E. T. S. de Ingenieros Industriales
Universidad Politécnica de Madrid

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Grado en Ingeniería Química

Apuntes de Álgebra

(Curso 2017/18)

Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial

Índice general

1. Los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ 1

1.1. Definición, propiedades y ejemplos . . . 1

1.1.1. Combinaciones lineales . . . 3

1.1.2. Dependencia e independencia lineal . . . 4

1.1.3. Subespacios vectoriales . . . 5

1.2. Bases . . . 7

1.2.1. Base y dimensión . . . 7

1.2.2. Coordenadas respecto a una base . . . 10

1.2.3. Intersección y suma de subespacios . . . 12

1.2.4. La relación de Grassmann . . . 14

1.3. Espacios vectoriales . . . 17

1.4. Ejercicios . . . 21

1.4.1. Cuestiones . . . 23

2. Matrices y sistemas lineales 25

2.1. Matrices . . . 25

2.1.1. Aplicaciones lineales . . . 27

2.1.2. Matriz de una aplicación lineal . . . 28

2.1.3. Composición de aplicaciones lineales y producto matricial . . . 30

2.1.4. La inversa de una matriz . . . 33

2.2. Imagen y núcleo de una matriz . . . 33

2.2.1. Núcleo e inyectividad . . . 35

2.3. Rango de una matriz . . . 35

2.3.1. Cálculo del rango mediante operaciones elementales . . . 38

2.3.2. Algoritmo de Gauss-Jordan . . . 40

2.3.3. Matriz de cambio de base . . . 41

2.4. Sistemas de ecuaciones lineales . . . 42

2.4.1. Estructura de las soluciones . . . 42

2.4.2. El teorema de Rouché-Frobenius . . . 43

2.4.3. Resolución de sistemas lineales por reducción gaussiana . . . 44

2.5. Ejercicios . . . 47

2.5.1. Cuestiones . . . 50

3. Producto escalar y ortogonalidad **51**
3.1. Producto escalar y norma . . . 51
3.2. Ortogonalidad . . . 54
3.2.1. Familias ortogonales . . . 55
3.2.2. Ortonormalización de Gram-Schmidt y factorización **QR** . . . 58
3.3. Extensión a $\mathbb{C}^n$ . . . 60
3.3.1. Matrices unitarias . . . 62
3.4. Extensión a espacios vectoriales generales . . . 62
3.5. Ejercicios . . . 65
3.5.1. Cuestiones . . . 67

4. Proyecciones ortogonales y sus aplicaciones **69**
4.1. Matriz de proyección ortogonal . . . 69
4.1.1. Propiedades de las matrices de proyección ortogonal . . . 72
4.2. Los problemas de mínimos cuadrados y de mínima norma . . . 73
4.2.1. Introducción . . . 73
4.2.2. Soluciones de mínimos cuadrados de un sistema . . . 73
4.2.3. Solución de mínima norma de un sistema compatible indeterminado 77
4.2.4. Solución de mínimos cuadrados y mínima norma de un sistema . . . 79
4.3. Matriz de simetría ortogonal . . . 80
4.3.1. Propiedades de las matrices de simetría ortogonal . . . 80
4.4. El producto vectorial en $\mathbb{R}^3$ . . . 81
4.4.1. Propiedades del producto vectorial . . . 82
4.4.2. El producto vectorial en forma matricial . . . 82
4.5. Giros en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ . . . 82
4.5.1. Matriz de giro en $\mathbb{R}^2$ . . . 82
4.5.2. Matriz de giro en $\mathbb{R}^3$ . . . 83
4.5.3. Cálculo de la matriz de giro en función de la proyección sobre el eje de giro (*no exigible*) . . . 83
4.6. Ejercicios . . . 85
4.6.1. Cuestiones . . . 87

5. Reducción por semejanza de una matriz **89**
5.1. Introducción . . . 89
5.2. Matrices semejantes y matrices diagonalizables . . . 90
5.3. Valores y vectores propios . . . 90
5.3.1. Polinomio característico . . . 93
5.4. Diagonalización . . . 97
5.4.1. Teorema de Cayley–Hamilton . . . 99
5.5. Ejercicios . . . 104
5.5.1. Cuestiones . . . 106

6. Matrices normales **109**
6.1. Semejanza unitaria y diagonalización unitaria 109
6.2. Matrices normales 110
6.3. Teorema espectral 111
6.3.1. Aplicación a matrices hermíticas, antihermíticas y unitarias 113
6.3.2. Descomposición espectral 115
6.4. Matrices hermíticas 115
6.4.1. Formas cuadráticas 115
6.4.2. Cociente de Rayleigh 116
6.4.3. Clasificación de matrices hermíticas 117
6.4.4. Matrices reales simétricas 118
6.5. Ejercicios 120
6.5.1. Cuestiones 122

7. Descomposición en valores singulares **123**
7.1. Descomposición en valores singulares (DVS) de una matriz 124
7.1.1. Propiedades de la DVS 126
7.1.2. Expresiones de los valores singulares máximo y mínimo de una matriz 128
7.1.3. Matriz pseudoinversa 128
7.2. Número de condición espectral de una matriz 129
7.3. Normas vectoriales y matriciales 131
7.3.1. Normas vectoriales 131
7.3.2. Normas matriciales inducidas por normas vectoriales 132
7.4. Ejercicios 135
7.4.1. Cuestiones 137

Soluciones a los ejercicios propuestos **139**
Capítulo 1 139
Capítulo 2 148
Capítulo 3 157
Capítulo 4 163
Capítulo 5 171
Capítulo 6 178
Capítulo 7 184

Apéndice 1: Nociones de teoría de conjuntos **195**
1.1. Conjuntos y lógica formal 195
1.1.1. Definiciones básicas 195
1.1.2. Relaciones de pertenencia e inclusión 195
1.1.3. Los cuantificadores 196
1.1.4. Inclusión y lógica formal 197
1.2. Operaciones con conjuntos 197
1.2.1. Unión e intersección de conjuntos 197

1.2.2. Conjuntos complementarios 198
1.2.3. Producto cartesiano 199
1.3. Aplicaciones entre conjuntos 200
1.3.1. Definiciones 200
1.3.2. Composición de aplicaciones 201
1.3.3. La aplicación inversa 202

Apéndice 2: Los números complejos **204**
2.1. Definición y propiedades 204
2.2. Conjugación, módulo y argumento 205
2.2.1. Argumento de un complejo 206
2.3. Potencias. Fórmula de De Moivre 207
2.3.1. Fórmula de De Moivre 208

Apéndice 3: Polinomios **210**
3.1. Polinomios con coeficientes en un cuerpo 210
3.1.1. Operaciones con polinomios 211
3.2. División euclídea de polinomios 211
3.3. Raíces de un polinomio 212
3.3.1. Raíces de polinomios con coeficientes enteros 213

Ejercicios de números complejos y polinomios **214**

Bibliografía **216**

Capítulo 1

Los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$

1.1 Definición. Combinaciones lineales. Clausura lineal. Dependencia e independencia lineal. Subespacios vectoriales.

1.2 Bases. Dimensión. Intersección y suma de subespacios. Suma directa. Subespacios suplementarios. La relación de Grassmann.

1.3 Ejercicios. Cuestiones.

1.1. Definición, propiedades y ejemplos

En el presente capítulo nos proponemos estudiar los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$, que son generalizaciones del plano y del espacio euclídeo ordinarios así como de las magnitudes vectoriales de la física. Se trata de conjuntos cuyos elementos, denominados *vectores*, pueden sumarse entre sí y asimismo multiplicarse por números, que denominaremos *escalares*, obteniéndose como resultado en ambos casos un nuevo vector.

Nota: En lo que sigue, la letra $\mathbb{K}$ denotará indistintamente el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales o el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Utilizamos el mismo símbolo "+" para denotar la suma en el espacio $\mathbb{K}^n$ (*suma de vectores*) y la suma en el cuerpo $\mathbb{K}$. El símbolo "·" denota la ley externa en $\mathbb{K}^n$ (*producto de escalar por vector*)[1].

Definición 1 *Si n es cualquier entero positivo, definimos el espacio $\mathbb{K}^n$ como el conjunto de las n-uplas ordenadas de elementos de $\mathbb{K}$, es decir:*

$$\mathbb{K}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{K}, j = 1, 2, \ldots, n\}. \tag{1.1}$$

Los elementos de $\mathbb{K}^n$ se denominan ***vectores****. Los elementos $x_j \in \mathbb{K}$ se denominan* ***componentes*** *del vector.*

[1]En la práctica, tanto para producto de escalares como de escalar por vector, se yuxtaponen los términos omitiendo el punto "·".

Definición 2 (suma de vectores) *En $\mathbb{K}^n$ definimos la operación suma mediante*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n). \tag{1.2}$$

Propiedades de la suma:

La suma de vectores de $\mathbb{K}^n$ es una ley de composición interna en $\mathbb{K}^n$ (es decir, a cada par de vectores de $\mathbb{K}^n$ le asocia un nuevo vector de $\mathbb{K}^n$) que verifica las siguientes propiedades:

1. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{K}^n$, $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (propiedad asociativa).
2. $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{K}^n$ tal que, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$, $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ (existencia de elemento neutro).
3. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$, $\exists -\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = -\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (existencia de elemento simétrico).
4. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (propiedad conmutativa).

Las cuatro propiedades enunciadas, que se deducen inmediatamente de las de la suma de números reales o complejos, dotan a la dupla $(\mathbb{K}^n, +)$ de la estructura de **grupo abeliano**.

Definición 3 (vector nulo) *Llamamos vector nulo de $\mathbb{K}^n$, y lo denotamos por $\mathbf{0}$, al vector $(0, 0, \ldots, 0)$, es decir, el elemento neutro de la suma de vectores.*

Definición 4 (vector opuesto) *Dado un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, su opuesto es el vector $-\mathbf{x} := (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$, es decir, su elemento simétrico respecto a la suma de vectores.*

Definición 5 (producto de escalar por vector) *Si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, definimos su producto mediante*

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n). \tag{1.3}$$

*Esta operación también se denomina **ley externa** de $\mathbb{K}^n$.*

Propiedades de la ley externa:

La ley externa, en conjunción con la suma de vectores, verifica las siguiente propiedades:

5. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} + \mu \cdot \mathbf{x}$.
6. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \cdot \mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{y}$.
7. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ (\lambda\mu) \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{x})$.
8. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n,\ 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Todas estas propiedades se deducen fácilmente de las de la suma y el producto de números reales o complejos. Las propiedades 1 a 8 dotan a la cuaterna $(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}, +, \cdot)$ de la estructura de **espacio vectorial** cuya definición general se dará en la sección 1.3. También se dice que $\mathbb{K}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Propiedades adicionales:
De las 8 propiedades enunciadas se deducen con facilidad las siguientes (nótese la distinción entre el escalar $0 \in \mathbb{K}$ y el vector $\mathbf{0} \in \mathbb{K}^n$):

- $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n,\ 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$; $\lambda \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n,\ (-\lambda) \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot (-\mathbf{x}) = -(\lambda \cdot \mathbf{x})$.

1.1.1. Combinaciones lineales

Definición 6 (combinación lineal) *Una combinación lineal de los vectores* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ *de* $\mathbb{K}^n$ *es cualquier vector de la forma*

$$\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{u}_k, \tag{1.4}$$

siendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$, el vector $\left(\frac{1}{3}, 3, -\frac{4}{3}\right)$ es combinación lineal de los vectores $(1, 0, -1)$ y $(1, 3, -2)$, ya que

$$\left(\frac{1}{3}, 3, -\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3}(1, 0, -1) + (1, 3, -2).$$

Observación: El vector nulo es combinación lineal de cualesquiera vectores. Todo vector es combinación lineal de sí mismo.

Definición 7 (clausura lineal) *Dado un conjunto* $M \subset \mathbb{K}^n$*, se define la clausura lineal de* M*, y se denota por* $L[M]$*, como el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de* M*.*

Nota: Para $M = \varnothing$ se adopta el convenio $L[\varnothing] = \{\mathbf{0}\}$.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$, sea $M = \{(1, 0, -1), (1, 3, -2)\}$. $L[M]$ es el conjunto de vectores de la forma $\alpha(1, 0, -1) + \beta(1, 3, -2)$ con α, β escalares reales, es decir:

$$L[M] = \{(\alpha + \beta, 3\beta, -\alpha - 2\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

El vector $\left(\frac{1}{3}, 3, -\frac{4}{3}\right)$ del ejemplo anterior pertenece a $L[M]$, pues se obtiene para $\alpha = -2/3$ y $\beta = 1$.

1.1.2. Dependencia e independencia lineal

Definición 8 (independencia lineal) *Los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ de $\mathbb{K}^n$ son linealmente independientes si la única combinación lineal de ellos igual al vector nulo es la que tiene todos los coeficientes nulos, es decir,*

$$\lambda_j \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0. \tag{1.5}$$

En caso contrario, se dice que los vectores anteriores son ***linealmente dependientes****.*

Observación: $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ son **linealmente dependientes** si y sólo si

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}, \text{ con algún } \lambda_i \neq 0, \text{ tales que } \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{u}_j = \mathbf{0}. \tag{1.6}$$

Lo anterior equivale a que se pueda despejar alguno de los vectores como combinación lineal de los restantes, es decir,

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j \mathbf{u}_j, \quad \alpha_j \in \mathbb{K}. \tag{1.7}$$

(Basta considerar un $\mathbf{u}_i$ cuyo $\lambda_i \neq 0$ en la combinación lineal que da el vector nulo).

Definición 9 (familia libre y ligada) *Sea $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{K}^n$; se dice que S es una familia libre si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ son linealmente independientes; en caso contrario, se dice que S es una familia ligada.*

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}^3$, $\{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ es una familia libre, ya que

  $$\alpha(1,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(1,0,0) = (0,0,0) \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma = \alpha+\beta = \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

  Los tres vectores son linealmente independientes.

- En el mismo espacio, $\left\{(1,0,-1), (1,3,-2), \left(\frac{1}{3}, 3, -\frac{4}{3}\right)\right\}$ es ligada, ya que, como se vio anteriormente, $\left(\frac{1}{3}, 3, -\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3}(1,0,-1) + (1,3,-2)$, lo que equivale a que

  $$-\frac{2}{3}(1,0,-1) + (1,3,-2) - \left(\frac{1}{3}, 3, -\frac{4}{3}\right) = (0,0,0).$$

  Los tres vectores son linealmente dependientes.

Nota: Por razones que se verán más adelante en este mismo tema, adoptamos el convenio de considerar el conjunto vacío, $\varnothing$, como una familia libre.

Observación: Recapitulando:

- Cualquier subconjunto de una familia libre es libre.
- Cualquier familia que contenga el vector nulo es una familia ligada.
- Cualquier familia que contenga dos vectores proporcionales es ligada.
- La unión de una familia ligada con cualquier otra siempre da una familia ligada.
- Una familia S es ligada si y sólo si algún vector de S es combinación lineal de los restantes vectores de S.
- S es libre si y sólo si ningún vector de S es combinación lineal de los restantes vectores de S.

