto $\bar{x} \in A$ □

Proposición 41. *Todo compacto es completo*

Si $K \subset M$ es compacto $\Rightarrow K$ es completo

Demostración.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ una sucesión de Cauchy:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n, m \geq n_0\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Como K es compacto $\Rightarrow \{x_n\}$ tiene punto de acumulación $x^* \in K$

Veamos que $x_n \underset{n\to\mathbb{N}}{\to} x^*$: Como x^* es punto de acumulación $\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists x_{n_k} \shortparallel x_{n_k} \in B\left(x^*, \frac{1}{k}\right)$

Sea $\varepsilon > 0\ \exists k_0 \shortparallel n_{k_0} \geq n_0$ $d(x_{n_{k_0}}, x^*) < \varepsilon$. Ahora si $n > n_0$ $d(x_n, x^*) \leq d(x_n, x_{n_{k_0}}) + d(x_{n_{k_0}}, x^*) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ □

Capítulo 3

Sucesiones y series

3.1. Sucesiones

3.1.1. Convergencia. Propiedades de sucesiones.

Definición 32. Convergencia.

Se dice que una sucesión, $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, converge a $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \shortparallel \forall n \geq n_0 \qquad d(x, x_n) = |x - x_n| < \varepsilon$$

Notación. Notamos la convergencia de una de las siguientes maneras, todas ellas equivalentes:

1. $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$
2. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$
3. $\{x_n\}$ converge a x.

Observación 14. Consideramos $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, con lo cual si $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi \equiv (a, b)$. Así $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \parallel a - b \parallel_2$ y $d(z, w) = |z - w|$.

Ahora sea $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$, $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z \Leftrightarrow d(z, z_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, y así $z_n = a_n + b_n i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} & a \\ b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} & b \end{cases}$

Definición 33. Operaciones con sucesiones

1. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$

   a) $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$

   b) $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}_{n=1}^{\infty}$

2. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$), entonces $\{\lambda \cdot x_n\} = \lambda \{x_n\}$

Observación 15. El conjunto de las sucesiones en $\mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) constituyen un espacio vectorial.

Proposición 42. *La estructura de espacio vectorial de las sucesiones convergentes.*

Sean $\{x_n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ *e* $\{y_n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$*, ambas sucesiones en* $\mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$*. Entonces:*

1. $\{x_n\} + \{y_n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x + y$

2. $\{x_n\} \cdot \{y_n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \cdot y$

3. $\lambda \{x_n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \cdot x$

4. Si $x, x_n \neq 0 \quad \forall n$*, entonces* $\left\{\frac{1}{x_n}\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x}$

5. $\{|x_n|\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x|$

Demostración. Vayamos por apartados.

1. Sea $\varepsilon > 0$, con lo cual $\exists n_0^1 \shortparallel n \geq n_0 \quad |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\exists n_0^2 \shortparallel n \geq n_0^2 \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$.
   Tomamos $n_0 = \max\left\{n_0^1, n_0^2\right\}$. Si $n \geq n_0$, entonces

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |x_n - x + y_n - y| \leq |x_n - x| + |y_n + y| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. $|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \leq |x_n (y_n - y)| + |y (x_n - x)| = |x_n| \, |y_n - y| + |y| \, |x_n - x|$. Como $\{x_n\}$ es una sucesión acotada, $\exists M > 0 \shortparallel |x_n| < M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con lo cual:

$$|x_n| \, |y_n - y| + |y| \, |x_n - x| \leq M \, |y_n - y| + |y| \, |x_n - x|$$

   Caso 1. Si $y = 0$, el segundo término no existe, luego dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \shortparallel$ si $n \geq n_0$ $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{M}$, entonces

$$|x_n y_n - xy| \leq M \, |y_n - y| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

   Caso 2. Si $y \neq 0$, dado $\varepsilon > 0$ $\exists n_0^1 \shortparallel$ si $n \geq n_0^1 \qquad |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2|y|}$ y además $\exists n_0^2 \shortparallel$ si $n \geq n_0^2 \qquad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}$, luego

$$|x_n y_n - xy| \leq M \, |y_n - y| + |y| \, |x_n - x| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |y| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \, |y|} = \varepsilon$$

3. Supongamos que $\lambda \neq 0$. Entonces, dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \shortparallel$ si $n \geq n_0 \quad |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$

$$|\lambda \cdot x_n - \lambda \cdot x| = |\lambda (x_n - x)| = |\lambda| \, |x_n - x| < |\lambda| \, \frac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon$$

4. Como $\{x_n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ y $x \neq 0$, entonces $\exists n_0^1 \shortparallel \forall n \geq n_0^1$ se tiene que $|x_n| > \frac{|x|}{2} > 0$.
   Bien, ahora dado $\varepsilon = \frac{|x|}{2} \quad \exists n_0^1 \shortparallel \forall n \geq n_0 \quad |x| - |x_n| \leq ||x| - |x_n|| \leq |x - x_n| \leq \frac{|x|}{2} \Rightarrow |x| - \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2} \leq |x_n|$
   Con lo cual, $\frac{1}{|x_n|} > \frac{2}{|x|}$ y entonces dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \left(n_0 \geq n_0^1\right) \shortparallel \forall n \geq n_0 \qquad |x_n - x| < \varepsilon \frac{|x|^2}{2}$

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x - x_n}{x_n x}\right| = \frac{|x - x_n|}{|x_n| \, |x|} \leq \frac{|x - x_n|}{|x|^2} < \varepsilon$$

5. Dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \shortparallel \forall n \geq n_0 \qquad |x - x_n| < \varepsilon$. Se tiene que

$$||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| < \varepsilon$$

   luego $|x_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x|$.

□

Definición 34. Sucesión monótona
Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión de números reales.

1. Se dice que la sucesión es monótoma creciente si y sólo si $x_i \leq x_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$
2. Se dice que la sucesión es monótona decreciente si y sólo si $x_{i+1} \leq x_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Notación.

1. $\{x_n\} \uparrow$ denota una sucesión monótona creciente.
2. $\{x_n\} \downarrow$ denota una sucesión monótona decreciente.

Proposición 43. *Convergencia de sucesiones monótonas.*

1. *Si $\{x_n\}$ es monótona creciente y acotada, entonces la sucesión converge a su supremo, esto es*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_m, \ m \in \mathbb{N}\}$$

2. *Si $\{x_n\}$ es monótona decreciente y acotada, entonces la sucesión converge a su ínfimo, esto es*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_m, \ m \in \mathbb{N}\}$$

Observación 16. El recíproco es cierto en ambos casos.

Demostración. Abordemos ambos apartados:

1. Si $\{x_n\}$ es acotada, entonces $\exists L = \sup\{x_m,\ m \in \mathbb{N}\}$ y es claro que $x_n \leq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Además, dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \shortparallel L - \varepsilon < x_n \leq L$, con lo cual $\forall n \geq n_0 \qquad L - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq L \Rightarrow x_n \in (L-\varepsilon, L]$

2. Si $\{x_n\}$ es acotada, entonces $\exists L = \inf\{x_m,\ m \in \mathbb{N}\}$ y es claro que $L \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Además, dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \shortparallel L \leq x_n < L + \varepsilon$, con lo cual $\forall n \geq n_0 \qquad L \leq x_n \leq x_{n_0} < L + \varepsilon \Rightarrow x_n \in [L, L+\varepsilon)$

□

Proposición 44.

1. *Si $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, entonces $x \geq 0$*

2. *Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones reales convergentes, esto es, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ y $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ y $x_n \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $x \leq y$*

3. *Si $a \leq x_n \leq b \quad \forall n$ y $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, entonces $a \leq x \leq b$*

4. ***Regla del sandwich**: Sean x_n y z_n dos sucesiones convergentes tales que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ y $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Entonces toda sucesión y_n tal que $x_n \leq y_n \leq z_n \quad \forall n$ cumple $\exists \lim_{n\to\infty} y_n$ y además $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$*

Demostración.

1. Supongamos lo contrario, es decir, que $x < 0$. Entonces $\exists n_0 \shortparallel \forall n \geq n_0 \qquad x_n < 0$, que entra en contradicción con la hipótesis.

2. Sea $z_n = y_n - x_n \geq 0 \quad \forall n$. Es claro que $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y - x$, que por el apartado 1., $y - x \geq 0 \Rightarrow y \geq x$

3. Si llamamos $z_n = x_n - a \geq 0$, entonces $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x - a \geq 0$ e $y_n = b - x_n \geq 0$, entonces $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b - x \geq 0$, con lo cual $a \leq x \leq b$

4. Sea $\alpha_n = z_n - x_n \geq 0$. Obviamente, $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Entonces $0 \leq y_n - x_n \leq \alpha_n$, con lo cual, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n - x_n = 0$, ya que dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \shortparallel \forall n \geq n_0 \quad y_n - x_n \leq \alpha_n$
   Bien, ahora $y_n = (y_n - x_n) + x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 + x = x$, con lo cual $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$

□

Definición 35. Límites infinitos
Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión.

1. Se dice que la sucesión tiende a mas infinito, esto es, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \left(\text{o análogamente } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty\right)$ si y sólo si $\forall M > 0 \quad \exists n_0 \shortparallel \forall n \geq n_0 \qquad x_n \geq M$

2. Se dice que la sucesión tiende a menos infinito, esto es, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \left(\text{o análogamente } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty\right)$ si y sólo si $\forall M > 0 \quad \exists n_0 \shortparallel \forall n \geq n_0 \qquad x_n \leq -M$

Proposición 45.

1. *Si $\{x_n\} \uparrow$ y no acotada, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$*

2. *Si $\{x_n\} \downarrow$ y no acotada, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$*

Observación 17. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$, entonces $\{x_n\}$ no es acotada.

Demostración.

1. Si $\{x_n\}$ es monótona creciente, $x_n \leq x_{n+1} \quad \forall n$ y al no ser acotada, entonces dado $M > 0 \quad \exists n_0 \shortparallel x_{n_0} \geq M \Rightarrow \forall n \geq n_0 \qquad x_n \geq x_{n_0} \geq M$.

2. Si $\{x_n\}$ es monótona decreciente, $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n$ y al no ser acotada, entonces dado $M > 0 \quad \exists n_0 \shortparallel x_{n_0} \leq -M \Rightarrow \forall n \geq n_0 \qquad x_n \leq x_{n_0} \leq M$.

□

Observación 18.

1. Si $\{x_n\} \uparrow$, entonces x_n siempre tiene límite (a un número real o a $+\infty$)
2. Si $\{x_n\} \downarrow$, entonces x_n siempre tiene límite (a un número real o a $-\infty$)
3. Trabajaremos con límites en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$. Llamaremos a esto $\mathbb{R}$ *ampliado* $\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$.

Proposición 46. *Límites de la sucesión inversa.*

1. *Si* $\{x_n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, *entonces* $\frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. *Si* $\{x_n\} \subset \mathbb{R}, x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ *y* $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *entonces* $\frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$
3. *Si* $\{x_n\} \subset \mathbb{R}, x_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ *y* $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *entonces* $\frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$

Demostración.

1. Sea $\varepsilon > 0$, entonces $\exists n_0 \shortparallel n \geq n_0$ y $x_n > \frac{1}{\varepsilon}\,(= M) \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x_n} < \varepsilon$.

   Caso 1. Si $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow \exists M > 0 \shortparallel 0 < M < x_n \quad \forall n, 0 < \frac{1}{\varepsilon} < x_n \Rightarrow 0 < \frac{1}{x_n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

   Caso 2. Si $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \Rightarrow \exists M > 0 \shortparallel x_n < -M < 0 \Rightarrow x_n < \frac{-1}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon < \frac{-1}{x_n} \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{x_n} \Rightarrow \frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

2. Dado $M > 0 \quad \exists n_0 \shortparallel \forall n \geq n_0 \quad 0 < x_n < \frac{1}{M} \Leftrightarrow 0 < M < \frac{1}{x_n}$

   Caso 1. Si $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $x_n > 0 \Rightarrow x_n < \varepsilon; x_n < \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$

   Caso 2. Si $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ y $x_n < 0 \Rightarrow \varepsilon > x_n; \frac{1}{x_n} > x_n; \frac{-1}{\varepsilon} < x_n \Rightarrow \frac{-1}{x_n} < \varepsilon; \frac{1}{x_n} > -\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$

□

Corolario 7. *Límites en* $\mathbb{R}$ *ampliado.*
Sean $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. *Si* $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ *e* $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$, *entonces* $x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x + y$

   Observación 19. Si $x = \infty, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x + y = -\infty$. Si $x \in \mathbb{R}, y = -\infty \Rightarrow x + y = -\infty$ y viceversa.
2. *Si* $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \cdot x$
3. *Si* $x_n \leq y_n \quad \forall n$ *y* $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ *e* $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$, *entonces* $x \leq y$ *y si* $x = \infty \Rightarrow y = \infty$ *y si* $y = -\infty \Rightarrow x = -\infty$
4. ***Regla del sandwich****: Si* $x_n \leq z_n \leq y_n$ *y si* $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ *e* $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, *entonces* z_n *tiene límite y* $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$.

Observación 20. Trabajando con límites ampliados, hay operaciones con límites que no pueden determinarse. Éstas son $\infty - \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^\infty, \infty^0$.

3.1.2. Algunos ejemplos.

Ejemplo 8. Sea $x_n = \frac{1}{x^p}$, con $p > 0$ fijo, $n \in \mathbb{N}$.
$\frac{1}{n^p} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ya que $n^p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ y es no acotada (si fuese acotada: $\exists M > 0 \shortparallel n^p \leq M \quad \forall n$, lo cual es absurdo.)
Como $p \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \shortparallel m \leq p < m - 1 \Rightarrow n^m \leq n^p \quad \forall n \Rightarrow n^m \leq M \quad \forall n \Rightarrow M^{\frac{1}{m}} \quad \forall n$, que es absurdo.

Ejemplo 9. Sea $x_n = a^n \quad a \in \mathbb{R}$ fijo, $n \in \mathbb{N}$.

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } |a| < 1 \quad (|x_n| \text{ sería decreciente}) \\ 1 & \text{si } a = 1 \quad (x_n = 1) \\ \infty & \text{si } |a| > 1 \quad (|x_n| \text{ sería creciente}) \\ \nexists \lim & \text{si } a \leq -1 \quad (\text{por ejemplo, dos subsucesiones } x_{2n} \text{ y } x_{2n+1} \text{ tendrían límites distintos}) \end{cases}$$

Ejemplo 10. Sea $x_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$ fijo, $n \in \mathbb{N}$.
Entonces $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

Demostración. Supongamos que $a > 1$. Si $n \in \mathbb{N}$ $\quad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow a^{\frac{1}{n+1}} < a^{\frac{1}{n}}$. $\left\{a^{\frac{1}{n}}\right\}$ es monótona decreciente y $1 < a^{\frac{1}{n}} \quad \forall n \left(\text{si } a^{\frac{1}{n+1}} < 1 \Rightarrow a \leq 1\text{, cosa que es absurda}\right)$.

Como x_n es monótona decreciente, $\exists l = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}$.

Supongamos que $1 < l \leq a^{\frac{1}{n}} \quad \forall n \Rightarrow l^n \leq a$, que es absurdo, luego $\lim\limits_{n\to\infty} l^n = \infty$ ya que $l > 1$. Con lo cual, necesariamente, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Caso 1. Supongamos que $a = 1$, entonces $\sqrt[n]{a} = 1$.

Caso 2. Supongamos que $0 < a < 1$, entonces $\frac{1}{a^{1/n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \left(\frac{1}{a} > 1\right) \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \frac{1/1}{\sqrt[n]{a}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1} = 1$

□

Ejemplo 11. Sea $x_n = \sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}$.
Entonces $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Demostración. Como $n^{\frac{1}{n}} > 1 \Rightarrow n^{\frac{1}{n}} = 1 + k_n, \qquad k_n > 0 \Rightarrow n = (1 + k_n)^n = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k_n^j \geq 1 + \binom{n}{2} k_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} k_n^2$ (hemos cogido el primer y tercer término del sumatorio, el resto lo desechamos.)

$n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} k_n^2$; $n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} k_n^2$, tachamos el $n - 1$ y tenemos $1 \geq \frac{n}{2} k_n^2 \Rightarrow \frac{2}{n} \geq k_n^2 \Rightarrow k_n^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow k_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow n^{\frac{1}{n}} = 1 + k_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ □

Ejemplo 12. Sea $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. x_n es monótona creciente y acotada superiormente, con lo cual $\exists \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{def.}{=} e$, el número de Euler.

Ejemplo 13. Si $p > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ fijos, y sea

$$x_n = \frac{n^\alpha}{(1+p)^n}, n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N} \shortparallel k > \alpha$ y sea $n > 2k$. Se tiene que $(1 + p)^n \geq \binom{n}{k} p^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} p^k$. Como $n > 2k \Rightarrow (n - k + 1) \geq n - \frac{n}{2} + 1 = \frac{n}{2} + 1 > \frac{n}{2} \Rightarrow (1 + p)^n \geq \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^k}{k!} p^k$.

Entonces tenemos que $\frac{1}{(1+p)^n} \leq \frac{k!}{\left(\frac{n}{2}\right)^k p^k} = \frac{2^k \cdot k!}{n^k \cdot p^k}$. Que, multiplicando por n^α, resulta

$$\frac{n^\alpha}{(1+p)^n} \leq \frac{n^\alpha \cdot k!}{p^k} \left(\frac{2}{n}\right)^k = \frac{k!}{p^k \cdot n^{k-\alpha}} \left(\frac{2}{n}\right)^k$$

que $\frac{k!}{p^k \cdot n^{k-\alpha}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. □

3.2. Series.

3.2.1. Convergencia. Propiedades

Definición 36. Sumas parciales y series.
Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

1. Llamamos sumas parciales de x_n a:
$$S_M = \sum_{n=1}^{M} x_n, \quad M \in \mathbb{N}$$
2. Llamamos serie de la sucesión x_n a:
$$S = \lim_{M\to\infty} S_M$$
supuesto que existe. Lo denotamos por $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{M} x_n$

Notación.

1. Si $\exists \lim_{M\to\infty} S_M$ se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.
2. **Sólo en** $\mathbb{R}$ si $\lim\limits_{M\to\infty} S_M = \pm\infty$ se dice que la serie es divergente.
3. Si $\nexists \lim\limits_{M\to\infty} S_M$ se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ no converge.

Observación 21. Si $z_n = a_n + b_n i \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}$. $S_M = \sum_{n=1}^{M} z_n = \sum_{n=1}^{M} a_n + i \sum_{n=1}^{M} b_n$ y por tanto la serie $\sum_{n=1}^{M} z_n$ es convergente si y sólo si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes.

Ejemplo 14. Serie de una progresión geométrica.
Sea $a \in \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ fijo y sea $x_n = a^n$. $S_M = \sum_{n=1}^{M} x_n = \sum_{n=1}^{M} a^n = \frac{a-a^{M+1}}{1-a}$

Caso 1. $|a| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{M\to\infty} \sum^M a^n = \frac{a}{1-a}$

Caso 2. $|a| > 1 \Rightarrow |S_M| = \left|\frac{a-a^{M+1}}{1-a}\right| = \left|\frac{a^{M+1}-a}{a-1}\right| \geq \frac{|a|^{M+1}-|a|}{|a-1|} \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

Caso 3. $a > 1 \Rightarrow S_M = \frac{a^{M+1}-a}{a-1} \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Caso 4. $a = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{M} a_n = M \Rightarrow \lim\limits_{M\to\infty} \sum^M a_n = +\infty$

Caso 5. $a = -1 \Rightarrow \lim\limits_{M\to\infty} a_n = 0, -1 \Rightarrow$la serie es divergente.

En particular, si $a = \frac{1}{2}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

Ejemplo 15. Sea $x_n = \frac{1}{n}$.
$S_M = \sum_{n=1}^{M} x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{M}$. S_M es monótima creciente ($S_M \leq S_{M+1}$) y se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{M\to\infty} S_M = +\infty$

3.2.2. Criterios de convergencia

Proposición 47. *Generalidades sobre convergencia*
Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones.

1. *Si $\sum^{\infty} x_n$ e $\sum^{\infty} y_n$ son convergentes entonces $\sum^{\infty} (x_n + y_n) = \sum^{\infty} x_n + \sum^{\infty} y_n$ es convergente.*
2. *Si $c \in \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot x_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x_n$*
3. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente, entonces $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. El recíproco no es cierto (la serie armónica, por ejemplo).*
4. *(En $\mathbb{R}$) Si $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $\sum^{\infty} x_n$ es convergente si y sólo si $\exists k > 0 \shortparallel \sum_{n=1}^{M} x_n \leq k \qquad \forall M \in \mathbb{N}$*
5. ***Criterio de Cauchy:** $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente si y sólo si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \shortparallel$ si $M, N \geq N_0$ (y $M > N$) $\left|\sum_{n=M+1}^{N} x_n\right| < \varepsilon$*

Demostración.

1. Las sumas parciales de $\{x_n + y_n\}$ son: $\sum^M x_n + y_n = \sum^M x_n + \sum^M y_n \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \sum^\infty x_n + \sum^\infty y_n$
2. Las sumas parciales de $\{c \cdot x_n\}_n^\infty$ son: $S_M = \sum_{n=1}^M c \cdot x_n = c \sum_{n=1}^M x_n \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} c \sum_{n=1}^\infty x_n$
3. Sabemos que $S_M = \sum_{n=1}^M x_n$ tiene límite cuando $M \to \infty$. Entonces $x_M = S_M - S_{M-1} \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} l - l = 0$
4. Como $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad S_M = \sum_{n=1}^M x_n$ es monótona creciente ($S_M \leq S_{M+1} \quad \forall M \in \mathbb{N}$), por tanto S_M tiene límite si y sólo su es acotada, esto es $\exists k > 0 \shortparallel S_M \leq k \quad \forall M \in \mathbb{N}$
5. $\sum_{n=1}^\infty x_n$ es convergente si y sólo si $\{S_M\}_{M\in\mathbb{N}}$, la sucesión de sumas parciales, tiene límite si y sólo si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \shortparallel$ si $M, N \geq N_0$ (suponiendo $N > M$) $|S_N - S_M| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\sum_{n=M+1}^N x_n\right| < \varepsilon$

$\square$

3.2.2.1. Convergencia absoluta. Reordenamientos

Definición 37. Convergencia absoluta. Convergencia condicional

1. La serie $\sum_{n=1}^\infty x_n$ es absolutamente convergente si y sólo si $\sum_{n=1}^\infty |x_n|$ es convergente.
2. Si $\sum_{n=1}^\infty x_n$ es convergente y $\sum_{n=1}^\infty |x_n|$ no lo es, decimos que la serie es condicionalmente convergente.

Proposición 48. *Convergencia absoluta*
Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Si

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty, \textit{ entonces } \sum_{n=1}^\infty x_n < \infty$$

El recíproco no es cierto.

Demostración. Si $\sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty$, entonces $\tilde{S}_M = \sum_{n=1}^M |x_n|$, la sumas parciales de la sucesión en valor absoluto, es de Cauchy. Entonces, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \shortparallel$ si $N, M \geq N_0$ (supuesto $N > M$) se tiene que $\left|\tilde{S}_N - \tilde{S}_M\right| < \varepsilon$. Por la propiedad triangular, vemos que$\left|\tilde{S}_N - \tilde{S}_M\right| = \sum_{n=M+1}^N |x_n| \geq \left|\sum_{n=M+1}^N x_n\right| = |S_N - S_M|$, siendo S_N, S_M las sumas parciales de la sucesión normal. Con lo cual, como $\left|\sum_{n=M+1}^N x_n\right| \leq \sum_{n=M+1}^N |x_n|$, entonces $|S_M - S_N| < \varepsilon$, con lo cual $\{S_M\}_M$ es de Cauchy y por tanto $\exists \lim_{M\to\infty} S_M = \lim_{M\to\infty} \sum_{n=1}^M x_n = \sum_{n=1}^\infty x_n$. $\square$

Definición 38. Reordenamiento.
Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyectiva y $\{x_n\}$ una sucesión real o compleja. Entonces a

$$\sum_{n=1}^\infty x_{f(n)} \text{ se le llama } \textbf{reordenamiento} \text{ de } \sum_{n=1}^\infty x_n$$

Los siguientes teorema, que no demostraremos, proporciona un resultado poderoso acerca de los reordenamientos de las series.

Teorema 11. *Teorema de reordenamiento de Riemann.*
Sea $\{x_n\}$ una sucesión real o compleja . Si $\sum_{n=1}^\infty x_n$ es absolutamente convergente, entonces para todo reordenamiento se tiene que

$$\sum_{n=1}^\infty x_{f(n)} = \sum_{n=1}^\infty x_n$$

Teorema 12. *Segundo teorema de reordenación.*
Sea $\{x_n\}$ una sucesión real o compleja. Si $\sum_{n=1}^\infty x_n$ es condicionalmente convergente, entonces para todo $A \in \mathbb{R}$ existe un reordenamiento $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=1}^\infty x_{f(n)} = A$$

3.2.2.2. Criterios de convergencia absoluta

Proposición 49. *Criterios de convergencia absoluta.*
Sean a_n, b_n sucesiones de términos positivos.

1. *Supongamos que $\exists c > 0$ y $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq c \cdot b_n \quad \forall n \geq n_0$,*

   a) *Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.*
   b) *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$*

2. *Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l, l \neq 0, \infty$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter.*

3. *Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$*

4. *Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$*

Demostración. Vayamos por apartados.

1. Sean $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ y $\tilde{S}_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$, entonces si $N \geq n_0$, $S_N = \sum_{n=1}^{n_0} a_n + \sum_{n=n_0+1}^{N} a_n \leq A + c \cdot \sum_{n=n_0+1}^{N} b_n$. Con lo cual $S_N \leq A + c \cdot \sum_{n=n_0+1}^{N} b_n + c \cdot \sum_{n=1}^{n_0} b_n = A + c \cdot \tilde{S}_N$. Ahora,

   Caso 1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Leftrightarrow \left\{\tilde{S}_N\right\}$ es acotada, luego $\{S_N\}$ también lo es $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

   Caso 2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \{S_N\}$ no es acotada, luego $\left\{\tilde{S}_N\right\}$ tampoco lo es $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$

2. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l, l \neq 0, \infty$, eso significa que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \shortparallel$ si $n \geq n_0$ $\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{a_n}{b_n} \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$. Tomamos $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$, con lo cual $\frac{a_n}{b_n} \in (l/2, 3l/2) \Leftrightarrow \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 3\frac{l}{2} \Leftrightarrow \frac{l}{2} b_n < a_n < 3\frac{l}{2} b_n$. Esto significa que ambas sucesiones se acotan mutuamente, con lo cual, por 1., tienen el mismo carácter.

3. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, con lo cual $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \shortparallel$ si $n \geq n_0 \quad \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon \Leftrightarrow a_n < \varepsilon b_n$. Tomando $\varepsilon = 1$, tenemos que $a_n < b_n$, luego si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

4. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, entonces $\forall M > 0 \quad \exists n_0 \shortparallel$ si $n \geq n_0 \quad \frac{a_n}{b_n} > M \Leftrightarrow a_n > M \cdot b_n$. Tomando $M = 1$, tenemos que $a_n > b_n$, luego si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

□

Proposición 50. *Criterio del cociente o d'Alambert.*
Sea $\{a_n\}$ una sucesión real de términos positivos. Tenemos que

1. *Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.*

2. *Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.*

3. *Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, no puede asegurarse con certeza qué sucede.*

Demostración.

1. Si $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Sea $k \shortparallel l < k < 1$, entonces $\exists n_0 \shortparallel$ si $n \geq n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < k$, con lo cual $\forall n \geq n_0 \quad a_{n+1} \leq k \cdot a_n, a_{n_0+1} \leq k \cdot a_{n_0}$, $a_{n_0+2} \leq k \cdot a_{n_0+1} \leq k^2 \cdot a_{n_0}$, que por inducción queda $\forall n \geq n_0 \quad a_n \leq k^{n-n_0} a_{n_0} = k^n \frac{a_{n_0}}{k^{n_0}}$. $\sum_{n=n_0}^{M} a_n \leq \frac{a_{n_0}}{k^{n_0}} \sum_{n=n_0}^{M} k^n \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a_{n_0}}{k^{n_0}} \sum_{n=n_0}^{\infty} k^n < \infty$ (por ser serie de progresión géometrica de razón menor que 1).

2. Si $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Sea $k \shortparallel 1 < k < l$, entonces $\exists n_0 \shortparallel$ si $n \geq n_0 \quad a_{n+1} > k \cdot a_n \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \geq k^{n-n_0} a_{n_0} = k^n \frac{a_{n_0}}{k^{n_0}} \quad \forall n \geq n_0$. Sea ahora $M > n_0$, $\sum_{n=n_0}^{M} a_n \geq \frac{a_{n_0}}{k^{n_0}} \sum_{n=n_0}^{M} k^n \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ (por ser $k > 1$), con lo cual $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

□

Proposición 51. *Criterio de la raíz.*
Sea $\{a_n\}$ una sucesión real de términos positivos.

1. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$*, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

2. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$*, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

3. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$*, entonces no se puede asegurar el carácter de la serie.*

Demostración.