Ejemplo: En $\mathbb{K}^n$, consideramos los n vectores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,$ $\mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$ (para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, $\mathbf{e}_j$ es el vector que tiene nulas todas sus componentes excepto la j-ésima que vale 1). Estos vectores se conocen como **vectores canónicos** de $\mathbb{K}^n$.

La familia formada por los vectores canónicos es libre. En efecto, si $\lambda_j \in \mathbb{K}$,

$$\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (0, 0, \ldots, 0) \Leftrightarrow \lambda_j = 0 \ \forall j = 1, 2, \ldots, n.$$

1.1.3. Subespacios vectoriales

El concepto de subespacio vectorial se refiere a todo subconjunto H de $\mathbb{K}^n$ que, por sí mismo, mantenga la *estructura* de espacio vectorial de aquél, como por ejemplo sucede en $\mathbb{R}^3$ con los planos coordenados. Esta idea se traduce en que, si se efectúan las operaciones propias de $\mathbb{K}^n$ con los vectores de H, se tienen que obtener en todos los casos vectores pertenecientes a H.

Definición 10 (subespacio vectorial) *Un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ es cualquier subconjunto no vacío de dicho espacio que sea cerrado para la suma y para el producto por escalares, es decir:*

$H \subset \mathbb{K}^n$; se dice que H es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ si:

1. $\mathbf{0} \in H$.
2. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H,\ \mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$.

3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{u} \in H,\ \lambda \mathbf{u} \in H.$

Nótese que los apartados 2. y 3. pueden escribirse conjuntamente en la forma:

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \in H. \tag{1.8}$$

Así pues, un subespacio vectorial es un conjunto no vacío **cerrado para las combinaciones lineales**.

Observación: El propio espacio $\mathbb{K}^n$ es subespacio vectorial de sí mismo; además, el conjunto $\{\mathbf{0}\}$ formado únicamente por el vector nulo, constituye un subespacio que llamaremos **subespacio nulo**. Estos dos subespacios son los llamados *subespacios triviales* de $\mathbb{K}^n$.

Ejemplos:

1. En $\mathbb{R}^4$ consideramos el subconjunto $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 2x_3\}$.

   H, que obviamente contiene el $(0, 0, 0, 0)$, es un subespacio vectorial; en efecto, sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$, es decir, que satisfacen que $x_1 = 2x_3$ e $y_1 = 2y_3$. Para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, consideramos el vector $\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}$, cuya primera componente vale $\lambda x_1+\mu y_1 = \lambda \cdot 2x_3 + \mu \cdot 2y_3 = 2(\lambda x_3 + \mu y_3)$; como $\lambda x_3 + \mu y_3$ es precisamente el valor de la tercera componente de $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$, concluimos que dicho vector pertenece a H y, por tanto, éste es subespacio.

2. En $\mathbb{R}^3$, el plano de ecuación $x + y - 2z = 5$ no es subespacio vectorial, ya que el vector nulo (origen de coordenadas) no pertenece a dicho plano.

3. En $\mathbb{R}^3$, el paraboloide P de ecuación $z = x^2 + y^2$, pese a contener al $(0, 0, 0)$, no es subespacio vectorial. En efecto, si tomamos los puntos $(1, 1, 2)$ y $(-1, -1, 2)$, ambos pertenecen a P, pero su suma $(0, 0, 4)$ no satisface la ecuación.

Observación: La clausura lineal de cualquier conjunto M es un subespacio vectorial, ya que las combinaciones lineales de vectores de $L[M]$ pueden reducirse a su vez a combinaciones lineales de vectores de M, y pertenecen por tanto a $L[M]$, el cual se denomina también subespacio generado por M. Cualquier subespacio que contenga a M necesariamente contiene a $L[M]$.

Observación: Como consecuencia de la observación anterior, en $\mathbb{R}^2$ los únicos subespacios no triviales son las rectas que pasan por el origen, y en $\mathbb{R}^3$ las rectas que pasan por el origen y los planos que contienen a dicho punto.

1.2. Bases

1.2.1. Base y dimensión

Definición 11 (sistema generador) *Dados H subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ y $\mathcal{M} \subset H$, se dice que $\mathcal{M}$ es un sistema generador (o sistema de generadores) de H si $H = L[\mathcal{M}]$, es decir, si todo vector de H puede ponerse como combinación lineal de los de $\mathcal{M}$.*

Ejemplo: Los vectores canónicos de $\mathbb{K}^n$ constituyen un sistema generador de dicho espacio, ya que $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Definición 12 (base) *Dado H subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$, una base de H es un **sistema generador, libre y ordenado**.*

Definición 13 (base canónica) *En $\mathbb{K}^n$, la familia formada por los vectores canónicos $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$, que ya se ha visto que constituye un sistema libre y generador de $\mathbb{K}^n$, es por tanto una base que denominaremos base canónica de $\mathbb{K}^n$.*

Ejemplo: Encontrar una base del subespacio de $\mathbb{R}^4$ determinado por la ecuación $x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$.

Solución: Puesto que tenemos una única ecuación y cuatro incógnitas, podemos dar valores arbitrarios a tres de ellas y escribir la cuarta en función de esas tres, por ejemplo: $x_2 = \alpha, x_3 = \beta, x_4 = \gamma, x_1 = \alpha - 3\beta - \gamma$, es decir:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 3\beta - \gamma \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Los tres vectores anteriores engendran de manera evidente el subespacio y son linealmente independientes (véanse las tres últimas componentes), constituyendo por lo tanto una base del mismo.

Teorema 1 (existencia de bases) *Todo subespacio vectorial admite una base.*

Teorema 2 (equicardinalidad de bases) *Todas las bases de un mismo subespacio vectorial tienen el mismo número de vectores.*

Demostración: La demostración de estos dos teoremas no es elemental y excede el objeto de estos apuntes. □

Definición 14 (dimensión) *Llamamos dimensión de un subespacio vectorial H, y la denotamos por* $\dim H$, *al número de elementos de cualquiera de sus bases.*

Ejemplo: $\dim \mathbb{K}^n = n$ ya que la base canónica está formada por n vectores.

Nota: Adoptamos el convenio de considerar al conjunto vacío, $\varnothing$, como la base del subespacio nulo $\{\mathbf{0}\}$. Así pues, $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$. Con esta convención, la relación de Grassmann que se verá más adelante así como otros resultados de este curso siguen siendo válidos cuando alguno de los subespacios involucrados es el nulo.

Recuérdese en todo caso que $\{\mathbf{0}\}$ así como cualquier familia que lo contenga siempre es una familia ligada.

Proposición 1 *De todo sistema generador de un subespacio vectorial H puede extraerse una base.*

Demostración:

Damos un apunte constructivo restringido al caso en que el sistema generador es finito. Sea $\mathcal{G}$ un generador finito de H. Si es libre el resultado está probado. Si es ligado, existe un vector $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$ que depende linealmente de los restantes vectores de $\mathcal{G}$; por tanto, al suprimir ese vector, el conjunto resultante $\mathcal{G} \setminus \{\mathbf{v}\}$ sigue engendrando el mismo subespacio H. Se repite el argumento y, dado que $\mathcal{G}$ es finito, en un número finito de pasos habremos extraído de $\mathcal{G}$ un generador libre. □

Observación: La construcción anterior muestra que una base es un sistema generador "minimal", es decir, con el menor número posible de vectores. Así pues, **la dimensión de un subespacio equivale al mínimo número de vectores para un sistema generador** de dicho subespacio.

Igualmente, puede demostrarse que en un subespacio de dimensión m no puede existir un sistema libre con un número de vectores superior a m. Así, una base se caracteriza por ser un sistema libre "maximal", es decir, con el máximo número posible de vectores. **La dimensión es el mayor número posible de vectores linealmente independientes**.

Algunas ideas afines a lo anterior se recapitulan en la siguiente proposición:

Proposición 2 *Sea H un subespacio de $\mathbb{K}^n$ cuya dimensión es m:*

- *Si $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ es una familia libre de H, entonces es generadora (y por tanto base) de H.*
- *Si $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ es un sistema generador de H, entonces es libre (y por tanto base de H).*
- *Si $m = n$ entonces $H = \mathbb{K}^n$.*

Observación: Si un subespacio H tiene dimensión k, el vector genérico de dicho espacio puede escribirse como

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_k \mathbf{u}_k,\ \alpha_j \in \mathbb{K}, \tag{1.9}$$

en donde $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ es una base de H. La expresión anterior coincide con la de la solución general de un sistema de $n-k$ ecuaciones lineales homogéneas, que denominaremos **ecuaciones implícitas** de H, que caracterizan a los vectores de dicho subespacio. Para encontrar dichas ecuaciones basta con eliminar los parámetros de la ecuación vectorial anterior o, equivalentemente, forzar a que el vector genérico $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ sea combinación lineal de los de la base de H.

Para un subespacio H de $\mathbb{K}^n$, el número de ecuaciones implícitas **independientes** que lo determinan es $n - \dim H$. Esto quedará demostrado en la proposición 14 del tema 2.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$, encontrar la ecuación implícita que determina el subespacio $H = L[(1,0,1),(1,3,2)]$.

Solución: El vector genérico (x, y, z) de H se expresa mediante las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \beta \\ y &= 3\beta \\ z &= \alpha + 2\beta \end{aligned}$$

siendo α, β parámetros reales. Procedemos a eliminar dichos parámetros (formalmente, esto equivale a forzar, en términos de x, y, z, a que el sistema lineal cuyas incógnitas son α, β sea compatible): $\beta = z - x \Rightarrow y = 3(z - x)$, de donde se concluye que la ecuación implícita de H es

$$3x + y - 3z = 0.$$

Otra forma: La pertenencia a H del vector (x, y, z) equivale a que la última columna de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 3 & y \\ 1 & 2 & z \end{pmatrix}$$

sea combinación de las dos primeras; si conocemos el concepto de rango, sabemos que lo anterior sucede si y solo si dicha matriz tiene rango 2 (ya que $(1,0,1)$ y $(1,3,2)$ son linealmente independientes). Triangulamos la matriz mediante operaciones de reducción gaussiana e imponemos que el rango sea 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 3 & y \\ 1 & 2 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 3 & y \\ 0 & 1 & z-x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 3 & y \\ 0 & 0 & 3(z-x)-y \end{pmatrix}$$

cuyo rango será 2 si y sólo si $3x + y - 3z = 0$.

Obsérvese que, puesto que la matriz es cuadrada, también podríamos haber procedido forzando a que su determinante se anulase.

Teorema 3 (compleción de la base) *Sea H un subespacio vectorial de dimensión m, y sea $\mathcal{G} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ una familia libre de H, con $k < m$. Entonces existen $\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_m \in H$, tales que $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_m)$ es una base de H.*

Demostración constructiva:

Puesto que todo sistema generador de H tiene al menos m elementos, el conjunto $\mathcal{G}$ no puede ser generador, luego existe algún vector $\mathbf{u}_{k+1}$ que no es combinación lineal de los de $\mathcal{G}$, es decir, $u_{k+1} \in H \setminus L[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k]$.

El conjunto obtenido $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}\}$ es un sistema libre de H, ya que $\mathbf{u}_{k+1}$ no depende linealmente de los k primeros vectores que, a su vez, son linealmente independientes entre sí.

Si $k+1 = m$, ya tenemos una base de H, pues el conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}\}$ es una familia libre de m vectores; en caso contrario, volvemos a aplicar el mismo razonamiento a dicho conjunto (sea $\mathbf{u}_{k+2} \in H \setminus L[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}]$, etc.); en $m-k$ pasos, habremos obtenido una familia libre de m vectores, es decir, una base de H. □

Ejemplo: Encontrar una base de $\mathbb{R}^4$ cuyos dos primeros vectores sean $(1,2,3,4)$, $(1,0,-1,0)$.

Solución: En lugar de proceder paso a paso como en la construcción teórica anterior, vamos a intentar encontrar los dos vectores directamente. Probamos con aquéllos que nos pueden facilitar los cálculos, es decir, los canónicos, por ejemplo $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$ y simplemente comprobamos si estos vectores completan la base. En efecto, la familia obtenida es libre ya que, con una simple operación de reducción gaussiana por filas,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde concluimos que las cuatro filas de la matriz son linealmente independientes. Así pues, una base que satisface las condiciones pedidas es

$$((1,2,3,4), (1,0,-1,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)).$$

Si los dos vectores escogidos nos hubiesen proporcionado una matriz de rango inferior a 4, escogeríamos otros distintos y repetiríamos la comprobación.

1.2.2. Coordenadas respecto a una base

Definición 15 (coordenadas respecto a una base) *Sea $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ una base de $\mathbb{K}^n$. Si $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$, $\mathbf{v} = x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n$ con $x_j \in \mathbb{K}$, los escalares $x_1, \ldots, x_n$ se denominan coordenadas del vector $\mathbf{v}$ respecto a la base $\mathcal{B}$.*

Nota: De igual modo pueden definirse las coordenadas respecto a una base de un subespacio de $\mathbb{K}^n$ de cualquier vector perteneciente a dicho subespacio.

Proposición 3 *Las coordenadas de un vector respecto a una base son únicas.*

Demostración: Supongamos que un vector $\mathbf{u}$ puede expresarse como

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n = x_1'\mathbf{u}_1 + \ldots + x_n'\mathbf{u}_n.$$

Entonces,

$$\mathbf{0} = x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n - (x_1'\mathbf{u}_1 + \ldots + x_n'\mathbf{u}_n) = (x_1 - x_1')\mathbf{u}_1 + \ldots + (x_n - x_n')\mathbf{u}_n,$$

lo que implica, por la independencia lineal de los $\mathbf{u}_j$, que todos los escalares $x_j - x_j'$ valen 0, es decir, que $x_j' = x_j \ \forall j = 1, 2, \ldots, n$. $\square$

Definición 16 *El vector* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ *se denomina* ***vector de coordenadas*** *de* $\mathbf{v}$ *respecto a* $\mathcal{B}$*, y se suele denotar por* $[\mathbf{v}]^{\mathcal{B}}$.

Observación: Las coordenadas de un vector respecto a la base canónica de $\mathbb{K}^n$ coinciden con las componentes del vector, es decir, el vector de coordenadas coincide con el propio vector.

Ejemplo: Calcular las coordenadas del vector $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ respecto a la base $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (1, 1, -1), (1, 2, 0))$ de $\mathbb{R}^3$.

Solución: Buscamos x, y, z tales que $x(1, 0, 1) + y(1, 1, -1) + z(1, 2, 0) = (1, 2, 3)$, es decir, tenemos que resolver el sistema de tres ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Realizamos operaciones de reducción gaussiana por filas (es decir, ecuaciones), obteniendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right),$$

que, despejando las incógnitas de abajo a arriba, nos da la solución $z = 2, y = -2, x = 1$.