1. Si $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Sea $k \shortparallel l < k < 1 \Rightarrow \exists n_0 \shortparallel$ si $n \geq n_0 \quad \sqrt[n]{a_n} \leq k \Leftrightarrow a_n \leq k^n$. Como $k < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} k^n < \infty$, por el criterio de comparación se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
2. Si $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. Sea $k \shortparallel 1 < k < l \Rightarrow \exists n_0 \shortparallel$ si $n \geq n_0 \quad \sqrt[n]{a_n} > k \Leftrightarrow a_n \geq k^n$. Como $k > 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} k^n = \infty$, que por el criterio de comparación se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

$\square$

Proposición 52. *Criterio de condensación de Cauchy.*
Sea $\{a_n\}$ *una sucesión real de términos positivos monótona decreciente. Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ tiene el mismo carácter que } \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$$

Demostración.
Las sumas parciales son crecientes en M. $\{S_M\}$ es acotada si y sólo si $\{S_{2^k}\}$ es acotada:
$\Rightarrow$) Obviamente, ya que S_{2^k} tiene menos términos que S_M.
($\Leftarrow$ Dado $M > 0 \quad \exists k \shortparallel M < 2^k \Rightarrow S_M \leq S_{2^k}$.

Bien, el desarrollo de S_{2^k} es: $S_{2^k} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^{k-2}} + a_{2^{k-1}} + a_{2^k}$. Ahora, si agrupamos los términos en potencias de 2, el sumatorio queda: $S_{2^k} = \sum_{j=1}^{k} a_{2^{j-1}+1} + \ldots + a_{2^j}$.

Vamos ahora que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{j=1}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$.

$S_{2^k} = \sum_{j=1}^{k} a_{2^{j-1}+1} + \ldots + a_{2^j}$, y $S_{2^k} \geq \sum_{j=1}^{k} 2^{j-1} a_{2^j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} 2^j a_{2^j}$. Por último $S_{2^k} \leq \sum_{j=1}^{k} 2^{j-1} + 1 \leq \sum_{j=1}^{k} 2^{j-1} a_{2^{j-1}} \underset{m=j-1}{=} \sum_{m=0}^{k-1} 2^m a_{2^m}$. $\square$

3.2.2.3. Criterios de convergencia para series de términos arbitrarios.

Proposición 53. *Criterio de Leibniz para series alternadas.*
Sea $\{a_n\}$ *una serie real de términos positivos monótona decreciente tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*. Entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

es convergente.

Demostración.
$S_M = \sum_{n=1}^{M} (-1)^{n+1} a_n$. Veamos que para $N \in \mathbb{N}$, las sumas parciales pares S_{2N} son crecientes. $S_{2N+2} = \sum_{n=1}^{2N+2} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{2N} (-1)^{n+1} a_n + (a_{2N+1} - a_{2N+2}) \geq S_{2N}$. Veamos que S_{2N} son acotadas: $S_{2N} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + \ldots = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - a_{2N} \leq a_1$, ya que $(a_i - a_{i+1}) \geq 0 \quad i = 2, \ldots, 2N-1$ por ser la sucesión decreciente.

Luego S_{2N} es acotada y creciente, con lo cual $\exists l = \lim\limits_{N\to\infty} S_{2N} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \shortparallel$ si $N \geq N_0$: $S_{2N+1} = S_{2N} + a_{2N+1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} l + 0 = l$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \shortparallel$ si $n \geq n_0 \quad |a_n| \leq \varepsilon$. Dado $\varepsilon > 0 \quad \exists m_0 = \max\{N_0, n_0\} \shortparallel$ si $N \geq m_0$ $|S_{2N+1} - l| \leq |S_{2N} - l| + |a_{2N+1}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Luego, $\lim\limits_{N\to\infty} S_{2N+1} = l$.

Con lo cual si $l = \lim\limits_{N\to\infty} S_{2N+1} = \lim\limits_{N\to\infty} S_{2N} \Rightarrow \lim\limits_{N\to\infty} S_N = l$. $\square$

Capítulo 4

Funciones continuas

Nota del autor: Para sucesiones, se notarán de la forma $x_n \to x$, entendiéndose que la tendencia es con la variable hacia hacia el infinito, salvo que se indique lo contrario.

Las expresiones “tal que” o “tales que” se notarán con una barra ’/’ a partir de cierto punto.

4.1. Funciones continuas

4.1.1. Límites de funciones

Definición 39. Limite de una función
Sea $(M,\, d)$ y (N, d') espacios métricos y $f : M \to N$ tal que $x \mapsto f(x)$
Sea $x_0 \in M$. Decimos que $l \in \mathbb{N}$ es el límite de $f(x)$ (y lo denotamos por $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$) cuando $x \longrightarrow x_0$

$$\boxed{\forall \varepsilon \text{¿}0\ \exists \delta\ \text{¿}0\ \shortparallel f\left(B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}\right) \subset B\left(l,\varepsilon\right) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \shortparallel d(x,x_0) < \delta\ \ x \neq x_0\ \Rightarrow d'\left(f(x),l\right) < \varepsilon}$$

Es decir, que las imágenes de los puntos en la bola de centro x_0 están en la bola de centro l

Observación. Si $M = N = \mathbb{R} \quad d = d'$ la definición queda:

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \shortparallel |x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0\ \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Proposición 54. *Límites de funciones. Sucesiones*

1. $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset M \qquad x_n \neq x_0\, \forall n \quad \shortparallel x_n \longrightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow l$ cuando $n \to \infty$

2. Si existe, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ es único

Demostración.
1. $\Rightarrow)$
Sea $\{x_n\} \subset M \shortparallel x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0\ x_n \neq x_0\, \forall n$ y sea $y_n = f(x_n),\ \{y_n\} \subset N$. Veamos que $y_n \underset{n\to\infty}{\to} l$
Sea $\varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \shortparallel f\left(B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}\right) \subset B\left(l,\varepsilon\right)$.
Como $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$, dado $\delta > 0 \qquad \exists n_0 \shortparallel si\, n \geq n_0\ \ x_n \in B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}\ \ x_n \neq x_0\, \forall n \Rightarrow y_n = f(x_n) \in B(l,\varepsilon)$

$\Leftarrow)$
Supongamos $l \neq \lim f(x) \ \Rightarrow \exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0 \qquad \exists x \in B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\} \shortparallel\ f(x) \notin B(l,\varepsilon)$.
Es decir, que existe un ε fijo tal que hay un x cuya imagen está fuera de la bola con centro el límite l
Tomamos $\delta = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in B\big(x_0, \frac{1}{n}\big) \setminus \{x_0\} \shortparallel f(x) \notin B(l,\varepsilon)$. Entonces $x_n \to x_0$ pero $f(x_n) \nrightarrow l$
Las imágenes quedan fuera de la bola, con lo cual hemos demostrado que para una sucesión $\{x_n\} \to x_0$ tal que sus imágenes quedan fuera de la bola de centro el límite, con lo cual no convergen. Hemos llegado a un absurdo.

2. Supongamos l' y $l'' \shortparallel l' \neq l''$ y ambos límites de una función $f(x)$

Sea $\varepsilon > 0 \shortparallel B'(l', \varepsilon) \bigcap B''(l'', \varepsilon) = \emptyset$ y dado éste ε:

$$\exists \delta' > 0 \shortparallel f\left(B(x_0, \delta') \setminus \{x_0\}\right) \subset B\left(l', \varepsilon\right)$$

$$\exists \delta'' > 0 \shortparallel f\left(B(x_0, \delta'') \setminus \{x_0\}\right) \subset B\left(l'', \varepsilon\right)$$

Lo cual es absurdo, porque los mismos términos de una sucesión (léase función) no pueden estar contenidos en bolas disjuntas, como es el caso. Por lo tanto, necesariamente $l' = l''$
F

□

Proposición 55. *Propiedades de límites*
Supongamos que $N = \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), y (M, d), ambos espacios métricos y $x_0 \in M$

Sean $f, g : M \to \mathbb{R}\,(o\,\mathbb{C})$ y supongamos: $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \qquad m = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Entonces

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l + m$
2. Si $a \in \mathbb{R}\,(o\,\mathbb{C}) : \lim\limits_{x \to x_0} (a \cdot f(x)) = a \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \cdot l$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l \cdot m$
4. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{l}{m}$

Demostración. Propiedades de los límites
1. Sea $\varepsilon > 0$
$\exists \delta' > 0 \shortparallel f\left(B(x_0, \delta') \setminus \{x_0\}\right) \subset B\left(l, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ y $\exists \delta'' > 0 \shortparallel g\left(B(x_0, \delta'') \setminus \{x_0\}\right) \subset B\left(l, \frac{\varepsilon}{2}\right)$

Sea $\delta = \min\{\delta', \delta''\} > 0$. Si $x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$:

$|f(x) + g(x) - (l + m)| = |f(x) + g(x) - l - m| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ □

2. *por sucesiones:*
Sea $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$ $x_n \neq x_0 \, \forall n \quad \Rightarrow f(x) \to l \Rightarrow a \cdot f(x) \to a \cdot l$

3. Sea $\varepsilon > 0$ $\exists \delta', \delta'' > 0 \; / \; f\left(B(x_0, \delta') \setminus \{x_0\}\right) \subset B\left(l, \frac{\varepsilon}{2M}\right)$ y $g\left(B(x_0, \delta'') \setminus \{x_0\}\right) \subset B\left(l, \frac{\varepsilon}{2}\right)$

Sea $\delta = min\{\delta', \delta''\}$entonces:
$|f(x)g(x) - lm + f(x) \cdot m - f(x) \cdot m| = |f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - lm| \leq |f(x)(g(x - m)| + |m(f(x) - l)| \leq |f(x)|\,|g(x) - m| + |m|\,|f(x) - l|$

Como $\lim f(x) = l$ con $\varepsilon_0 = 1$, $\exists \delta_0 > 0 \; / \; f\left(B(x_0, \delta_0) \setminus \{x_0\}\right) \subset B\left(l, 1\right);$ en particular $\exists M > 0 \, / \, \forall x \in (B(x_0, \delta_0) \setminus \{x_0\})$ $|f(x)| \leq M$

Con lo cual:
$|f(x)g(x) - lm| \leq M\,|g(x) - m| + |m|\,|f(x) - l|$
Supongamos $m \neq 0$

Dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta' > 0$ $\forall x \in B(x_0, \delta') \setminus \{x_0\}$ $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2|m|}$
$\exists \delta'' > 0$ $\forall x \in B(x_0, \delta'') \setminus \{x_0\}$ $|g(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2M}$

Sea $\delta = min\{\delta', \delta''\}(< \delta_0)$ $\quad \forall x \in B(x_0, d) \setminus \{x_0\}$ se tiene que
$|f(x)g(x) - lm| \leq M\,\frac{\varepsilon}{2M} + |m|\,\frac{\varepsilon}{2|m|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
Si $m = 0$
$|f(x)g(x) - lm| \leq M\,|g(x) - m|$

Dado $\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \;/\; x \in B(x_0, \delta)\backslash\{x_0\}$ se tiene que $|g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{M}$

4. Por 3. basta hacerlo con $f \equiv 1$, ya que $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$, con lo cual va a ser el $1/g(x)$ lo que vamos a demostrar.

Como la que puso Aníbal no quedó demasiado clara, por ser muy directa, la detallo a continuación adaptándola. [?]

Tenemos primero que:
$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{g(x)-m}{m \cdot g(x)}\right| = \frac{|g(x)-m|}{|m||g(x)|}$ Como $m \neq 0 \Rightarrow \exists\delta_1 \,/$ si $x \in B(x_0, \delta_1)\backslash\{x_0\} \Rightarrow |g(x) - m| < \frac{|m|}{2}$
Entonces si $x \in B(x_0, d_1)\backslash\{x_0\}$:
$|g(x)| > \frac{|m|}{2}$, de lo cual obtenemos que $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|m|}$
Luego

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| = \frac{|g(x) - m|}{|g(x)|\,|m|} \leq \frac{2\,|g(x) - m|}{m^2}$$

Dado $\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta_2 > 0 \;\; \forall x \in B(x_0, \delta_2)\backslash\{x_0\} \qquad |g(x) - m| < \frac{m^2\varepsilon}{2}$
Tomamos $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ y sea $B(x_0, \delta)$ entonces:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| = \frac{|g(x) - m|}{|g(x)|\,|m|} \leq \frac{2\,|g(x) - m|}{m^2} < \frac{m^2\varepsilon}{2}$$

. Tachando lo oportuno, queda:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon$$

Definición 40. Límites en el infinito. Límites infinitos
Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;\; x \longmapsto f(x)$

1. $\lim f(x)_{x\to\infty} = l \in \mathbb{R} \;\; \Leftrightarrow \; \forall\varepsilon > 0 \; \exists M > 0 \,/$si $M < x \;\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
2. $\lim f(x)_{x\to-\infty} = l \in \mathbb{R} \;\; \Leftrightarrow \; \forall\varepsilon > 0 \; \exists M > 0 \,/$si $x < -M \;\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
3. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ decimos que $\lim f(x)_{x\to x_0} = +\infty \;\; \Leftrightarrow \; \forall M > 0 \; \exists\delta > 0 \,/ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \; x \neq x_0 \;\Rightarrow M < f(x)$
   Si $x_0 \in \mathbb{R}$ decimos que $\lim f(x)_{x\to x_0} = -\infty \;\; \Leftrightarrow \; \forall M > 0 \; \exists\delta > 0 \,/ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \; x \neq x_0 \;\Rightarrow f(x) < -M$
4. $\lim f(x)_{x\to\infty} = +\infty \;\; \Leftrightarrow \; \forall M > 0 \; \exists k > 0 \,/$si $k < x \;\Rightarrow M < f(x)$
   $\lim f(x)_{x\to\infty} = -\infty \;\; \Leftrightarrow \; \forall M > 0 \; \exists k > 0 \,/$si $k < x \;\Rightarrow f(x) < -M$
5. $\lim f(x)_{x\to-\infty} = -\infty \;\; \Leftrightarrow \; \forall M > 0 \; \exists k > 0 \,/$si $-k < x \;\Rightarrow M < f(x)$
   $\lim f(x)_{x\to-\infty} = +\infty \;\; \Leftrightarrow \; \forall M > 0 \; \exists k > 0 \,/$si $-k < x \;\Rightarrow f(x) < -M$

Observación.
Por tanto, si $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\infty\}\cup\{-\infty\} \ni l$ tenemos definido $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ y en este caso $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$, que cumplen las propiedades antes enunciadas. Quedan excluidas las indeterminaciones $0{\cdot}\infty$, $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$
Además es cierto que: $\lim f(x)_{x\to x_0} = l \Leftrightarrow \forall x_n \to x_0 \;(x_n \neq x_0)$ se tiene que $f(x_n)_{n\to\infty} \to l$

Definición 41. Función continua en un punto.
Sea (M, d) y (N, d') espacios métricos y $f : \, M \to N \quad x_0 \in M$
Decimos que f es continua en $x_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta > 0 \,/ f\,(B_d(x_0, \delta)) \subset B_{d'}(f(x_0), \varepsilon) \iff \forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta > 0 \,/\; |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Observación.
f es continua en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Proposición 56.
Si $f : M \to N \quad x_0 \in M$

- f es continua en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f es continua en $x_0 \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset M \; / \; x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ se tiene que $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$

Definición 42. Continuidad en espacios
Si $f : M \to N$, f es continua en $M \Leftrightarrow f$ es continua en $x_0 \, \forall x_0 \in M$

Definición 43. Continuidad en conjuntos. Antiimagen
Si $f : A \longrightarrow B \;\; A, B$ conjuntos:

1. Si $C \subset B$, se define antiimagen $f^{-1}(C) = \{a \in A \, / \, f(a) \in C\}$
2. Si $D \subset A$, $f(D) = \{f(a), \, a \in D\}$

Teorema 13. *Caracterización de la continuidad por imágenes inversas*
Sea (M, d), (N, d') espacios métricos y $f : M \to N$ una función
Entonces:

1. f es continua (en M) $\Leftrightarrow \forall A \subset N$ abierto $f^{-1}(A)$ es abierto (en M)
2. f es continua (en M) $\Leftrightarrow \forall C \subset N$ cerrado $f^{-1}(C)$ es cerrado (en M)

Demostración.
1.
$\Rightarrow$) Sea $A \subset N$ un abierto y sea $x_0 \in f^{-1}(A)$
Si $f^{-1}(A) = \emptyset$, el vacío es abierto, y la demostración es trivial.
$f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(x_0) \in A$
Como A abierto $\;\exists \varepsilon > 0 \, / \, B(f(x), \varepsilon) \subset A$
Como f es continua por hipótesis, para ese ε $\exists \delta > 0$ $f\left(B(x_0, \delta)\right) \subset B\left(f(x_0), \varepsilon\right) \subset A \Rightarrow B(x_0, \delta)$
$(\Leftarrow$
Sea $x_0 \in M$, veamos que f es continua en x_0
Sea $\varepsilon > 0$, como $B\left(f(x_0), \varepsilon\right)$ es abierta $\Rightarrow f^{-1}\left(B\left(f(x_0, \varepsilon\right)\right) \Rightarrow f\left(B\left(x_0, \delta\right)\right) \subset B\left(f(x_0), \varepsilon\right) \Rightarrow$cumple la definición de continuidad ☐

2.
Veamos que para cualquier conjunto $D \subset N$:
$f^{-1}(D^c) = \left(f^{-1}\left(D\right)\right)^c$
$x \in f^{-1}(D^c) \Leftrightarrow f(x) \in D^c \Leftrightarrow f(x) \notin D \Leftrightarrow x \in f^{-1}(D) \Leftrightarrow x \in \left(f^{-1}(D)\right)^c$

Tomando $D = C$ un cerrado $\Leftrightarrow D^c$ es abierto
$f^{-1}(C^c) = \left(f^{-1}(C)\right)^c$
$\Rightarrow$) Por 1. $f^{-1}(C^c)$ es abierto $\Leftrightarrow f^{-1}(C)$ es cerrado
$\Leftarrow$) Sea $A \subset N \Rightarrow A^c$ es cerrado $\Rightarrow f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$ es cerrado $\Leftrightarrow f^{-1}(A)$ es abierto.

Proposición 57. *Preservación de la compacidad.*
Sean (M, d) y (N, d') espacios métricos y sea también $f : M \to N$ función
Si f es continua (en M) y $k \subset M$ es un compacto $\Rightarrow f(k) \big(\subset N \big)$ es un compacto

Demostración.
Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un recubrimiento por abiertos de $f(k)$

$$f(k) \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \Rightarrow k \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}\left(G_\alpha\right) \text{ (que es abierto, por ser continua)}$$

Como k compacto $\exists \in \mathbb{N} / \alpha_1 ... \alpha_N \;\in I \;/\; k \subset \bigcup_{i=1}^{N} f^{-1}\left(G_{\alpha_i}\right) \Leftrightarrow f(k) \subset \bigcup_{i=1}^{N} f^{-1}\left(G_{\alpha_i}\right) \Rightarrow f(k)$ es compacto ☐

Proposición 58. *Composición de funciones*

Sean (M,d), (N,d') y (O,d'') espacios métricos y $f: M \to N$ y $g: N \to O$ funciones.

Sea $x_0 \in M$. Si f es continua en x_0 y la función g es continua en x_0 entonces, la composición de f en g $(g \circ f) \overset{def.}{=} g(f(x))$ $x \in M$ *es continua en x_0*

Demostración.

Sea $x_n \to x_0$ (en M). Como f es continua $\Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

Como g es continua en $x_0 \Rightarrow g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$ □

4.1.2. Algunos teoremas importantes. Weierstrass. Bolzano. Darboux.

Teorema 14. *Teorema de Weierstrass*

Sea (M,d) un espacio métrico y $f: M \to \mathbb{R}$ continua

Si $k \subset M$ es compacto, entonces

$$\boxed{\exists\, a,b \in k / f(a) = \text{ínf}\{f(x)\, / x \in k\} \ y\ f(b) = \sup\{f(x)\, / x \in k\}}$$

(como el supremo y el ínfimo están contenidos en el conjunto, podemos referirnos a ellos como máximo y mínimo)

Con lo cual, el teorema de Weierstrass establece que dado una función real, en un intervalo cerrado y acotado, la función alcanza su máximo y su mínimo en puntos del intervalo.

Demostración.

Como $k \subset M$ compacto $\Rightarrow f(k) \in \mathbb{R}$ es compacto *(por estar en $\mathbb{R}$, Heine-Borel)* $\Rightarrow f(k)$ es acotado $\Rightarrow \exists \sup f(x)$ *e* $\text{ínf } f(x)$

Además es cerrado $\Rightarrow \sup f(k), \text{ínf } f(k) \in f(k) \ \Leftrightarrow \exists a \in k\ / f(a) = \text{ínf } f(x)\ \ y\ \ \exists b \in k\ / f(b) = \sup f(x)$ □

Teorema 15. *Teorema de Bolzano*

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ función continua, entonces si

$$\boxed{f(a)\, y\, f(b) \ \ tienen\, signos\, distintos \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) / f(c) = 0}$$

Demostración.

Supongamos $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$

$A = \{t \in [a,b]\, / f(t) < 0\}$

$A \neq \emptyset\, (el\, propio\, a\, \in A) \quad b \notin A \Rightarrow b$ es cota superior $\Rightarrow \exists c = \sup(A)$

Así $c < b$, como $c = \sup(A)$ $\exists \{t_n\} \in A\, / t_n \to c$. Como f es continua $f(t_n) \to f(x)$; $f(t_n) < 0 \ \Rightarrow f(c) \leq 0 \Rightarrow c \neq b$ (sabemos que b es positivo)

Así $a < c$, como $f(a) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0\, / \forall t \in (a,\, a+\delta)\ f(t) < 0 \ \Rightarrow (a, a+\delta) \subset A\ \ y\ a < a+\delta \leq a$

Veamos $f(c) = 0$. Si $f(c) > 0\, \exists \delta > 0\, / \forall t \in (c-\delta, c+\delta)\ f(t) > 0 \Rightarrow (c-\delta, c] \nsubseteq A \ \Rightarrow c$ no es $\sup(A) \Rightarrow$ *absurdo*

Si $f(c) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0\, / \forall t \in (c-\delta, c+\delta)\ f(t) < 0 \Rightarrow [c, c+\delta) \subset A \Rightarrow c$ no es $\sup(A)$

Con lo cual $f(c) = 0$ □

Corolario 8. *Teorema de los valores intermedios (de Darboux)*

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y sea $A = f(a)$ y $B = f(b)$. Entonces si $C \in \mathbb{R}$ es un número entre A y B, existe

$$c \in (a,b)\ /\ f(c) = C$$

es decir, que en un intervalo cerrado la función toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$

Demostración.

Sea $g(x) = f(x) - C$, y $g: [a,b] \to \mathbb{R}$

Sea $\begin{matrix} g(a) = f(a) - C = A - C \\ g(b) = f(b) - C = B - C \end{matrix}$ tienen signos distintos $\overset{Bolzano}{\Rightarrow} \exists c \in (a,b),\ g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = C$ □

4.2. Funciones discontinuas

Definición 44. Límites laterales
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R}$

- El límite por la izquierda de f en x_0 (representado por $f\left(x_0^-\right)$ es:

$$f\left(x_0^-\right) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ /si \ x \in (x_0 - \delta, \, x_0) \Rightarrow f(x) \in B(l, \varepsilon) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

- El límite por la derecha de f en x_0 (representado por $f\left(x_0^+\right)$ es:

$$f\left(x_0^+\right) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ /si \ x \in (x_0, \, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in B(l, \varepsilon) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

Observación.
Si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall x_n \to x_0 \ \ x_0 < x_n \Rightarrow f(x_n) \to l$
Si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall x_n \to x_0 \ \ x_n < x_0 \Rightarrow f(x_n) \to l$
El límite lateral de una función en un punto, si existe, es único.

Demostración.
Lo haremos para uno de los límites, ya que es completamente análogo para el otro.
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall x_n \to x_0 \ \ x_0 < x_n \Rightarrow f(x_n) \to l$

$\Rightarrow)$
Supongamos que $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$ y sea x_n una sucesión tal que $x_n \to x_0 \ \ x_0 < x_n$
Si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \Rightarrow \exists \delta > 0 \, /si \ x \in (x_0 - \delta, \, x_0) \ \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
Además, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 / \forall n \geq n_0 \ \ |x_n - x_0| < \varepsilon$ y $|f(x_n) - l| < \varepsilon$
Entonces, si $n \geq n_0 \ \ |f(x_n) - l| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \to l$

$(\Leftarrow$
Supongamos $l \neq \lim f(x) \ \ \Rightarrow \exists \varepsilon > 0, \ \forall \delta > 0 \qquad \exists x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \shortparallel f(x) \notin B(l, \varepsilon)$.
Es decir, que existe un ε fijo tal que hay un x cuya imagen está fuera de la bola con centro el límite l
Tomamos $\delta = \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in B\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \setminus \{x_0\} \shortparallel f(x) \notin B(l, \varepsilon)$. Entonces $x_n \to x_0$ pero $f(x_n) \nrightarrow l$
La conclusión a la que llegamos es absurda.

La demostración de la unicidad de los límites laterales es similar a las anteriores. $\square$

Lema 1. *Límites laterales y continuidad[**?**]*

1. f tiene límite en $x_0 \Leftrightarrow f\left(x_0^-\right) = f\left(x_0^+\right)$
2. f es continua en $x_0 \Leftrightarrow f\left(x_0^-\right) = f\left(x_0^+\right) = f\left(x_0\right)$

Demostración. //Las demostraciones las he hecho yo, con que no os fiéis mucho de ellas
1. f tiene límite en $x_0 \Leftrightarrow f\left(x_0^-\right) = f\left(x_0^+\right)$
$\Rightarrow)$

$$\exists \, l = \lim_{x \to x_0} f(x) \ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \, /si \, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in B(l, \varepsilon) \begin{cases} x' \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow & f(x') \in B(l, \varepsilon) \\ x' \in (x_0, x_0 + d) \Rightarrow & f(x') \in B(l, \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow$$

$f(x'^-) = f(x'^+)$

$(\Leftarrow$

$$\text{Si } f\left(x_0^-\right) = f\left(x_0^+\right) \Rightarrow \begin{cases} x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ x \in (x_0, x_0 + d) \end{cases} \Rightarrow x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in B(l, \varepsilon) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x)$$

2. f es continua en $x_0 \Leftrightarrow f\left(x_0^-\right) = f\left(x_0^+\right) = f\left(x_0\right)$
$\Rightarrow)$

$$f \text{ es continua en } x_0, \text{ luego: } \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \, /si \, x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_o), \varepsilon) \begin{cases} x_0 \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow & f(x_0) \in B(l, \varepsilon) \\ x_0 \in (x_0, x_0 + d) \Rightarrow & f(x_0) \in B(l, \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow$$

$f(x_0^-) = f(x_0^+)$

Al ser f continua, $f\left(x_0^-\right) = f\left(x_0^+\right) = f\left(x_0\right)$
($\Leftarrow$
$f\left(x_0^+\right) = f\left(x_0\right) \Rightarrow f$ tiene límite en $x_0 = f(x_0) \Rightarrow \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \,/ si\, x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_o), \varepsilon) \Rightarrow f$ es continua en x_0 □

Definición 45. Límites en un punto. Límites infinitos

1. $\lim f(x)_{x \to x_0^-} = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0\ \exists \delta > 0 \,/ x \in (x_0 - \delta, x_0) \ \Rightarrow M < f(x)$
2. $\lim f(x)_{x \to x_0^-} = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0\ \exists \delta > 0 \,/ x \in (x_0 - \delta, x_0) \ \Rightarrow f(x) < -M$
3. $\lim f(x)_{x \to x_0^+} = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0\ \exists \delta > 0 \,/ x \in (x_0, x_0 + \delta) \ \Rightarrow M < f(x)$
4. $\lim f(x)_{x \to x_0^+} = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0\ \exists \delta > 0 \,/ x \in (x_0, x_0 + \delta) \ \Rightarrow f(x < -M)$

Definición 46. Discontinuidades. Clasificación
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$

1. Discontinuidades de primera especie: $\exists f\left(x_0^-\right), f\left(x_0^+\right)$
   a) $f\left(x_0^-\right) \neq f\left(x_0^+\right)$: Discontinuidad de salto
   b) $f\left(x_0^-\right) = f\left(x_0^+\right)$: Discontinuidad evitable
2. Discontinuidades de segunda especie: $\nexists f\left(x_0^-\right)\ o \nexists f\left(x_0^+\right)$

4.3. Funciones monótonas

Definición 47. Funciones monótonas
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

- f es monótona creciente $\Leftrightarrow \forall x, y \in [a, b]\ /x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
  - f es estrictamente monótona creciente $\Leftrightarrow \forall x, y \in [a, b]\ /x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- f es monótona decreciente $\Leftrightarrow \forall x, y \in [a, b]\ /x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
  - f es estrictamente monótona decreciente $\Leftrightarrow \forall x, y \in [a, b]\ /x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Teorema 16.
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monótona creciente
Entonces $\forall x \in (a, b)\,,\ \exists f\left(x^-\right), f\left(x^+\right)$ tales que $f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+)$ y se tiene:

$$\begin{cases} f\left(x^-\right) = & \sup \{f\left(t\right), \, a < t < x\} \\ f\left(x^+\right) = & \inf \{f\left(t\right), \, x < t < b\} \end{cases}$$

Además si $x, y \in (a, b)\,,\ x < y\ \Rightarrow f(x^+) \leq f(y^-)$

Demostración.
Sea $x \in (a, b)$ fijo y sean los conjuntos $A_x = \{f(t),\, a < t < x\}$ y $B_x = \{f(t),\, x < t < b\}$, con $A_x, B_x \neq \emptyset$, es decir, que los valores están definidos en el intervalo.