El vector de coordenadas es, por tanto,

$$[\mathbf{u}]^{\mathcal{B}} = (1, -2, 2).$$

1.2.3. Intersección y suma de subespacios

Recuérdese que la intersección de dos conjuntos es el conjunto formado por aquellos elementos que pertenecen simultáneamente a ambos, es decir:

$$A, B \text{ conjuntos}; x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B. \tag{1.10}$$

Proposición 4 *La intersección de dos subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^n$ es subespacio vectorial de dicho espacio.*

Demostración: Sean los subespacios M y N de $\mathbb{K}^n$. $M \cap N$ contiene obviamente al vector nulo. Sean los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M \cap N$; así pues, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M$ y $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in N$; por ser estos conjuntos subespacios, para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in M$ y $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in N$, es decir, $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in M \cap N$. □

Observación: La **unión** de subespacios vectoriales **no** es, en general, subespacio vectorial. Considérense, por ejemplo, los dos ejes coordenados de $\mathbb{R}^2$, que son subespacios. Tanto el vector $\mathbf{e}_1$ como el $\mathbf{e}_2$ pertenecen a la unión de dichos subespacios, pero su vector suma $(1, 1)$ no pertenece a dicha unión.

De hecho, dados dos subespacios L, M de un mismo espacio vectorial E, se tiene que

$$L \cup M \text{ es subespacio } \Leftrightarrow (L \subset M \vee M \subset L). \tag{1.11}$$

Definición 17 (suma de subespacios) *Dados dos subespacios L y M de $\mathbb{K}^n$, definimos su suma como*

$$L + M := \{\mathbf{u} + \mathbf{v} : \mathbf{u} \in L\ ,\ \mathbf{v} \in M\}. \tag{1.12}$$

En general, la definición anterior puede extenderse recursivamente a un número finito de subespacios de $\mathbb{K}^n$.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$, se consideran los dos ejes coordenados $OX = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ y $OY = \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$. La suma de dichos subespacios es el plano XOY, es decir,

$$OX + OY = XOY = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Obsérvese que como resultado de la suma hemos obtenido un nuevo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Proposición 5 *La suma de subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^n$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$.*

Demostración: $\mathbf{0} \in M+N$ ya que pertenece a ambos subespacios y $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M+N$, es decir, $\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1$ e $\mathbf{y} = \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2$, con $\mathbf{u}_j \in M$ y $\mathbf{v}_j \in N$. Entonces, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) + \mu(\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2) = \lambda\mathbf{u}_1 + \lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{u}_2 + \mu\mathbf{v}_2 = \tag{1.13}$$

$$(\lambda\mathbf{u}_1 + \mu\mathbf{u}_2) + (\lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2) \in M+N, \tag{1.14}$$

ya que $\lambda\mathbf{u}_1 + \mu\mathbf{u}_2$ pertenece a M por ser combinación lineal de vectores de M, e igualmente le sucede al segundo sumando respecto a N. □

Definición 18 (suma directa) *Dados dos subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^n$, diremos que su suma es directa, y escribiremos $L \oplus M$, si $L \cap M = \{\mathbf{0}\}$.*

Nota: Para más de dos subespacios, se dice que su suma es directa si lo es la de cada subespacio con la suma de todos los demás.

Proposición 6 (Caracterización de suma directa) *Sean L, M subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^n$; la suma $L+M$ es directa si y sólo si $\forall \mathbf{u} \in L+M$, existen* ***únicos*** *$\mathbf{v} \in L$, $\mathbf{w} \in M$, tales que $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$.*

Demostración: ***(no exigible)***

$\Rightarrow$) Supongamos que se tiene $L \oplus M$, es decir, $L \cap M = \{\mathbf{0}\}$, y sea un vector $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2$ con $\mathbf{v}_j \in L$ y $\mathbf{w}_j \in M$. Entonces $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1$ es un vector de L según la expresión del primer miembro y de M como consecuencia de la del segundo, es decir, que pertenece a $L \cap M$ y es por tanto el vector nulo. Por consiguiente, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$ y la descomposición de $\mathbf{u}$ es única.

$\Leftarrow$) Supongamos que todo vector de $L+M$ se descompone de manera única. Dado cualquier vector $\mathbf{u} \in L \cap M$ podemos escribirlo como $\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0}$ pero también como $\mathbf{u} = \mathbf{0} + \mathbf{u}$, siendo en ambos casos el primer sumando perteneciente a L y el segundo a M. La unicidad de la descomposición obliga a que sea $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y, consecuentemente, $L \cap M = \{\mathbf{0}\}$. □

Definición 19 (subespacios suplementarios) *Dos subespacios L y M de $\mathbb{K}^n$ se dicen suplementarios si $L \oplus M = \mathbb{K}^n$.*

Observación: Dados dos subespacios suplementarios L, M, todo vector de $\mathbb{K}^n$ se descompone de forma única como suma de un vector de L y otro de M.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^2$ cualesquiera dos rectas distintas que pasen por el origen son suplementarias. En $\mathbb{R}^3$, cualquier plano que contenga al origen es suplementario a cualquier recta que lo corte únicamente en dicho punto.

1.2.4. La relación de Grassmann

Observación: Dados dos subespacios M_1 y M_2, de sistemas generadores respectivos $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$, se tiene que $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ es un sistema generador de $M_1 + M_2$; es decir, que **la unión de los sistemas generadores es un sistema generador de la suma**; en particular, la unión de las bases es un sistema generador (pero no necesariamente base) de la suma.

Proposición 7 (Relación de Grassmann) *Dados dos subespacios vectoriales L, M de $\mathbb{K}^n$, se tiene que*

$$\dim(L + M) = \dim L + \dim M - \dim(L \cap M). \tag{1.15}$$

Demostración: ***(no exigible)***

Llamamos $l = \dim L,\ m = \dim M,\ k = \dim(L \cap M)$; queremos demostrar que $\dim(L + M) = l + m - k$.

Sea $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ una base de $L \cap M$. Puesto que $L \cap M \subset L$, aplicando el teorema de compleción de la base en este subespacio, sabemos que existen $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{l-k} \in L$ tales que $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{l-k})$ es una base de L; pero también, como $L \cap M \subset M$, podemos aplicar igualmente el teorema de compleción de la base en el espacio M: existen $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{m-k} \in M$ tales que $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{m-k})$ es una base de M.

A continuación construimos el sistema

$$(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{l-k}, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{m-k}) \tag{1.16}$$

y probaremos que es una base de $L + M$:

- Es sistema generador de $L + M$, pues es la unión de sendas bases de L y de M.

- Es sistema libre: supongamos que, para $\lambda_j, \mu_j, \gamma_j \in \mathbb{K}$,

  $$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{u}_j + \sum_{j=1}^{l-k} \mu_j \mathbf{v}_j + \sum_{j=1}^{m-k} \gamma_j \mathbf{w}_j = \mathbf{0}, \tag{1.17}$$

  es decir,

  $$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{u}_j + \sum_{j=1}^{l-k} \mu_j \mathbf{v}_j = -\sum_{j=1}^{m-k} \gamma_j \mathbf{w}_j. \tag{1.18}$$

  El primer miembro de la anterior igualdad es combinación lineal de los elementos de la base de L; el segundo miembro lo es de algunos elementos de la base de M; por lo tanto, pertenece a $L \cap M$, es decir:

  $$\sum_{j=1}^{m-k} \gamma_j \mathbf{w}_j \in L \cap M. \tag{1.19}$$

Consecuentemente, el sumatorio anterior es combinación lineal de los vectores de la base $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ de $L \cap M$, esto es,

$$\sum_{j=1}^{m-k} \gamma_j \mathbf{w}_j = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{u}_j \tag{1.20}$$

para algunos escalares $\alpha_j \in \mathbb{K}$; pero como los vectores $\mathbf{u}_j, \mathbf{w}_j$ son linealmente independientes por constituir todos juntos una base de M, tenemos que todos los coeficientes en la anterior igualdad son nulos; en particular,

$$\gamma_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m-k. \tag{1.21}$$

Pero esto, sustituyendo en (1.17), nos lleva a que

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{u}_j + \sum_{j=1}^{l-k} \mu_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}, \tag{1.22}$$

que, por la independencia lineal de los $\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j$ (pues todos juntos constituyen una base de L), nos permite concluir que todos los coeficientes λ_j, μ_j son nulos. Con lo que concluimos que todos los coeficientes $\lambda_j, \mu_j, \gamma_j$ de la combinación lineal (1.17) de partida son nulos.

Recapitulando: hemos construido una base de $L+M$ que tiene $k+(l-k)+(m-k) = l+m-k$ elementos, luego $\dim(L+M) = l+m-k$, como queríamos demostrar. □

Ejemplo: En $\mathbb{R}^4$, se consideran los subespacios M definido mediante las ecuaciones

$$M : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_2 - x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

y $N = L[(1,2,1,0),(1,1,0,-1)]$. Encuéntrense sendas bases de los subespacios $M \cap N$ y $M+N$, así como unas ecuaciones implícitas de los mismos.

Solución: Calcularemos primero una base de $M \cap N$. El vector genérico de N es

$$\alpha(1,2,1,0) + \beta(1,1,0,-1) = (\alpha+\beta, 2\alpha+\beta, \alpha, -\beta)$$

al cual, para que pertenezca simultáneamente a M, le imponemos las ecuaciones de este subespacio:

$$\alpha + \beta + 2\alpha + \beta - \alpha = 2\alpha + 2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha;$$

$$2\alpha + \beta + \beta = 2\alpha + 2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha.$$

Así pues, los vectores de $M \cap N$ dependen de un único parámetro (es decir, $\dim(M \cap N) = 1$), siendo estos vectores de la forma $\alpha[(1,2,1,0)-(1,1,0,-1)] = \alpha(0,1,1,1)$ y, por tanto, una base de $N \cap M$ es $((0,1,1,1))$.

Ahora, por la relación de Grassmann, sabemos que $\dim(M+N) = 2+2-1 = 3$; para construir una base de $M+N$, partimos de la base de la intersección y la completamos con sendos vectores de $M \setminus N = M \setminus (M \cap N)$ y de $N \setminus M = N \setminus (M \cap N)$. Como ningún vector no proporcional a $(0,1,1,1)$ puede pertenecer a $N \cap M$, tomamos por ejemplo $(1,0,1,0) \in M \setminus N$ (pues satisface las ecuaciones de M) y $(1,1,0,-1) \in N \setminus M$. Hemos construido, pues, una base de $M+N$,

$$((0,1,1,1),(1,0,1,0),(1,1,0,-1))$$

en la que el primer vector constituye una base de $M \cap N$, el primero junto al segundo forman una base de M, y el primero más el tercero son base de N.

En cuanto a las ecuaciones implícitas, dado que $\dim(M \cap N) = 1$, sabemos que este subespacio estará caracterizado por $4-1=3$ ecuaciones independientes. Los vectores proporcionales a $(0,1,1,1)$ se caracterizan por ser $x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4$, así que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_3 - x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

son unas ecuaciones implícitas de $M \cap N$ (resolución sistemática: se elimina el parámetro α de las ecuaciones paramétricas $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (0,\alpha,\alpha,\alpha)$).

Respecto a $M+N$, como su dimensión vale 3, estará caracterizado por $4-3=1$ ecuación. Para calcularla, obligamos a que el vector (x_1,x_2,x_3,x_4) sea combinación lineal de los de la base del subespacio, por ejemplo escribiendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \\ -1 & 0 & 1 & x_4 \end{array} \right)$$

(se ha alterado el orden de los vectores de la base por comodidad en los cálculos) y obligando a que el sistema lineal cuya matriz ampliada es la antescrita sea compatible. Realizando operaciones de reducción gaussiana por filas,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 + x_1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 + x_1 - x_3 \end{array} \right),$$

de modo que el sistema será compatible siempre que $x_1 - x_3 + x_4 = 0$ y ésta es la ecuación implícita de $M+N$.

Nótese que, puesto que la matriz es cuadrada, se obtiene el mismo resultado imponiendo que el determinante sea igual a 0.

Observación: Para cualesquiera subespacios L, M de intersección nula, $\dim(L \oplus M) = \dim L + \dim M$.

En particular, L y M son dos subespacios suplementarios en $\mathbb{K}^n$ si, y solo si, $\dim L + \dim M = n$ y su intersección es el subespacio nulo.

Ejemplo: Encuéntrese una base de un suplementario en $\mathbb{R}^4$ del subespacio

$$M = L[(1, 2, -1, -2), (1, 1, 1, 0)].$$

Solución: Sabemos que la dimensión del suplementario ha de ser $4 - 2 = 2$. Si completamos la base de M hasta una de $\mathbb{R}^4$, los vectores añadidos constituirán una base de un subespacio N tal que $M + N = \mathbb{R}^4$, pero también $\dim(M \cap N) = \dim M + \dim N - \dim(M + N) = 4 - 4 = 0$, luego la suma anterior será directa o, lo que es lo mismo, N será un suplementario de M.

Así pues, nos limitaremos a completar la base dada hasta una de $\mathbb{R}^4$. Probamos, por ejemplo, con los dos últimos vectores canónicos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La forma escalonada de la matriz obtenida nos garantiza que la familia es libre, luego un suplementario de M en $\mathbb{R}^4$ es

$$N = L[(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)].$$

1.3. Espacios vectoriales

En esta sección se presenta la definición general de espacio vectorial.

Definición 20 *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de escalares y V un conjunto no vacío dotado de una operación "+" denominada suma ($\forall\ \mathbf{u},\ \mathbf{v} \in V,\ \mathbf{u}+\mathbf{v} \in V$) y de un producto por un escalar "·" ($\forall\ \lambda \in \mathbb{K},\ \mathbf{u} \in V,\ \lambda \cdot \mathbf{u} \in V$). Decimos que el conjunto V es un* ***espacio vectorial*** *sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, si satisface las siguientes ocho propiedades:*

- *La dupla $(V, +)$ es un* ***grupo abeliano****, esto es,*
  1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ *(propiedad asociativa).*
  2. $\exists \mathbf{0} \in V$ *tal que,* $\forall \mathbf{u} \in V$, $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ *(existencia de elemento neutro).*
  3. $\forall \mathbf{u} \in V$, $\exists -\mathbf{u} \in V$ *tal que* $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$ *(existencia de elemento simétrico).*

4. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ *(propiedad conmutativa).*

- *El producto por un escalar verifica:*

  5. $\forall \mathbf{u} \in V,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ (\lambda+\mu) \cdot \mathbf{u}=\lambda \cdot \mathbf{u}+\mu \cdot \mathbf{u}$.

  6. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\lambda \cdot \mathbf{u}+\lambda \cdot \mathbf{v}$.

  7. $\forall \mathbf{u} \in V,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ (\lambda \mu) \cdot \mathbf{u}=\lambda \cdot(\mu \cdot \mathbf{u})$.

  8. $\forall \mathbf{u} \in V,\ 1 \cdot \mathbf{u}=\mathbf{u}$.