Entonces tenemos que $f(x)$ es cota superior de A_x(ya que si $t < x \Rightarrow f(t) \leq f(x)$) y también es cota inferior de B_x(ya que $x < t \Rightarrow f(x) \leq f(t)$)

Luego como A_x y B_x son ambos distintos del vacío, y están acotados superior e inferiormente respectivamente, decimos $\begin{matrix} \exists\, \xi = \sup\, A_x \\ \exists\, \eta = \inf\, B_x \end{matrix}$ y se tiene que $\xi \leq f\left(x\right) \leq \eta$

Veamos que $\xi = f(x^-)$. Sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists t_0 \,/ a < t_0 < x$, entonces $\xi - \varepsilon < f(t_0) \leq \xi$ por una de las propiedades del supremo.

Como la función f es monótona $\Rightarrow$ si $t_0 < t < x$; $\ \xi - \varepsilon < f(t_0) \leq \xi$

Sea $\delta = x - t_0 > 0$; si $x \in (\underset{t_0}{\underset{\downarrow}{x - \delta}}, x) \Rightarrow f(x) \in \big(\xi - \varepsilon, \xi\big] \subset (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$. Cumple la definición de límite lateral, con lo cual $\xi = f\left(x^-\right)$

Veámoslo ahora para η, el proceso es totalmente análogo:
Sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists t_1 \,/ x < t_1 < b$, entonces $\eta \leq f(t_1) < \eta + \varepsilon$ por una de las propiedades del supremo.
Como la función f es monótona $\Rightarrow$ si $x < t < t_1$; $\eta \leq f(t_1) < \eta + \varepsilon$
Sea $\delta = t_1 - x > 0$; si $x \in (x, \underset{t_1}{\underset{\downarrow}{x + \delta}} \Rightarrow f(x) \in \big[\eta, \eta + \varepsilon\big) \subset (\eta - \varepsilon, \eta + \varepsilon)$. Cumple la definición de límite lateral, con lo cual $\eta = f\left(x^+\right)$

Además, si $x, y \in (a, b)\,,\; x < y \Rightarrow \exists t \,/ x < t < y$ tal que $f\left(x^+\right) \leq f\left(t\right) \leq f\left(y^-\right)$

□

Teorema 17.
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monótona. Entonces, si la función presenta discontinuidades, éstas son numerables

Demostración.
Supongamos que la función f es creciente. Sabemos que una función f es discontinua en un punto $\Leftrightarrow f\left(x^-\right) < f\left(x^+\right)$
Sea $x \in (a, b) \,/ f$ es discontinua en x y sea $r(x) \in \mathbb{Q} / f\left(x^-\right) < r(x) < f\left(x^+\right)$.

Así, tenemos $g := \begin{array}{ccc} \{x \in (a, b) \mid f \text{ discontinua en } x\} & \to & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & r\left(x\right) \end{array}$,
Como sabemos, comprobar la numerabilidad de un conjunto consiste en ver si esta función g es inyectiva.
Sean x_1, x_2 puntos de (a, b) en los cuales f es discontinua, y $x_1 < x_2$. Sabemos que $f\left(x_1^+\right) \leq f\left(x_2^-\right) \Rightarrow r\left(x_1\right) < f\left(x_1^+\right) \leq f\left(x_2^-\right) < r\left(x_2\right) \Rightarrow r\left(x_1\right) \neq r\left(x_2\right)$
Entonces, g es inyectiva. □

4.4. Continuidad uniforme

Definición 48. Continuidad uniforme.
Sean (M, d) y (N, d') espacios métricos y $f : M \to N$, f es dice uniformemente continua en $M \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \,/ \forall\, x \in M \;\, d(x, y) < \delta \Rightarrow d'\left(f(x), f(y)\right) < \varepsilon$

Observación.

1. Si f es uniformemente continua en $M \Rightarrow f$ es continua en M. El recíproco no siempre se cumple.

2. $M = N = \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua.
   Sea $\varepsilon = 1$ y $\delta > 0$ y $x \in \mathbb{R}$. Entonces:
   $|f(x) - f(x + \delta)| = \left|x^2 - (x + \delta)^2\right| = \left|\delta^2 + 2x\delta\right| = \delta\left|\delta + 2x\right| \underset{\text{basta tomar } \delta + 2x > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow x > \left(\frac{1}{\delta} - \delta\right)\frac{1}{2}}{<} 1(< \varepsilon)$. Como veremos después, en un intervalo compacto la función si es uniformemente continua

3. (Problema 107). Si $f : M \to \mathbb{K}\,(\mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C})$ es tal que $\exists L > 0 \;/\; |f(x) - f(y)| \leq L \cdot d(x, y) \;\; \forall x, y \in M \;\Rightarrow f$ es uniformemente continua. Una función así se dice de tipo *lipschitziana* (o de clase Lipschitz)

4. (Problema 107). Si $f : M \to \mathbb{K} \;/\; \exists L > 0 \,/\, \alpha \in (0, 1] \,/\, |f(x) - f(y)| \leq L \cdot d(x, y)^\alpha \;\; \forall x, y \in M$ la función es de tipo *hölderiana* (o de clase Hölder)

Teorema 18. *Uniformidad continua en espacios compactos*
Sean $(M, d)\, y\, (N, d')$ espacios métricos y $f : M \to N$ continua. Si $K \subset M$ compacto $\Rightarrow f : K \to N$ es uniformemente continua.

Demostración.
Sea $\varepsilon > 0$ y $x \in K$. Como f es continua en x entonces $\exists \delta_x > 0$ tal que $f\left(B\left(x, \delta_x\right)\right) \subset B\left(f(x), \varepsilon\right)$

Como $K \subset \bigcup_{x\in K} B\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right) \Rightarrow K$ es compacto $\Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{N}/x_1, \ldots, x_m \in K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)$ y sea $\delta = \text{mín}\left\{\frac{\delta_{x_i}}{2}\ i = 1, ...m\right\} > 0$

Si $x, y \in K$, veamos que $\exists i \in \{1, ..., m\} / x, y \in B\left(x_i, \delta_{x_i}\right)$

Como $x \in K \Rightarrow \exists\, i/x \in B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right) \Rightarrow d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} < \delta_{x_i}$

Entonces: $d'\left(f(x), f(y)\right) \leq d'\left(f(x), f(x_i)\right) + d'\left(f(x_i), f(y)\right) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ □

Proposición 59. *Sucesiones de Cauchy en funciones uniformemente continuas*

Si $f : M \to N$ es uniformemente continua, entonces si en M se escoge una sucesión de Cauchy, sus imágenes son también una sucesión de Cauchy

Demostración. [?]

Sean (M, d) y (N, d')

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces $\exists\delta > 0$ /para $u, v \in M$ arbitrarios $d(u, v) < \delta \Rightarrow d'\left(f(u), f(v)\right) < \varepsilon$

Como $\{x_n\}$ es sucesión de Cauchy, $\exists n_0 \,/\, \forall n, m \geq n_0$ se tiene que $|x_m - x_n| < \delta$, como f es uniformemente continua, entonces $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n)$ es una sucesión de Cauchy. □

Capítulo 5

Cálculo diferencial

5.1. Derivada de una función

5.1.1. Derivada en un punto. Reglas de cálculo

Definición 49. Derivada en un punto

Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $x_0\in(a,b)$ se llama *derivada* en f en x_0 a

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Observación 22. Interpretación geométrica

pendiente de la secante entre x_0 y $x_0+h\equiv\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\equiv tg(\alpha)$

pendiente de la tangente en $x_0\equiv\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Observación 23. Notación alternativa

Si llamamos $h=t-t_0$, la derivada queda expresada como $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ y llamamos a éste cociente *cociente incremental*

Proposición 60. *Si existe la derivada en un punto, la función es continua en ese punto*

Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y sea $x_0\in(a,b)$ si $\exists f'(x_0)\Rightarrow f$ es continua en x_0

Demostración.

$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h\underset{h\to 0}{\longrightarrow}f'(x_0)\cdot 0=0$ es decir, $\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)$ □

Observación 24.

1. El recíproco no se cumple. La función valor absoluto es continua en todo $\mathbb{R}$, y es derivable en todos los puntos salvo en 0, ya que los límites de la derivada por derecha e izquierda son distintos (ni siquiera existe el limite de la derivada en 0)

2. Existen funciones continuas en todo $\mathbb{R}$ que no son derivables en ningún punto. Weierstrass fue quien lo demostró (ca. 1872). A este tipo de funciones se les conoces como *funciones de Weierstrass.* Por ejemplo: $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos(3^n x)$.

Proposición 61. *Reglas de cálculo de derivadas*

Sean $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $t_0\in(a,b)$ con f,g derivables en t_0. Entonces

1. $f+g$ es derivable en t_0 y $(f+g)'(t_0)=f'(t_0)+g'(t_0)$

2. $\forall a\in\mathbb{R}\quad a\cdot f$ es derivable en t_0 y $(a\cdot f)'(t_0)=a\cdot f'(t_0)$

3. $f\cdot g$ es derivable en t_0 y $(f\cdot g)'(t_0)=f'(t_0)\cdot g(t_0)+f(t_0)\cdot g'(t_0)$

4. Si $g(t_0)\neq 0\Rightarrow\frac{f}{g}$ es derivable en t_0 y $\left(\frac{f}{g}\right)'(t_0)=\frac{f'(t_0)\cdot g(t_0)-f(t_0)\cdot g'(t_0)}{g^2(t_0)}$

Demostración. □

1. $\frac{(f+g)(t)-(f+g)(t_0)}{t-t_0} = \frac{f(t)+g(t)-(f(t_0)+g(t_0))}{t-t_0} = \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} + \frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0} \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} f'(t_0)+g'(t_0)$
   Por tanto $(f+g)'(t_0) = f'(t_0)+g'(t_0)$
2. $\frac{(a\cdot f)(t)-(a\cdot f)(t_0)}{t-t_0} = \frac{a\cdot f(t)-a\cdot f(t_0)}{t-t_0} = a\cdot\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} a\cdot f'(t_0)$
   Por tanto $(a\cdot f)'(t_0) = a\cdot f'(t_0)$
3. $\frac{(f\cdot g)(t)-(f\cdot g)(t_0)}{t-t_0} \overset{\pm f(t)\cdot g(t_0)}{=} \frac{(f)(t)\cdot g(t)-(f)(t_0)\cdot g(t_0)+f(t)\cdot g(t_0)-f(t)\cdot g(t_0)}{t-t_0} = f(t)\cdot\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0} + g(t_0)\cdot\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \underset{t\to t_0}{\longrightarrow}$
   $f(t_0)\cdot g'(t_0)+g(t_0)\cdot f'(t_0)$
   Por tanto $(f\cdot g)(t_0) = f(t_0)\cdot g'(t_0)+g(t_0)\cdot f'(t_0)$
4. Como $g(t_0)\neq 0 \Rightarrow \exists\,\delta>0 \shortparallel$ si $t\in(t_0-\delta,t_0+\delta)\;\; g(t)\neq 0$
   Sea $t\in(t_0-\delta,t_0+\delta)$:
   $\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(t)-\left(\frac{f}{g}\right)(t_0)}{t-t_0} = \frac{\frac{f(t)}{g(t)}-\frac{f(t_0)}{g(t_0)}}{t-t_0} = \frac{f(t)\cdot g(t_0)-g(t)\cdot f(t_0)}{g(t)\cdot g(t_0)(t-t_0)} \overset{\pm f(t_0)\cdot g(t_0)}{=} \frac{g(t_0)\cdot(f(t)-f(t_0))-f(t_0)\cdot(g(t)-g(t_0))}{g(t)\cdot g(t_0)(t-t_0)} = \frac{g(t_0)\cdot(f(t)-f(t_0))}{g(t)\cdot g(t_0)(t-t_0)} -$
   $\frac{f(t_0)\cdot(g(t)-g(t_0))}{g(t)\cdot g(t_0)(t-t_0)} \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} \frac{g(t_0)}{g^2(t_0)}\cdot f'(t_0) - \frac{f(t_0)}{g^2(t_0)}\cdot g'(t_0)$
   Por tanto $\left(\frac{f}{g}\right)'(t_0) = \frac{f'(t_0)\cdot g(t_0)-f(t_0)\cdot g'(t_0)}{g^2(t_0)}$

Proposición 62. *Regla de la cadena*
Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $t_0\in(a,b)$ y $g:(c,d)\to\mathbb{R} \shortparallel f$ es derivable en t_0, y g es derivable en $f(t_0)$.
Entonces $\exists\,\delta>0 \shortparallel g\circ f$ está definida en $(t_0-\delta,t_0+\delta)$, $g\circ f$ es derivable en t_0 y además:

$$(g\circ f)'(t_0) = g'(f(t_0))\cdot f'(t_0)$$

Demostración.
Como $f(t_0)\in(c,d)$ (que es un abierto) $\Rightarrow \varepsilon>0 \shortparallel (f(t_0)-\varepsilon, f(t_0)+\varepsilon)\subset(c,d)$.
Además, como f es continua en x_0, dado ese $\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0 \shortparallel f\,(t_0-\delta,t_0+\delta)\subset(f(t_0)-\varepsilon,f(t_0)+\varepsilon)\subset(c,d)\Rightarrow\forall\,t\in(t_0-\delta,t_0+\delta)\;\;(g\circ f)\,(t)$ está bien definido
Sea ahora una función $G(y) = \begin{cases}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & y\in(c,d),\;y\neq y_0\\ g'(y_0) & y=g_0\end{cases}$
que es continua en $f(t_0)=y_0$, ya que $\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = g'(y_0) = G(y_0)$
$g(y)-g(y_0) = G(y)\cdot(y-y_0)\quad y\in(c,d)$ tomando $y=f(t)\;\; t\in(t_0-\delta,t_0+\delta)$ dividimos por $t-t_0$: $\frac{g(f(t))-g(f(t_0))}{t-t_0} = G\,(f(t))\cdot\frac{y-y_0}{t-t_0}$
Ahora bien, como $t\to t_0$ es lo mismo que $f(t)\to f(t_0)=y\to y_0$:
$\lim\limits_{t\to t_0}\frac{g(f(t))-g(f(t_0))}{t-t_0} = \lim\limits_{t\to t_0}G(y)\cdot\lim\limits_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = (g\circ f)'(t_0) = g'\,(f(t_0)\cdot f'(t_0)$.
Por tanto $(g\circ f)'(t_0) = g'(f(t_0))\cdot f'(t_0)$ □

Proposición 63. *Derivada de la función inversa*
Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, estrictamente monótona y continua; y sea $f^{-1}: I\to(a,b)$ ($I=f(a,b)$ es un invervalo; f^{-1} es continua y estrictamente monótona)
Sea $t_0\in(a,b)\shortparallel f$ es derivable en t_0 y $f^{-1}(t_0)\neq 0$; entonces f^{-1} es derivable en $f(t_0)$ y:

$$\left(f^{-1}\right)'(f(t_0) = \frac{1}{f'(t_0)}$$

Demostración.
Supongamos demostrado que f^{-1} es derivable en $f(t_0)=y_0$ y llamamos $g=f^{-1}\Rightarrow g\,(f\,(t))=t$
Por la regla de la cadena (en t_0): $g'\,(f(t_0))\cdot f'(t_0)=1\Rightarrow g'\,(f\,(t_0)) = \frac{1}{f'(t_0)}$

Veamos que f^{-1} es derivable en $f(t_0)$. Mantenemos que $g=f^{-1}$ y $f(t_0)=y_0$.
$$\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \frac{t-t_0}{f(t)-f(t_0)} = \frac{1}{\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}}$$
Como $y\in I=f(a,b)\Rightarrow\exists!\,t\in(a,b)\shortparallel y=f(t)$ por ser la función biyectiva
$y\to y_0\Leftrightarrow t\to t_0$
$$\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_o)}{y-y_0} = \lim_{t\to t_0}\frac{1}{\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}} = \frac{1}{f'(t_0)}$$ □

5.1.2. Función derivada. Máximos y mínimos de una función

Definición 50. Función derivada
Si $f : (a, b) \to \mathbb{R} \shortparallel f$ es derivable $\forall\, t \in (a, b)$, se llama función derivada a:

$$\begin{array}{ccc} f'\,(a,b) & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f'\,(t) \end{array}$$

Definición 51. Función diferenciable
En concepto de función diferenciable es una generalización de la derivabilidad, pero en un espacio cualquiera, y con varias variables.
Si $f^{-1}(a, b) \to \mathbb{R}$ es derivable en $t_0 \in (a, b)$, se llama *diferencial de f en t_0* a:

$$R(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \qquad\qquad t \in (a, b)$$

Lema 2.
Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable en t_0. Entonces:

1. Si $f'(t_0) > 0 \Rightarrow \exists\delta > 0 \shortparallel t \in (t_0 - \delta, t_0)$ y $s \in (t_0, t_0 + \delta) \Rightarrow f(t) < f(t_0) < f(s)$
2. Si $f'(t_0) < 0 \Rightarrow \exists\delta > 0 \shortparallel t \in (t_0 - \delta, t_0)$ y $s \in (t_0, t_0 + \delta) \Rightarrow f(t) > f(t_0) > f(s)$

Demostración. □

1. Si $f'(t_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} > 0 \qquad \left(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \shortparallel \text{si } |h| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} - f'(t_0)\right| < \varepsilon\right)$
   Como $f'(t_0) > 0 \Rightarrow \exists\delta > 0 \shortparallel |h| < \delta \Rightarrow \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} > 0$
   Si $0 < h < \delta \Rightarrow f(t_0 + h) > f(t_0)$. Si llamamos a $t_0 + h = s \Rightarrow s \in (t_0, t_0 + \delta)$
   Si $-\delta < h < 0 \Rightarrow f(t_0 + h) < f(t_0)$. Si llamamos $t_0 + h = t \Rightarrow t \in (t_0 - \delta, t_0)$

2. Si $f'(t_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} < 0 \qquad \left(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \shortparallel \text{si } |h| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} - f'(t_0)\right| < \varepsilon\right)$
   Como $f'(t_0) < 0 \Rightarrow \exists\delta > 0 \shortparallel |h| < \delta \Rightarrow \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} < 0$
   Si $0 < h < \delta \Rightarrow f(t_0 + h) < f(t_0)$. Si llamamos a $t_0 + h = s \Rightarrow s \in (t_0, t_0 + \delta)$
   Si $-\delta < h < 0 \Rightarrow f(t_0 + h) > f(t_0)$. Si llamamos $t_0 + h = t \Rightarrow t \in (t_0 - \delta, t_0)$

Definición 52. Máximos y mínimos relativos (o locales)
Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y sea $c \in (a, b)$

1. Decimos que c es un *máximo relativo* (o local) de f en ese intervalo si y sólo si $\exists\delta > 0 \shortparallel t \in (c - \delta, c + \delta) \quad f(t) \leq f(c)$
2. Decimos que c es un *mínimo relativo* (o local) de f en ese intervalo si y sólo si $\exists\delta > 0 \shortparallel t \in (c - \delta, c + \delta) \quad f(c) \leq f(t)$

5.2. Teoremas destacados. Reglas de l'Hôpital

5.2.1. Teorema de Rolle. Teorema del valor medio. Teorema de Darboux

Teorema 19.
Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $c \in (a, b)$ y f es derivable en c
Entonces si c es un máximo o un mínimo relativo de $f \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f'(c) = 0$

Demostración.

Por el lema anterior si $f'(c) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \shortparallel t \in (c-\delta, c)$ y $s \in (c, c+\delta) \Rightarrow f(t) < f(c) < f(s)$, que contradice que c es máximo o mínimo relativo de f

Por otra parte, si $f'(c) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \shortparallel t \in (c-\delta, c)$ y $s \in (c, c+\delta) \Rightarrow f(s) < f(c) < f(t)$, que contradice que c es máximo o mínimo relativo de f

Con lo cual, necesariamente $f'(c) = 0$ $\square$

Teorema 20. *Teorema de Rolle*

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces

$$\exists c \in (a, b) \shortparallel f'(c) = 0$$

Demostración.

Como $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es continua, por el teorema de Weierstrass, la función alcanza su máximo y su mínimo absolutos en $[a, b]$

Caso 1. Si $\exists t \in (a, b) \shortparallel f(t) < f(a) = f(b) \Rightarrow$ el mínimo absoluto se alcanza en $c \in (a, b) \Rightarrow f'(c) = 0$

Caso 2. Si $\exists t \in (a, b) \shortparallel f(a) = f(b) < f(t) \Rightarrow$ el máximo absoluto se alcanza en $c \in (a, b) \Rightarrow f'(c) = 0$

Caso 3. Si $\forall t \in (a, b)$ se tiene que $f(t) = f(a) = f(b) \Rightarrow f$ es constante en $(a, b) \Rightarrow f'(t) = 0\ \forall t \in (a, b)$

$\square$

Teorema 21. *Teorema del valor medio (o de los incrementos finitos)*

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable en (a, b). Entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración.

Sea $g(x) = f(x) - \lambda x$ $\quad$ λ a elegir para g, que cumple el teorema de Rolle

$g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable en (a, b)

Para que cumpla el teorema de Rolle $g(a) = g(b) \Rightarrow f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$; $\lambda (b - a) = f(b) - f(a) \Rightarrow \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\exists c \in (a, b) \shortparallel g'(c) = 0 \to f'(c) - \lambda \Leftrightarrow f'(c) = \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\square$

Proposición 64. *Derivabilidad y carácter de una función*

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable

1. Si $f(t) \leq 0 \quad \forall t \in (a, b) \Rightarrow f$ es monótona decreciente
2. Si $f(t) < 0 \quad \forall t \in (a, b) \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente
3. Si $f(t) \geq 0 \quad \forall t \in (a, b) \Rightarrow f$ es monótona creciente
4. Si $f(t) > 0 \quad \forall t \in (a, b) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente

Demostración.

Sean $t_1, t_2 \in (a, b) \shortparallel t_1 < t_2$

Aplicando el teorema del valor medio en $[t_1, t_2] \Rightarrow \exists c \in (t_1, t_2) \shortparallel f'(c) = \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$

1. Si $f'(c) \leq 0 \Rightarrow f(t_2) \leq f(t_1)$
2. Si $f'(c) < 0 \Rightarrow f(t_2) < f(t_1)$

3. Si $f'(c) \geq 0 \Rightarrow f(t_2) \geq f(t_1)$
4. Si $f'(c) > 0 \Rightarrow f(t_2) > f(t_1)$

$\square$

Teorema 22. *Teorema del valor medio generalizado*
Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas y derivables en $(a, b) \shortmid\shortmid g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Demostración.
Sea $H : [a, b] \to \mathbb{R} \shortmid\shortmid H(t) = f(t) - \lambda g(t);\ \lambda$ a elegir. Además, H, que cumple el teorema de Rolle, es derivable en (a, b) .
$H(a) = f(a) - \lambda g(a) = H(b) = f(b) - \lambda g(b)$; Entonces, despejando $\lambda : \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Como cumple el teorema de Rolle, $\exists c \in (a, b) \shortmid\shortmid H'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \lambda g'(c) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ $\square$

Teorema 23. *Teorema de Darboux (o de los valores intermedios de la derivada)*
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable (pero con derivada no necesariamente continua) y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f'(a) < f'(b)$. Entonces, si $f'(a) < k < f'(b)$, se tiene que:

$$\exists c \in (a, b) \shortmid\shortmid f'(c) = k$$

Demostración.
Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R} \shortmid\shortmid g(x) = f(x) - kx$. Como g es continua y está definida en un intervalo cerrado, por el teorema de Weierstrass, g alcanza su máximo y su mínimo absolutos en $[a, b]$. Entonces:
$g'(a) = f'(a) - k < 0$
$g'(b) = f'(b) - k > 0$

Con lo cual se tiene que el mínimo no se alcanza ni en a ni en b. El mínimo se alcanzará en un $c \in (a, b) \shortmid\shortmid$ $g'(c) = 0 = f'(c) - k \Rightarrow f'(c) = k$ $\square$

5.2.2. Aplicaciones de la derivada

Definición 53. Concavidad y convexidad
Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable en $t_0 \in (a, b)$, entonces:

1. f es cóncava (mirada desde $+\infty$) en $t_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0 \shortmid\shortmid t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \qquad f(t) > f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \qquad (t \neq t_0)$
2. f es convexa (mirada desde $+\infty$) en $t_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0 \shortmid\shortmid t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \qquad f(t) < f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \qquad (t \neq t_0)$

Es decir, si la recta tangente en un punto (de ecuación $f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$) está por encima (respec. debajo) la función en ese punto es cóncava (respec. convexa)

Definición 54. Derivadas sucesivas
Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable y sea $\begin{array}{ccc} f'\,(a,b) & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f'(t) \end{array}$, entonces:

1. Si f' es derivable $\Rightarrow f''(t) = (f')'(t)$ y se llama a ésta *derivada segunda*.
2. Sucesivamente se tiene $f^{k)}(t) = \left(f^{k-1)}\right)'(t) \qquad k = 1, \ldots$ Por convenio se considera $f^{0)} \equiv f$
3. Una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ se dice que es de clase $\mathcal{C}^k(a, b) \qquad k = 1, 2, 3\ldots$ se f tiene k derivadas en (a, b) y éstas son <u>continuas</u>.
4. Una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ se dice que es de clase $\mathcal{C}^\infty(a, b) \qquad$ si f es de clase $\mathcal{C}^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Proposición 65.
Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable y $t_0 \in (a, b)$
A izquierda de t_0 (1,2) a derecha de t_0 (3,4)

1. $f'(\eta) < f'(t_0) \quad \forall \eta \in (a, t_0) \Rightarrow f(t) > f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \qquad \forall t \in (a, t_0)$
2. $f'(\eta) > f'(t_0) \quad \forall \eta \in (a, t_0) \Rightarrow f(t) < f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \qquad \forall t \in (a, t_0)$

3. $f'(\xi) < f'(t_0) \quad \forall \xi \in (t_0, b) \Rightarrow f(t) < f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \qquad \forall t \in (t_0, b)$
4. $f'(\xi) > f'(t_0) \quad \forall \xi \in (t_0, b) \Rightarrow f(t) > f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \qquad \forall t \in (t_0, b)$

El apartado 1. viene a decir que si la derivada es creciente, la imagen está por encima de la recta tangente, esto es, la gráfica es cóncava. En 2. que es convexa a la izquierda de t_0. En 3. la función es convexa a la derecha de t_0. En 4. que es cóncava.

Demostración.

Si $t \in (a, t_0) \overset{TVM}{\Rightarrow} \exists \eta \in (t, t_0) \shortparallel \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = f'(\eta) \Leftrightarrow f(t) = f(t_0) + f'(\eta)(\overset{<0}{t - t_0})$ ☐

1. Teníamos por hipótesis que $f'(\eta) < f'(t_0)$, luego $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} < f'(t_0) \Rightarrow f(t) > f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$ (Como $t - t_0 < 0$, al multiplicar a ambos lados por un número negativo cambia la desigualdad.)
2. $\Rightarrow f(t) < f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$

   Ahora si $t \in (t_0, b) \overset{TVM}{\Rightarrow} \exists \xi \in (t_0, t) \shortparallel \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = f'(\xi) \Leftrightarrow f(t) = f(t_0) + f'(\xi)(\overset{>0}{t - t_0})$
3. Teníamos por hipótesis que $f'(\xi) < f'(t_0)$, luego $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} < f'(t_0) \Rightarrow f(t) < f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$ (Como $t - t_0 > 0$, al multiplicar a ambos lados por un número positivo la desigualdad se mantiene)
4. $\Rightarrow f(t) > f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$

Corolario 9.

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable y $t_0 \in (a, b)$. Entonces:

1. $f'(\eta) < f'(t_0) < f'(\xi) \qquad \forall \eta \in (a, t_0), \qquad \forall \xi \in (t_0, b)$
   $f(t) > f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \qquad \forall t \in (a, b) \setminus \{t_0\}$
   Si $f''(t_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \shortparallel f'(\eta) < f'(t_0) < f'(\xi) \qquad \forall \eta \in (t_0 - \delta, t_0), \qquad \forall \xi \in (t_0, t_0 + \delta) \Rightarrow$
   $f(t) > f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \qquad \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \quad t \neq t_0$
   Es decir, que la función es cóncava en t_0
2. Si $f'(\eta) > f'(t_0) > f'(\xi) \qquad \forall \eta \in (a, t_0), \qquad \forall \xi \in (t_0, b)$
   $f(t) > f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \qquad \forall t \in (a, b) \setminus \{t_0\}$
   Si $f''(t_0) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \shortparallel f'(\eta) > f'(t_0) > f'(\xi) \qquad \forall \eta \in (t_0 - \delta, t_0), \qquad \forall \xi \in (t_0, t_0 + \delta) \Rightarrow$
   $f(t) < f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \qquad \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \quad t \neq t_0$
   Es decir, que la función es convexa en t_0

Demostración. ☐

1. Es "suma" de los apartados 1. y 3. de la proposición anterior:
   Si $f''(t_0) > 0 \qquad f''(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{f'(t)-f'(t_0)}{t-t_0} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \shortparallel f'(\eta) < f'(t_0) < f'(\xi) \qquad \forall \eta \in (t_0 - \delta, t_0), \qquad \forall \xi \in (t_0, t_0 + \delta)$
2. Es "suma" de los apartados 2. y 3. de la proposición anterior:
   Si $f''(t_0) < 0 \qquad f''(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{f'(t)-f'(t_0)}{t-t_0} < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \shortparallel f'(\eta) > f'(t_0) > f'(\xi) \qquad \forall \eta \in (t_0 - \delta, t_0), \qquad \forall \xi \in (t_0, t_0 + \delta)$

Corolario 10.

Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable

1. Si $f'(t)\,(\Rightarrow f''(t) > 0 \quad \forall t \in (a, b))$ es estrictamente creciente en $(a, b) \Rightarrow f$ es cóncava en $t_0 \qquad \forall t_0 \in (a, b)$
2. Si $f'(t)\,(\Rightarrow f''(t) < 0 \quad \forall t \in (a, b))$ es estrictamente decreciente en $(a, b) \Rightarrow f$ es convexa en $t_0 \qquad \forall t_0 \in (a, b)$

Demostración.

No es más que el resultado de acumular los colorarios y las proposiciones anteriores. ☐

Corolario 11.

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable y $t_0 \in (a, b) \shortparallel f'(t_0) = 0$

1. Si $f'(\eta) \leq 0 \quad \forall \eta \in (a, t_0)$ y $f'(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in (t_0, b) \Rightarrow t_0$ es mínimo absoluto de f en (a, b)
   En particular, si $f''(t_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \shortparallel f'(\eta) < 0 \quad \forall \eta \in (t_0 - \delta, t_0)$ y $f'(\xi) > 0 \quad \forall \xi \in (t_0, t_0 + \delta) \Rightarrow$ t_0 es un mínimo relativo de f en (a, b)

2. Si $f'(\eta) \geq 0 \quad \forall \eta \in (a, t_0)$ y $f'(\xi) \leq 0 \quad \forall \xi \in (t_0, b) \Rightarrow t_0$ es máximo absoluto de f en (a, b)
   En particular, si $f''(t_0) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \shortparallel f'(\eta) > 0 \quad \forall \eta \in (t_0 - \delta, t_0)$ y $f'(\xi) < 0 \quad \forall \xi \in (t_0, t_0 + \delta) \Rightarrow$ t_0 es un máximo relativo de f en (a, b)

Demostración.

$$\text{Sea } t \in (a,b) \quad \begin{array}{ll} \text{si} & t \in (a, t_0) \overset{TVM}{\Rightarrow} \exists \eta \in (t, t_0) \shortparallel \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = f'(\eta) \\ \text{si} & t \in (t_0, b) \overset{TVM}{\Rightarrow} \exists \xi \in (t_0, t) \shortparallel \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = f'(\xi) \end{array}$$

1. $\begin{array}{l} f'(\eta) \leq 0 \Rightarrow f(t) - f(t_0) \geq 0 \\ f'(\xi) \geq 0 \Rightarrow f(t) - f(t_0) \geq 0 \end{array} \Rightarrow f(t_0)$ *vale* menos que en cualquier punto de $f \Rightarrow t_0$ es mínimo absoluto

2. $\begin{array}{l} f'(\eta) \geq 0 \Rightarrow f(t) - f(t_0) \leq 0 \\ f'(\xi) \leq 0 \Rightarrow f(t) - f(t_0) \leq 0 \end{array} \Rightarrow f(t_0)$ *vale* más que en cualquier punto de $f \Rightarrow t_0$ es máximo absoluto

Faltan los "en particular"

□

Definición 55. Punto de inflexión
Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable y $t_0 \in (a, b) \shortparallel f'(t_0) = 0$

Si $f'(\eta) \geq 0$ y $f'(\xi) \geq 0 \quad \forall \eta, \xi \in (a, b)$ o
Si $f'(\eta) \leq 0$ y $f'(\xi) \leq 0 \quad \forall \eta, \xi \in (a, b)$

Entonces se dice que t_0 es un punto de inflexión

Observación 25. Si $f'(t_0) = 0$ y $f''(t_0) = 0$ no puede asegurarse con certeza lo que ocurre en t_0

5.2.3. Reglas de l'Hôpital

Teorema 24. *1ª regla de l'Hôpital*
Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables, con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ con $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

1. Supongamos que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$. Entonces si
$$\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

2. Supongamos que $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \lim\limits_{x \to b^-} g(x) = 0$. Entonces si
$$\exists \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \exists \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Demostración.
1) (2) es análogo

- Supongamos que $a \in \mathbb{R}$
  - Supongamos que $A \in \mathbb{R}$
    Dado $\varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \in (a, b) \shortparallel$ si $x \in (a, x_0) \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon$
    Llamamos $f(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = 0$; $g(a) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$;Tenemos que definir la imagen en a porque a no está en el dominio de f.
    Si $x \in (a, x_0)$, por el teorema del valor medio generalizado:
    $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \underset{\substack{\uparrow \\ \exists c \in (a,x) \subset (a,x_0)}}{=} \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(a)} - A \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - A \right| < \varepsilon,$
    es decir:
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A \tag{5.2.1}$$

- Supongamos que $A = \infty$ (para $A = -\infty$ de forma análoga).
  Dado $k > 0 \quad \exists x_0 \in (a,b) \shortparallel$ si $x \in (a, x_0) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > k$
  Llamamos $f(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = 0$; $g(a) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$; Misma razón que antes.
  Si $x \in (a, x_0)$, por el teorema del valor medio:
  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \underset{\exists c \in (a,x) \subset (a,x_o)}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} > k$
  Es decir:
  $$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \tag{5.2.2}$$

- Supongamos que $a = -\infty$
  Podemos suponer que b es negativo ($b < 0$) (y en caso de que no lo fuera cortamos (a,b) por un punto b' tal que (a,b') sea enteramente negativo) y definimos $\begin{cases} F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) \\ G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right) \end{cases}$ tal que: $\frac{1}{t} \in (-\infty, b) \Leftrightarrow t \in \left(\frac{1}{b}, 0\right)$
  Entonces:
  $$F, G : \left(\frac{1}{b}, 0\right) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que:} \begin{cases} \lim\limits_{t \to 0^-} F(t) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{t \to 0^-} G(t) = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0 \end{cases} \tag{5.2.3}$$
  $\begin{cases} F'(t) = f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{-1}{t^2}\right) \\ G'(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{-1}{t^2}\right) \end{cases}$
  $\lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{F'(t)}{G'(t)} = \lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{f'(\frac{1}{t})\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}$. Si llamamos a $1/t = t$, hemos de cambiar el límite: $0^- = a^+$, luego:
  $\lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{f'(\frac{1}{t})\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim\limits_{t \to a^+} = \dfrac{f'(t)}{g'(t)} = A.$
  Por 5.2.1, sabemos que $\lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{F(t)}{G(t)} = \lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{F'(t)}{G'(t)}$ y por 5.2.3, $\lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{F(t)}{G(t)} = \lim\limits_{t \to a^+} \dfrac{f(t)}{g(t)}$, luego uniendo, tenemos:
  $$\lim_{t \to a^+} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \to 0^-} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \to 0^-} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t \to a^+} \frac{f'(t)}{g'(t)} = A$$
  La idea reside en transformar $-\infty$ en 0 con el cambio $t \rightsquigarrow 1/t$ y la clave está en que el cociente de derivadas mantiene el cambio.

□

Teorema 25. *2ª regla de l'Hôpital*
Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivables, con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ con $g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in (a,b)$

1. Supongamos que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = \infty$. Entonces si
   $$\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$
2. Supongamos que $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \lim\limits_{x \to b^-} g(x) = \infty$. Entonces si
   $$\exists \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \exists \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Demostración.
Demostraremos 1., 2. es análogo.

- Supongamos $a \in \mathbb{R}$
  - Supongamos $A \in \mathbb{R}$
    Dado $\varepsilon > 0 \qquad \exists x_0 \in (a,b) \shortparallel$ si $x \in (a, x_0) \qquad \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon$
    Dado $x \in (a, x_0)$ definimos $D(x, x_0)$:
    $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \cdot D(x, x_0)$, es decir, $D(x,x_0) = \frac{f(x)(g(x)-g(x_0))}{g(x)(f(x)-f(x_0))} = \frac{f(x)}{(f(x)-f(x_0))} \cdot \frac{(g(x)-g(x_0))}{g(x)} = \frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}} \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} 1$ (recordemos que, por hipótesis, tanto f como g tendían a ∞)

Con $x \in (a, x_0)$, por el TVM $\quad \exists c \in (x, x_0) \shortmid\shortmid \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot D(x, x_0)$.
$\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| < \varepsilon$, sumemos y restemos $\frac{f'(c)}{g'(c)}$, y sustituimos $\frac{f(x)}{g(x)}$ por $\frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot D(x, x_0)$:
$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \leq \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| + \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot D(x, x_0) - \frac{f'(c)}{g'(c)}\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| + \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right| |D(x, x_0) - 1| \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \leq \varepsilon + (|A| + \varepsilon) |D(x, x_0) - 1|$

Sea $x_0' \in (a, b) \shortmid\shortmid$ si $x \in (a, x_0) \quad |D(x, x_0) - 1| < \varepsilon$
Sea $x_0'' = \text{mín}\{x_0, x_0'\}$ si $x \in (a, x_0'') \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \leq \varepsilon + (|A| + \varepsilon) \cdot \varepsilon$

Por tanto

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A \tag{5.2.4}$$

- Supongamos $A = +\infty$ ($A = -\infty$ es análogo)

  Dado $k > 0 \quad \exists x_0 \in (a, b) \shortmid\shortmid$ si $x \in (a, x_0) \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} > k$
  De la misma forma que antes, si $x \in (a, x_0)$ definimos $D(x, x_0)$: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \cdot D(x, x_0)$ y así $D(x, x_0) \underset{x \to a^+}{\rightarrow} 1$ (x_0 fijo)
  En particular $\exists x_0' \in (a, x_0) \shortmid\shortmid$ si $x \in (a, x_0') \quad D(x, x_0) > \frac{1}{2}$

  Con $x \in (a, x_0) \overset{TVM}{\Rightarrow} \exists c \in (x, x_0) \shortmid\shortmid \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot D(x, x_0)$
  Si $x \in (a, x_0') \subset (a, x_0)$ se tiene que $\frac{f(x)}{g(x)} \geq k \cdot \frac{1}{2} = \frac{k}{2} \Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

- Supongamos $a = -\infty$
  Podemos suponer que b es negativo ($b < 0$) (y en caso de que no lo fuera cortamos (a, b) por un punto b' tal que (a, b') sea enteramente negativo) y definimos:

$$\begin{array}{l} F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) \\ G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right) \end{array} \qquad \frac{1}{t} \in (-\infty, b) \Leftrightarrow t \in \left(\frac{1}{b}, 0\right)$$

$$\begin{array}{l} \lim_{t \to 0^-} F(t) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \\ \lim_{t \to 0^-} G(t) = \lim_{x \to -\infty} g(x) = \infty \end{array}$$

$F(t), G(t)$ derivables en $\left(\frac{1}{b}, 0\right)$
$F'(t) = f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$
$G'(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right) \qquad \left(\neq 0 \quad \forall t \in \left(\frac{1}{b}, 0\right)\right)$ y $\lim_{t \to 0^-} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{t \to 0^-} \frac{F'(t)}{G'(t)} = A$

Luego:

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \tag{5.2.5}$$

$\square$

5.3. Teorema de Taylor

5.3.1. Teorema y polinomios de Taylor

Consideraciones previas

Observación 26.

Consideremos un polinomio $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \qquad a_i, t \in \mathbb{R} \quad i = 1, \ldots, n$

Sea $t_0 \in \mathbb{R}$. Podemos plantearnos la siguiente pregunta: ¿Es posible expresar el polinomio en potencias de mi elección?. Más concretamente, en potencias de $(t - t_0)$; de tal forma que $P(t) = b_0 + b_1(t-t_0) + b_2\left(t - t_0\right)^2 + \cdots + b_n \left(t - t_0\right)^n$ ¿Cuales serían estos b_i?

Veamos que pasa:

$b_0 = P(t_0)$

¿b_1? : $\qquad P'(t) = b_1 + 2b_2(t - t_0) + 3b_3(t - t_0)^2 + \cdots + nb_n(t - t_0)^{n-1}$

$b_1 = P'(t_0)$

¿b_2? : $\qquad P''(t) = 2b_2 + 6b_3(t - t_0) + \cdots + n(n-1)b_n(t - t_0)^{n-2}$

$b_2 = \frac{P''(t_0)}{2}$

$b_3 = \frac{P^{3)}(t_0)}{6} \qquad P'''(t) = 6b_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)b_n(t - t_0)^{n-3}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$b_j = \frac{P^{j)}(t_0)}{j!}$

Luego nuestro polinomio ha quedado: $P(t) = P(t_0) + \frac{P'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{P''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \frac{P'''(t_0)}{3!}(t - t_0)^3 + \cdots + \frac{P^{n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n$

Observación 27. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ con n derivadas en (a, b) y sea $t_0 \in (a, b)$. Entonces el polinomio $P_n(t) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \frac{f'''(t_0)}{3!}(t - t_0)^3 + \cdots + \frac{f^{n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n$

$t \in (a, b)$

$P_n(t_0) = f(t_0) \qquad P'(t_0) = f'(t_0) \qquad \ldots P^{j)}(t_0) = f^{j)}(t_0) \qquad \forall j = 0, \ldots, n$

Observación 28. Si $n = 1$, el polinomio $P_1(t_0)$ que resulta es: $P(t_0) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \equiv R(t) \qquad R(t_0) = f(t_0) \quad R'(t_0) = f'(t_0)$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - R(t)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0) - f'(t_0)}{t - t_0} = f'(t) - f'(t) = 0 \Rightarrow f(t) - R(t) < t - t_0$$

El límite del cociente es 0. Por eso, informalmente, podemos decir que $f(t)$ y $R(t)$ se parecen más que t y t_0

Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ tiene $n+1$ derivadas en (a, b) y $t_0 \in (a, b)$, entonces el polinomio $P_n(t)$

$$P_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{j)}(t_0)}{j!}(t - t_0)^j$$

Teorema 26. *Teorema de Taylor*

Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ tiene $n+1$ derivadas en (a, b) y $t_0 \in (a, b)$, entonces si $t \in (a, b) \qquad \exists c \in (a, b)$ entre t_0 y t ($c \in (t_0, t) \quad$ ó $c \in (t, t_0)$)

$$f(t) = \underbrace{f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n}_{\text{polinomio de Taylor de orden en } t_0 \quad P_n(t)} + \underbrace{\frac{f^{n+1)}(t_0)}{(n+1)!}(t - t_0)^{n+1}}_{\text{resto de Lagrange en } t_0 \ L_n(t, t_0)}$$

Observación 29. Si $f^{n+1)}$ está acotada en un intervalo alrededor de $t_0 \Rightarrow \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - P_n(t)}{(t - t_0)^n} = \lim_{t \to t_0} \frac{L_n(t, t_0)}{(t - t_0)^n} = 0$

Demostración.

Sea $F(t) = f(t) - P_n(t)$ y $G(t) = (t - t_0)^{n+1}$

$F, G : (a, b) \to \mathbb{R}$ tienen $n+1$ derivadas y además $G^{k)}(t) \neq 0 \qquad \forall t \in (a, b) \setminus \{t_0\} \quad k = 0, \ldots, n$

$F^{k)}(t_0) = f^{k)} - P_n^{k)}(t_0) = 0 \qquad k = 0, 1, \ldots, n$

$G^{k)}(t_0) = 0 \qquad k = 0, 1, \ldots, n$

Dado $t \in (a, b)$, por 5.3.1, $\exists c$ *entre* t y t_0 tal que

$$\frac{F(t)}{G(t)} = \frac{F^{n+1)}(c)}{G^{n+1)}(c)} = \frac{f^{n+1)}(c) - P_n^{n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Pasando $G(t)$ multiplicando:

$$f(t) - P_n(t) = \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(t-t_0)^{n+1}$$

□

Lema 3.

Sean $F, G : (a,b) \to \mathbb{R}$ con $n+1$ derivadas en (a,b) y además $G^{k)}(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a,b) \setminus \{t_0\} \quad k = 0, \ldots, n+1$

y supongamos $\lim\limits_{t\to t_0} F^{k)}(t) = \lim\limits_{t\to t_0} G^{k)}(t) = 0 \qquad k = 0, 1, \ldots, n$

Entonces, si $t \in (a,b)$ $\exists c$ entre t *y* t_0 *tal que*

$$\frac{F(t)}{G(t)} = \frac{F^{n+1)}(c)}{G^{n+1)}(c)}$$

Demostración.

Tengamos presente en todo momento que $\lim\limits_{t\to t_0} F^{k)}(t) = \lim\limits_{t\to t_0} G^{k)}(t) = 0 \qquad k = 0, 1, \ldots, n$, lo que hace que $F^{k)}(t_0) = G^{k)}(t_0) = 0$

Si $t \in (a,b) \setminus \{t_0\} \overset{TVM}{\Rightarrow} \exists c_1$ *entre* t y t_0 tal que

$$\frac{F(t)}{G(t)} = \frac{F'(c_1) - F'(t_0)}{G'(c_1) - G'(t_0)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)}$$

De la misma forma, por el teorema del valor medio, si $\exists c_2$ *entre* c_1 y t_0 tal que

$$\frac{F'(c_1) - F'(t_0)}{G(c_1) - G'(t_0)} = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)}$$

Aplicando sucesivamente el teorema del valor medio, llegamos a que $\exists c_{n+1}$ *entre* c_n y t_0 tal que

$$\frac{F^{n+1)}(c_{n+1})}{G^{n+1)}(c_{n+1})} = \cdots = \frac{F^{j)}(c_j)}{G^{j)}(c_j)} = \cdots = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{F(t)}{G(t)} \tag{5.3.1}$$

□

Teorema 27. *Criterio del máximo y mínimo local*

Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ con $n+1$ derivadas y sea $t_0 \in (a,b) \shortparallel 0 = f'(t_0) = f''(t_0) = ... = f^{n-1)}(t_0)$, $f^{n)}(t_0) \neq 0$ y $f^{n+1)}$ es acotada en un intervalo en torno a t_0. Entonces si:

1. Si n es par y $f^{n)}(t_0) > 0 \Rightarrow t_0$ es un <u>mínimo local</u> de f
2. Si n es par y $f^{n)}(t_0) < 0 \Rightarrow t_0$ es un <u>máximo local</u> de f
3. Si n es impar y $\Rightarrow t_0$ es un <u>punto de inflexión</u> de f

Demostración.

Por el teorema de Taylor

Dado $t \in (a,b)$ $\exists c \in (a,b)$ *entre* t_0 *y* $t \shortparallel f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1}$ y sabemos que $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{L_n(t,t_0)}{(t-t_0)^n} = 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \shortparallel |t-t_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{L_n(t,t_0)}{(t-t_0)^n}\right| \leq \frac{1}{2n!}\left|f^{n)}(t_0)\right|$(← ε sacado de la manga) luego:

$$|L_n(t,t_0)| \leq \frac{1}{2n!}\left|f^{n)}(t_0)\right| |t-t_0|^n \tag{5.3.2}$$

Como las derivadas son todas nulas hasta la $n-1$; $P_n(t) = f(t_0) + \frac{f^{n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n$

Por tanto:

$$f(t) - f(t_0) = \frac{f^{n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + L_n(t,t_0)$$

1. Si n es par y $f^{n)}(t_0) > 0$
   $\dfrac{f^{n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + L_n(t,t_0) \geq \dfrac{1}{2n!} f^{n)}(t_0)(t-t_0)^n \geq 0; \quad f(t) \geq f(t_0) \qquad \forall t \shortparallel |t-t_0| < \delta \Leftrightarrow t_0$ es mínimo local.

   ¿Por qué? $L_n(t,t_0)$, aún siendo negativo, al sumarle $\frac{f^{n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n$ le estaríamos quitando como mucho la mitad (por 5.3.2), con lo cual la derivada n-ésima seguiría siendo positiva y en t_0 tendríamos un mínimo local.

2. Si n es par y $f^{n)}(t_0) < 0$
   $f(t) - f(t_0) \leq \frac{1}{2} f^{n)}(t_0)(t-t_0)^n \leq 0 \Rightarrow f(t) \leq f(t_0) \qquad \forall t \shortparallel |t-t_0| < \delta \Leftrightarrow t_0$ es máximo local

   ¿Por qué? $L_n(t,t_0)$, aún siendo positivo, al sumarle $\frac{f^{n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n$ le estaríamos sumando como mucho la mitad (por 5.3.2), con lo cual la derivada n-ésima seguiría siendo negativo y en t_0 tendríamos un máximo local.

3. Si n es impar:
   $$f^{n)} > 0 \begin{cases} t \in (t_0, t_0+\delta) & f(t) \geq f(t_0) \\ t \in (t_0-\delta, t_0) & f(t) \leq f(t_0) \end{cases}$$
   $$f^{n)} < 0 \begin{cases} t \in (t_0, t_0+\delta) & f(t) \leq f(t_0) \\ t \in (t_0-\delta, t_0) & f(t) \geq f(t_0) \end{cases}$$
   En todos los casos t_0 es un punto de inflexión

$\square$

Capítulo 6

Cálculo integral

6.1. La integral de Riemann

6.1.1. Particiones. Sumas de Riemann

Definición 56. Partición de un intervalo

Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo acotado, entonces una partición suya p es:

$$p = \{t_i\}_{i=0}^{n} \quad n \in \mathbb{N} \qquad t_0 = a < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$$

Si p, q son particiones de $[a, b]$, se dice que p es más fina que $q \Leftrightarrow q \subset p$

Definición 57. Sumas de Riemann

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y sea p una partición de $[a, b]$

1. Se llama <u>suma inferior de Riemann de f asociada a p</u> a: $s(f, p) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_j (t_j - t_{j-1})$;
   siendo $m_j = \text{ínf}\{f(t), \quad t \in [t_{j-1}, t_j]\}$. Por tanto la suma infererior es la suma de las áreas de los rectángulos de la partición por debajo de la función.

2. Se llama <u>suma superior de Riemann de f asociada a p</u> a: $S(f, p) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} M_j (t_j - t_{j-1})$;
   siendo $M_j = \sup\{f(t), \quad t \in [t_{j-1}, t_j]\}$. Por tanto la suma superior es la suma de las áreas de los rectángulos de la partición por encima de la función.

Proposición 66.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, y sean p, q particiones de $[a, b]$

1. $s(f, p) \leq S(f, p)$
2. Si p es más fina que q, entonces: $s(f, q) \leq s(f, p) \leq S(f, p) \leq S(f, q)$
3. Si p, q son dos particiones cualesquiera: $s(f, p) \leq S(f, q)$

Demostración.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada □

1. Sea p partición de $[a, b]$ $\qquad p = \{t_j\}_{j=0} \quad t_0 = a; t_n = b$
   $s(f, p) = \sum_{j=1}^{n} m_j (t_j - t_{j-1}) \underset{m_j \leq M_j \ \forall j}{\leq} \sum_{j=1}^{n} M_j (t_j - t_{j-1}) = S(f, p)$

2. Sean p, q particiones, siendo p más fina que q $(p \subset q)$
   $S(f, q) \leq s(f, p)$
   $s(f, q) \leq S(f, p)$

a) Supongamos que p tiene un punto más que q:
$q = \{t_j\} \qquad a = t_0 < ... < t_{k-1} < t_k < ... < t_n = b$ y
$p = q \cup \{z\} \quad a = t_0 < ... < t_{k-1} < z < t_k < ... < t_n = b$

$s(f,p) = \sum_{j=1}^{k-1} m_j\,(t_j - t_{j-1}) + m'_k(z - t_{k-1}) + m''_k(t_k - z) + \sum_{j=k+1}^{n} m_j(t_j - t_{j-1})$
siendo, obviamente $m'_k = \text{ínf}\,\{f(t) \quad t \in [t_{k+1}, z]\}$ y $m''_k = \text{ínf}\,\{f(t) \quad t \in [z, t_k]\}$

Luego $m_k = \text{ínf}\,\{f(t) \quad t \in [t_{k-1}, t_k]\} \leq \text{mín}\,\{m'_k, m''_k\}$
$m'_k\,(z - t_{k-1}) + m''_k\,(t_k - z) \geq m_k\,(z - t_{k-1}) + m_k\,(t_k - z) = m_k\,(t_k - t_{k-1})$
$s(f,p) \geq \sum_{j=1}^{k-1} m_j\,(t_j - t_{j-1}) + m_k(t_k - t_{k-1}) + \sum_{j=k+1}^{n} m_j\,(t_j - t_{j-1}) = s(f,q)$ //no se si la primera es una suma inferior o superior

b) Supongamos que p tiene J puntos más que q:
$p = q \cup \{z_j\}_{j=1}^{J}$

1) Sea $p_1 = q \cup \{z_1\} \Rightarrow s(f,p_1) \geq s(f,q)$
2) Sea $p_2 = p_1 \cup \{z_2\} \Rightarrow s(f,p_2) \geq s(f,p_1)$

...*inducción*
$p_J = p_{J-1} \cup \{z_J\} \Rightarrow s(f,p) \geq s(f,p_{J-1})$

Todo ello implica que $s(f,p) \geq s(f,q)$

3. Si p, q particiones de $[a,b]$
Sea la partición $\tilde{p} = p \cup q$; más fina que p y que q
$s(f,p) \leq s(f,\tilde{p}) \underset{1)}{\leq} S(f,\tilde{p}) \leq S(f,q)$

6.1.2. La integral de Riemann

6.1.2.1. Integrales superior e inferior

Definición 58. Integral superior e inferior de Riemann
Sea $\mathcal{P}\,([a,b])$ el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$

1. Llamamos integral superior de Riemann de f en $[a,b]$ a:

$$\overline{\int_a^b} f(t)\,dt = \text{ínf}\,\{S(f,p) \quad p \in \mathcal{P}\,[(a,b)]\}$$

2. Llamamos integral inferior de Riemann de f en $[a,b]$ a:

$$\underline{\int_a^b} f(t)\,dt = \sup\,\{s(f,p) \quad p \in \mathcal{P}\,[(a,b)]\}$$

3. f es **integrable-Riemann** en $[a,b]$ si y sólo si:

$$\underline{\int_a^b} f(t)\,dt = \overline{\int_a^b} f(t)\,dt, \text{ y en ese caso se escribe } \int_a^b f(t)\,dt$$

Observación 30.

1. Si $q \in \mathcal{P}\,[(a,b)] \Rightarrow \forall p \in \mathcal{P}\,([a,b])$ sabemos que $s(f,q) \leq S(f,p) \Rightarrow \overline{\int_a^b} f(t)\,dt$ está acotada y bien definida.
Idem con $\underline{\int_a^b} f(t)\,dt$

2. $\underline{\int_a^b} f(t)\,dt \leq \overline{\int_a^b} f(t)\,dt$

Ejemplo 16. Integral de una constante

Sea $f(t) = c \qquad t \in [a, b]$ es integrable y $\displaystyle\int_a^b c\,dt = c(b-a)$

Cogemos p una partición cualquiera:

$s(f,p) = \sum_{j=1}^n m_j\,(t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^n c\,(t_j - t_{j-1}) = c\sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) = c\,(b-a)$

$\sum (t_j - t_{j-1})$ puede interpretarse esa suma como una telescópica, o bien directamente como la longitud del intervalo.