El primer ejemplo de espacio vectorial lo hemos visto ya en la definición 1, y es el conjunto $\mathbb{K}^n$ de las n-uplas ordenadas de elementos en $\mathbb{K}$. Tradicionalmente se le llama “vectores” a los elementos del conjunto V, esto es debido a que así se ha hecho con los elementos del espacio $\mathbb{K}^n$, sin embargo como veremos a continuación, la variedad de objetos que pueden ser vectores en V puede no tener similitud alguna con el concepto de vector que el alumno ya tenga.

Ejemplos:

i) Sea $V=\mathbb{K}^{m \times n}$ el **espacio de las matrices** de m filas y n columnas con elementos en el cuerpo $\mathbb{K}$. Definimos la suma de matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en $\mathbb{K}^{m \times n}$ por

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ij}:=a_{ij}+b_{ij},$$

y la multiplicación de un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ por la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mediante

$$(\lambda \mathbf{A})_{ij}:=\lambda a_{ij}.$$

Con estas operaciones se puede demostrar que en el espacio $\mathbb{K}^{m \times n}$ se satisfacen las propiedades 1 a 8, es decir es un espacio vectorial.

ii) Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo de escalares y E un conjunto no vacío, denotemos por $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ al **conjunto de las aplicaciones** de E en $\mathbb{K}$. Si $f, g \in \mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ y λ es un escalar en $\mathbb{K}$, definimos las aplicaciones $f+g$ y λf mediante

$$\begin{aligned} (f+g)(x)&=f(x)+g(x) \quad \forall\, x \in E \\ (\lambda f)(x)&=\lambda f(x) \qquad\quad \forall\, x \in E. \end{aligned}$$

Con las operaciones así definidas, $V=\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Para más propiedades sobre aplicaciones entre conjuntos, ver la sección 1.3 de los apéndices.

iii) Sea $V=\mathbb{K}_n[x]$ el conjunto de los **polinomios de grado menor o igual** que n con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Si $P \in \mathbb{K}_n[x]$ entonces

$$P(x)=a_0+a_1 x+a_2 x^2+\ldots+a_n x^n,$$

en donde $a_j \in \mathbb{K}$ y $n \in \mathbb{N}$. La suma de $P(x)$ con $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$ está definida de la manera usual

$$P(x) + Q(x) := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots + (a_n + b_n)x^n,$$

así como la multiplicación de un escalar λ por $P(x)$ viene dada por

$$\lambda P(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \ldots + \lambda a_n x^n.$$

Con estas operaciones, se satisfacen las propiedades 1 a 8 enunciadas a principios de esta sección. Por tanto $\mathbb{K}_n[x]$ es un espacio vectorial. Para profundizar sobre el tema de los polinomios, consúltese el apéndice 3 de estos apuntes.

En estos espacios vectoriales, los conceptos de *combinaciones lineales*, *dependencia e independencia lineal*, *subespacios vectoriales* (vistos en la sección 1.1), *bases*, *coordenadas con respecto a una base*, *intersección y suma de subespacios* y la *relación de Grassmann* (sección 1.2), siguen siendo válidos. Veamos algunos ejemplos de ello en el espacio vectorial $\mathbb{K}_n[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que n:

Ejemplo: Los polinomios $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ constituyen un sistema generador de $\mathbb{K}_n[x]$, ya que todo $Q \in \mathbb{K}_n[x]$ se escribe como combinación lineal suya: $Q(x) = b_0 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$. Aún más, dichos coeficientes son únicos, por tanto la familia de polinomios $\mathcal{B}_0 = (1, x, x^2, \ldots, x^n)$ constituye una base, que denominaremos **base canónica** del espacio vectorial $\mathbb{K}_n[x]$. Además, es claro que $\dim \mathbb{K}_n[x] = n + 1$ ya que la base canónica está formada por $n + 1$ vectores.

Si P es un elemento de $\mathbb{K}_n[x]$, con $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, entonces su vector de coordenadas respecto a la base canónica $\mathcal{B}_0$ es simplemente

$$[P]^{\mathcal{B}_0} = (a_0, a_1, ..., a_n)^t \in \mathbb{K}^{n+1}.$$

Ejemplo: Compruebe que $\mathcal{B} = (2x + 1,\ x^2 - x,\ 5x^2 - 3)$ es una base de $\mathbb{K}_2[x]$ y calcule las coordenadas de $P(x) = 6x^2 + x - 2$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

<u>Solución:</u> Dado que $\dim \mathbb{K}_2[x] = 3$, basta demostrar que los vectores de $\mathcal{B}$ son linealmente independientes; para ello buscamos escalares c_1, c_2, c_3 tales que $c_1(2x + 1) + c_2(x^2 - x) + c_3(5x^2 - 3) = 0$ para todo x, entonces al ordenar los términos se obtiene

$$(c_1 - 3c_3) + (2c_1 - c_2)x + (c_2 + 5c_3)x^2 = 0,$$

como $\{1, x, x^2\}$ es una familia libre, se debe cumplir

$$\begin{cases} c_1 - 3c_3 = 0 \\ 2c_1 - c_2 = 0 \\ c_2 + 5c_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad c_1 = 3c_3 = -\frac{3}{5}c_2 = -\frac{10}{5}c_1 \quad \Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

Es decir, los tres polinomios $2x+1$, x^2-x y $5x^2-3$ son linealmente independientes en $\mathbb{K}_2[x]$, y por tanto constituyen una base de dicho espacio. Para la segunda parte, buscamos c_1, c_2, c_3 tales que

$$c_1(2x+1) + c_2(x^2-x) + c_3(5x^2-3) = -2 + x + 6x^2$$

o equivalentemente

$$(c_1 - 3c_3) + (2c_1 - c_2)x + (c_2 + 5c_3)x^2 = -2 + x + 6x^2,$$

por tanto, tenemos que resolver el sistema de tres ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right).$$

Resolvemos el sistema por cualquier método válido; por ejemplo realizando operaciones de eliminación gaussiana por filas, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \end{array}\right) \Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 1.$$

Finalmente, el vector de coordenadas es $[P]^{\mathcal{B}} = (1,1,1)^t$.

1.4. Ejercicios

1.1.– Se consideran los vectores $(1,-1,2)\,,(2,0,1)\,,(a,1,0)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Determinar los valores del parámetro a para que sean linealmente independientes.
2. Para $a=3$, estudiar si el vector $(1,1,-1)$ es combinación lineal de ellos.

1.2.– Determinar los valores de los parámetros λ y μ que hacen que los tres vectores $(1,2,-1,3)\,,(1,-1,\lambda,3)$ y $(3,2,5,\mu)$ sean linealmente independientes.

1.3.– Comprobar la dependencia o independencia lineal de los vectores de $\mathbb{C}^3$

$$(1+i,1,0),(1+i,1-3i,1-i),(-1,1-i,1).$$

1.4.– Determinar justificadamente cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales. Para aquellos que lo sean, encontrar una base.

1. $P=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1+x_2=x_3+x_4 \wedge x_1-x_2=x_3-x_4\}$.
2. $H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x+y-z)(x-y+z)=0\}$.
3. $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y-z=1\}$.
4. $N=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y,z)\times(1,2,-1)=(0,0,0)\}$.
5. $S=L[(1,-2,1),(1,-1,0)]\cup L[(1,-3,2)]$.
6. $J=L[(1,-2,1),(1,-1,0)]\cup L[(2,-3,0)]$.

1.5.– En $\mathbb{R}^4$ se considera el subespacio L generado por los vectores $(1,1,1,1)\,,(1,2,3,4)\,,$ $(5,3,1,-1)\,,(0,1,0,-1)$. Se pide:

1. Comprobar que esos cuatro vectores son linealmente dependientes.
2. Hallar una base de L.
3. Construir una base de $\mathbb{R}^4$ extendiendo la base anterior con vectores cuyas tres primeras componentes sean iguales a 2.

1.6.– Calcular las coordenadas del vector (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ respecto a la base $((1,1,0),(1,0,1),$ $(0,1,1))$.

1.7.– En $\mathbb{R}^3$ se considera una base $\mathcal{B}=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$, y el conjunto

$$\mathcal{V}=(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_2-2\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3-\mathbf{u}_2)\,.$$

Comprobar que $\mathcal{V}$ también es base de $\mathbb{R}^3$ y determinar las coordenadas del vector $\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3$ respecto a dicha base.

1.8.– En $\mathbb{R}^5$ se considera el subespacio M que tiene por base $((1,0,1,0,1),(0,1,-1,1,0),$ $(1,1,0,-1,-1))$. Se pide:

1. Hallar unas ecuaciones implícitas de M.
2. Determinar los valores de a,b para que el vector $(1,1,a,b,1)$ pertenezca a M.
3. Para esos valores, hallar las coordenadas de dicho vector respecto a la base del enunciado.

1.9.– Se considera el subespacio de $\mathbb{R}^4$ $H = L[(1,2,0,1),(1,0,1,-1),(1,-2,2,-3)]$. Se pide:

1. Hallar unas ecuaciones implícitas de H.
2. Hallar una base y unas ecuaciones implícitas de un suplementario de H cuyos vectores tengan sus dos últimas componentes iguales pero no todas nulas.

1.10.– Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por las ecuaciones implícitas

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0, \;\; x_1 + x_4 = 0, \;\; x_2 - x_3 - x_4 = 0.$$

Escribir las ecuaciones de un subespacio suplementario de V. ¿Es único este suplementario?

1.11.– Hallar una base de cada uno de los subespacios $U+V$ y $U \cap V$, siendo:

1. $U = L[(1,0,2,2),(1,1,0,1)]$, $V = L[(1,2,-2,0),(0,1,1,2)]$.
2. $U = L[(1,2,1,0),(0,-1,0,1)]$, $V = L[(0,0,1,1),(1,1,2,2)]$.

1.12.– Sean F y G dos subespacios de $\mathbb{R}^n$ cuyas dimensiones son p y q. Determinar todos los posibles valores de las dimensiones de los subespacios $F+G$ y $F \cap G$.

1.13.– Se consideran los polinomios $Q_1(x) = 1+x+x^2+x^3$, $Q_2(x) = -1+2x-2x^2+x^3$, $Q_3(x) = 1+4x+3x^3$ y $Q_4(x) = 3+4x^2+x^3$ del espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$. Se pide:

1. Dada la base $\mathcal{B} = (1,x,x^2,x^3)$, escribir $\mathbf{q}_1 = [Q_1]^{\mathcal{B}}$, $\mathbf{q}_2 = [Q_2]^{\mathcal{B}}$, $\mathbf{q}_3 = [Q_3]^{\mathcal{B}}$ y $\mathbf{q}_4 = [Q_4]^{\mathcal{B}}$, esto es, los vectores de coordenadas de los polinomios $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $Q_3(x)$ y $Q_4(x)$ en la base $(1,x,x^2,x^3)$.
2. Sea $H = L[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4]$. Calcular una base de H que contenga, de ser posible, los vectores $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_2$.
3. Determinar una base de un suplementario T de H. Descomponer el vector $\mathbf{v} = (3,-2,3,0)$ según la suma directa $T \oplus H$.
4. Utilizar la descomposición anterior para escribir el polinomio $V(x) = 3-2x+3x^2$ como combinación lineal de una base de $\mathbb{R}_3[x]$ que contenga a $Q_1(x)$ y $Q_2(x)$.

1.4.1. Cuestiones

1.14.– Se consideran los subespacios M, N de $\mathbb{R}^4$ definidos por:

$$M = L[(0,1,1,0),(-1,1,3,1),(1,1,-1,-1)] \; ; \; N = \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Determínese la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. $\dim M = 3$.
2. $\dim N = 2$.
3. $M + N = \mathbb{R}^4$.
4. $(0,1,1,0) \in M \cap N$.
5. $(1,2,0,-1) \in M$.

1.15.– Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ tres vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$. Si α, β, γ denotan números reales, determínese la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. Si $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces $\alpha = \beta = 0$.
2. No existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$.
3. Se cumple que $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$.
4. $(\alpha + \beta + \gamma)(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$.
5. $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$.

1.16.– Se considera la familia $\mathcal{M} = \{(1,1,a),(1,a,a),(a,a,a)\}$, donde a es un número real. Determínese la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. $\mathcal{M}$ no puede ser base de $\mathbb{R}^3$.
2. $\forall a \neq 0$, $\mathcal{M}$ es base de $\mathbb{R}^3$.
3. Si $a = \frac{\pi}{3}$, $\mathcal{M}$ es una familia libre.
4. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$.
5. Si $a = 0$, $\mathcal{M}$ es una familia libre.

1.17.– En el espacio $\mathbb{R}^4$, se considera el subespacio H definido mediante la ecuación $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$. Determínese la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. $\dim H = 3$.
2. $L[(1,1,1,1)]$ es un subespacio suplementario de H en $\mathbb{R}^4$.
3. $L[(1,0,0,0),(1,1,1,1)] + H = \mathbb{R}^4$.
4. Si M es un subespacio suplementario de H en $\mathbb{R}^4$, $\dim M = 1$.
5. $L[(1,0,0,0),(1,1,1,1)] \cap H = \{\mathbf{0}\}$.

1.18.– Se considera la base $\mathcal{B} = ((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$ de $\mathbb{R}^3$. Determínese la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. El vector de coordenadas de $(2,0,0)$ respecto a $\mathcal{B}$ es $(1,1,-1)$.
2. El vector de coordenadas de $(1,1,0)$ respecto a $\mathcal{B}$ es $(1,1,0)$.
3. El vector de coordenadas de $(0,0,1)$ respecto a $\mathcal{B}$ es $\frac{1}{2}(1,1,-1)$.
4. $(0,1,0)$ es combinación lineal de los dos primeros vectores de $\mathcal{B}$.
5. Todo vector de $\mathbb{R}^3$ es combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$.

Capítulo 2

Matrices y sistemas lineales

2.1 Matrices. Aplicaciones lineales. Composición de aplicaciones lineales y producto matricial.

2.2 Imagen y núcleo de una matriz. Núcleo e inyectividad.

2.3 Rango. Operaciones de reducción gaussiana. Matriz de cambio de base.

2.4 Sistemas lineales. Estructura de las soluciones. Teorema de Rouché-Frobenius. Resolución de sistemas por reducción gaussiana.

2.5 Ejercicios.

2.1. Matrices

Definición 21 *Sean m, n enteros positivos. Una **matriz** de tamaño $m \times n$ es una tabla rectangular formada por mn escalares de $\mathbb{K}$ que se disponen como se indica:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

*Cada a_{ij} se llama elemento, coeficiente o entrada de la matriz. Se dice que está situado en la **fila** i y en la **columna** j de la matriz.*

La matriz está formada por m filas que son vectores de $\mathbb{K}^n$ y por n columnas que lo son de $\mathbb{K}^m$. Solemos utilizar letras mayúsculas para indicar una matriz $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{M}$, etc. y la correspondiente minúscula para sus entradas: a_{ij}, b_{ij}, m_{ij}. A veces expresaremos $a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij}$. En general se intentará que la notación se explique a sí misma. El vector $F_i(\mathbf{A}) =$

$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ constituye la fila i-ésima de la matriz y el vector

$$C_j(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

es la columna j-ésima de la matriz.