$S(f,p) = \sum_{j=1}^n M_j\,(t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^n c\,(t_j - t_{j-1}) = c\sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) = c\,(b-a)$

Como ambas sumas son iguales, f es integrable-Riemann, y $\displaystyle\int_a^b c\,dt = c(b-a)$

Ejemplo 17. Integral de la identidad

Sea $f(t) = t \qquad t \in [0,1]$ es integrable-Riemann y $\displaystyle\int_0^1 t\,dt = \tfrac{1}{2}$

Sea $n \in \mathbb{N} \quad p_n = \left\{t_j = \frac{1}{n}\right\}_{j=0}^n$ una partición de $[0,1] \in \mathcal{P}\left([0,1]\right)$

$$s(f,p_n) = \sum_{j=1}^n m_j\,(t_j - t_{j-1}) \underset{m_j = t_{j-1};\, f \text{ creciente}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{j-1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{j=1}^n j - 1 \underset{j=k-1}{=} \sum_{k=0}^{n-1} k =$$
$$= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2}$$

$$S(f,p_n) = \sum_{j=1}^n M_j\,(t_j - t_{j-1}) \underset{M_j = t_j;\, f \text{ creciente}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{j=1}^n j = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{2}$$

Por tanto $\sup_n s(f,p_n) = \frac{1}{2} = \text{ínf}_n\, S(f,p_n)$, para esta partición p_n concreta.

$$\text{Como} \begin{cases} \sup_n s(f,p_n) \leq & \underline{\displaystyle\int_a^b} t\,dt \\ \text{ínf}_n\, S(f,p_n) \geq & \overline{\displaystyle\int_a^b} t\,dt \end{cases} \Rightarrow \overline{\int_a^b} t\,dt = \underline{\int_a^b} t\,dt$$

Ejemplo 18. Integral de la función cuadrado

Sea $f(t) = t^2 \qquad t \in [0,1]$ es integrable y $\displaystyle\int_a^b t^2\,dt = \frac{1}{3}$

Sea $n \in \mathbb{N} \qquad p_n = \left\{t_j = \frac{1}{n}\right\}_{j=0}^n$

$s(f,p_n) = \sum_{j=1}^n m_j\,(t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \frac{(j-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} (j-1)^2 \underset{k=j-1}{=} \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n+1)n(2n-1)}{6}$

Por tanto, $\frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) < \frac{1}{3}$

$S(f,p_n) = \sum_{j=1}^n M_j\,(t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \frac{j^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^n j^2 = \frac{1}{3} \cdot (n+1)\,n\,(2n-1) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) > \frac{1}{3}$

Por tanto $\sup_n s(f,p_n) = \frac{1}{3} = \text{ínf}_n\, S(f,p_n)$, para esta partición p_n concreta.

$$\text{Como} \begin{cases} \sup_n s(f,p_n) \leq & \underline{\displaystyle\int_a^b} t^2\,dt \\ \text{ínf}_n\, S(f,p_n) \geq & \overline{\displaystyle\int_a^b} t^2\,dt \end{cases} \Rightarrow \overline{\int_a^b} t^2\,dt = \underline{\int_a^b} t^2\,dt$$

Ejemplo 19. Función no integrable-Riemann

Sea $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si} & t \in \mathbb{Q} \cap [a,b] \\ 0 \text{ si} & t \notin \mathbb{Q} \cap [a,b] \end{cases} \qquad t \in [a,b]$

Para uma p partición, se tiene que:

$s(f,p) = 0 \neq (b-a) = S(f,p) \Rightarrow f$ no es integrable-Riemann

6.1.2.2. Funciones Riemann-integrables

Teorema 28. *Una función es Riemann-integrable si la distanciaentre sus sumas es menor que* ε
Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *acotada. Entonces* f *es Riemann-integrable si, y sólo si:*

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists p\in\mathcal{P}\left([a,b]\right)\shortparallel(0\leq)\,S(f,p)-s(f,p)\leq\varepsilon$$

Observación 31. Denotaremos a partir de ahora por $\mathcal{R}\left(I\right)$ al conjunto de funciones Riemann-integrables en el intervalo I.

Demostración.
$\Rightarrow|$
Sea $\varepsilon>0$.
Como $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt=\text{ínf}\left\{S(p,f)\quad p\in\mathcal{P}\left([a,b]\right)\right\}\Rightarrow\exists p_1\in\mathcal{P}\left([a,b]\right)\shortparallel\left(\int_a^b f(t)\,dt\leq\right)S(f,p_1)\leq\int_a^b f(t)\,dt+\frac{\varepsilon}{2}$
Como $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt=\sup\left\{s(p,f)\quad p\in\mathcal{P}\left([a,b]\right)\right\}\Rightarrow\exists p_2\in\mathcal{P}\left([a,b]\right)\shortparallel\int_a^b f(t)\,dt-\frac{\varepsilon}{2}\leq s(f,p_2)\leq\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)$
Sea $p=p_1\cup p_2$ (más fina que p_1 y p_2)$\Rightarrow s(f,p_2)\leq s(f,p)\leq S(f,p)\leq S(f,p_1)\Rightarrow$
$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt-\frac{\varepsilon}{2}\leq s(f,p_2)\leq s(f,p)\leq S(f,p)\leq S(f,p_1)\leq\int_a^b f(t)\,dt+\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow S(f,p)-s(f,p)\leq\varepsilon$

$|\Leftarrow$
$\displaystyle\forall\varepsilon>0\qquad\exists p_\varepsilon\in\mathcal{P}\left([a,b]\right)\shortparallel\overline{\int_a^b}f(t)\,dt\leq S(f,p_\varepsilon)\leq s(f,p_\varepsilon)+\varepsilon\leq\underline{\int_a^b}f(t)\,dt+\varepsilon$
Como es $\forall\varepsilon>0\quad\displaystyle\left(\underline{\int_a^b}f(t)\,dt\leq\right)\overline{\int_a^b}f(t)\,dt\leq\underline{\int_a^b}f(t)\,dt\Rightarrow\overline{\int_a^b}f(t)\,dt=\underline{\int_a^b}f(t)\,dt\Rightarrow f$ es Riemann-integrable □

Corolario 12.
Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *acotada y supongamos que* $\forall N\in\mathbb{N}\qquad p_N\in\mathcal{P}\left([a,b]\right)$ *tal que*

$$(0\leq)\,S(f,p_N)-s(f,p_N)\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}0$$

Entonces f *es Riemann-integrable en* $[a,b]$ *y* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt=\lim_{N\to\infty}S(f,p_N)=\lim_{N\to\infty}s(f,p_N)$

Demostración. □

Teorema 29. *Las funciones acotadas y continuas son Riemann-integrables*
Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *acotada*

1. Si f es monótona $\Rightarrow f$ es Riemann-integrable en $[a,b]$
2. Si f es continua $\Rightarrow f$ es Riemann-integrable en $[a,b]$

Demostración.
Sea $p\in\mathcal{P}\left([a,b]\right)\qquad S(f,p)-s(f,p)=\sum_{j=1}^n\left(M_j-m_j\right)\left(t_j-t_{j-1}\right)$ □

1. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que f es monótona creciente.
   Si $p\in\mathcal{P}\left([a,b]\right)\quad p=\{t_j\}_{j=1}^n$

   $S(f,p)-s(f,p)=\sum_{j=1}^n\left(f\left(t_j\right)-f\left(t_{j-1}\right)\right)\left(t_j-t_{j-1}\right)$

   Vamos a hacer que (t_j-t_{j-1}) sea constante, y lo sacremos como factor común. ¿Cuanto vale $\sum\left(f\left(t_j\right)-f\left(t_{j-1}\right)\right)$?. Pues vale $f(b)-f(a)$. ¿Cómo hago que esa suma sea menor que ε (para poder usar el teorema anterior)?. Pues hagamos que t_j-t_{j-1} sea, aparte de constante, muy pequeño.

   Dado $\varepsilon>0$, sea $p\in\mathcal{P}\left([a,b]\right)\shortparallel\text{máx}\left\{t_j-t_{j-1}\quad j=1,\dots n\right\}\leq\frac{\varepsilon}{1+f(b)-f(a)}$

$S(f,p)-s(f,p)\leq \frac{\varepsilon}{1+f(b)-f(a)}\cdot\sum \underbrace{f\left(t_j\right)-f\left(t_{j-1}\right)}_{f(b)-f(a)} \Rightarrow S(f,p)-s(f,p)\leq\varepsilon$

2. Como f es continua en $[a,b] \Rightarrow f$ es uniformemente continua, luego:
$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \qquad \forall t,s\in[a,b] \shortparallel |t-s|<\delta \Rightarrow |f(t)-f(s)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$ (partido de $b-a$ para que quede bonito)

   Dado $\varepsilon>0, \quad p\in\mathcal{P}([a,b])$
   $M_j=\sup\{f(t), \quad t\in[t_{j-1},t_j]\}=f\left(t_j^*\right)$ para un $t_j^*\in[t_{j-1},t_j]$
   $m_j=\inf\{f(t), \quad t\in[t_{j-1},t_j]\}=f\left(s_j^*\right)$ para un $s_j^*\in[t_{j-1},t_j]$

   Luego $\max\{t_j-t_{j-1} \quad j=1,\dots,n\}\leq\delta$

$$S(f,p)-s(f,p)=\sum\left(f\left(t_j^*\right)-f\left(s_j^*\right)\right)(t_j-t_{j-1})$$

   como $\left|t_j^*-s_j^*\right|<\delta\Rightarrow f\left(t_j^*\right)-f\left(s_j^*\right)\leq\frac{\varepsilon}{b-a}$, por ser uniformemente continua.

   Luego $S(f,p)-s(f,p)\leq\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\sum(t_j-t_{j-1})=\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot b-a=\varepsilon$

Teorema 30. *Las funciones Riemann-integrables tienen estructura de espacio vectorial*
Sea $[a,b]\subset\mathbb{R}$ cerrado y acotado

1. Si $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ son Riemann-integrables, entonces:

   a) $c\cdot f$ es integrable $\forall c\in\mathbb{R}$ y $f+g$ también lo es, además:
   $\displaystyle\int_a^b c\cdot f(t)\,dt=c\cdot\int_a^b f(t)\,dt$ y $\displaystyle\int_a^b f(t)+g(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b g(t)\,dt$

   b) *Observación:* De hecho $\displaystyle\int_a^b:\mathcal{R}([a,b])\longrightarrow\mathbb{R}$ es una forma lineal.

2. Si f es Riemann-integrable $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\geq 0$

3. Si $f(t)\leq g(t) \qquad \forall t\in[a,b]$ y f,g son Riemann-integrables $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\leq\int_a^b g(t)\,dt$

4. Sea $c\in(a,b) \quad f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es Riemann integrable $\Leftrightarrow f$ es Riemann-integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$, y en ese caso $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^c f(t)\,dt+\int_c^b f(t)\,dt$

Demostración.
1a. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann-integrable, $c\in\mathbb{R}$, $p\in\mathcal{P}([a,b])$
$s(f,p)=\sum_{j=1}^n m_j(t_j-t_{j-1})$ y $S(f,p)=\sum_{j=1}^n m_j(t_j-t_{j-1})$

Supongamos que $c>0$

$$\begin{array}{l} m_j(c\cdot f)=c\cdot m_j(f)\\ M_j(c\cdot f)=c\cdot M_j(f)\end{array}\Rightarrow\begin{array}{l} s(c\cdot f,p)=c\cdot s(f,p)\\ S(c\cdot f,p)=c\cdot S(f,p)\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\sup\limits_{p\in\mathcal{P}([a,b])} s(c\cdot f,p) & =c\cdot\sup\limits_{p\in\mathcal{P}([a,b])} s(f,p)=c\cdot\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\\ \inf\limits_{p\in\mathcal{P}([a,b])} S(c\cdot f,p) & =c\cdot\inf\limits_{p\in\mathcal{P}([a,b])} S(f,p)=c\cdot\int_a^b f(t)\,dt\end{array}\Rightarrow c\cdot f \text{ es Riemann-integrable y } \int_a^b c\cdot f(t)\,dt=c\cdot\int_a^b f(t)\,dt$$

Y ahora que $c<0$

$$\begin{array}{l} m_j(c\cdot f)=c\cdot M_j(f)\\ M_j(c\cdot f)=c\cdot m_j(f)\end{array}\Rightarrow\begin{array}{l} s(c\cdot f,p)=c\cdot S(f,p)\\ S(c\cdot f,p)=c\cdot s(f,p)\end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \sup\limits_{p\in\mathcal{P}([a,b])} s(c\cdot f,p) & = c\cdot \inf\limits_{p\in\mathcal{P}([a,b])} S(f,p) = c\cdot \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \\ \inf\limits_{p\in\mathcal{P}([a,b])} S(c\cdot f,p) & = c\cdot \sup\limits_{p\in\mathcal{P}([a,b])} s(f,p) = c\cdot \int_a^b f(t)\,dt \end{array} \Rightarrow c\cdot f \text{ es Riemann-integrable y } \int_a^b c\cdot f(t)\,dt = c\cdot\int_a^b f(t)\,dt$$

1b. Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann-integrables y sea una partición $p\in\mathcal{P}([a,b])$
$s(f+g,p)=\sum_{j=1}^n m_j(f+g)(t_j-t_{j-1})$ y $S(f+g,p)=\sum_{j=1}^n m_j(f+g)(t_j-t_{j-1})$

$m_j(f+g)=\text{ínf}\{f(t)+g(t),\quad t\in[t_{j-1},t_j]\}\geq \text{ínf}\{f(t),\quad t\in[t_{j-1},t_j]\}+\text{ínf}\{g(t),\quad t\in[t_{j-1},t_j]\}$
$M_j(f+g)=\sup\{f(t)+g(t),\quad t\in[t_{j-1},t_j]\}\leq \sup\{f(t),\quad t\in[t_{j-1},t_j]\}+\sup\{g(t),\quad t\in[t_{j-1},t_j]\}$

Luego: $\begin{cases} s(f+g,p)\geq & s(f,p)+s(g,p)\\ S(f+g,p)\leq & S(f,p)+S(g,p)\end{cases}$

Dado $\varepsilon>0$ $\begin{array}{l}\exists p_\varepsilon^1 \shortparallel\ S(f,p_\varepsilon^1)-s(f,p_\varepsilon^1)\leq\frac{\varepsilon}{2}\\ \exists p_\varepsilon^2 \shortparallel\ S(f,p_\varepsilon^2)-s(f,p_\varepsilon^2)\leq\frac{\varepsilon}{2}\end{array}$ $(*)$

Sea $p_\varepsilon=p_\varepsilon^1\cup p_\varepsilon^2$, más fina que p_ε^1 y p_ε^2

$S(f+g,p_\varepsilon)\leq S(f,p_\varepsilon)+S(g,p_\varepsilon)\leq S(f,p_\varepsilon^1)+S(g,p_\varepsilon^2)\overset{(*)}{\leq}\left(s\left(f,p_\varepsilon^1\right)+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\left(s\left(g,p_\varepsilon^2\right)+\frac{\varepsilon}{2}\right)=s(f,p_\varepsilon^1)+s(g,p_\varepsilon^2)+\varepsilon\leq$
$\leq\underbrace{s(f,p_\varepsilon)+s(g,p_\varepsilon)+\varepsilon}_{(**)}\leq\underbrace{s(f+g,p_\varepsilon)+\varepsilon}_{(***)}\Rightarrow S(f+g,p_\varepsilon)-s(f+g,p_\varepsilon)\leq\varepsilon\Rightarrow f+g$ es Riemann-integrable

(*) <u>Aclaración:</u> Vale, se tiene las sumas de $f+g$ entre medias de las de f y g (por separado, pero para particiones distintas). Para concluir algo necesito que la partición sea la misma para ambas.

Además, $\forall\varepsilon>0$
$\displaystyle\int_a^b(f+g)(t)\,dt\leq S(f+g,p_\varepsilon)\overset{(**)}{\leq}\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b g(t)\,dt+\varepsilon\Rightarrow\int_a^b(f+g)(t)\,dt\leq\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b g(t)\,dt$
y también
$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b g(t)\,dt\leq S(f,p_\varepsilon)+S(g,p_\varepsilon)\overset{(***)}{\leq}s(f+g,p_\varepsilon)+\varepsilon\leq\int_a^b(f+g)(t)\,dt+\varepsilon\Rightarrow$
$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b g(t)\,dt\leq\int_a^b(f+g)(t)\,dt$

Luego

$$\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b g(t)\,dt=\int_a^b(f+g)(t)\,dt$$

4. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada y $c\in(a,b)$
$\Rightarrow|$ Si f es Riemann-integrable en $[a,b]$
$\forall\varepsilon>0\quad\exists p\in\mathcal{P}([a,b])\shortparallel S(f,p)-s(f,p)\leq\varepsilon$

Sea $\tilde{p}=p\cup\{c\}$ Sean $\begin{array}{l}p^1=\tilde{p}\cap[a,c]\\ p^2=\tilde{p}\cap[c,b]\end{array}$
Luego, $\tilde{p}$ más fina que p y $s(f,p)\leq s(f,\tilde{p})\leq S(f,\tilde{p})\leq S(f,p)$.

Notemos que $s(f,\tilde{p}) = s(f,p^1) + s(f,p^2) \qquad S(f,\tilde{p}) = S(f,p^1) + S(f,p^2)$. Como $S(f,p) - s(f,p) \leq \varepsilon$, eso significa que las sumas de $\tilde{p}$, que están entre medias, también: $S(f,p^1) - s(f,p^1) + S(f,p^2) - s(f,p^2) \leq \varepsilon \quad (*) \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{array}{l} S(f,p^1) - s(f,p^1) \leq \varepsilon \\ S(f,p^2) - s(f,p^2) \leq \varepsilon \end{array} \Rightarrow f$ es Riemann-integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$, ya que hemos visto que hay una partición asociada a $[a,c]$ y otra a $[c,b]$ que hace que la diferencia de ambas sumas de Riemann son menores que ε, $\forall \varepsilon > 0$

Además:
$$\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt \leq S(f,p^1) + S(f,p^2) \overset{(*)}{\leq} s(f,p^2) + s(f,p^2) + \varepsilon = s(f,\tilde{p}) + \varepsilon \leq \int_a^b f(t)\,dt + \varepsilon \Rightarrow$$
$$\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt \leq \int_a^c f(t)\,dt$$

y también
$$\int_a^b f(t)\,dt \leq S(f,\tilde{p}) = S(f,p^1) + S(f,p^2) \overset{(*)}{\leq} s(f,p^1) + s(f,p^2) + \varepsilon \leq \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt + \varepsilon$$

$| \Leftarrow$ Si f es Riemann-integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$:
Dado $\varepsilon > 0 \quad \begin{array}{l} \exists p^1 \in \mathcal{P}([a,c]) \\ \exists p^2 \in \mathcal{P}([c,b]) \end{array} \shortparallel \begin{array}{l} S(f,p^1) - s(f,p^1) \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ S(f,p^2) - s(f,p^2) \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{array}$

Sea $p = p^1 \cup p^2$, partición de $[a,b]$, $\Rightarrow \begin{array}{c} S(f,p) = S(f,p^1) + S(f,p^2) \\ s(f,p) = s(f,p^1) + s(f,p^2) \end{array} \Rightarrow S(f,p) - s(f,p) \leq \varepsilon \Rightarrow f$ es Riemann-integrable en $[a,b]$ y además:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

2. Si $f \geq 0$ y $p \in \mathcal{P}([a,b])$
$$\int_a^b f(t)\,dt \geq s(f,p) = \sum_{j=1}^n \underbrace{m_j\,(t_j - t_{j-1})}_{\geq 0} \geq 0$$

3. Si $f(t) \leq g(t) \qquad \forall t \in [a,b] \Rightarrow g(t) - f(t) \geq 0 \qquad \forall t \in [a,b]$
Por 2. $\displaystyle\int_a^b (g(t) - f(t))\,dt \geq 0 \overset{1.}{\Rightarrow} \int_a^b g(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(t) \geq \int_a^b f(t)$ □

Corolario 13. *Si la función tiene discontinuidades finitas, la integral es la suma de las integrales entre los puntos de discontinuidad*

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *acotada y supongamos que* $D = \{s \in [a,b] \shortparallel f$ *es discontinua en* $s\}$ *es **finito** y*

$D = \{s_1, \ldots, s_M, \quad M \in \mathbb{N}\} \shortparallel s_1 < \ldots < s_M$ *y llamamos* $s_0 = a$ *y* $s_{M+1} = b$*. Entonces* f *es Riemann-integrable y*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{j=1}^{M+1} \int_{S_{j+1}}^{S_j} f(t)\,dt$$

Demostración.

1. Si $D = \emptyset \Leftrightarrow f$ es continua y todo perfecto.

2. Si $D = \{b\}$ (análogo si $D = \{a\}$)

Sabemos que $\forall c < b \quad f$ es integrable en $[a, c]$, porque ahí es continua, entonces $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathcal{P}([a, b]) \shortparallel S(f,p) - s(f,p) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Si tomamos $\tilde{p} = p \cup \{b\} \in \mathcal{P}([a, c])$

$s(f,\tilde{p}) = s(f,p) + \text{ínf}\{f(t), \quad t \in [c,b]\}(b-c)$

$S(f,\tilde{p}) = S(f,p) + \sup\{f(t), \quad t \in [c,b]\}(b-c)$

Como f acotada en $[a, b] \quad \exists M > 0 \shortparallel |f(t)| \leq M \qquad \forall t \in [a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $c < b \shortparallel 2M(b-c) < \frac{\varepsilon}{2}$

Sea $p \in \mathcal{P}([a, b])$ como antes $\Rightarrow S(f,\tilde{p}) - s(f,\tilde{p}) \leq S(f,p) - s(f,p) + 2M(b-c) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

3. Supongamos que $D = \{s_1, \ldots, s_M\}$ con $s_1 < \ldots < s_M$

Tomando $c_i \in (s_{i-1}, s_i) \quad i = 1, \ldots, M+1$

Por 2. sabemos que f es integrable en $[s_{i-1}, c_i]$ y en $[c_i, s_i]$ (ya que, el único punto de discontinuidad son el izquierdo y el derecho, respectivamente)

Como $\displaystyle\int_{s_{i-1}}^{s_i} f(t)\,dt = \int_{s_{i-1}}^{c_i} f(t)\,dt + \int_{c_i}^{s_i} f(t)\,dt$, ya que f es integrable en $[s_0, s_1]$ y $[s_1, s_2] \Rightarrow$ es integrable también en $[s_0, s_2]$ y en $[s_2, s_3] \Rightarrow f$ es integrable en $[s_0, s_3]$ ...inducción... f es integrable en $[s_0, s_{M+1}] = [a, b]$ $\square$

6.1.2.3. Teorema de Lebesgue

> *Sólo sabemos, hasta ahora, que las funciones Riemann-integrables son las continuas, las monótonas y las que tienen un numero finito de discontinuidades (o infinito numerable). El siguiente teorema nos ayuda a generalizar qué funciones son Riemann-integrables.*

Definición 59. Medida cero

Se dice que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ tiene **medida cero Lebesgue** si, y sólo si, $\forall \varepsilon > 0$ existe un recubrimiento

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \text{ siendo } I_j \text{intervalo tal que } \sum_{j=1}^{\infty} l(I_j) \leq \varepsilon$$

Teorema 31. *Teorema de Lebesgue*

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, entonces f es Riemann-integrable si, y sólo si, el conjunto de discontinuidades tiene **medida cero Lebesgue**

Ejemplo 20. Los conjuntos de $\mathbb{R}$ finitos tienen medida-0 Lebesgue

Si $A \subset \mathbb{R}$ finito $\Rightarrow$ tiene medida-0

$A = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Sea $\varepsilon > 0 \qquad I_j = \left(x_j - \frac{\varepsilon}{2N}, x_j + \frac{\varepsilon}{2N}\right) \qquad l(I_j) = \frac{\varepsilon}{N}$

$\displaystyle A \subset \bigcup_{j=1}^{N} I_j \qquad \sum_{j=1}^{N} l(I_j) = N \cdot \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon$

Ejemplo 21. Los conjuntos infinitos numerables tienen medida-0 Lebesgue

Sea $A = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$, sea $\varepsilon > 0$ y sea $I_j = \left\{x_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, x_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right\}$

Luego $l(I_j) = \frac{\varepsilon}{2^j}$ y entonces $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$

Por ejemplo, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ tiene medida-0 Lebesgue

Ejemplo 22. Existen conjuntos de $\mathbb{R}$, no numerables de medida-0 Lebesgue, como por ejemplo, el conjunto de Cantor.

6.1.2.4. Composición de funciones Riemann-integrables

Teorema 32. *Composición de funciones integrables*
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrable y sea $[c,d] \shortmid\shortmid f([a,b]) \subset [c,d]$ y sea $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces

$$g \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

es Riemann-integrable

Demostración.
Sea $k = \sup\{|g(t)|, \quad s \in [c,d]\} < \infty$ y cómo g es continua en $[c,d] \Rightarrow g$ es uniformemente continua, es decir, dado $\tilde{\varepsilon} > 0 \qquad \exists \delta > 0 \shortmid\shortmid t, s \in [c,d]$
$|t-s| < \delta \Rightarrow |g(t) - g(s)| < \tilde{\varepsilon}$

Sea $\varepsilon > 0$, $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{b-a+2k}$ y sea δ el asociado a la continuidad uniforme de g. *Siempre se puede suponer que $\delta < \varepsilon$, y en caso contrario, se coge un δ' que lo sea.*

Como f es Riemann-integrable, entonces $\exists p \in \mathcal{P}([a,b]) \shortmid\shortmid (0 \leq) S(f,p) - s(f,p) \leq \delta^2$
Veamos que $(0 \leq) S(g \circ f, p) - s(g \circ f, p) < \varepsilon$, que es lo que nos lleva a probar el teorema.

$S(g \circ f, p) - s(g \circ f, p) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (M_j(g \circ f) - m_j(g \circ f))(t_j - t_{j-1})$. Sean $A = \{j \shortmid\shortmid M_j(f) - m_j(f) < \delta\}$, $B = \{j \shortmid\shortmid M_j(f) - m_j(f) \geq \delta\}$, es decir, los conjuntos de índices tales que las imágenes están *muy cerquita* y *algo más lejos*, respectivamente.

Sea $j \in A$:
- Si $t, \tau \in [t_{j-1}, t_j] \Rightarrow |f(t) - f(\tau)| \leq M_j(f) - m_j(f) < \delta \underset{g \text{ unif. cont.}}{\Rightarrow} |g(f(t)) - g(f(\tau))| < \tilde{\varepsilon}$. Como es para todos dos puntos, entonces $M_j(g \circ f) - m_j(g \circ f) < \tilde{\varepsilon}$

$\displaystyle\sum_{j \in A} (M_j(g \circ f) - m_j(g \circ f))(t_j - t_{j-1}) \leq \tilde{\varepsilon} \sum_{j \in A} (t_j - t_{j-1}) \leq \tilde{\varepsilon}(b-a)$ (ya que el sumatorio es de algunos subintervalos de $[a,b]$, luego su suma es menor que $(b-a)$)

- Si $j \in B$
El resto de sumandos: $\displaystyle\sum_{j \in B} (M_j(g \circ f) - m_j(g \circ f))(t_j - t_{j-1}) \leq 2k \cdot \sum_{j \in B} (t_j - t_{j-1}) \leq$

$$\leq 2k \cdot \sum_{j \in B} \left(\frac{M_j(f) - m_j(f)}{\delta} \right)(t_j - t_{j-1}) = \frac{2k}{\delta} \cdot \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(M_j(f) - m_j(f))(t_j - t_{j-1})}_{S(f,p) - s(f,p) \leq \delta^2} \leq \frac{2k}{\delta} \cdot \delta^2 \leq 2k \cdot \delta$$

Por tanto
$S(g \circ f, p) - s(g \circ f, p) \leq \sum_{j \in A} + \sum_{j \in B} \leq \tilde{\varepsilon}(b-a) + 2k \cdot \delta \underset{\delta < \tilde{\varepsilon}}{<} \tilde{\varepsilon}(b-a) + 2k \cdot \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}((b-a) + 2k) = \varepsilon$ $\square$

Corolario 14.

1. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann-integrable $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} |f|$ es Riemann-integrable y $\left| \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$
2. Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann-integrable $\Rightarrow f \cdot g$ es Riemann-integrable
3. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann-integrable y $f(t) \geq \alpha (> 0) \qquad \forall t \in [a,b] \Rightarrow \frac{1}{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ también lo es.

w

Demostración.

1. Sea $g : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ s \mapsto |s| \end{array}$ continua, luego $|f(t)| = (g \circ f)(t) \quad t \in [a,b]$. $|f|$ es Riemann-integrable: $-|f| \leq f \leq |f|$, y como la integral mantiene el orden:
$$- \int |f(t)| \, dt \leq \int f(t) \, dt \leq \int |f(t)| \, dt \Leftrightarrow \left| \int f(t) \, dt \right| \leq \int |f(t)| \, dt$$
2. Veamos que f^2 es Riemann-integrable. Sea $g : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ s \mapsto s^2 \end{array}$, por lo que $f^2 = (g \circ f)$
Así, $f \cdot g = \left[(f+g)^2 - f^2 - g^2 \right]$, todas ellas Riemann-interables, y por tanto $f \cdot g$ también.
3. Sea $g : \begin{array}{c} [\alpha, \infty) \to \mathbb{R} \\ s \mapsto 1/s \end{array}$, $\alpha > 0$, continua. Como $\frac{1}{f} = (g \circ f)$ está bien definida y es composición de funciones Riemann-integrables, $\frac{1}{f}$ también lo es.

□

6.2. Cálculo de integrales. Teoremas destacados.

6.2.1. Cálculo de integrales.

6.2.1.1. Teorema fundamental del cálculo. Regla de Barrow.

Teorema 33. *La integral es continua.*
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann-integrable, entonces:
$$F(t) = \int_a^t f(s) \, dt, \qquad F : \begin{array}{c} [a,b] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto F(t) \end{array}$$
es continua en $[a,b]$.