El conjunto de las matrices con m filas y n columnas y coeficientes en $\mathbb{K}$ se denota $\mathbb{K}^{m\times n}$. Dicho conjunto está dotado de las operaciones suma y producto por un escalar:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}, \mathbf{B} &\in \mathbb{K}^{m\times n} \quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ij} := a_{ij} + b_{ij}, \\ \lambda &\in \mathbb{K},\, \mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n} \quad (\lambda\mathbf{A})_{ij} := \lambda a_{ij}. \end{aligned}$$

A los elementos a_{ii} de igual índice de fila que de columna se les llama elementos diagonales de la matriz y constituyen la *diagonal principal* de la matriz.

En particular, si $m = n$ se dice que la matriz es **cuadrada** de orden n. La matriz cuadrada cuyos elementos diagonales son iguales a 1 y el resto nulos se llama **matriz identidad** (o **matriz unidad**) y se denota con la letra $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Dada una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ cuadrada de orden n, se define su **traza** como la suma de los elementos de su diagonal principal, es decir:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Definición 22 (matrices triangulares)

- *Se dice que* $\mathbf{A}$ *es* ***triangular superior*** *si sus elementos por debajo de la diagonal principal son nulos, es decir, si* $a_{ij} = 0$ *para todo* $i > j$.
- *Se dice que* $\mathbf{A}$ *es* ***triangular inferior*** *si sus elementos por encima de la diagonal principal son nulos, es decir, si* $a_{ij} = 0$ *para todo* $i < j$.
- *Se dice que* $\mathbf{A}$ *es* ***diagonal*** *si es triangular superior e inferior simultáneamente.*

Ejemplo: La matriz identidad $\mathbf{I}$ es un ejemplo de matriz diagonal: obviamente, es tanto triangular superior como triangular inferior.

Definición 23 *Para cada matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, se define:*

- *su **traspuesta**, que se denota por $\mathbf{A}^t$ y es la matriz de $\mathbb{K}^{n\times m}$ que se obtiene a partir de $\mathbf{A}$ cambiando filas por columnas, esto es:*

$$(\mathbf{A}^t)_{ij} = a_{ji} \ , \ i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.4}$$

- *su **conjugada**, que se denota por $\overline{\mathbf{A}}$ y es la matriz de $\mathbb{K}^{m\times n}$ cuyos elementos son los conjugados de los de $\mathbf{A}$, $(\overline{\mathbf{A}})_{ij} = \overline{a}_{ij}$.*

- *su **traspuesta conjugada**, que se denota por $\mathbf{A}^h$ y es la traspuesta de la conjugada de $\mathbf{A}$ (o bien la conjugada de la traspuesta de $\mathbf{A}$), $(\mathbf{A}^h)_{ij} = \overline{a}_{ji}$.*

Definición 24 (matrices simétricas y antisimétricas, hermíticas y antihermíticas)

- *Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ se dice que es **simétrica si** $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$, es decir, si $a_{ji} = a_{ij}$ para todo i, j.*

- *Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ se dice que es **antisimétrica si** $\mathbf{A}^t = -\mathbf{A}$, es decir, si $a_{ji} = -a_{ij}$ para todo i, j.*

- *Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ se dice que es **hermítica si** $\mathbf{A}^h = \mathbf{A}$, es decir, si $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$ para todo i, j.*

- *Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ se dice que es **antihermítica si** $\mathbf{A}^h = -\mathbf{A}$, es decir, si $a_{ji} = -\overline{a_{ij}}$ para todo i, j.*

Obsérvese que los elementos diagonales de una matriz real antisimétrica deben ser nulos.

2.1.1. Aplicaciones lineales

En numerosas ramas de la ciencia y la técnica son fundamentales las aplicaciones entre espacios vectoriales que **conservan las combinaciones lineales**, es decir, aquellas para las que el transformado de toda combinación lineal de vectores es la combinación lineal, con los mismos coeficientes, de los transformados de los vectores originales.

Definición 25 *Sea una aplicación $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$; se dice que f es lineal si verifica las dos condiciones siguientes:*

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n, \ f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}); \tag{2.5}$$

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{K}^n, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ f(\lambda \mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u}). \tag{2.6}$$

Equivalentemente, f es lineal si

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \ f(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{u}) + \mu f(\mathbf{v}). \tag{2.7}$$

La condición (2.7) que caracteriza dichas aplicaciones se llama propiedad de **linealidad**.

$\mathbb{K}^n$ se denomina **espacio inicial** de la aplicación lineal f, mientras que $\mathbb{K}^m$ es el **espacio final**.

Observación: La matriz $\mathbf{I}$ de orden n corresponde a la aplicación identidad de $\mathbb{K}^n$, es decir, la aplicación que deja invariantes todos los vectores de $\mathbb{K}^n$:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n,\ \mathcal{I}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Observación: Toda aplicación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ verifica:

$$f(\mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}) = f(0 \cdot \mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}) = 0 \cdot f(\mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}^m}. \tag{2.8}$$

Observación: Aplicando reiteradamente la definición se tiene que, cualquiera que sea el número k de sumandos, si $\lambda_j \in \mathbb{K}$ y $\mathbf{u}_j \in \mathbb{K}^n$,

$$f\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{u}_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f(\mathbf{u}_j). \tag{2.9}$$

Proposición 8 *Dada una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ y una base $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ de $\mathbb{K}^n$, los vectores $f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_n)$ de $\mathbb{K}^m$ determinan completamente f, es decir, nos permiten conocer la imagen mediante f de cualquier vector del espacio inicial.*

Demostración: En efecto, si $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{u}_j$ con $x_j \in \mathbb{K}$, por la propiedad de linealidad (2.9) se tiene que

$$f(\mathbf{x}) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{u}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(\mathbf{u}_j). \tag{2.10}$$

Como caso particular, si $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ son los vectores canónicos de $\mathbb{K}^n$, los n vectores $f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_n)$ determinan cualquier aplicación lineal f con origen en $\mathbb{K}^n$. □

2.1.2. Matriz de una aplicación lineal

Para cualquier vector $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ del espacio inicial, es decir, $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j$, sabemos que su transformado mediante f es de la forma

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(\mathbf{e}_j). \tag{2.11}$$

Si consideramos los n vectores $f(\mathbf{e}_1),\dots,f(\mathbf{e}_n)$, pertenecientes a $\mathbb{K}^m$, cada uno de ellos podrá expresarse como

$$f(\mathbf{e}_j) = (a_{1j},\dots,a_{mj}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\tilde{\mathbf{e}}_i, \tag{2.12}$$

en donde $\tilde{\mathbf{e}}_1,\dots,\tilde{\mathbf{e}}_m$ denotan los vectores canónicos de $\mathbb{K}^m$ y $a_{ij} \in \mathbb{K}$ para $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$.

Si llevamos este resultado a la ecuación (2.11) y cambiamos el orden de sumación, obtenemos:

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\tilde{\mathbf{e}}_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\tilde{\mathbf{e}}_i. \tag{2.13}$$

Si ahora identificamos cada componente en la ecuación vectorial anterior, podemos escribir las m ecuaciones

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j,\ 1 \le i \le m, \tag{2.14}$$

que escribimos desarrolladas para mayor claridad:

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_m & = & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{array} \tag{2.15}$$

Es decir, que los $m \cdot n$ escalares a_{ij} determinan completamente la aplicación lineal, permitiéndonos calcular las componentes del transformado de cualquier vector en función de las componentes de este.

Este resultado sugiere que la relación entre un vector genérico de $\mathbb{K}^n$ y su transformado mediante f se escriba en *forma matricial* como sigue:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

(Más adelante resultará evidente que el producto del segundo miembro corresponde al concepto de *producto matricial*.)

Y abreviadamente,

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{2.17}$$

Todo ello motiva la siguiente definición:

Definición 26 (matriz de una aplicación lineal) *Dada una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, se llama matriz de f a aquella cuyas columnas son, ordenadamente, las imágenes mediante f de los vectores canónicos de $\mathbb{K}^n$.*

Observación: Se trata, por consiguiente, de una matriz de m filas (= dimensión del espacio final) y n columnas (= dimensión del espacio inicial).

Existe, por tanto, una **correspondencia biunívoca** entre aplicaciones lineales de $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$ y matrices de m filas y n columnas (cada matriz determina una aplicación lineal y viceversa).

Ejemplo: Calcúlese la matriz de la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ caracterizada por

$$f(1,-1) = (1,2,-1);\ f(1,2) = (0,1,-1). \tag{2.18}$$

Solución: Necesitamos conocer los transformados mediante f de los vectores canónicos de $\mathbb{R}^2$, para lo cual precisamos la expresión de estos últimos como combinaciones lineales de los dos vectores cuyas imágenes conocemos:

$$(1,0) = \alpha(1,-1) + \beta(1,2) \text{ (resolviendo)} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3}; \tag{2.19}$$

$$(0,1) = \alpha(1,-1) + \beta(1,2) \text{ (resolviendo)} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{3}, \beta = \frac{1}{3}. \tag{2.20}$$

Por lo tanto,

$$f(\mathbf{e}_1) = \frac{2}{3}f(1,-1) + \frac{1}{3}f(1,2) = \frac{1}{3}(2,5,-3); \tag{2.21}$$

$$f(\mathbf{e}_2) = -\frac{1}{3}f(1,-1) + \frac{1}{3}f(1,2) = \frac{1}{3}(-1,-1,0). \tag{2.22}$$

Así pues, la matriz de f es la que tiene por columnas los dos vectores obtenidos, es decir:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

Compruébese la exactitud del resultado aplicando dicha matriz a los vectores $(1,-1), (1,2)$ escritos como columnas. $\square$

2.1.3. Composición de aplicaciones lineales y producto matricial

Para motivar la definición de producto matricial, consideramos la composición de dos aplicaciones lineales. Supongamos que tenemos sendas aplicaciones lineales f, g definidas según el siguiente esquema:

$$\mathbb{K}^r \xrightarrow{g} \mathbb{K}^n \xrightarrow{f} \mathbb{K}^m \tag{2.24}$$

Consideramos ahora la aplicación $f \circ g : \mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^m$. Veamos en primer lugar que esta aplicación también es lineal:

Proposición 9 *Toda composición de aplicaciones lineales es lineal.*

Demostración: En las condiciones antes establecidas, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{K}^r$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$f \circ g(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) = f(g(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v})) = f(\lambda g(\mathbf{u}) + \mu g(\mathbf{v})) = \lambda f(g(\mathbf{u})) + \mu f(g(\mathbf{v})) =$$
$$= \lambda f \circ g(\mathbf{u}) + \mu f \circ g(\mathbf{v}). \tag{2.25}$$

□

La aplicación f tendrá asociada una cierta matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, mientras que g se corresponderá con una cierta $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^{n\times r}$. Es razonable denotar la matriz $\mathbf{C} \in \mathbb{K}^{m\times r}$ de $f \circ g$, resultante de aplicar primero $\mathbf{B}$ y a continuación $\mathbf{A}$, como $\mathbf{AB}$. ¿Podremos expresar la matriz $\mathbf{C}$ en términos de las dos anteriores?

Si $\mathbf{x}$ denota un vector arbitrario de $\mathbb{K}^r$, $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$, $\mathbf{z} = f(\mathbf{y}) = f \circ g(\mathbf{x})$, sabemos por la ecuación (2.14) que cada componente de $\mathbf{y}$ se obtiene como

$$1 \le k \le n, \quad y_k = \sum_{j=1}^{r} b_{kj} x_j, \tag{2.26}$$

mientras que

$$1 \le i \le m, \quad z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{j=1}^{r} b_{kj} x_j \right) = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right) x_j. \tag{2.27}$$

Por otro lado, los elementos de la matriz $\mathbf{C}$ que transforma $\mathbf{x}$ en $\mathbf{z}$ satisfacen, por la misma ecuación (2.14),

$$1 \le i \le m, \quad z_i = \sum_{j=1}^{r} c_{ij} x_j. \tag{2.28}$$

Así pues, las ecuaciones (2.27) y (2.28) han de ser equivalentes. Ello sugiere el tomar como matriz $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ aquella de dimensiones $m \times r$ cuyo elemento genérico se calcula mediante

$$1 \le i \le m, \ 1 \le j \le r, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \tag{2.29}$$

que será la definición que adoptaremos para el producto de matrices.

Definición 27 *Dadas dos matrices* $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{K}^{n\times r}$, *se define su* ***producto*** $\mathbf{AB}$ *como aquella matriz* $\mathbf{C} \in \mathbb{K}^{m\times r}$ *tal que* $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, r$.

- El elemento (i, j) del producto se obtiene multiplicando la fila i de la primera matriz por la columna j de la segunda. Es preciso que el número de columnas de la primera matriz iguale al número de filas de la segunda.

- El producto matricial NO es conmutativo: en general $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ aunque $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sean matrices cuadradas del mismo orden.

- El producto de matrices es distributivo respecto de la suma a izquierda y derecha, es decir:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= \mathbf{AB}+\mathbf{AC}\\ (\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} &= \mathbf{BA}+\mathbf{CA}\end{aligned}$$

  siempre y cuando las matrices tengan las dimensiones adecuadas para que dichos productos puedan realizarse.

Proposición 10 *Sean* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *dos matrices para las que el producto* $\mathbf{AB}$ *tenga sentido; entonces*

$$(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t. \tag{2.30}$$

$$(\mathbf{AB})^h = \mathbf{B}^h\mathbf{A}^h. \tag{2.31}$$

Demostración: Cada elemento (i, j) de la matriz $(\mathbf{AB})^t$ puede escribirse como

$$\left((\mathbf{AB})^t\right)_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^{n}\left(\mathbf{B}^t\right)_{ik}\left(\mathbf{A}^t\right)_{kj} = \left(\mathbf{B}^t\mathbf{A}^t\right)_{ij}. \tag{2.32}$$

Así pues, las matrices $(\mathbf{AB})^t$ y $\mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$ coinciden elemento a elemento, por tanto son iguales: $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$. Finalmente, para demostrar la igualdad en el caso de la traspuesta conjugada, basta conjugar la ecuación anterior.

□

Producto matricial y combinaciones lineales

Sean $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^{n\times r}$, denotemos C_k la columna k-ésima y F_k la fila, entonces:

- Las columnas de $\mathbf{AB}$ son combinaciones lineales de las de $\mathbf{A}$: $C_k(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}C_k(\mathbf{B})$.
- Las filas de $\mathbf{AB}$ son combinaciones lineales de las de $\mathbf{B}$: $F_k(\mathbf{AB}) = F_k(\mathbf{A})\mathbf{B}$.
- La matriz $\mathbf{AB}$ puede expresarse como suma de matrices "producto columna-fila":

$$\mathbf{AB} = \sum_{k=1}^{n} C_k(\mathbf{A})F_k(\mathbf{B}). \tag{2.33}$$

La demostración de esta última igualdad es inmediata, teniendo en cuenta que el elemento (i, j) de la matriz del segundo miembro es

$$\sum_{k=1}^{n}\left(C_k(\mathbf{A})F_k(\mathbf{B})\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = (\mathbf{AB})_{ij} \tag{2.34}$$

de donde se deduce que ambas matrices coinciden elemento a elemento, luego son iguales.