Demostración.
Sea $t_0 \in [a,b]$. Veamos si $\lim\limits_{h \to 0} F(t_0 + h) = F(t_0)$
Sea $k \shortmid\shortmid |f(t)| \leq k \qquad \forall k \in [a,b]$
Veamos los límites por ambos lados de h, para aplicarlo si $t_0 = a$ o $t_0 = b$

- Si $h > 0$
$$|F(t_0+h) - F(t_0)| = \left| \int_{t_0}^{t_0+h} f(s) \, ds \right| \leq \int_{t_0}^{t_0+h} |f(s)| \, ds \leq k \cdot \int_{t_0}^{t_0+h} k \, ds = k \cdot h \underset{h \to 0^+}{\longrightarrow} 0$$
- Si $h < 0$
$$|F(t_0+h) - F(t_0)| = \left| \int_{t_0+h}^{t_0} f(s) \, ds \right| \leq \int_{t_0+h}^{t_0} |f(s)| \, ds \leq k \cdot \int_{t_0+h}^{t_0} k \, ds = k \cdot h \underset{h \to 0^-}{\longrightarrow} 0$$

□

Teorema 34. *Teorema fundamental del cálculo*
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $t_0 \in [a,b]$, entonces $\begin{array}{ccc} F : [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & F(t) \end{array}$, *es derivable en t_0 y además $F'(t_0) = f(t_0)$. Tak función F es*
$$F(t) = \int_a^t f(s) \, ds$$

Demostración.
Veamos que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(t_0+h) - F(t_0)}{h} = f(t_0)$

-Si $h > 0$
$$\left| \frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h} - f(t_0) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} (f(s)) \, ds - f(t_0) \right| = \left| \frac{1}{h} \cdot \int_{t_0}^{t_0+h} f(s) \, ds - \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} f(t_0) \, ds \right| = \left| \frac{1}{h} \cdot \int_{t_0}^{t_0+h} (f(s) - f(t_0)) \right.$$

$\leq \frac{1}{h} \cdot \int_{t_0}^{t_0+h} |f(s) - f(t_0)| \, ds$

Dado $\varepsilon > 0 \quad \delta > 0 \shortparallel |s - t_0| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t_0)| < \varepsilon \Rightarrow$ Si $h > \delta \quad \forall s \in [t_0, t_0 + h]$ y se tiene $|s - t_0| < h < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t_0)| < \varepsilon$

Y por tanto

$$\frac{1}{h} \cdot \int_{t_0}^{t_0+h} |f(s) - f(t_0)| \, ds \leq \frac{1}{h} \cdot \int_{t_0}^{t_0+h} \varepsilon = \frac{1}{h} \cdot \varepsilon \cdot h = \varepsilon$$

Luego $\left| \frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h} - f(t_0) \right| \leq \varepsilon \Rightarrow F'(t_0) - f(t_0)$

- Si $h < 0$

$\left| \frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h} - f(t_0) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{t_0+h}^{t_0} (f(s)) \, ds - f(t_0) \right| = \left| \frac{1}{h} \cdot \int_{t_0+h}^{t_0} f(s) \, ds - \int_{t_0+h}^{t_0} f(t_0) \, ds \right| =$

$= \left| \frac{1}{h} \cdot \int_{t_0+h}^{t_0} (f(s) - f(t_0)) \, ds \right| \leq \frac{1}{|h|} \cdot \int_{t_0+h}^{t_0} |f(s) - f(t_0)| \, ds$

Dado $\varepsilon > 0 \quad \delta > 0 \shortparallel |s - t_0| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t_0)| < \varepsilon \Rightarrow$ Si $|h| > \delta \quad \forall s \in [t_0 + h, t_0]$ y se tiene $|s - t_0| < |h| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t_0)| < \varepsilon$

Y por tanto

$$\frac{1}{|h|} \cdot \int_{t_0+h}^{t_0} |f(s) - f(t_0)| \, ds \leq \frac{1}{h} \cdot \int_{t_0}^{t_0+h} \varepsilon = \frac{1}{h} \cdot \varepsilon \cdot h = \varepsilon$$

Luego $\left| \frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h} - f(t_0) \right| \leq \varepsilon \Rightarrow F'(t_0) - f(t_0)$ □

Corolario 15.

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces existe una función, a la que llamamos ***primitiva*** *de f, es decir, $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable tal que $F'(t) = f(t)$*

Demostración.

Basta tomar $F(t) = \int_a^t f(s) \, ds$ □

Teorema 35. *Regla de Barrow*

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Riemann-integrable y tiene una primitiva $G : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces

$$\int_a^b f(t) \, dt = G(b) - G(a)$$

Demostración.

Sea $p \in \mathcal{P}([a, b])$ partición de $[a, b]$.

$G(b) - G(a) = \sum_{j=1}^{n} G(t_j) - G(t_{j-1}) \overset{TVM}{=} \sum_{j=1}^{n} G'(s_j) (t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(s_j) (t_j - t_{j-1}) , \qquad s_j \in (t_{j-1}, t_j)$

Por lo tanto, tenemos

$$\sum_{j=1}^{n} m_j(f) (t_j - t_{j-1}) \leq G(b) - G(a) \leq \sum_{j=1}^{n} M_j (t_j - t_{j-1})$$

Siendo los sumatorios el supremo y el ínfimo de las sumas inferiores y superiores de todas las particiones de $[a, b]$, respectivamente (esto es, las integrables superior e inferior).

Entonces:

$$\underline{\int_a^b} f(t) \, dt \leq G(b) - G(a) \leq \overline{\int_a^b} f(t) \, dt$$

Al ser para toda partición de $[a, b]$ y f es integrable

$$\int_a^b f(t) \, dt = G(b) - G(a)$$

□

6.2.1.2. Teorema del valor medio integral. Cambio de variable

Teorema 36. *Teorema del valor medio integral*
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrable y sean* $m = \inf\{f(t), \quad t \in [a,b]\}$ *y* $M = \sup\{f(t), \quad t \in [a,b]\}$. *Entonces*

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq M$$

Además si f *es continua, entonces* $\exists t_0 \in [a,b] \shortparallel \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(t)\,dt = f(t_0)$

Observación 32. El área del rectangulo delimitado por el segmento $\overline{ab}$ y de altura $f(t_0)$ es $\int_a^b f(t_0)\,dt \quad t_0 \in [a,b]$. Es decir, la integral definida en $[a,b]$ se alcanza en algún punto de $t_0 \in [a,b]$ y es igual al área del rectangulo descrito arriba-

Demostración.
Como $m \leq f(t_0) \leq M \qquad \forall t \in [a,b]$
Aplicamos integral y:

$$m\,(b-a) = \int_a^b m\,dt \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b M\,dt = M\,(b-a)$$

luego

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq M$$

Si además f es continua, entonces toma todos los valores intermedios entre $[m, M]$ □

Teorema 37. *Teorema del valor medio integral generalizado*
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrable y sean* $m = \inf\{f(t), \quad t \in [a,b]\}$ *y* $M = \sup\{f(t), \quad t \in [a,b]\}$. *Además, sea* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrable tal que* $g(t) \neq 0 \qquad \forall t \in [a,b]$ *y* $\int_a^b g(t)\,dt > 0$. *Entonces:*

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t)\cdot g(t)\,dt}{\int_a^b f(t)\cdot g(t)\,dt} \leq M$$

Además, si f *es continua, existe* $t_0 \in [a,b]$ *tal que*

$$\frac{\int_a^b f(t)\cdot g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} = f(t_0)$$

Demostración.
Como $m \leq f(t) \leq M \qquad \forall t \in [a,b]$, entonces $m \cdot g(t) \leq f(t)\cdot g(t) \leq M \cdot g(t)$ y aplicando la integral: $m\int_a^b g(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)\cdot g(t)\,dt \leq M\int_a^b g(t)\,dt$, luego

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t)\cdot g(t)\,dt}{\int_a^b f(t)\cdot g(t)\,dt} \leq M$$

□

Teorema 38. *Teorema del cambio de variable*
Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *de clase* $\mathcal{C}^1$ *y sea* $\mathcal{J} = g([\alpha,\beta])$ *y* $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ *continua*
Entonces

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)\,dt = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(z)\,dz$$

Demostración.

Sea $H(x) = \int_{\alpha}^{x} f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt$ y $K(x) = \int_{g(\alpha)}^{g(x)} f(z)\, dz \qquad x \in [\alpha, \beta]$

Entonces, se tiene que

$\forall x \in [\alpha, \beta] \qquad H'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Sea $F(s) = \int_{g(\alpha)}^{s} f(z)\, dz \qquad s \in \mathcal{J}$ y $K(x) = F(g(x))$, luego $K'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g(x) \Rightarrow$ $H(x) = K(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}, \forall x \in [\alpha, \beta]$

Tomando $x = \alpha$, tenemos

$0 = H(\alpha) = K(\alpha) + c$. Como $K(\alpha) = 0 \Rightarrow c = 0$. Con lo cual se tiene que $H(x) = K(x) \qquad \forall x \in [\alpha, \beta]$. Y en particular $H(\beta) = K(\beta)$ □

Lema 4. *Integración por partes*

Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son derivables y sus derivadas son Riemann-integrables en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(t) \cdot g'(t)\, dt = f(t) \cdot g(t) \Big]_{t=b}^{t=a} - \int_a^b f(t) \cdot g(t)\, dt$$

Demostración.

Como $(f \cdot g)'(t) = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t) \quad \forall t \in (a, b)$

$$\int_a^b (f \cdot g)(t)\, dt = \int_a^b f'(t) \cdot g(t)\, dt + \int_a^b f(t) \cdot g'(t)\, dt$$

$$f(t) \cdot g(t) \Big]_{t=a}^{t=b} = \int_a^b f'(t) \cdot g(t)\, dt + \int_a^b f(t) \cdot g'(t)\, dt$$

□

Observación 33.

$$\int_a^b \underbrace{f(t)}_{v}\underbrace{g'(t)}_{du}\, dt = \begin{cases} v = f(t) & dv = f'(t)\, dt \\ du = g'(t)\, dt & u = g(t) \end{cases} = \underbrace{f(t) \cdot g(t)}_{u \cdot v}\Big]_a^b - \int_a^b \underbrace{f'(t) \cdot g(t)\, dt}_{u \cdot dv}$$

6.3. Integrales impropias

La integral de Riemann se define para funciones acotadas, definidas en intervalos acotados. ¿Qué ocurre si la función no está acotada, o bien está definida en un intervalo no acotado?

Definición 60. Integral impropia

1. Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que f es integrable en $[a, b] \quad \forall b > a$. Entonces, decimos que su integral impropia:

$$\int_a^{\infty} f(t)\, dt \text{ es convergente} \Leftrightarrow \exists \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(t)\, dt \left(= \int_a^{\infty} f(t)\, dt \right)$$

2. Si $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ tal que f es integrable en $[a, b] \quad \forall b > a$. Entonces, decimos que su integral impropia:

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\, dt \text{ es convergente} \Leftrightarrow \exists \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(t)\, dt \left(= \int_{-\infty}^{b} f(t)\, dt \right)$$

3. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ no acotada, tal que es integrable en $[a, c] \quad \forall c < b$. Entonces, decimos que su integral impropia:

$$\int_a^b f(t)\, dt \text{ es convergente } \Leftrightarrow \exists \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(t)\, dt \left(= \int_a^b f(t)\, dt \right)$$

4. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ no acotada, tal que es integrable en $[c,b] \quad \forall c < b$. Entonces, decimos que su integral impropia:

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ es convergente } \Leftrightarrow \exists \lim_{c\to a^+} \int_a^c f(t)\,dt \left(= \int_a^b f(t)\,dt \right)$$

Ejemplo 23. En $[a,\infty)$, con $\alpha > 0 \quad f(t) = \frac{1}{t^\alpha} \qquad \int_a^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ es convergente $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Supungamos primero que $\alpha \neq 1$

Sea $b > a\,(> 0) \qquad \int_a^b \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \left.\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{t=a}^{t=b} = \frac{1}{1-\alpha}\left[b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right]$

Tenemos que hacer la integral convergente, con lo cual tenemos que lograr hacer $\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ *muy pequeño, para eso nos basta que* $\alpha > 1$*, con lo que los exponentes se harían negativos, y por tanto, haríamos la integral converger.*

Ahora, si $\alpha = 1 \qquad \int_a^b \frac{1}{t}\,dt = \ln(t)\Big]_{t=a}^{t=b} = \ln(b) - \ln(a) \underset{b\to\infty}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow \nexists \lim_{b\to\infty} \int_a^\infty \frac{1}{t}\,dt$, ya que su primitiva no converge

Ejemplo 24. En $[0,1] \qquad f(t) = \frac{1}{t^\alpha} \qquad (t \neq 0)$

Sea $0 < a < 1$ y , $\alpha \neq 1$

$$\int_a^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{1-\alpha}\cdot t^{1-\alpha}\Big]_{t=\alpha}^{t=1} = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - a^{1-\alpha}\right)$$

Como $a \to 0$*, para que la primitiva converja, necesito que* $1-\alpha > 0$*, ya que si fuera negativo,* $\frac{1}{a^r} \to \infty$ *(para cierto* $r = -(1-\alpha) \in \mathbb{R}$*), y eso no es lo que buscamos.*

Luego $1 - \alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 1$

Si $\alpha = 1 \qquad \int_a^1 \frac{1}{t}\,dt = \ln(t)\Big]_{t=a}^{t=b} = 0 - \ln(a) \underset{a\to 0^+}{\longrightarrow} -(-\infty) = \infty \Rightarrow \nexists \lim_{b\to\infty} \int_a^1 \frac{1}{t}\,dt, \Rightarrow \nexists \int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$

La razón del porqué existen integrales impropias para $\alpha > 1$*, es porque* $\frac{1}{t^\alpha}$ *tiende a 0 mucho más rapido que* $\frac{1}{t}$*. Por ejemplo, si tomamos* $\alpha = 2$*, tenemos que* $\frac{1}{t^2} \ll \frac{1}{t}$*, y de esta forma la curva que forma* $\frac{1}{t}$ *encierra a la* $\frac{1}{t^2}$*. Algo similar pasa en* $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}$

Ejemplo 25. En $[a,b] \quad (a < b) \qquad f(t) = \frac{1}{(t-a)^\alpha} \quad t \neq a$

Sea c ¡¡ $a < c < b$ y $\alpha \neq 1$

$$\int_c^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)(t-a)^{1-\alpha}\Big]_{t=a}^{t=b} = \frac{1}{1-\alpha}\left[(b-a)^{1-\alpha} - (c-a)^{1-\alpha}\right] \Rightarrow \exists \lim_{c\to a^+} \int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt \Leftrightarrow$$
$1 - \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$

El razonamiento del porqué $\alpha < 1$ *es enteramente análogo al del ejemplo anterior, sólo que esta vez es* $(c-a) \to 0$*.*

Ahora si $\alpha = 1 \qquad \int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt = \ln(t-a)\Big]_{t=c}^{t=b} = \ln(b-a) - \ln(c-a) \underset{c\to a^+}{\longrightarrow} \infty$, luego

$$\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt \text{ existe si, y sólo si } \alpha < 1$$

Observación 34.

Sea $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ con $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, (idem si $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$)

Si $f\ (f(t) \geq 0 \quad \forall t)$ es Riemann integrable en $[a,c] \quad \forall c \quad a < c < b$, entonces

$$F(c)=\int_a^c f(t)\,dt$$

es creciente en c, y por tanto

$$\exists\int_a^b f(t)\,dt=\lim_{c\to b}\int_a^c f(t)\,dt \Leftrightarrow \exists M \shortparallel (0\leq)\int_a^c f(t)\,dt\leq M \qquad \forall c\in[a,b)$$

6.3.1. Integrales impropias. Convergencia integral absoluta

Definición 61. Integral absolutamente convergente

Sea $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, Riemann integrable en $[a,c]$ $\quad \forall c \quad a<c<b$. Decimos que la integral impropia $\int_a^b f(t)\,dt$ es absolutamente convergente, si y sólo si $\int_a^b |f(t)|\,dt=\lim_{c\to\infty}|f(t)|\,dt<\infty$.

Proposición 67. *Si la integral impropia es absolutamente convergente, entonces también es convergente.*

Si $\int_a^b |f(t)|\,dt<\infty$, *absolutamente convergete* $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\int_a^b f(t)\,dt$ *es convergente.*

Demostración.

Sea $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad x\in[a,b)$. Veamos que $\exists\lim_{x\to b}F(x)$:

Si $x,y\in[a,b)$, supongamos $x<y$ (spdg) $\qquad |F(x)-F(y)|=\left|\int_x^y f(t)\,dt\right|\leq\int_x^y|f(t)|\,dt$

Sea $G(x)=\int_a^x|f(t)|\,dt$ y sea $L=\lim_{x\to b^-}G(x)=\int_a^b|f(t)|\,dt$.

Sea $\varepsilon>0 \qquad \exists\delta>0 \shortparallel x\in(b-\delta,b)\Rightarrow(0\leq)\,L-G(x)\leq\varepsilon$.

Si $x,y\in(b-\delta,b)\Rightarrow|F(x)-F(y)|\leq\int_x^y|f(t)|\,dt=\int_a^y|f(t)|-\int_a^x|f(t)|\,dt$.

Bien, hagamos la maniobra: $\int_a^y|f(t)|-\int_a^x|f(t)|\,dt+L-L$.

Agrupamos y tenemos que $\int_a^y|f(t)|-\int_a^x|f(t)|\,dt+L-L=(F(y)-L)+(F(x)-L)\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

Sea $\{x_n\}\subset[a,b)\shortparallel x_n\to b^-$. Entonces:

$$F(x_n)=\int_a^{x_n}f(t)\,dt$$

es de Cauchy.

Dado (el anterior) $\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \qquad \exists n_0\shortparallel n,m\geq n_0 \qquad x_n,x_m\in(b-\delta,b)\Rightarrow|F(x_n)-F(x_m)|<\varepsilon\Rightarrow$ $\exists M=\lim_{n\to\infty}F(x_n)=\lim_{n\to\infty}\int_a^{x_n}f(t)\,dt$

Bien, tenemos probado que una sucesión construida sobre $[a,b)$ *tiene por límite M, para poder decir que existe* $\lim f(t)$*, hay que probarlo para todo sucesión* $x\to b^-$*. Veámoslo*

Sea $\varepsilon>0$. Dado el δ (de antes) $\exists n_0\shortparallel x_n\in(b-\delta,b) \quad n\geq n_0$ y si $x\in(b-\delta,b)\Rightarrow|F(x)-F(x_n)|\leq\varepsilon$.

Pasamos al límite: $n\to\infty \qquad |F(x)-M|<\varepsilon\Rightarrow\exists\lim_{x\to\infty}f(x)=M$ ☐

Proposición 68. *Criterios de comparación absoluta*

Sean $f,g:[a,)\to\mathbb{R} \qquad b\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ *tales que* f,g *son Riemann-integrables en* $[a,c]$ $\quad\forall c<b$ *y* $f\geq0$, $g\geq0$

1. Si $0\leq f(t)\leq g(t) \qquad \forall t\in[a,b)$ y $\lim_{c\to b^-}\int_a^c g(t)\,dt=\int_a^b g(t)\,dt<\infty\Rightarrow\int_a^b f(t)\,dt<\infty$. El contrarecíproco es cierto, si $\int_a^b f(t)=\infty\Rightarrow\int_a^b g(t)=\infty$.

2. Si $\exists L = \lim_{t\to b^-} \dfrac{f(t)}{g(t)}$, entonces:

   a) Si $L \in (0,\infty) \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ y $\displaystyle\int_a^b g(t)$ tienen el mismo carácter.

   b) Si $L = 0$ y $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt < \infty \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt < \infty$

   c) Si $L = \infty$ y $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt < \infty \Rightarrow \int_a^b g(t)\,dt < \infty$

3. *Criterio de la serie.*
   Si $b = \infty$ y f es ***decreciente****, entonces:*

$$\int_a^\infty f(t)\,dt \ y \ \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} f(n)$$

   tienen el mismo carácter.

Demostración.
1. Como $f(t) \leq g(t)$, si $c \in [a,b) \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt \qquad \exists M > 0 \shortparallel \forall c \in [a,b)$

$$\int_a^c f(t)\,dt \leq \int_a^c g(t)\,dt \leq M \Rightarrow \int_a^c f(t) < \infty$$

2.
a) Si $L \in (0,\infty) \Rightarrow$dado $\varepsilon = \frac{L}{2} \qquad \exists c \in [a,b) \shortparallel$ si $t \in [a,b)$

$$\frac{L}{2} = L - \varepsilon \leq \frac{f(t)}{g(t)} \leq L + \varepsilon = \frac{3L}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{2}\cdot g(t) \leq f(t) \leq \frac{3L}{2}\cdot g(t)$$

luego ambas tienen el mismo carácter.

b) Si $L = 0$, con $\varepsilon = 1 \quad \exists c_0 \in [a,b) \shortparallel$ si $t \in [c_0,b) \Leftrightarrow \frac{f(t)}{g(t)} \leq 1 \Rightarrow f(t) \leq g(t)$, por 1), como $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt < \infty \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt < \infty$

c) Si $L = \infty$, con $M = 1 \quad \exists c_0 \in [a,b) \shortparallel$ si $t \in [c_0,b) \Leftrightarrow \frac{f(t)}{g(t)} \geq 1 \Rightarrow g(t) \leq f(t)$, por 1), como $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt < \infty \Rightarrow \int_a^b g(t)\,dt < \infty$

3. Sea $k_0 \in \mathbb{N}$, $k_0 \geq a$, si $n \in \mathbb{N} \shortparallel n \geq k_0$

$$\sum_{n=k_0}^{k-1} f(n+1) \leq \int_{k_0}^{k} f(t)\,dt \leq \sum_{n=k_0}^{k-1} f(n)$$

siendo los sumatorios sumas inferiores y superiores de Riemann, respectivamente. La construcción de dichas sumas viene dada por:

1. Que la integral está acotada superiormente por la suma superior es trivial. Cogemos una partición de naturales, y entonces esa suma supera a la integral.

2. La acotación por debajo es similar.

Si $\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{k\to\infty} \displaystyle\int_{k_0}^{k} f(t)\,dt = \int_{k_0}^{\infty} f(t)\,dt \Rightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} \sum_{n=k_0}^{k} f(n) = \sum_{n=k_0}^{\infty} f(n) \\ \exists \lim\limits_{k\to\infty} \displaystyle\sum_{n=k_0}^{k} f(n) = \sum_{n=k_0}^{\infty} f(n) \Rightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} \int_{k_0}^{k} f(t)\,dt = \textstyle\int_{k_0}^{\infty} f(t)\,dt \end{array} \Rightarrow \displaystyle\sum^{\infty} f(n)$ y $\displaystyle\int f(t)\,dt$ tienen el mismo carácter

□

Observación 35. Lo importante es que los rectángulos tengan la misma base. De la misma forma podía haberse hecho con una sucesión $\{t_n\} \to \infty \shortparallel t_{k+}1 = t_k + 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, y el resultado sería exactamente el mismo:

$$\sum_{k_0}^{k-1} f(t_{n+1}) \leq \int_{t_{k_0}}^{t_k} f(t)\,dt \leq \sum_{k_0}^{k-1} f(t_n)$$

Aún más, con que la distancia entre t_k y t_{k+1} fuese una constante C, también resultaría válido el criterio. Entonces la acotación de la integral quedará multiplicada por dicha constante.

Capítulo 7

Sucesiones y series de funciones

7.1. Sucesiones de funciones

7.1.1. Convergencia. Criterio de Cauchy

Definición 62. Convergencia puntual.

Sea $D \neq \emptyset$ un conjunto y sea, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) una sucesión de funciones. Entonces decimos que f_n **converge puntualmente** a f ($f \shortparallel f : D \to \mathbb{R}$) si y sólo si

$$\forall x \in D \qquad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \shortparallel \forall n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - f(x)| \leq \varepsilon$$

es decir $\forall x \in D \quad f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$

Ejemplo 26. $f_n(t) = \frac{t}{n} \qquad t \in \mathbb{R}$

$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f_n(t) = \frac{t}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, luego $f_n \to f \equiv 0$, es decir, converge puntualmente a la función identicamente nula.

Ejemplo 27. $f_n(t) = t^n \qquad t \in [0,1]$

$$f_n(t) = t^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 28. $f_n(t) = t^n \qquad t \in [-1,1]$

$$\begin{array}{lll} t \in (-1,0) & f_n(t) = t^n \to 0 & \\ t = -1 & f_n(-1) = (-1)^n \quad \nexists \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n & \Rightarrow f_n(t) \qquad t \in [-1,1] \text{ no converge puntualmente} \end{array}$$

$$\text{Si } t \in \mathbb{R} \begin{cases} t > 1 & f_n(t) = t^n \to \infty \\ t < -1 & \nexists \lim\limits_{n\to\infty} t^n \end{cases}$$

Ejemplo 29. $f_n(x) = \frac{x^2+nx}{n} \qquad x \in \mathbb{R}$

$f_n(x) = \frac{x^2}{n} + x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$

Ejemplo 30. $f_n(t) = \frac{1}{n} \cdot \sin(nt+n), \qquad t \in \mathbb{R}$

$f_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

En cambio, $f_n(t) = \sin(nt+n), \qquad t \in \mathbb{R}$

$\nexists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$

Definición 63. Convergencia uniforme.

Sea $D \neq \emptyset$ un conjunto y sea, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) una sucesión de funciones. Decimos que f_n **converge uniformemente** a f ($f \shortparallel f : D \to \mathbb{R}$) si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \shortparallel \forall n \geq n_0 \text{ se tiene que } \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Observación 36. Nótese la diferencia en la posición de los cuantificadores lógicos respecto de la definición de convergencia puntual. Mientras que en el primero n_0 dependía del punto t escogido y de ε, en el caso de la convergencia uniforme n_0 depende únicamente de ε.

Observación 37. Por supuesto, si f_n converge uniformente, converge puntualmente, al ser la convergencia uniforme más fuerte que la puntual.

Ejemplo 31. La función del ejemplo 2 converge puntualmente, pero no uniformemente. En cambio si reducimos el intervalo:

$f_n(t) = t^n, \qquad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$0 \leq f_n(t) = t^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \qquad \forall t$

Ejemplo 32. $f_n(t) = t^n (1-t), \quad t \in [0,1]$

$f_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \equiv 0$, que converge puntualmente y también uniformemente.

Definición 64. Conjunto de las funciones acotadas.

Sea $D \,(\neq \emptyset)$ conjunto, llamamos **conjunto de las funciones** acotadas a:

$$\mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K}) = \{f : D \to \mathbb{K} \shortparallel \text{ son acotadas}\}$$

y por tanto $\forall f \in \mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$ se tiene que $\exists M > 0 \shortparallel |f(x)| \leq M \qquad \forall x \in D$.

Definimos también para cada $f \in \mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$, la **norma infinito** de f, $\| f \|_\infty = \sup\{|f(x)|, \; x \in D\}$

Proposición 69. *Propiedades de $\mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$. Norma infinito*

1. *$\mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$ tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.*
2. *La aplicación $\| \cdot \|$: $\mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ es una norma:*
   a) $\| f \|_\infty = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$
   b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$ *se tiene que:* $\| \lambda \cdot f \|_\infty = |\lambda| \cdot \| f \|_\infty$
   c) *Propiedad triangular:*$f, g \in \mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$*:*
   $$\| f + g \|_\infty \leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$$
   Como consecuencia: $d_\infty(f, g) = \| f - g \|_\infty$ *es una métrica en* $\mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$
3. *Si $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$ y $f_n \to f$ en $d_\infty \Leftrightarrow f_n \to f$ converge **uniformemente** en D.*

Demostración. □

1. Sean $f, g \in \mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
   $\forall x \in D, \quad |(\alpha f + \beta g)(x)| = |\alpha f(x) + \beta g(x)| \leq |\alpha| |f(x)| + |\beta| |g(x)| \leq |\alpha| M_1 + |\beta| M_2 \leq M \Rightarrow (\alpha f + \beta g)(x) \in \mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$. Con lo cual $\mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$

2. La norma infinito está bien definida:
   a) $\| f \|_\infty = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \quad \forall x \in D \Leftrightarrow f \equiv 0$
   b) $\lambda \in \mathbb{K}, \quad \| \lambda f \|_\infty = \sup\{|\lambda f(x)|, \; x \in D\} = \sup\{|\lambda| |f(x)|, \; x \in D\} = \lambda \sup\{|f(x)|, \; x \in D\} = \lambda \cdot \| f \|_\infty$

c) $\| f+g \|_\infty = \sup\{|f(x)+g(x)|,\ x\in D\} \leq \sup\{|f(x)|,\ x\in D\} + \sup\{|g(x)|,\ x\in D\} = \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$

Veamos que es una métrica:

1) $d_\infty(f,g) \geq 0$ y $d_\infty(g,f)$, porque $\| f-g \|_\infty = \| g-f \|_\infty$

2) $d_\infty(f,g) = 0 \Leftrightarrow \| f-g \|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = g$

3) $\forall f,g \in \mathcal{L}^\infty(D,\mathbb{K}),\ d_\infty(f,g) = \| f-g \|_\infty \underset{\pm h}{\leq} \| f-h \|_\infty + \| h+g \|_\infty = d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g)$

3. $f_n \overset{d_\infty}{\to} f \Leftrightarrow d_\infty(f_n,f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0 \shortparallel$si $n \geq n_0$.
$d_\infty(f_n,f) = \| f_n - f \|_\infty = \sup\{|f_n(x)-f(x)|,\ x\in D\} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \forall x \in D \quad |f_n(x)-f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow f_n$ converge uniformente.

Teorema 39. *Criterio de Cauchy*
Sea $D(\neq\emptyset)$ y sea $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Sea también $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}^\infty(D,\mathbb{K})$ una sucesión de funciones acotada. Entonces

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty \ \textit{converge en } d_\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0 \shortparallel \ \textit{si } n,m \geq n_0 \qquad \| f_n - f_m \| \leq \varepsilon$$

Demostración.
$\Rightarrow$) Trivial
($\Leftarrow$ Supongamos que $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es de Cauchy para d_∞:
$\forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \shortparallel$ si $n,m \geq n_0$: $\qquad d_\infty(f_n,f_m) \leq \varepsilon \Leftrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$
$\forall x \in D$ fijo, $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ es de Cauchy en $\mathbb{K}(=\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}) \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

Ahora hemos de probar que si $f \in \mathcal{L}^\infty(D,\mathbb{K})$ y que $f_n \to f$ en d_∞

Se tiene que $\forall n \geq n_0$ (asumiendo que $m = n_0$):

$$|\| f_n \|_\infty - \| f_{n_0} \|_\infty| \leq \| f_n - f_{n_0} \|_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow \| f_n \|_\infty \leq \varepsilon + \| f_{n_0} \|_\infty$$

Así, con $\varepsilon = 1$, $\qquad \exists M > 0 \shortparallel |f_n(x)| \leq \| f_n(x) \|_\infty \leq M \qquad \begin{matrix}\forall n \geq n_0 \\ \forall x \in D\end{matrix}$, entonces

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in D \Rightarrow f \in \mathcal{L}^\infty(D,\mathbb{K})$$

Por último: Dado $\varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \shortparallel$ si $n,m \geq n_0$
$\forall x \in D \qquad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$, tomando como límite com $m \to \infty$
Dado $\varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \shortparallel$ si $n,m \geq n_0$,
$\underbrace{\forall x \in D \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon}_{d_\infty(f_n,f)\leq\varepsilon} \Leftrightarrow f_n \to f$

□

Bien, llegados a aquí, pensemos en la convergencia de funciones. En este momento, uno podría preguntarse que pasará en el límite de una sucesión de funciones. ¿Que propiedades conserva la función límite de las que conforman la sucesión?: ¿continuidad?, ¿derivabilidad?, ¿integrabilidad?

Dediquemos un breve apartado a reflexionar acerca de estas cuestiones.

Supongamos un conjunto D, de $\mathbb{R}$, por ejemplo. Digamos que $D = [a,b]$

Suposición 1. *Sobre la continuidad de la función límite.*
Si $f_n \to \mathbb{K}$, $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$, tal que $f_n \to f$ y f_n es continua en $D \qquad \forall n \in \mathbb{N}$. ¿Es f continua?

Sea $t_0 \in D \shortparallel \lim\limits_{t\to t_0} f(t) = f(t_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to t_0}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t_0) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{t\to t_0} f_n(t)$
El poder intercambiar el orden de los límites es de gran importancia.
Bien, con convergencia puntual, ésto no es posible, por ejemplo:

$$f_n = t^n \quad t \in [0,1] \qquad f_n(t) \to f(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \in [0,1) \\ 1 & si\ t = 1 \end{cases}$$

Veremos que con convergencia uniforme sí lo es.

Suposición 2. *Sobre la derivabilidad de la función límite.*

Si $f_n : D \to \mathbb{R}$, $f_n \to f$ *y* f_n *es derivable* $\quad \forall n \in \mathbb{N}$. *¿Es* f *derivable? ¿*$f_n' \to f'$*?*

Con convergencia puntual no, con uniforme tampoco.

Por ejemplo: $f_n(t) = \frac{1}{n}\sin(nt) \qquad t \in [0,1]$

$d_\infty(f_n, 0) = \| f_n \|_\infty = \sup\{f(t), t \in [0,1]\} \leq \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$f_n \to f \equiv 0$, *pero* $f_n' = \cos(nt) \underset{n\to\infty}{\nrightarrow} 0$

Suposición 3. *Sobre la integrabilidad de la función límite.*

Si $f_n : D \to \mathbb{R}$ *son Riemann-integrables para todo* n *y* $f_n \to f$ *¿*$\displaystyle\int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$*?*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)\, dt$$

Con convergencia puntual, no. Por ejemplo: Sea $f_n : \begin{cases} n & si\ t \in (1/2 - 1/2n, 1/2 + 1/2n) \\ 0 & si\ t \in [0, 1/2 - 1/2n] \cup [1/2 + 1/2n, 1] \end{cases}$

$f_n \to f(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \in [0,1] \setminus \frac{1}{2} \\ \infty & si\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$

Pero la función límite no es continua, así que hagamos un apaño. Redefinamos $f_n(t) = \begin{cases} 0 & si\ t = 0 \\ \frac{1}{n} & si\ t \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$

Bien, ahora podemos calcular la integral: $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, dt = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n(t) \to f(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [0,1]$

Podríamos achacar nuestros infructuosos resultados a que f_n *es discontinua. Veamos que nuestras sospechas son infundadas:*

Sea ahora $f_n(t) = \begin{cases} 0 & si\ t > \frac{1}{2} \\ 2n & si\ t \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$

$f_n \to f \equiv 0 \qquad \forall t \in [0,1]$ *y además* $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, dt = 1$

Supongamos que $f_n \to f \equiv 0$ *converge uniformemente en* D*:*

$\| f_n \|_\infty = \sup\{|f_n(t)|, t \in D\}$*:*

$$\left| \int_a^b f_n(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t)|\, dt \leq \| f_n \|_\infty (b-a) \longrightarrow 0$$

En general, si f_n *converge uniformemente en* D*, y* f *es Riemann-integrable:*

$$\left| \int_a^b f_n(t)\, dt - \int_a^b f(t)\, dt \right| = \left| \int_a^b (f_n - f)(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f_n - f|(t)\, dt \leq \| f_n - f \|_\infty \longrightarrow 0$$

Como a continuación veremos, cuando f_n *converja uniformente a* f*, lo que sí podremos decir que* f *es Riemann-integrable.*

7.1.2. Continuidad, derivabilidad e integrabilidad de sucesiones de funciones

Teorema 40. *La función límite es continua si* f_n *es continua y converge a ella uniformente.*

Sea (M, d) *espacio métrico y* $f_n : M \to \mathbb{K}$ $(\mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C})$ *continuas. Si* f_n *converge a una* f *uniformemente en* M*, entonces* $f : M \to \mathbb{K}$ *es continua.*

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \shortparallel$ si $n \geq n_0 \Rightarrow \forall t \in M \quad |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon/3$

Sean $t_0, t \in M$, entonces: $|f_n(t) - f(t_0)| \underset{\pm f_n(t_0) \pm f(t)}{\leq} \underbrace{|f(t) - f_n(t)|}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{|f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)|}_{(*)} + \underbrace{|f_{n_0}(t_0) - f(t_0)|}_{\leq \varepsilon/3} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

$(*)$: Como f_{n_0} es continua en $t_0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \shortparallel t \in B(t_0, \delta) \Rightarrow f_{n_0}(t) \in B(f_{n_0}(t_0), \varepsilon/3) \Rightarrow f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ □

Teorema 41. *La función límite es derivable si la sucesión de las derivadas es convergente.*

Sean $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivables. Supongamos que para cierto $t_0 \in [a,b] \quad f_n(t_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A \in \mathbb{R}$ y $f_n' \to g$ uniformente en $[a,b]$. Entonces:

$$f_n \longrightarrow f \text{ uniformente en } [a,b], \text{ donde } f \text{ es derivable, } f(t_0) = A \text{ y } f' = g$$

Es decir, si la sucesión de derivadas converge uniformente, la sucesión original también. Además, la integral de la función límite derivada es la función límite original.

Observación 38. $f' = g; \quad \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$

Demostración.

Si $t \in [a,b]$ y $m, n \in \mathbb{N}$, por el teorema del valor medio, para $f_n - f_m \quad \exists \xi \in (a,b) \shortparallel \frac{(f_n(t) - f_m(t)) - (f_n(t_0) - f_m(t_0))}{t - t_0} = (f_n'(\xi) - f_m'(\xi))$, esto es, $f_n(t) - f_m(t) = f_n(t_0) - f_m(t_0) + (t - t_0)(f_n'(\xi) - f_m'(\xi))$

Tomando el valor absoluto y supremos con $t \in [a,b]$: $\| f_n - f_m \|_\infty \leq |f_n(t_0) - f_m(t_0)| + |b-a| \, \| f_n' - f_m' \|_\infty$

Sea $\varepsilon > 0$: $\begin{array}{l} \exists n_0^1 \shortparallel \text{si } n, m \geq n_0^1 \qquad \| f_n' - f_m' \|_\infty < \frac{\varepsilon}{2|b-a|} \\ \exists n_0^2 \shortparallel \text{si } n, m \geq n_0^2 \qquad \| f_n(t_0) - f_m(t_0) \|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}$

Ahora, tomando $n_0 = \max\{n_0^1, n_0^2\}$, si $n, m \geq n_0$: $\| f_n - f_m \|_\infty < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

Con lo cual,$\{f_n\}$ es de Cauchy en d_∞, con lo cual converge uniformemente en $[a,b]$ a f.

Sabemos, por el teorema anterior, que f es continua (como todas las f_n son derivables, también son continuas, luego f también). Además, $f_n(t_0) \to f(t_0) \Rightarrow f(t_0) = A$

Veamos ahora que f es derivable y que $f' = g$

Sea $s \in [a,b]$ un punto fijo y también sea $t \in [a,b] \qquad t \neq s$.

Por el teorema del valor medio para $f_n - f_m$, $\exists \xi \in (a,b) \shortparallel f_n(t) - f_m(t) - [f_n(s) - f_m(s)] = (t-s)(f_n'(\xi) - f_m'(\xi))$, entonces:

$$\frac{f_n(t) - f_n(s)}{t-s} - \frac{f_m(t) - f_m(s)}{t-s} = f_n'(\xi) - f_m'(\xi)$$

Dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \shortparallel n, m \geq n_0 \qquad \| f_n - f_m \|_\infty < \varepsilon/3$

$\left| \frac{f_n(t) - f_n(s)}{t-s} - \frac{f_m(t) - f_m(s)}{t-s} \right| \leq \| f_n' - f_m' \|_\infty < \varepsilon/3$

(Hemos hecho que $f_n \to f$, con lo cual: $f_n(t) - f_n(s) \to f(t) - f(s)$)

$$\left| \frac{f(t) - f(s)}{t-s} - \frac{f_{n_0}(t) - f_{n_0}(s)}{t-s} \right| < \varepsilon/3 \tag{7.1.1}$$

Además, podemos suponer que si $m \geq n_0$:

$$\| f_m' - g \|_\infty < \varepsilon/3 \tag{7.1.2}$$

Tomando $m = n_0$, y con ayuda de 7.1.1 y 7.1.2, como f_{n_0} es derivable en s :

$\exists \delta > 0 \shortparallel |t - s| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f_{n_0}(t) - f_{n_0}(s)}{t-s} - f_{n_0}'(s) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$ y $|f_{n_0}'(s) - g(s)| \leq \| f_{n_0}' - g \|_\infty < \varepsilon/3$

Por tanto:

$$\left|\frac{f(t)-f(s)}{t-s}-g(s)\right| \leq \left|\frac{f(t)-f(s)}{t-s}-\frac{f_{n_0}(t)-f_{n_0}(s)}{t-s}\right|+\left|\frac{f_{n_0}(t)-f_{n_0}(s)}{t-s}-f'_{n_0}(s)\right|+\left|f'_{n_0}(s)-g(s)\right| < \varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon$$

Con lo cual, f es derivable en s, y $f'(s)=g(s)$. □

Teorema 42. *La función límite es Riemann-integrable si lo son las de la sucesión. El límite de las integrales es la integral del límite, que es la integral de la función límite.*

Sea $\{f_n\}_{n=1}^n$ *una sucesión de funciones tales que* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$*, Riemann-integrables.* f_n *converge a* f *uniformememente en* $[a,b]$*. Entonces* f *es Riemann-integrable en* $[a,b]$ *y:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

Demostración.

Veamos que f es Riemann-integrable.

Dado $\varepsilon > 0$, $\quad \exists n_0 \shortparallel$ si $n \geq n_0 \qquad \| f - f_n \|_\infty < \varepsilon$

Como f_{n_0} es Riemann-integrable, $\exists p \in \mathcal{P}([a,b]) \shortparallel S(f_{n_0},p) - s(f_{n_0},p) < \varepsilon$.

Si $p = \{t_j\}_{j=1}^n$, entonces

Como f_{n_0} y f se parecen mucho: $\| f_{n_0} - f \|_\infty < \varepsilon \Rightarrow \sup\{f(t)\} \leq \sup\{f_{n_0}\} + \varepsilon$

1. $S(f,p) = \underbrace{\sum_{j=1}^k M_j(f)(t_j - t_{j-1})}_{\sup\{f(t),t\in[t_{j-1},t_j]\}} \leq \underbrace{\sum_{j=1}^k M_j(f_{n_0})(t_j - t_{j-1}) + \varepsilon(b-a)}_{\sup\left\{f_{n_0}(t),t\in[t_{j-1},t_j]\right\}+\varepsilon} = S(f_{n_0},p) + \varepsilon(b-a)$

2. $s(f,p) = \underbrace{\sum_{j=1}^k m_j(f)(t_j - t_{j-1})}_{\inf\{f(t),t\in[t_{j-1},t_j]\}} \geq \underbrace{\sum_{j=1}^k m_j(f_{n_0})(t_j - t_{j-1}) - \varepsilon(b-a)}_{\inf\left\{f_{n_0}(t),t\in[t_{j-1},t_j]\right\}-\varepsilon} = S(f_{n_0},p) - \varepsilon(b-a)$

Luego $(0 \leq)\, S(f,p) - s(f,p) \leq S(f_{n_0},p) - s(f_{n_0},p) + 2\varepsilon(b-a) \leq \varepsilon(1 + 2(b-a)) \Rightarrow f$ es Riemann-integrable.

$$\left|\int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt \leq \| f_n - f \|_\infty (b-a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Observación 39. Integrabilidad, derivabilidad y el espacio $\mathcal{L}^\infty$.

Hemos probado que $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sabiendo que f_n convergía a f uniformemente en d_∞, que f también era Riemann-integrable.

¿Cómo traducimos ésto a términos métricos?

Muy sencillo: Recordemos que $(\mathcal{L}^\infty([a,b],\mathbb{R}), d_\infty)$ era un espacio métrico completo y que además el conjunto de las funciones Riemann-integrables está contenido aquí ($\mathcal{R}([a,b]) \subset \mathcal{L}^\infty$).

Sin darnos cuenta, hemos probado que el subconjunto de funciones Riemann-integrables es cerrado en $\mathcal{L}^\infty$, porque para toda sucesión, su punto de acumulación (en nuestro caso, f) está dentro del conjunto ($f \in \mathcal{R}([a,b]) \subset \mathcal{L}^\infty$), ya que es Riemann-integrable, es decir, también es acotada).

Lo mismo ocurre en el de las funciones continuas (que representamos por $\mathcal{C}[a,b]$). Además $\mathcal{C}[a,b] \subset \mathcal{R}([a,b])$. $\mathcal{C}[a,b]$ es también un subconjunto cerrado: para toda sucesión de funciones continuas, su punto de acumulación también una función continua.

Teorema 43. *Convergencia acotada*

Sean $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrables tales que* f_n *converge a* f *puntualmente en* $[a,b]$ *y* f *es Riemann-integrable. Además existe* $M > 0 \shortparallel |f_n| \leq M \qquad \forall t \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}$*. Entonces:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

7.1.3. Criterio de Dini

Teorema 44. *Criterio de Dini*
Sean $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continuas tal que* $\forall t \in [a,b] \quad f_n(t) \le f_{n+1}(t) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ *(idem si* $f_{n+1}(t) \le f_n(t)$*) y* f_n *converge puntualmente a* f *en* $[a,b]$ *y* f *es continua. Entonces* $f_n \to f$ ***uniformemente***.

Demostración.
Sean $g_n(t) = f(t) - f_n(t) \ge 0 \qquad \forall t \in [a,b]$
$\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n \in \mathcal{C}([a,b])$ y $g_n \to 0$ puntualmente en $[a,b]$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad g_{n+1}(t) \le g_n(t)$

Veamos que $g_n \to 0$ uniformemente en $[a,b]$ ($\Leftrightarrow \| g_n \|_\infty = \sup\{g(t),\ t \in [a,b]\} \to 0$)

Sea $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{K}_n = \{t \in [a,b] :: g_n(t) \ge \varepsilon\} \subset [a,b]$

- $\mathcal{K}_{n+1} \subset \mathcal{K}_n$: Si $t \in \mathcal{K}_{n+1} \Leftrightarrow g_n(t) \ge g_{n+1}(t) \ge \varepsilon \Rightarrow t \in \mathcal{K}_n$
- $\mathcal{K}_n$ es cerrado $\forall n$ ($g_n \ge \varepsilon$, el mayor o igual) $\Rightarrow \mathcal{K}_n$ es compacto.

Si vemos cada $\mathcal{K}_n$ como $g_n^{-1}[\varepsilon, \infty)$, (que es cerrado, porque contiene a su frontera), entonces al ser g_n continua, la función inversa tansforma cerrados en cerrados, luego $\mathcal{K}_n$ es cerrado (y al ser subconjuntos de $\mathbb{R}$, son compactos).

Además $\bigcap^\infty \mathcal{K}_n = \emptyset$. Como $g_n \to 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 :: n \ge n_0 \quad g_n(t) \le \varepsilon$, por lo que dado t, $\nexists n :: g_n(t) \ge \varepsilon \quad \forall n$.
Si exisitiera $t \in \bigcap^\infty \mathcal{K}_n \Leftrightarrow g_n \ge \varepsilon \quad \forall n$, lo cual es absurdo.

Veamos que $\exists n_0 :: \mathcal{K}_{n_0} = \emptyset$ ($\Rightarrow \mathcal{K}_n = \emptyset, \quad \forall n \ge n_0$) (que sería decir que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 :: n \ge n_0 \quad g_n(t) < \varepsilon \quad \forall t \in [a,b]$, esto es, que g converge uniformemente)
Sea $\mathcal{A}_n = [a,b] \setminus \mathcal{K}_n$ el complementario de $\mathcal{K}_n$ para cada n. Es claro que $\mathcal{A}_n$ es abierto y que $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$
$[a,b] = \bigcup^\infty \mathcal{A}_n \to \left(\bigcap^\infty \mathcal{K}_n\right)^c = \bigcup^\infty \mathcal{K}_n^c = \bigcup^\infty \mathcal{A}_n$
Bien, $[a,b] \subset \mathbb{R} \Rightarrow [a,b]$ es compacto y está recubierto por una cantidad infinita de $\mathcal{A}_n$. Etonces existe una cantidad finita de $\mathcal{A}_n$ que recubren $[a,b]$, con lo cual $\exists n_0 :: [a,b] = \bigcup_{n=1}^{n_0} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n_0} \Leftrightarrow \mathcal{K}_{n_0} = \emptyset$ □

7.2. Series de funciones

7.2.1. Convergencia

Definición 65. Serie de función
Sea $D\,(\neq \emptyset)$ y $f_n : D \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y para cada $M \in \mathbb{N}$, $x \in D$ decimos que la suma parcial de $f_n(x)$ es:

$$S_M(x) = \sum_{n=1}^{M} f_n(x)$$

Luego la serie de una sucesión de funciones es $\lim\limits_{M\to\infty} S_M(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

Definición 66. Convergencia de series de funciones

1. Decimos que $\sum^\infty f_n$ converge **puntualmente** si y sólo si:

$$\forall x \in D \quad \exists \lim_{M\to\infty} \sum^{M} f_n(x) = \sum^{\infty} f_n(x) = S(x)$$

o también que $S_M \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} S$ puntualmente.

2. Decimos que $\sum^{\infty} f_n$ converge uniformemente en D si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M_0 \shortparallel M \geq M_0 \qquad \left| \sum^{\infty} f_n(x) \right| \leq \varepsilon$$

o también que $S_M \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} S$ uniformemnte. Incluso que $\| S_M - S \|_{\infty} \to 0$

7.2.2. Continuidad, derivabilidad e integrabilidad de series de funciones.

Teorema 45. *Caracterización de las series de funciones.*

1. *Si* $D\,(\neq \emptyset)\,,\ \sum^{\infty} f_n$ *converge uniformemente en* $D \Leftrightarrow \{S_M\}_{M=1}^{\infty}$ *es de Cauchy en* $\mathcal{L}^{\infty}(D, \mathbb{K})$*, esto es*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \shortparallel M, N \geq N_0 \qquad \| S_M - S_N \|_{\infty} \leq \varepsilon$$

O también que $\left| \sum^{\infty} f_n(x) \right| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in D$

2. *Si* $D = [a,b] \subset \mathbb{R}$ *y* $f_n : D \to \mathbb{K}$ *son continuas y* $\sum^{\infty} f_n$ *converge uniformemente en* D*, entonces* $S(x) = \sum^{\infty} f_n(x)$ *es continua en* $[a,b]$ *y*

$$\lim_{x\to x_0} \sum^{\infty} f_n(x) = \sum^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \sum^{\infty} f_n(x_0)$$

3. *Sean* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *derivables en* $[a,b] \shortparallel \exists t_0 \in [a,b] \shortparallel \sum^{\infty} f_n(t_0)$ *converge y* $\sum^{\infty} f_n'$ *converge uniformemente en* $[a,b]$ *,entonces*
$S(t) = \sum^{\infty} f_n(t)$ converge uniformemente en $[a,b]$, $S(t)$ es derivable en $[a,b]$ y

$$S'(t) = \left(\sum^{\infty} f_n(t) \right)' = \sum^{\infty} f_n'(t)$$

4. *Sea* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrables y* $S(t) = \sum^{\infty} f_n(t)$ *converge uniformemente en* $[a,b]$*, entonces* $S(t)$ *es Riemann-integrable y*

$$\int_a^b S(t)\,dt = \int_a^b \sum^{\infty} f_n(t)\,dt = \sum^{\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$

5. *Si* $S(t) = \sum^{\infty} f_n(t)$ *converge puntualmente en* $[a,b]$ *y* $S(t)$ *es Riemann-integrable y* $\exists K > 0 \shortparallel \left| \sum^{M} f_n(t) \right| \leq K \quad \begin{array}{c} \forall t \in [a,b] \\ \forall M \in \mathbb{N} \end{array}$ *, entoces*

$$\int_a^b \sum^{\infty} f_n(t)\,dt = \sum^{\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$

6. *Si* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R},\ f_n \geq 0 \quad \forall n$ *son continuas,* $S(t) = \sum^{\infty} f_n(t)$ *converge puntualmente en* $[a,b]$ *y es continua en* $[a,b]$*, entonces*

$$S(t) \text{ converge uniformemente en } [a,b]$$

Demostración.

Como las series de funciones son sucesiones de funciones a fin de cuentas, todas estas propiedades se demostraron en la Parte I, de sucesiones de funciones. Veamos con algo más de detenimiento sólo algunas de ellas.

3. $\forall M \in \mathbb{N} \quad S_M(t) = \sum^{M} f_n(t)$ son derivables y $S_M(t_0) \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} A$
$S_M'(t) = \sum^{M} f_n'(t) \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \sum^{\infty} f_n'(t)$ uniformemente en $[a,b]$

$$S_M(t) \to S(t) \qquad S'(t) = \lim_{M\to\infty} S_M'(t)$$

4. $\forall M \in \mathbb{N} \quad S_M(t) = \sum^{M} f_n(t)$ son Riemann-integrables.

$S_M(t) \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} S(t)$ uniformemente, y por lo demostrado para sucesiones de funciones:

$$\lim_{M\to\infty} \int_a^b S_M(t)\,dt = \int_a^b S(t)\,dt$$

5. $\forall M \in \mathbb{N} \quad S_M = \sum^M f_n(t)$
$S_M(t) \to S(t)$ puntualmente, y $S(t)$ es Riemann-integrable.
$|S_M(t)| \leq K \qquad \forall M,\ \forall t \in [a,b]$, luego

$$\lim_{M\to\infty} \int_a^b S_M(t)\,dt = \int_a^b S(t)\,dt$$

6. $\forall M \in \mathbb{N} \quad S_M(t) = \sum^M f_n(t) \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} S(t)$ puntualmente, y $S(t)$ continua.

Como $f_n \geq 0 \quad \forall n \Rightarrow \{S_M(t)\}_M \uparrow$ (monótona creciete), luego por el criterio de Dini, $S(t)$ converge uniformemente.

Idem si $f_n \leq 0 \quad \forall n \Rightarrow \{S_M(t)\}_M \downarrow$ y por el criterio de Dini, convergería uniformemente. □

7.2.3. Criterio *M* de Weierstrass

Teorema 46. *Criterio* M *de Weierstrass.*
Sea $D\,(\neq \emptyset) \quad f_n : D \to \mathbb{K} \shortparallel \exists K_n$ *(al que llamaremos* mayorante*) tal que* $|f_n(t)| \leq K_n \quad \forall x \in D$.

$$\textit{Si } \sum^{\infty} K_n < \infty, \textit{ entonces } \sum^{\infty} f_n(t) \textit{ converge uniformemente.}$$

Demostración.
Sean $M, N \in \mathbb{N}$ (spdg, $N < M$)
Si $x \in D$: $|S_M(x) - S_N(x)| = |f_{N+1}(x) + \ldots + f_M(x)| \leq |f_{N+1}(x)| + \ldots + |f_M(x)| \leq K_{N+1} + \ldots + K_M \quad \forall x \in D \underset{\tilde{S}_M = \sum^M K_n}{=} \tilde{S}_M - \tilde{S}_N$

Como $\sum^M K_n < \infty \Rightarrow \tilde{S}_M - \tilde{S}_N \longrightarrow 0 \Rightarrow |S_M(x) - S_N(x)| \leq \tilde{S}_M - \tilde{S}_N \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$, luego $S_M(x) - S_N(x)$ es de Cauchy. Además, $\left\{\tilde{S}_M\right\}_M$ también es de Cauchy.

Por tanto, $d_\infty(S_M, S_N) = \| S_M - S_N \|_\infty \leq \tilde{S}_M - \tilde{S}_N \Rightarrow \{S_M\}_M$ es de Cauchy en d_∞. Dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \shortparallel M, N \geq n_0$ (spdg $M > N$) $\tilde{S}_M - \tilde{S}_N \leq \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{M\to\infty} S_M$ en d_∞ □

7.2.4. Series de potencias

Definición 67. Serie de potencias
Si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$

1. La **serie de potencias** con coeficientes $\{a_n\}$ centrada en z_0 es:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad z \in \mathbb{C}$$

2. Sea $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, \infty]$, al que llamamos **radio de convergencia** de la serie de potencias.

Observación 40. Por convenio se toma que si $R = \frac{1}{\infty} = 0$ y si $R = \frac{1}{0} = \infty$

Teorema 47. *Teorema de Cauchy-Hadamard*
Sea $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad z, z_0 \in \mathbb{C}, \{a_n\} \subset \mathbb{C}$. *Entonces:*

1. *La serie de potencias converge* ***puntual y absolutamente*** *si* $|z - z_0| < R \quad \forall z$. *Si* $R = 0$*, en conjunto de z que hace coverger la serie es vacío y sólo converge en* z_0*, y si* $|z - z_0| > R$ *la serie diverge. Si* $|z - z_0| = R$*, no puede segurarse con certeza si la serie converge o diverge.*
2. *La serie* ***converge uniformemente*** *en* $\mathcal{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \shortparallel |z - z_0| \leq r\} \qquad \forall r < R$. *A estos conjuntos* $\mathcal{D}_r$ *se les llama* ***discos de convergencia*** *(de ahí lo de la serie "centrada" en* z_0*)*

Demostración.

1. Sea $z \neq z_0 \shortparallel |z - z_0| < R$. Entonces $\exists k < 1 \shortparallel |z - z_0| < k \cdot R$
   Como $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{k}{|z-z_0|} \Rightarrow \exists n_0 \shortparallel \forall n \geq n_0 \qquad \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{k}{|z-z_0|}$.

   Luego para $n \geq n_0 \qquad \sqrt[n]{|a_n|\,|z - z_0|^n} < k < 1 \underset{\text{Criterio raíz}}{\Rightarrow} \sum^{\infty} |a_n|\,|z - z_0|^n < \infty$

   Si $|z - z_0| > R \Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\,|z - z_0|^n} > 1 \Rightarrow$ hay infinitos valores $n \in \mathbb{N}$ tales que $\sqrt[n]{|a_n|\,|z - z_0|^n} > 1 \Rightarrow$ hay infinitos valores $|a_n|\,|z - z_0|^n > 1 \underset{n\to\infty}{\nrightarrow} 0$. Luego $\sum^{\infty} |a_n|\,|z - z_0|^n = \infty$, esto es, la serie diverge.