2.1.4. La inversa de una matriz

Definición 28 *Una matriz cuadrada* $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$*, se dice que es* ***invertible*** *(o* ***regular****) si* $\exists \mathbf{A}^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *tal que* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ *o bien* $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$*. La matriz* $\mathbf{A}^{-1}$ *se denomina* ***inversa*** *de* $\mathbf{A}$ *y es única.*

Observación: Al ser $\mathbf{A}$ cuadrada, la propiedad $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ implica que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ y viceversa.

Definición 29 *Una matriz cuadrada que no es invertible se dice que es* ***singular****.*

Proposición 11 *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos matrices cuadradas del mismo orden* n*, ambas invertibles. Entonces* $\mathbf{AB}$ *también es invertible y*

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \tag{2.35}$$

Demostración: Basta comprobar que el producto de $\mathbf{AB}$ por la matriz $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ da como resultado la identidad: en efecto, $(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\right)\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ y también $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}$. □

2.2. Imagen y núcleo de una matriz

Recordemos que cualquier matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ transforma vectores columna de $\mathbb{K}^n$ en vectores columna de $\mathbb{K}^m$; es decir, para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ se obtiene un vector

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} \in \mathbb{K}^m \tag{2.36}$$

Además se dice que $\mathbf{y}$ es la imagen de $\mathbf{x}$ por $\mathbf{A}$. Si consideramos el conjunto de todos los vectores imagen, dicho conjunto se denomina **imagen** de $\mathbf{A}$. Así pues, toda matriz $\mathbf{A} \in\mathbb{K}^{m\times n}$ lleva asociados dos conjuntos: su *imagen* en $\mathbb{K}^m$, y su *núcleo* en $\mathbb{K}^n$. Veamos estas definiciones:

Definición 30 (imagen y núcleo) *Dada una matriz* $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *se define la* ***imagen de*** $\mathbf{A}$ *como el conjunto*

$$\operatorname{Im}\mathbf{A} := \{\mathbf{Ax} : \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n\}. \tag{2.37}$$

Se define el ***núcleo de*** $\mathbf{A}$ *como el conjunto*

$$\ker\mathbf{A} := \{\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n : \mathbf{Au} = \mathbf{0}\}. \tag{2.38}$$

Tanto el núcleo como la imagen de una matriz son **subespacios vectoriales** (la demostración es sencilla y se deja al lector).

Dada la correspondencia biunívoca entre aplicaciones lineales y matrices, pueden definirse equivalentemente el núcleo y la imagen de una aplicación lineal:

Definición 31 *Dada una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, se define la* ***imagen de*** *f como el conjunto*

$$\operatorname{Im} f := \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n\}. \tag{2.39}$$

Se define el ***núcleo de*** *f como el conjunto*

$$\ker f := \{\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n : f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}. \tag{2.40}$$

Resulta evidente que, si consideramos la matriz asociada a una determinada aplicación lineal, el núcleo y la imagen de aquella coinciden con los de esta.

Observación: El vector $\mathbf{Ax}$ puede escribirse como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 C_1(\mathbf{A}) + ... + x_n C_n(\mathbf{A}) \tag{2.41}$$

donde $C_j(\mathbf{A})$ indica la columna j-ésima de $\mathbf{A}$. De ello se deduce fácilmente que un vector es de la forma $\mathbf{Ax}$ si y sólo si es combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$. Por ello Im$\mathbf{A}$ es el subespacio generado por las columnas de $\mathbf{A}$:

$$\operatorname{Im} \mathbf{A} = L[C_1(\mathbf{A}), .., C_n(\mathbf{A})] \tag{2.42}$$

Definición 32 *El* ***subespacio columna*** *de una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ es el subespacio de $\mathbb{K}^m$ engendrado por las columnas de $\mathbf{A}$. De igual forma, su* ***subespacio fila*** *es el subespacio de $\mathbb{K}^n$ engendrado por las filas de $\mathbf{A}$.*

Observación: Como acabamos de ver, el **subespacio columna** de una matriz coincide con $\operatorname{Im} \mathbf{A}$; análogamente, el **subespacio fila** se denota $\operatorname{Im} \mathbf{A}^t$.

Proposición 12 *Todo subespacio es tanto el subespacio imagen de alguna matriz, como el núcleo de otra matriz.*

Demostración: Dado un subespacio M, si extraemos un sistema de generadores de M, y construimos la matriz $\mathbf{A}$ que los contiene como columnas, se tiene que

$$\operatorname{Im}\mathbf{A} = L[C_1(\mathbf{A}), .., C_n(\mathbf{A})] = M. \tag{2.43}$$

De esta forma M es el subespacio imagen de alguna matriz.

Por otro lado, M es también el núcleo de alguna matriz: basta con observar las ecuaciones implícitas de M, que se escriben matricialmente como $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$; en otras palabras, un vector $\mathbf{x}$ pertenece a M si y sólo si $\mathbf{x} \in \ker \mathbf{B}$. Por tanto, $M = \ker \mathbf{B}$. $\square$

Observación: Una aplicación lineal es suprayectiva si y sólo si su subespacio imagen coincide con el espacio final, es decir:

Dada $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ lineal, f es suprayectiva $\Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = m$.

2.2.1. Núcleo e inyectividad

Sabemos que toda aplicación lineal transforma el vector nulo del espacio inicial en el nulo del espacio final. Por otra parte, una aplicación lineal inyectiva es aquella para la que ningún vector del espacio final es imagen de más de un vector del inicial. Así pues, una aplicación lineal cuyo núcleo contenga algún vector no nulo no puede ser inyectiva.

Además, como vamos a ver a continuación, la condición de que el núcleo se reduzca al vector nulo caracteriza la inyectividad de las aplicaciones lineales.

Por simplicidad, denotamos por $\mathbf{0}$ el vector nulo tanto de $\mathbb{K}^n$ como de $\mathbb{K}^m$.

Teorema 4 *Sea $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ lineal; f es inyectiva si y sólo si* $\ker f = \{\mathbf{0}\}$.

Demostración:

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\ker f \neq \{\mathbf{0}\}$, $\exists \mathbf{u} \in \ker f$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Como $\mathbf{0} = f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{u})$, f no puede ser inyectiva.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $\ker f = \{\mathbf{0}\}$ y que existen $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ tales que $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$. Entonces, por linealidad,

$$f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \tag{2.44}$$

luego $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \ker f = \{\mathbf{0}\}$, de donde $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$ así que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ y por tanto f es inyectiva.
$\square$

2.3. Rango de una matriz

Definición 33 *Dada una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$, su **rango por columnas** es la dimensión del subespacio columna de $\mathbf{A}$, a saber,*

$$\dim(\operatorname{Im} \mathbf{A}) = \dim(L[C_1(\mathbf{A}), .., C_n(\mathbf{A})]). \tag{2.45}$$

Es decir, el rango por columnas es el número máximo de columnas de $\mathbf{A}$ linealmente independientes. Por otro lado, el **rango por filas** de $\mathbf{A}$ es la dimensión del subespacio fila de $\mathbf{A}$; es decir, el número máximo de filas de $\mathbf{A}$ linealmente independientes.

Proposición 13 *Para cualquier matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$, **el rango por filas y el rango por columnas** de $\mathbf{A}$ coinciden.*

Demostración: Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ de rango r por columnas. Consideramos una matriz $\mathbf{C} \in \mathbb{K}^{m \times r}$ formada por r columnas de $\mathbf{A}$ linealmente independientes.

Por ser las columnas de $\mathbf{A}$ combinaciones lineales de las de $\mathbf{C}$, existirá una matriz $\mathbf{F}$ (cuyos elementos serán precisamente los coeficientes de esas combinaciones lineales) tal que $\mathbf{A} = \mathbf{CF}$.

Pero la igualdad anterior significa también que las filas de $\mathbf{A}$ son combinaciones lineales de las de $\mathbf{F}$; y esta matriz es de dimensiones $r \times n$ (tiene r filas), así que el máximo número de filas de $\mathbf{A}$ linealmente independientes no puede exceder de r, es decir, el rango por filas es menor o igual que el rango por columnas.

Dado que el rango por columnas de una matriz es el rango por filas de su transpuesta, aplicando el resultado anterior a la matriz $\mathbf{A}^t$ se concluye el resultado. $\square$

Observación: Este resultado que hemos demostrado permite que hablemos del **rango** de una matriz, sin especificar si es por filas o por columnas. A dicho número se le denota por $r(\mathbf{A})$.

Observación: En esta proposición también se ha demostrado que una matriz $\mathbf{A}$ de rango r puede factorizarse en producto de dos matrices $\mathbf{A} = \mathbf{CF}$, ambas de rango máximo r ya que el número de columnas de $\mathbf{C}$ y el número de filas de $\mathbf{F}$ son ambos r. En particular, toda matriz de rango uno puede escribirse como el producto de un vector columna por un vector fila.

Ejemplo: La matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ es de rango 2; se ve fácilmente que dos columnas cualesquiera son linealmente independientes y $\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_3 = \mathbf{0}$; por tanto puede tomarse como matriz $\mathbf{C}$ la formada por las dos primeras columnas:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En cuanto a la matriz $\mathbf{F}$, sus columnas reflejan las combinaciones lineales que hay que hacer con las columnas de $\mathbf{C}$ para obtener las de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Obviamente no hay unicidad, ya que la matriz $\mathbf{C}$ puede formarse con una base *cualquiera* de $\operatorname{Im} \mathbf{A}$.

Proposición 14

- *Si* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ *entonces* $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$.

- *Dadas dos matrices* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *para las que el producto* $\mathbf{AB}$ *tenga sentido, se tiene que*

$$r(\mathbf{AB}) \leq \text{mín}(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})). \tag{2.46}$$

Demostración: Para la primera desigualdad, obsérvese que la columna j-ésima de $(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ es $C_j(\mathbf{A}) + C_j(\mathbf{B})$. Por ello, el subespacio columna de $(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ es

$$\text{Im}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \text{Im}[C_1(\mathbf{A}+\mathbf{B}), \cdots, C_n(\mathbf{A}+\mathbf{B})] \subset \text{Im}\mathbf{A} + \text{Im}\mathbf{B}. \tag{2.47}$$

Así pues, $r(\mathbf{A}+\mathbf{B})$, que es la dimensión del subespacio de la izquierda, no puede superar la dimensión del subespacio $\text{Im}\mathbf{A} + \text{Im}\mathbf{B}$, que como mucho es $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$.

Para la segunda desigualdad, basta recordar que la columnas de $\mathbf{AB}$ son combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$, luego $\text{Im}(\mathbf{AB}) \subset \text{Im}(\mathbf{A})$, de donde $r(\mathbf{AB}) \leq r(\mathbf{A})$. Por otro lado, las filas de $\mathbf{AB}$ son combinación lineal de las filas de $\mathbf{B}$, de donde $r(\mathbf{AB}) \leq r(\mathbf{B})$, concluyendo la demostración. □

Proposición 15 *Si* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ *son matrices cualesquiera para las que los productos siguientes tengan sentido, entonces:*

- *Si* $\mathbf{A}$ *tiene rango máximo por columnas, entonces* $r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{B})$.
- *Si* $\mathbf{A}$ *tiene rango máximo por filas, entonces* $r(\mathbf{CA}) = r(\mathbf{C})$.
- *Para cualquier matriz* $\mathbf{A}$*, se verifica* $r(\mathbf{A}^h\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}\mathbf{A}^h) = r(\mathbf{A})$.

Teorema 5 *Si* $\mathbf{A}$ *es una matriz de* n *columnas, entonces*

$$\dim(\ker \mathbf{A}) + r(\mathbf{A}) = n. \tag{2.48}$$

Equivalentemente: si $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *es lineal, entonces*

$$\dim(\ker f) + \dim(\text{Im } f) = n. \tag{2.49}$$

Demostración *(no exigible):* Como $\mathbf{A}$ posee n columnas, $\ker \mathbf{A}$ es un subespacio de $\mathbb{K}^n$. Tomemos una base de $\ker \mathbf{A}$, $(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k)$, y completémosla hasta obtener una base $(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, ..., \mathbf{u}_n)$ de $\mathbb{K}^n$.

Por la propiedad de linealidad, es fácil ver que $\text{Im}\mathbf{A} = L[\mathbf{Au}_1, ..., \mathbf{Au}_k, \mathbf{Au}_{k+1}, ..., \mathbf{Au}_n]$ $= L[\mathbf{Au}_{k+1}, ..., \mathbf{Au}_n]$ ya que $\mathbf{Au}_1 = ... = \mathbf{Au}_k = \mathbf{0}$ por definición. Así, $\{\mathbf{Au}_{k+1}, ..., \mathbf{Au}_n\}$ es un sistema de generadores de $\text{Im}\mathbf{A}$ constituido por $n-k$ vectores. Si demostramos que son linealmente independientes, entonces formarán base de $\text{Im}\mathbf{A}$, y podremos garantizar el resultado buscado:

$$r(\mathbf{A}) = \dim(\text{Im}\mathbf{A}) = n - k = n - \dim(\ker \mathbf{A}). \tag{2.50}$$

Basta, pues, demostrar que $\mathbf{Au}_{k+1}, ..., \mathbf{Au}_n$ son linealmente independientes. Apliquemos la definición de independencia lineal: se considera la igualdad $\alpha_1 \mathbf{Au}_{k+1} + ... + \alpha_{n-k}\mathbf{Au}_n = \mathbf{0}$, y el objetivo es demostrar que $\alpha_1 = ... = \alpha_{n-k} = 0$. Escribimos esta igualdad como

$$\mathbf{A}\left(\alpha_1 \mathbf{u}_{k+1} + ... + \alpha_{n-k}\mathbf{u}_n\right) = \mathbf{0} \tag{2.51}$$

lo cual significa que el vector $\alpha_1 \mathbf{u}_{k+1} + ... + \alpha_{n-k}\mathbf{u}_n \in \ker \mathbf{A}$. Es decir $\alpha_1 \mathbf{u}_{k+1} + ... + \alpha_{n-k}\mathbf{u}_n$ es combinación lineal de $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k$: $\alpha_1 \mathbf{u}_{k+1} + ... + \alpha_{n-k}\mathbf{u}_n = \beta_1 \mathbf{u}_1 + ... + \beta_k \mathbf{u}_k$. O, equivalentemente $\beta_1 \mathbf{u}_1 + ... + \beta_k \mathbf{u}_k - \alpha_1 \mathbf{u}_{k+1} + ... - \alpha_{n-k}\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ pero como $(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, ..., \mathbf{u}_n)$ son independientes, todos los coeficientes deben ser 0, en particular se tiene que $\alpha_1 = ... = \alpha_{n-k} = 0$. □

Del teorema anterior se desprende el siguiente resultado: para matrices cuadradas, el **rango máximo** caracteriza su **invertibilidad**:

Corolario: Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de orden n. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$$\mathbf{A} \text{ es invertible} \iff r(\mathbf{A}) = n \iff \ker \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}. \tag{2.52}$$

Observación: Sea $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ lineal.