2. Sea $r < R$ y $|z - z_0| < r \Rightarrow \exists k < 1 \shortparallel r = k \cdot R$
   Como $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} < \frac{k}{|z-z_0|} \Rightarrow \exists n_0 \shortparallel \forall n \geq n_0 \qquad \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{k}{|z-z_0|}$.

   Luego para $n \geq n_0 \qquad \sqrt[n]{|a_n|\,|z - z_0|^n} < k < 1; |a_n|\,|z - z_0|^n \leq k^n \quad (\forall z,\ |z - z_0| < r) \Rightarrow \sum^{\infty} |a_n|\,|z - z_0|^n < \sum^{\infty} k^n < \infty \underset{\text{Criterio M}}{\Rightarrow}$ la convergencia es uniforme.

□

7.2.4.1. Itegrabilidad y derivabilidad de series de potencias

Corolario 16. *Integrabilidad de series de potencias.*

1. *Si* $f(z) = \sum^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $\{a_n\} \subset \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}$, *con* $R \in (0, \infty]$, *entonces* $f(z)$ *es continua en* $z \in B(z_0, R)$, *pues existe convergencia uniforme en el disco.*

2. *Si* $\{a_n\} \subset \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}$ *y* $[a, b] \subset (z_0 - R, z_0 + R)$ *entonces* $f(z) = \sum^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *converge uniformemente para* $z \in [a, b]$, *por tanto,* $f(z)$ *es continua en* $[a, b]$ *y*

$$\int_a^b f(z)\, dz = \int_a^b \sum^{\infty} a_n (z - z_0)^n\, dz = \sum^{\infty} \int_a^b a_n (z - z_0)^n\, dz = \sum^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} \Big]_{z=a}^{z=b}$$

   En particular, si $t \in (z_0 - R, z_0 + R) \qquad \int_a^t f(z)\, dz = \sum^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \left((t - z_0)^{n+1} - (a - z_0)^{n+1} \right)$

   Además si $a = z_0$: $\int_{z_0}^t \sum^{\infty} a_n (z - z_0)^n\, dz = \sum^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (t - z_0)^{n+1}$, *es decir que la primitiva de una serie de potencias es otra serie de potencias.*

Observación 41. El radio de convergencia de la primitiva de f es le mismo que el f.
Sea $\tilde{R}$ el radio de convergencia de la primitiva, y R el de f.
$\tilde{R} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|}} = R$, ya que $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

Notar que al separar el producto del lím sup, en realidad lo que hacemos es asumir que para toda sucesión que tenga por supremo de sus puntos de acumulación $\sqrt[n]{a_n}$, el valor de $\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$ es el mismo, luego por eso "lo descartamos". En ningún momento decimos que el limite superior de un producto sea el producto de límites superiores (porque no es verdad, más que nada)

Teorema 48. *Derivabilidad de series de potencias.*

Supongamos $\{a_n\} \subset \mathbb{C}, z = x_0 \in \mathbb{R}$ *y sea* $f(x) = \sum^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *con* $R \in (0, \infty]$. *Entonces* $f(x)$ *es derivable con* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ *y*

$$f'(x) = \sum^{\infty} n \cdot a_n (x - x_0)^{n-1}$$

con el mismo R *que el de* $f(x)$ *(por obs. 41).*

Entonces, por tener $f'(x)$ radio de convergencia positivo, $f'(x)$ es continua. Luego entonces f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $(x_0 - R, x_0 + R)$ y

$$f^{j)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-j)!} a_n (x - x_0)^{n-j} \overset{k=n-j}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+j)!}{k!} a_n (x - x_0)^k$$

Demostración.

Veamos la convergencia uniforme de la serie de las derivadas, $\sum_{n=1}^{\infty} n{\cdot}a_n (x - x_0)^{n-1} \underset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k$,

luego su radio de convergencia (denotado por $\tilde{R}$) es $\tilde{R} = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{(k+1)\, a_{k+1}}} \overset{\lim \sqrt[k]{k+1}=1}{=} \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_{k+1}}} =$

$\frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} (a_{k+1})^{1/k}} = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \left(a_{k+1}^{1/k+1}\right)^{k+1/k}} = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k+1]{a_{k+1}}} = R$

Luego, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ converge en $(x_0 - R, x_0 + R)$ y uniformemente en $[x_0 - R + \varepsilon, x_0 + R - \varepsilon]$ $\forall \varepsilon > 0$

Además, $f(x) = \sum^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ converge en $x = x_0$, f es derivable y $f'(x) = \sum^{\infty} n \cdot a_n (x - x_0)^{n-1}$.

La función es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y sus derivadas pueden obtenerse término a término. $\square$

Corolario 17.

En la situación anterior teníamos que

$$a_j = \frac{f^{j)}(x_0)}{j!}$$

y en particular si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ *y si* $\exists L > 0 \shortparallel \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ $\forall x \in (x_0 - L, x_0 + L) \Rightarrow a_n = b_n \quad \forall n$.

Además, el radio de convergencia de las series es mayor o igual que L.

Demostración.

Como $f^{j)}(x) = \sum^{\infty} \frac{(k+j)!}{k!} a_{k+j} (x - x_0)^k \Rightarrow f^{j)}(x_0) = j \cdot (j-1) \cdot \ldots \cdot 1 \cdot a_j = j! \cdot a_j$.

Sean $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ y sabemos que $f(x) = g(x) \quad \forall x \in (x_0 - L, x_0 + L)$ y que $R_f \geq L$ y $R_g \geq L$.

Como $f(x) = g(x)$ y ambas son series de potencias, $f^{n)}(x) = g^n(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in (x_0 - L, x_0 + L) \Rightarrow a_n = b_n \quad \forall n$

Recíprocamente, sea $f \in \mathcal{C}^\infty(a, b)$ y $x_0 \in (a, b)$ y por el teorema de Taylor: $\forall x \in (a, b) \quad \exists c$ "entre" x, x_0 tal que

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

$\square$

¿Se podrá dar el salto al límite en el sumatorio?. Bueno, habría que plantearse si la serie de potencias converge, y si es así, que la serie obtenida sea igual a la función f. En caso de:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases} \qquad f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \qquad f^{j)}(0) = 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{j)}(0)}{j!} x^j \equiv 0 \neq f(t)$$

f converge, pero la serie no es igual a f.

7.2.4.2. Series de Taylor

Teorema 49. *Serie de Taylor de una función $\mathcal{C}^\infty$*
Supongamos que $x \in (a,b) \shortparallel x \neq 0$,

$$\sup_{\xi\in[x_0,x] \text{ ó } \xi\in[x,x_0]} \left\{ \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1} \right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Encontces, el resto de Lagrange tiene a 0, y $f(x) = \sum^\infty \frac{f^{j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$ *y* $R \geq |x-x_0|$

Demostración.

Como $\forall n \in \mathbb{N}, \exists c$ "entre" $x, x_0 \shortparallel f(x) = \sum^\infty \frac{f^{j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + L_n(x,x_0)$ y sabemos que $|L_n(x,x_0)| \leq \sup_{\xi\in[x_0,x] \text{ ó } \xi\in[x,x_0]} \left\{ \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1} \right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, luego $f(x) = \sum^\infty \frac{f^{j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$.

□

Observación 42. $(n+1)!$ en el denominador ayuda a que $L_n \to 0$ y si $|x-x_0| < 1$, $|x-x_0|^n$ también hace que el resto de Lagrange tienda a 0. Un posible fallo que da al traste con todo esto sería que las derivadas en ξ fueran tan grandes que se sobrepusiera a $(n+1)!$ y $|x-x_0|^n$.

Observación 43. En particular, si $\exists M > 0$ tal que $\sup_{\xi\in[x_0,x] \text{ ó } \xi\in[x,x_0]} \left\{ f^{n+1)}(\xi) \right\} \leq M$, entonces la serie de Taylor converge a f.

Ejemplo 33. Transformaciones con series de potencias
Sabemos que $\sum_{n=0}^M x^n = \frac{1-x^{M+1}}{1-x}$.
Si $|x| < 1$, tomando $\lim_{M\to\infty}$ queda $\sum^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \qquad x \in (-1,1) \Rightarrow R = 1$.
Si ahora cogemos $\sum^\infty (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ y la integramos, tenemos $\ln(x+1) = \sum^\infty \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$. Aunque no lo demostremos, si tomamos $x = 1$ en esta serie, tenemos que $\ln(2) = \sum^\infty \frac{(-1)^n}{n+1}$, con lo que obtenemos una expresión *tipo Taylor* para el logaritmo neperiano de 2.

Sigamos haciendo modificaciones a esta serie. Tomemos ahora $\sum^\infty (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$. Si la derivamos obtenemos $\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \sum^\infty 2n \cdot (-1)^n x^{2n-1}$, serie perfectamente *legal.*

Pero resulta mucho más interesante si a esta misma serie la integramos, pues obtenemos la arcotangente: $\frac{1}{1+x^2} = \sum^\infty (-1)^n x^{2n} \overset{\int}{\Rightarrow} \arctan(x) = \sum^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, con lo que hemos dado con otra expresión *tipo Taylor* para la arcotangente. Si asumimos (aunque sin que lo demostremos) que $x = 1$, $\arctan(1) = \pi/4 = \sum^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$

Ejemplo 34. Expresión como serie de potencias de $\operatorname{sen}(x)$
Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x), \quad x_0 = 0$
Bien, las derivadas de esta función son: $\begin{cases} f'(x) = \cos(x) & f''(x) = -\operatorname{sen}(x) \\ f'''(x) = -\cos(x) & f^{iv)}(x) = \operatorname{sen}(x) \end{cases}$, con que, a partir de la derivada cuarta, todo vuelve a repetirse.
$\left|f^{n)}(x)\right| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, y además, las derivadas pares se anulan en 0, luego:

$$\operatorname{sen}(x) = \sum^\infty \frac{f^{n)}(0)}{n!} x^n = \sum^\infty \frac{f^{2n+1)}(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum^\infty \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Veamos su radio de convergencia:
$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{(2n+1)!}}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{(2n+1)!} \right)^{1/n} \right]^{n/2n+1}} = \frac{1}{0} = \infty$
El cambio en la raíz se debe a que el lím sup debe hacerse con la raíz n-ésima, no con la $2n+1$-ésima.

Ejemplo 35. Expresión como serie de potencias de $\cos(t)$
Sea $f(t) = \cos(t)$, que es de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

$\left|f^{n)}(t)\right| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ y sus derivadas son: $\begin{cases} f'(t) = -\operatorname{sen}(t) & f''(t) = -\cos(t) \\ f'''(t) = \operatorname{sen}(t) & f^{iv)}(t) = \cos(t) \end{cases}$, con que, a partir de la derivada cuarta, todo vuelve a repetirse.

Las derivadas impares se anulan en 0, luego:

$$\cos(t) = \sum^{\infty} \frac{f^{2n)}(0)}{(2n)!} t^{2n} = \sum^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} t^{2n}$$

con $R = \infty$

Observación 44. Si derivamos la expresión tipo Taylor del seno (del ejemplo anterior), obtenemos este último desarrollo, del coseno.

Observación 45. Notar que el desarrollo de Taylor del seno tiene potencias impares y la del coseno pares, debido a que las funciones son impares y pares, respectivamente.

Ejemplo 36. La expresión de Taylor del e^z

$f(z) = e^z$, de clase $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$

$f^{n)} = e^z \ \forall n \in \mathbb{N}$.

¿Será un posible desarrollo de Taylor $f(z) \stackrel{?}{=} \sum^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, con $R = \infty$?

Usemos el teorema 48 para comprobarlo:

Si $|z| \leq R \Rightarrow \left|f^{n)}(z)\right| \leq e^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$, luego $\sup\limits_{\xi \in [-R,R]} \left\{ \frac{f^{n)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot R^{n+1} \right\} \leq \frac{e^R}{(n+1)!} \cdot R^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, por el criterio del cociente.

Luego si se cumple que $f(z) = \sum^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Ejemplo 37. Desarrollo de Taylor de $\operatorname{arc\,sen}(x)$

Sea $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2}$

Sus derivadas son: $\begin{cases} f'(x) = 1/2\,(1-x)^{-3/2} & f''(x) = 3/4\,(1-x)^{-5/2} \\ f'(x) = 5\cdot 3/2\cdot 4\,(1-x)^{-7/2} & f^{iv)}(x) = 15\cdot 7/8\cdot 2\,(1-x)^{-9/2} \end{cases}$, luego $f^{n)}(0) = \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{2^n} = \frac{(2n+1)!!}{2^n}$

Sigamos construyendo nuestra serie, veamos pues el radio de convergencia:

El radio R de $\frac{(2n+1)!!}{2^n\cdot n!}$ es 1. La serie es entonces $f(x) = \sum^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{2^n\cdot n!} x^n$. Si ahora llamamos $g(x) = \operatorname{arc\,sen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, entonces, a partir del desarrollo para f, decimos que el de g es $g(x) = \sum^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{2^n\cdot n!} x^{2n}$, que integrando resulta:

$$\int g(x) = \int \operatorname{arc\,sen}'(x) = \operatorname{arc\,sen}(x) = \sum^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad x \in (-1,1)$$

7.3. Series de Fourier

El objetivo que perseguimos es transformar una función periódica en una de la forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \operatorname{sen}(nt) \qquad t \in \mathbb{R}$$

7.3.1. Funciones 2π-periódicas. Propiedades

Definición 68. Función 2π-periódica

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f es 2π-periódica si y sólo si

$$f(t + 2\pi) = f(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Observación 46. Propiedades de las funciones 2π-periódicas

1. El conjunto de las funciones 2π-periódicas es un espacio vectorial.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cos(nt)$, $\operatorname{sen}(nt)$, 1 son 2π-periódicas.

3. Si f es 2π-periódica, entonces $\forall a \in \mathbb{R} \quad f_a(t) = f(t+a)$
4. Si $g_0 : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, entonces $\exists!\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periódica tal que $g(t) = g_0(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

   Demostración. (de 4)

   Existencia: Si $t \in \mathbb{R} \quad \exists! n \in \mathbb{Z} \shortmid\shortmid t \in [n \cdot 2\pi, (n+1) \cdot 2\pi) \Rightarrow g(t) = g_0(t - n \cdot 2\pi)$

   Unicidad: Si g_1, g_2 son funciones 2π-periódicas y $g_1 = g_0 = g_2$ en $[0, 2\pi) \Rightarrow g_1 - g_2 \equiv 0$ en $[0, 2\pi) \Rightarrow g_1 - g_2 \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow g_1 = g_2$ □

Proposición 70.
Las funciones 1, $\cos(nt)$ *y* $\operatorname{sen}(nt)$ *verifican:*

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt)\, dt = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nt)\; dt = 0 \qquad \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$$

Además se tiene que:

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt) \operatorname{sen}(mt)\; dt = 0 \qquad m, n \in \mathbb{N}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt) \cos(mt)\; dt = \begin{cases} 0 & si\ n \neq m \\ \pi & si\ n = m \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nt) \operatorname{sen}(mt)\; dt = \begin{cases} 0 & si\ n \neq m \\ \pi & si\ n = m \end{cases}$$

Demostración. Se deduce de las expresiones trigonométricas de la suma y resta de seno y coseno. □

Proposición 71. *Independencia lineal de* $\{1\}, \{\cos(nt)\}_n, \{\operatorname{sen}(nt)\}_n$.
Las funciones $\{1\}, \{\cos(nt)\}_n, \{\operatorname{sen}(nt)\}_n$ *son linealmente independientes.*

Demostración. Veamos si podemos encontrar una combinación lineal finita no nula para $A_0 + \sum_{n=1}^{M} A_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{M} B_n \operatorname{sen}(nt) = 0$ (func. nula).

Bien, si integramos esta expresión, tenemos:

$$A_0 \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{M} A_n \int_0^{2\pi} \cos(nt)\; dt + \sum_{n=1}^{M} B_n \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nt)\; dt = 0 \Rightarrow A_0 = 0$$

Sea $m \in \{1, \ldots, M\}$, y multiplicamos por $\cos(mt)$ e integramos en $[0, 2\pi]$:

$$\sum_{n=1}^{M} A_n \int_0^{2\pi} \cos(nt) \cos(mt)\; dt + \sum_{n=1}^{M} B_n \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nt) \cos(mt)\; dt = 0 \Rightarrow A_n = 0$$

Sea $m \in \{1, \ldots, M\}$, y multiplicamos por $\operatorname{sen}(mt)$ e integramos en $[0, 2\pi]$:

$$\sum_{n=1}^{M} B_n \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nt) \operatorname{sen}(mt)\; dt = 0 \Rightarrow B_n = 0$$

Luego $\{1\}, \{\cos(nt)\}_n, \{\operatorname{sen}(nt)\}_n$ forman base de un espacio de funciones. Se dice además que esta base es *de Hilbert.* □

Observación 47. Dada $f(t)$, supongamos que hemos probado que $f(t)$ puede descomponerse en $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \operatorname{sen}(nt)$ y que la convergencia de la serie es razonable. Entonces, los coeficientes a_0, a_n, b_n vienen dados por:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt$$

$$a_n = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\ dt, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\,(nt)\ dt, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Demostración. Como $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\,\mathrm{sen}\,(nt)$, integramos. Como la convergencia es "razonable" podemos intercambiar la serie con la integral:

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{a_0}{2}2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi}\cos(nt)\ dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,(nt)\ dt \Rightarrow \int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{a_0}{2}2\pi \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$$

□

- Para los términos a_n. Sea $m \in \mathbb{N}$ y multiplicamos por $\cos(mt)$
  $f(t)\cos(mt) = \frac{a_0}{2}\cos(mt\,dt) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt)\cos(mt)\ dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}\,(nt)\cos(mt)\ dt$, e integrando:

  $$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(mt)\ dt = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos(mt)\ dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi}\cos(nt)\cos(mt)\ dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,(nt)\cos(mt)\ dt$$

  Luego $\int_0^{2\pi} f(t)\cos(mt)\ dt = \pi a_n$, ya que $\int_0^{2\pi}\cos(nt)\cos(mt)\ dt$ no se anula en $n = m$.

- Para los términos b_n procederemos de una forma similar. Sea $m \in \mathbb{N}$ y multiplicamos por $\mathrm{sen}\,(mt)$
  $f(t)\,\mathrm{sen}\,(mt) = \frac{a_0}{2}\,\mathrm{sen}\,(mt) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt)\,\mathrm{sen}\,(mt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}\,(nt)\,\mathrm{sen}\,(mt)$, e integrando:

  $$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(mt) = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos(mt)\ dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi}\cos(nt)\cos(mt)\ dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,(nt)\cos(mt)\ dt$$

  Luego $\int_0^{2\pi} f(t)\cos(mt)\ dt = \pi b_n$, ya que $\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,(nt)\,\mathrm{sen}\,(mt)\ dt$ sólo es no nulo cuando $n = m$.

Observación 48.

1. Si f es par, entonces $b_n = 0 \quad \forall n$ y $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\ dt \Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$
2. Si f es impar, entonces $a_n = 0 \quad \forall n$ y $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\,(nt)\ dt \Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$

Demostración.

1. $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cdot\mathrm{sen}(nt)\,dt = 0$, por ser par. $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cdot\cos(nt)\,dt$
2. $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cdot\cos(nt)\,dt = 0$, por ser impar. $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\mathrm{sen}(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cdot\mathrm{sen}(nt)\,dt$

□

Definición 69. Serie y suma parcial de Fourier.
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es 2π-periódica tal que es Riemann-integrable en $[0, 2\pi]$

1. Se llama **serie de Fourier** de f a

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}(nt)$$

2. Se llama **suma parcial de Fourier** de f a

$$S_M(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{M} a_n\cos(nt) + \sum_{n=1}^{M} b_n\,\mathrm{sen}(nt)$$

donde a_0, a_n, b_n son los coeficientes de Fourier.

Observación 49. Si
$S_M(f)(t) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,ds + \sum_{n=1}^{M}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos(ns)\,\text{sen}(nt)\,ds + \sum_{n=1}^{M}\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}(ns)\,\text{sen}(nt)\,ds\right] =$
$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{M}\cos(ns)\cos(nt) + \sum_{n=1}^{M}\text{sen}(ns)\,\text{sen}(nt)\right]\,ds = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos\left[n\,(s-t)\right]\,ds$. Notar el cambio de variable de integración.

Lema 5.

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{M}\cos(nz) = \frac{\text{sen}\left(\left(M+\frac{1}{2}\right)z\right)}{2\,\text{sen}\left(\frac{z}{2}\right)}$$

Observación 50. Por tanto, podemos escribir la serie de Fourier como sigue:

$$S_M(f)(t) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\frac{\text{sen}\left(\left(M+\frac{1}{2}\right)(s-t)\right)}{2\,\text{sen}\left(\frac{s-t}{2}\right)}$$

Se conoce al integrando como **núcleo de Dini** de orden M, que denotamos por $D_M(s-t)$. Luego, sustituyendo:

$$S_M(f)(t) = \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(z+t)D_M(z)\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} f(z+t)D_M(z)\,dz$$

por ser la función $\pi-$periódica.

Observación 51. $S_M(f)(t)-f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(z+t)D_M(z)\,dz - f(t)\int_{-\pi}^{\pi} D_M(z)\,dz = \int_{-\pi}^{\pi}\left[f(z+t)-f(t)\right]D_M(z)\,dz =$
$\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(z+t)-f(t)\right] = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\text{sen}(M+\frac{1}{2})z}{2\,\text{sen}(\frac{z}{2})}$

7.3.2. Lema de Riemann-Lebesgue y criterio de Dini

Lema 6. *Lema de Riemann-Lebesgue*
Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que es Riemann-integrable. Entonces

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\qquad \lim_{a\to\infty}\int_a^b f(t)\,\text{sen}(\alpha t+\beta)\,dt = 0$$

Luego,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(z+t)-f(t)}{2\pi\,\text{sen}\,(z/2)}\cdot\text{sen}\left(\left(M+\frac{1}{2}\right)z\right)$$

Como $\lim_{z\to 0}\frac{\text{sen}(z/2)}{z} = 1$, tenemos que $S_M(f)(t)-f(t) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(z+t)-f(t)}{z}\cdot\frac{z/2}{\pi\,\text{sen}(z/2)}\cdot\text{sen}(M+1/2)z\,dz$

Si $\frac{f(z+t)-f(t)}{z}$ es integrable en $z=0$, por el lema de Riemann-Lebesgue, entonces $M\to\infty$ y la derivada de f tiende a 0. La integrabilidad depende de la derivada de $f(t)$

Proposición 72.
Si f verifica que $\exists\delta>0 \shortparallel z\mapsto\frac{f(z+t)-f(t)}{z}$ es integrable en $[-\delta,\delta]$, entonces la serie de Fourier converge a $f(t)$

Demostración. Por el lema de Riemann-Lebesgue. □

Observación 52. Si $\exists f'(t)$, $\exists f'(t^+)$ y $\exists f'(t^-)$ o $|f(z+t)-f(t)|\le C\,|z|^\alpha$, $\quad\alpha\in(0,1]\quad\forall z\in[-\delta,\delta]$, esto es, f es de clase Lipchitz en $[-\delta,\delta]$, entonces f converge.

Ejemplo 38. Sea $f(t)=1$. $f(t) = \begin{cases}1 & \text{si } t\in[0,\pi]\\ 0 & \text{si } t\in(-\pi,0)\end{cases}$. Queremos llevar $f(t)$ a la forma $\frac{a_0}{2}+\sum^{\infty}a_n\cos(nt)+\sum^{\infty}b_n\,\text{sen}(nt)$. Calculemos los coeficientes de Fourier para la función.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,dt = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt) = \frac{1}{\pi}\frac{\text{sen}(nt)}{n}\Bigg]_{t=0}^{t=\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{sen}(nt) = \frac{1}{\pi}\left.\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\left((-1)^n - 1\right)$$

Luego $f(t)$ queda $f(t) = \sum^{\infty} \frac{((-1)^n-1)}{n\pi} = \begin{cases} 1 & \text{si } t\in(0,\pi) \\ 0 & \text{si } t\in(-\pi,0)\end{cases}$ ¿Qué ocurre en 0 y π? Pues que en ambos casos converge, a $1/2$.

Ejemplo 39. Sea $f(t) = t, \qquad t\in[-\pi,\pi]$. Es claro que f es impar, con lo cual sabemos que $a_n = 0\ \forall n$. Nos limitaremos a calcular los coeficientes b_n.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cdot\mathrm{sen}(nt) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cdot\mathrm{sen}(nt)\,dt,$$

que integrando por partes, $\begin{cases} u = t & dv = \mathrm{sen}(nt)\,dt \\ du = dt & v = \frac{-\cos(nt)}{n}\end{cases}$

$$\frac{2}{\pi}\left[\left[\frac{-t\cdot\cos(nt)}{n}\right]\right]_{t=0}^{t=\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{n}\,dt = \frac{2}{\pi}(-1)^{n+1} + \left.\frac{2}{\pi n^2}\,\mathrm{sen}(nt)\right]_{t=0}^{t=\pi}$$

Luego $f(t) = \sum^{\infty}\frac{2}{\pi}(-1)^{n+1}\,\mathrm{sen}(nt) = t \qquad \forall t\in(-\pi,\pi)$. En $-\pi,\pi$, la serie vale 0.

Vemos que en ambos ejemplos se sigue un patrón: en los puntos de discontinuidad de la función, la serie converge al punto medio, $1/2$ y 0.

Ejemplo 40. Sea ahora $f(t) = |t| \qquad t\in[-\pi,\pi]$. Ahora tenemos que f es impar, con lo que descartamos los términos b_n. Calculemos a_n y a_0.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \left.\frac{1}{\pi}t^2\right]_{t=0}^{t=\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cdot\cos(nt)\,dt$$

que aplicando integración por partes $\begin{cases} u = t & dv = \cos(nt)\,dt \\ du = dt & v = \frac{\mathrm{sen}(nt)}{n}\end{cases}$:

$$\frac{2}{\pi}\cdot\left.\frac{t\cdot\mathrm{sen}(nt)}{n}\right]_{t=0}^{t=\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(nt)\,dt = \left.\frac{2}{\pi n^2}\cdot\cos(nt)\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

Luego $S(f)(t) = \frac{\pi}{2} + \sum^{\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}\cos(nt) = |t| = f(t) \qquad t\in[-\pi,\pi]$

Observación 53. Si $t = 0$, $S(f)(0) = f(0) = 0 = \frac{\pi}{2} + \sum^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) \Rightarrow \sum^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2} = \frac{-\pi^2}{4}$.

Observación 54. Cuando f no es continua en t, tenemos que:

$$S_M(f)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(z+t)\cdot D_M(z)\,dz = \int_{-\pi}^{0} f(z+t)\cdot D_M(z)\,dz + \int_0^{\pi} f(z+t)\cdot D_M\,dz$$

En la primera integral, hacemos el cambio de variable $z = -s, dz = -ds$:

$$\int_0^{\pi} f(t-s)\cdot D_M(s)\,ds + \int_0^{\pi} f(z+t)\cdot D_M(z) = \int_0^{\pi}\left(f(z+t) + f(t-z)\right)\cdot D_M(z)\,dz$$

Ahora, sea $A\in\mathbb{R}$. $S_M(f)(t) - A = \int_0^{\pi}\left(f(z+t) + f(t-z)\right)\cdot D_M(z)\,dz$, por tanto

$$S_M(f)(t) - A = \int_0^{\pi}\frac{(f(z+t) + f(t-z) - 2A)}{z}\cdot\frac{z}{2\pi\,\mathrm{sen}(z/2)}\cdot\mathrm{sen}\left((M + 1/2)z\right)\,dz$$

$\frac{z}{\pi 2\,\mathrm{sen}(z/2)}$ es continua. ¿Será $\frac{(f(z+t)+f(t-z)-2A)}{z}$ Riemann-integrable?. Si así fuera, por el lema de Riemann-Lebesgue, $S_M(f)(t) - A \longrightarrow 0$, luego nuestra serie de Fourier es legal.

Como f ha de ser Riemann-integrable para ser convertida en serie de Fourier, el único problema está en 0. Pensemos también que $f(z+t)\approx f(t^+)$ y $f(t-z)\approx f(t^-)$

Teorema 50. *Criterio de Dini*
Si f es tal que $\exists A \in \mathbb{R}$ y $\exists \delta > 0 \shortparallel z \mapsto \frac{f(z+t)+f(t-z)-2A}{z}$ es Riemann-integrable en $(0, \delta)$, entonces:

$$\lim_{M \to \infty} S_M(f)(t) = S(f)(t) = A$$

Demostración. Es el desarrollo del apartado anterior. □

Corolario 18.

1. *Si f tiene límites laterales en t, entonces $A = \frac{f(t^+)+f(t^-)}{z}$.*
2. *Supongamos que f tiene límites laterales y $\exists \delta > 0\ \exists c > 0 \shortparallel z \in (0, \delta) \quad \alpha(0, 1]$, $|f(t+z) - f(t^+)| \leq c \cdot z^\alpha$ y $|f(t-z) - f(t^-)| \leq c \cdot z^\alpha$, entonces se verifica el criterio de Dini con $A = \frac{f(t^+)+f(t^-)}{z}$*
3. *El caso anterior se da con $\alpha = 1$ si $\exists \lim_{z \to t^+} f'(z)$*