- Si $m < n$, f no puede ser inyectiva.
- Si $m > n$, f no puede ser suprayectiva.
- Si $m = n$, f es inyectiva $\Leftrightarrow$ f es suprayectiva.

2.3.1. Cálculo del rango mediante operaciones elementales

Operaciones elementales de reducción gaussiana

Definición 34 *Dada una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, se definen las siguientes* ***operaciones elementales*** *por filas (columnas) sobre la matriz $\mathbf{A}$:*

1) *Suma de una fila (columna) de la matriz, multiplicada por un escalar, a otra fila (columna) distinta.*

2) *Multiplicación de una fila (columna) de la matriz por un escalar no nulo.*

3) *Intercambio de dos filas (columnas).*

Definición 35 *Se llama* ***matriz elemental*** *por filas (columnas) a una matriz cuadrada, resultado de efectuarle una operación elemental por filas (columnas) a la matriz identidad.*

Ejemplos: La matriz

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz elemental por filas, resultante de restarle a la tercera fila de la identidad el doble de la primera.

Asimismo, es una matriz elemental por columnas, resultante de restarle a la primera columna de la identidad el doble de la tercera.

La matriz

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz elemental por filas, resultante de intercambiar las filas 2 y 4 de la identidad.

También es matriz elemental por columnas, resultante de intercambiar las columnas 2 y 4 de la identidad.

Observación: Toda matriz elemental por filas lo es por columnas y viceversa (aunque no necesariamente asociadas a la misma operación por filas que por columnas).

Observación: Toda matriz elemental es invertible, y su inversa es la matriz elemental asociada a la operación inversa (la operación inversa de la suma es la resta, la operación inversa de multiplicar una fila o columna por un número no nulo es dividir por él, y la operación inversa de un intercambio de filas o columnas es ese mismo intercambio). Las matrices inversas de las de los ejemplos son:

$$\mathbf{E}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2^{-1}.$$

Algoritmo de cálculo del rango mediante operaciones de reducción gaussiana

Dada una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, realizar operaciones elementales sobre sus filas equivale a premultiplicar por sucesivas matrices elementales:

$$\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}. \tag{2.53}$$

Cada una de estas operaciones deja invariante el rango. Si mediante este proceso llegamos a una *matriz triangular* (cuyo rango se deduce inmediatamente) habremos conseguido calcular $r(\mathbf{A})$.

Igualmente puede procederse efectuando operaciones elementales sobre las columnas (posmultiplicación por matrices elementales), e incluso combinando ambos métodos.

2.3.2. Algoritmo de Gauss-Jordan

Permite calcular la inversa de una matriz usando operaciones elementales. Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada e invertible. Si, de igual modo que antes, mediante operaciones elementales sobre sus **filas**, conseguimos llegar a la matriz identidad, tendremos:

$$\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{I} \tag{2.54}$$

Es decir, que $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{I}$, que es el resultado de efectuar, sobre la matriz identidad, las mismas operaciones efectuadas sobre $\mathbf{A}$, lo cual nos permite calcular $\mathbf{A}^{-1}$ fácilmente.

También se puede proceder de igual modo por **columnas**, pero **sin mezclar** en ningún caso **ambos métodos**.

Ejemplo: Vamos a calcular la inversa de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

aplicando este algoritmo; consideramos la matriz $(\mathbf{A} \mid \mathbf{I})$ y mediante transformaciones elementales de filas llegaremos a $(\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1})$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 4F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Concluimos que la inversa que buscábamos es

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

2.3.3. Matriz de cambio de base

Si $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ y $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ son dos bases de $\mathbb{K}^n$, entonces los vectores de cada una de ellas se pueden poner como combinaciones lineales de los de la otra, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= p_{11}\mathbf{b}_1 + p_{21}\mathbf{b}_2 + \ldots + p_{n1}\mathbf{b}_n \\ \mathbf{v}_2 &= p_{12}\mathbf{b}_1 + p_{22}\mathbf{b}_2 + \ldots + p_{n2}\mathbf{b}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_n &= p_{1n}\mathbf{b}_1 + p_{2n}\mathbf{b}_2 + \ldots + p_{nn}\mathbf{b}_n. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Estas expresiones dan lugar a la siguiente definición:

Definición 36 (matriz de cambio de base) *Se llama matriz de cambio de base (o matriz de paso) de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{V}$ a la matriz*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.56}$$

Es decir, es la matriz cuya columna j-ésima contiene las coordenadas del vector $\mathbf{v}_j$ en la base $\mathcal{B}$.

Observación: La matriz de paso de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{V}$ es invertible y su inversa es la que hace el cambio inverso, es decir, la matriz de paso de $\mathcal{V}$ a $\mathcal{B}$.

Observación: Cada vector $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$ lleva asociado un vector de coordenadas respecto a $\mathcal{B}$ (denotado $[\mathbf{u}]^{\mathcal{B}}$) y un vector de coordenadas respecto a $\mathcal{V}$ (denotado $[\mathbf{u}]^{\mathcal{V}}$). Pues bien, la matriz $\mathbf{P}$ de paso de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{V}$ transforma $[\mathbf{u}]^{\mathcal{V}}$ en $[\mathbf{u}]^{\mathcal{B}}$ (*¡cuidado con el orden de los vectores!*). Matricialmente,

$$[\mathbf{u}]^{\mathcal{B}} = \mathbf{P}[\mathbf{u}]^{\mathcal{V}}. \tag{2.57}$$

Para demostrar esta última igualdad, simplemente reescribimos la ecuación (2.55) matricialmente como $\mathbf{V} = \mathbf{BP}$, donde $\mathbf{V}$ es la matriz cuyas n columnas son los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ y $\mathbf{B}$ es la matriz de columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$. A partir de ello, todo vector $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$ puede escribirse como

$$\mathbf{B}[\mathbf{u}]^{\mathcal{B}} = \mathbf{u} = \mathbf{V}[\mathbf{u}]^{\mathcal{V}} = \mathbf{BP}[\mathbf{u}]^{\mathcal{V}}. \tag{2.58}$$

Igualamos el primer y el último término, y multiplicamos por $\mathbf{B}^{-1}$ (que existe pues $\mathbf{B}$ es cuadrada de columnas independientes); de esta forma se llega a la identidad (2.57). Nótese que $\mathbf{P} = \mathbf{B^{-1}V}$, lo cual también permite calcular la matriz $\mathbf{P}$ de cambio de base.

2.4. Sistemas de ecuaciones lineales

Se trata de encontrar, si existen, todas las n-uplas de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, en el cuerpo $\mathbb{K}$, que satisfagan simultáneamente las m ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \tag{2.59}$$

en donde a_{ij} y b_i son elementos de $\mathbb{K}$ prefijados. Las ecuaciones anteriores (ecuaciones lineales) constituyen un **sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas** $x_1, \ldots, x_n$.

Llamando

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{2.60}$$

el sistema anterior puede expresarse matricialmente como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \tag{2.61}$$

Un vector $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$ que satisfaga que $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$ se denomina **vector solución** del sistema.

La matriz $\mathbf{A}$ se denomina **matriz de coeficientes**; el vector $\mathbf{b}$, **vector de términos independientes**; la yuxtaposición de ambos,

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \in \mathbb{K}^{m\times(n+1)} \tag{2.62}$$

se llama **matriz ampliada**, y contiene todos los datos que determinan el sistema lineal y, por tanto, sus soluciones.

Definición 37 *Un sistema lineal se dice* ***compatible*** *si admite alguna solución; si, además, es única, se llama compatible* ***determinado****; si admite más de una solución, compatible* ***indeterminado****; si no admite ninguna solución,* ***incompatible****.*

2.4.1. Estructura de las soluciones

Un sistema lineal se dice **homogéneo** si sus **términos independientes** son todos **nulos**. En otras palabras, si el sistema es de la forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

Observación: Todo sistema homogéneo admite como solución el vector nulo de $\mathbb{K}^n$, que constituye la llamada *solución trivial.* Pero el conjunto de todas las soluciones del sistema homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ es precisamente el núcleo de $\mathbf{A}$ (que se denota $\ker \mathbf{A}$, ya definido en la expresión (2.38)).

Para cada sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, que llamaremos **sistema completo**, su **sistema homogéneo asociado** es $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

Se tiene que cualesquiera dos soluciones del sistema completo difieren en una solución del sistema homogéneo; en efecto: sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ soluciones de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$; entonces

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \mathbf{Au}_1 - \mathbf{Au}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}, \tag{2.63}$$

luego $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ es solución del sistema homogéneo. Por otro lado, la suma de una solución particular del sistema completo y una solución del sistema homogéneo da como resultado una solución del sistema completo (en efecto, si $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{x}) = \mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b}$). En resumen: fijada una solución particular de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, cada solución de ese sistema puede escribirse como suma de esa solución particular más una determinada solución del sistema homogéneo asociado.

Proposición 16 *Si el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es compatible y $r(\mathbf{A}) = r$, entonces todas sus soluciones vienen dadas en función de $n - r$ parámetros independientes (es decir, tantos como el número de incógnitas menos el rango de la matriz de coeficientes). Más aún, dichas soluciones se escriben como*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_{n-r} \mathbf{u}_{n-r} \tag{2.64}$$

donde $\mathbf{x}_0$ es una solución particular del sistema, $(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_{n-r})$ es base de $\ker \mathbf{A}$, y $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-r}$ son los parámetros mencionados.

Demostración: Según la observación anterior, fijada una solución particular $\mathbf{x}_0$ del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, cualquier vector $\mathbf{x}$ es solución del sistema si y sólo si $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \in \ker \mathbf{A}$. Por otro lado, la igualdad (2.48) afirma que $\dim(\ker \mathbf{A}) = n - r$, luego cualquier base de $\ker \mathbf{A}$ debe poseer $n - r$ vectores independientes. Sea $(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_{n-r})$ una base de $\ker \mathbf{A}$; el vector $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \in \ker \mathbf{A}$ si y sólo si existen escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-r}$ tales que

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_{n-r} \mathbf{u}_{n-r} \tag{2.65}$$

y esta igualdad es equivalente a la expresión (2.64). $\square$

2.4.2. El teorema de Rouché-Frobenius

Recordando la igualdad (2.41), se tiene que todo sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ puede reescribirse como

$$x_1 C_1(\mathbf{A}) + x_2 C_2(\mathbf{A}) + \ldots + x_n C_n(\mathbf{A}) = \mathbf{b}. \tag{2.66}$$

En otras palabras, el vector de términos independientes debe ser combinación lineal de las n columnas de la matriz $\mathbf{A}$, cuyos coeficientes son precisamente las incógnitas.

Así pues, el sistema admitirá solución cuando, y solo cuando, $\mathbf{b}$ sea combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$, lo cual se expresa en el siguiente

Teorema 6 (Rouché-Frobenius) *El sistema lineal* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *es compatible si y solo si* $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = r(\mathbf{A})$.

Además, si el sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *es de* n *incógnitas, y llamamos* r *al rango de* $\mathbf{A}$, *caben las siguientes posibilidades:*

- $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = r + 1 \iff$ *sistema incompatible.*
- $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = r \iff$ *sistema compatible. Y en ese caso,*
  - $r = n \iff$ *compatible determinado: solución única.*
  - $r < n \iff$ *compatible indeterminado; la solución general depende de* $n - r$ *parámetros.*

Demostración: La primera parte del teorema (condición de compatibilidad) equivale a la observación previa a dicho teorema: $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$ si y sólo si $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = r(\mathbf{A}) = r$. En ese caso el sistema es compatible; en cualquier otro caso ($r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) > r$) es incompatible. En los casos compatibles, las soluciones vienen dadas en función de $n - r$ parámetros (es lo que afirma la Proposición 5). En particular, el caso $r = n$ indica que la solución viene dada por $n - r = 0$ parámetros; ello quiere decir que la solución es única. (Obsérvese que esto se verifica cuando $r(\mathbf{A}) = n$, es decir, cuando y sólo cuando todas las columnas de $\mathbf{A}$ son independientes). $\square$

2.4.3. Resolución de sistemas lineales por reducción gaussiana

Observación: Dado un sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, de matriz de coeficientes $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y una matriz $\mathbf{Q} \in \mathbb{K}^{m\times m}$ **invertible**, el conjunto de soluciones del sistema anterior coincide con el de

$$\mathbf{QAx} = \mathbf{Qb} \tag{2.67}$$

y se dice que este último sistema es *equivalente* al $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Esta observación permite pasar de un sistema inicial a otro que posee las **mismas soluciones** pero que quizá es más fácilmente resoluble; el objetivo es que la nueva matriz de coeficientes $\mathbf{QA}$ sea matriz triangular o escalonada. ¿Cómo conseguir que $\mathbf{QA}$ tenga forma escalonada? Recuérdese el concepto de operación elemental por filas, equivalente a premultiplicación por la correspondiente matriz elemental, que siempre es invertible. Pues bien, aplicando operaciones elementales de reducción gaussiana convertimos $\mathbf{A}$ en una matriz escalonada $\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}$; esta nueva matriz es $\mathbf{QA}$, donde $\mathbf{Q} = \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$.

Obsérvese que la matriz ampliada del sistema inicial es $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ y la del nuevo sistema es $(\mathbf{QA}|\mathbf{Qb})$. Ello significa que, aplicando dichas **operaciones elementales sobre las filas completas** de la matriz ampliada, obtenemos un sistema equivalente y fácilmente resoluble. En esto consiste el método de reducción gaussiana.

Veamos este procedimiento con más detalle: a la hora de resolver un sistema lineal, realizamos operaciones elementales **por filas** sobre la matriz ampliada $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, lo que equivale a premultiplicar **A** y **b** por una misma matriz invertible, obteniendo un sistema equivalente.

Nuestro propósito será llegar a una configuración de la forma (ejemplo de tamaño 4×6)

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * \end{array}\right) \tag{2.68}$$

en donde el símbolo $\blacksquare$ denota elementos no nulos, y el símbolo $*$ elementos cualesquiera.

En este ejemplo, el sistema será compatible indeterminado, dependiendo la solución general de $6 - 4 = 2$ parámetros; podemos dejar libres dos incógnitas, por ejemplo $x_5 = \lambda$, $x_6 = \mu \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, despejando *de abajo a arriba* las cuatro restantes en función de éstas.

Si se llega a una situación de la forma

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{array}\right), \tag{2.69}$$

entonces el sistema será incompatible ($r(\mathbf{A}) = 3$ y $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 4$).

Para llegar a estas configuraciones de **matrices escalonadas**, se sigue el siguiente algoritmo:

- Si es $a_{11} \neq 0$, se efectúa para cada fila $2, 3, \dots, m$ la operación

  $$\mathbf{F}'_i = \mathbf{F}_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}\mathbf{F}_1, \tag{2.70}$$

  es decir, a cada fila le restamos el adecuado múltiplo de la primera para hacer ceros en la primera columna, obteniendo

  $$\left(\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * & * \end{array}\right). \tag{2.71}$$

  Si es $a_{11} = 0$, se escoge una fila k tal que sea $a_{k1} \neq 0$, y se intercambian las filas 1 y k; a continuación, se procede como se explicó antes. Si todos los elementos de la primera columna son nulos, el valor x_1 de la primera incógnita es arbitrario y se pasa al siguiente paso.

El siguiente paso es proceder del mismo modo con la columna 2, para las ecuaciones $3, \dots, n$. Si fuesen nulos todos los a'_{2k} , $k = 2, \dots, n$, se tendría ya hecho el trabajo sobre la columna 2 y se pasaría a operar con la 3. En caso contrario:

Si es $a'_{22} \neq 0$, se hacen las operaciones

$$\mathbf{F}''_i = \mathbf{F}'_i - \frac{a'_{i2}}{a'_{22}}\mathbf{F}'_2 \ , \quad i = 3, 4, \ldots, m, \tag{2.72}$$

y si es $a'_{22} = 0$, se intercambia la fila 2 con alguna posterior cuyo elemento a'_{k2} sea no nulo, haciéndose a continuación las operaciones dichas.

Reiterando el proceso, se llega a la matriz escalonada.

En cada paso no trivial hay que dividir por un elemento diagonal $a_{ii}^{(i-1)}$ que se denominará ***pivote*** o, eventualmente, intercambiar dos ecuaciones para obtener un pivote no nulo. Así pues, en muchos casos es imprescindible efectuar operaciones de intercambio de filas. Por ejemplo, si tuviéramos

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * \end{array}\right) \tag{2.73}$$

sería imposible anular el elemento a_{32}, por lo que se procedería a intercambiar las filas 2 y 3.

En ocasiones puede llegarse a configuraciones como

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{array}\right) \tag{2.74}$$

que nos obligan a tomar como variables libres algunas de las incógnitas intermedias (en el ejemplo mostrado, la 3ª y la 5ª).

2.5. Ejercicios

2.1.– Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ verifica

$$f\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Calcular la imagen por f del vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Hallar asimismo la matriz de la aplicación lineal f.

2.2.– Hállese la matriz $\mathbf{A}$ que cumple:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2.3.– Para cada número real a se considera la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hallar unas ecuaciones paramétricas del núcleo de $\mathbf{A}$ y una base del subespacio imagen de $\mathbf{A}$.

2.4.– Sea $\mathbf{A}$ una matriz que verifica

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. Escribir la matriz $\mathbf{A}$.
2. Determinar una base de $\ker \mathbf{A}$ y unas ecuaciones implícitas de $\operatorname{Im} \mathbf{A}$.
3. Dado el subespacio $M = L[(1,2,0),(2,1,1)]$ de $\mathbb{R}^3$, determinar una base del subespacio de los transformados de los vectores de M por la matriz $\mathbf{A}$; es decir, de $\{\mathbf{Ax},\ \mathbf{x} \in M\}$.

2.5.– De una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ se sabe que

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y que $\operatorname{Im} \mathbf{A} \subsetneq \ker \mathbf{A}$.

1. Calcúlese el rango de $\mathbf{A}$.
2. Calcúlese el vector suma de las columnas de $\mathbf{A}$.

2.6.– Calcular el rango de la matriz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ b & b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a & b \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

y deducir para qué valores de a y b es invertible.

2.7.– Calcular, empleando el método de Gauss-Jordan, las inversas de las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.$$

2.8.– Hallar, usando el método de Gauss-Jordan, la inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 0 & 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Probar que una matriz triangular es invertible si y sólo si todos los elementos de su diagonal principal son distintos de cero y que, en ese caso, su inversa es una matriz triangular del mismo tipo.

2.9.– Calcular, mediante el método de Gauss-Jordan, la inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Generalizar el resultado obtenido a una matriz de orden n que tenga la misma estructura. Este ejemplo pone de manifiesto que una matriz dispersa (es decir, con gran número de elementos nulos) no tiene por qué tener inversa dispersa.

2.10.– En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases

$$\mathcal{B} = ((1,0,1),(-1,1,1),(1,-1,0)), \quad \mathcal{V} = ((2,1,1),(1,1,1),(1,-1,1)).$$

Se pide:

1. Hallar el vector de coordenadas de $(2,1,1)$ respecto a la base $\mathcal{B}$.
2. Calcular la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{V}$.
3. A partir de lo anterior, determinar la matriz de cambio de base de $\mathcal{V}$ a $\mathcal{B}$.
4. Calcular el vector de coordenadas respecto a la base $\mathcal{V}$ del vector cuyas coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}$ son $(1,2,3)$.

2.11.– Sea $\mathbf{A}$ una matriz compleja. Demostrar que $\ker \mathbf{A}^h\mathbf{A} = \ker \mathbf{A}$ y deducir la igualdad $r\left(\mathbf{A}^h\mathbf{A}\right) = r(\mathbf{A})$. Probar también que $\mathbf{A}^h\mathbf{A} = \mathbf{O}$ si, y solamente si, $\mathbf{A} = \mathbf{O}$.

2.12.– Sea $\mathbf{B}$ una matriz $n \times m$ y $\mathbf{C}$ una matriz $m \times n$, demostrar la siguiente propiedad

$$\mathrm{tr}(\mathbf{BC}) = \mathrm{tr}(\mathbf{CB}).$$

2.13.– Demostrar que una matriz $\mathbf{A}$ tiene rango 1 si y sólo si puede escribirse como $\mathbf{A} = \mathbf{ab}^t$ siendo $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vectores columna no nulos. Deducir asimismo que, si $\mathbf{A}$ es cuadrada de rango 1, entonces $\mathbf{A}^2 = \mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathbf{A}$.

2.14.– Resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{r} 2x - y + 3z + u + 4v = 2 \\ 4x + y + 8z + u + 12v = 13 \\ -6x + 15y + 4z - 5u + v = 27 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{r} 2x + 4y + 8z = 6 \\ 4x + y + 9z = 12 \\ x + 2y + 4z = 3 \\ 5x - 4y + 6z = 15 \\ 3x + 5y + 11z = 9 \end{array}\right.$$

2.15.– Encontrar los vértices de un triángulo cuyos lados tienen por puntos medios los puntos de coordenadas

$$(4,1), (2,3), \ (6,2).$$

¿Quedan determinados los vértices de un cuadrilátero si se conocen los puntos medios de sus lados? Generalizar estos resultados al caso de un polígono con un número cualquiera de lados.

2.16.– Discutir según los valores de los parámetros a y b los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{r} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = b^2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{r} ax + y + bz = 1 \\ x + ay + bz = 1 \\ x + y + abz = b \end{array}\right.$$

2.5.1. Cuestiones

2.17.– La matriz de cambio de la base B a la base V es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Si un vector tiene coordenadas $(1, 2, 0)$ respecto a B, ¿qué coordenadas tiene respecto a V?:

- ◯ (A) $(3, 2, 0)$
- ◯ (B) $(1, 3, 5)$
- ◯ (C) $(1, 1, -3)$
- ◯ (D) $(-1, 2, 0)$

2.18.– Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

	V	F
El producto de dos matrices invertibles es una matriz invertible		
El producto de dos matrices simétricas es una matriz simétrica		
Si $\mathbf{A}$ transforma vectores linealmente independientes en vectores linealmente independientes, entonces su rango por columnas es máximo.		
Si $\ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$ entonces $\mathbf{A}$ transforma vectores linealmente independientes en vectores linealmente independientes.		
Si $\mathbf{A}$ es cuadrada, entonces el rango de $\mathbf{A}^2$ es mayor o igual que el rango de $\mathbf{A}$.		

2.19.– Sean $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ matrices no necesariamente cuadradas. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

	V	F
Si $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, entonces o bien $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ o bien $\mathbf{B} = \mathbf{O}$.		
Si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$, entonces $\mathbf{A}$ es necesariamente nula.		
Si $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ entonces $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.		
Si $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ y $\mathbf{A}$ es cuadrada invertible, entonces $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.		
Si $\mathbf{A}$ es rectangular, de columnas independientes, y $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, entonces $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.		
Si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{B}^2$ entonces $\mathbf{A} = \pm\mathbf{B}$.		

2.20.– Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

	V	F
Si $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tiene solución única, entonces $\ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$		
Si el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene solución única, entonces el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tiene como única solución la trivial.		
Si el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tiene solución única, entonces el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene solución única.		
Si $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene solución única, entonces $\mathbf{Ax} = \mathbf{v}$ tiene solución única.		
Si $\mathbf{b}, \mathbf{v} \in \mathrm{Im}(\mathbf{A})$ entonces $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es determinado $\Leftrightarrow$ $\mathbf{Ax} = \mathbf{v}$ es determinado.		

Capítulo 3

Producto escalar y ortogonalidad

3.1 Producto escalar y norma asociada en $\mathbb{R}^n$. Desigualdades de Cauchy-Schwarz y triangular.

3.2 Ortogonalidad. El suplementario ortogonal. El teorema de la proyección ortogonal. Familias ortogonales. Bases ortonormales. Matrices ortogonales. El método de ortonormalización de Gram–Schmidt. Factorización **QR**.

3.3 Extensión a $\mathbb{C}^n$.

3.4 Ejercicios. Cuestiones.

Introducción

En los temas anteriores hemos atendido a propiedades *cualitativas* de los vectores: pueden sumarse o multiplicarse por un número, etc. Ahora vamos a ver otras propiedades de tipo *cuantitativo*: qué entendemos por longitud de un vector, cómo medir el ángulo que forman dos vectores, cómo proyectar un vector (sobre un subespacio), etc. En el plano muchas de estas cuestiones pueden resolverse de forma bastante elemental, “con regla y compás”. Queremos extender de manera natural las ideas intuitivas de la geometría elemental tanto a $\mathbb{R}^n$ como a $\mathbb{C}^n$.

Nota: Por razones de notación identificamos los vectores de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ con vectores columna.

3.1. Producto escalar y norma

Definición 38 (producto escalar natural en $\mathbb{R}^n$) *Dados dos vectores* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *su producto escalar es el número real*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{x}^t \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = \mathbf{y}^t \mathbf{x}. \tag{3.1}$$

De la definición se desprenden las siguientes propiedades:

1. Distributividad, es decir: $\forall\ \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n,\ \forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

$$\langle\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle=\lambda\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle+\mu\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle;\ \langle\mathbf{u},\lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{w}\rangle=\lambda\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+\mu\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle \tag{3.2}$$

   Se dice también que el producto escalar es lineal en cada componente.

2. Simetría:

$$\forall\ \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n\quad\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle. \tag{3.3}$$

3. Positividad:

$$\forall\ \mathbf{u}\in\mathbb{R}^n,\ \mathbf{u}\neq\mathbf{0}\quad\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle=\mathbf{u}^t\mathbf{u}=\sum_{j=1}^n u_j^2>0. \tag{3.4}$$

Esta última propiedad es muy importante y motiva la siguiente

Definición 39 (norma euclídea) *Para cada vector* $\mathbf{u}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *el número*

$$\|\mathbf{u}\|:=\sqrt{\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle} \tag{3.5}$$

recibe el nombre de norma o longitud del vector.

Proposición 17 *La aplicación que a cada vector* $\mathbf{u}$ *le asocia su norma* $\|\mathbf{u}\|$ *se denomina* ***norma asociada al producto escalar*** *y cumple:*

1. $\forall\ \mathbf{u}\in\mathbb{R}^n,\ \|\mathbf{u}\|\geq 0,\ \|\mathbf{u}\|=0\iff\mathbf{u}=\mathbf{0}.$
2. $\forall\ \lambda\in\mathbb{R},\ \forall\ \mathbf{u}\in\mathbb{R}^n\quad\|\lambda\mathbf{u}\|=|\lambda|\ \|\mathbf{u}\|.$
3. $\forall\ \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n,\ \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2+2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+\|\mathbf{v}\|^2.$

Definición 40 *Dados dos vectores* $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ *se define la distancia entre ellos:*

$$d(\mathbf{u},\mathbf{v}):=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|. \tag{3.6}$$

Proposición 18 (desigualdades de Cauchy-Schwarz y triangular) *Sean* $\mathbf{u},\mathbf{v}$ *dos vectores cualesquiera de* $\mathbb{R}^n$*. Entonces*

1. *La* ***desigualdad de Cauchy-Schwarz*** *nos da la relación entre el producto escalar de los dos vectores y sus longitudes:*

$$\forall\ \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n\quad|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle|\leq\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|. \tag{3.7}$$

   La igualdad se da si, y solo si, los vectores son proporcionales.

2. *La* ***desigualdad triangular*** *relaciona la suma de las longitudes con la longitud de la suma:*

$$\forall\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,\ \ \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|. \tag{3.8}$$

La igualdad se da si, y solo si, los vectores son proporcionales con constante de proporcionalidad no negativa.

Demostración: En virtud de la distributividad y de la simetría:

$$\|\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}, \mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \lambda^2\|\mathbf{v}\|^2 \tag{3.9}$$

cualquiera que sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Podemos suponer $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ (si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ambos miembros de (3.7) son nulos). La expresión (3.9) es un polinomio de segundo grado en λ mayor o igual que cero para todo λ. Su discriminante tiene que ser menor o igual que cero:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2 - \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 \leq 0 \iff \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2$$

Al tomar raíces cuadradas positivas en ambos miembros queda demostrada la desigualdad. Además, la igualdad en (3.7) equivale a $\|\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}\|^2 = 0$, es decir, $\mathbf{u} = -\lambda\mathbf{v}$, para un determinado valor de λ: los vectores son proporcionales.

Para probar la desigualdad triangular elevamos al cuadrado el primer miembro de la desigualdad, desarrollamos y aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$$

Al extraer raíces cuadradas positivas se llega al resultado deseado.

La igualdad se da si, y solo si, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|$, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son proporcionales, $\mathbf{u} = -\lambda\mathbf{v}$ y además

$$0 \leq \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle -\lambda\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = -\lambda\|\mathbf{v}\|^2$$

por lo que la constante de proporcionalidad $(-\lambda)$ es no negativa. □

Observación: La desigualdad triangular dice que la longitud de una suma de vectores no puede exceder la suma de las longitudes de ambos vectores. Intuitivamente es muy natural; si pensamos geométricamente, los dos vectores definen un paralelogramo de lados de longitudes $\|\mathbf{u}\|$ y $\|\mathbf{v}\|$, mientras que las longitudes de las diagonales son $\|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\|$.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz permite definir el ángulo entre dos vectores,

Definición 41 *Sean* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *dos vectores no nulos de* $\mathbb{R}^n$*, se define al ángulo* φ *que forman como aquel cuyo coseno es*

$$\cos\varphi = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|}, \quad \varphi \in [0, \pi]. \tag{3.10}$$

3.2. Ortogonalidad

Definición 42 *Dos vectores* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *son* ***ortogonales*** *(o perpendiculares) si su producto escalar es nulo:* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$*. En ese caso es frecuente escribir* $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$*.*

Observación: Si un vector es ortogonal a sí mismo es nulo. Es consecuencia de la propiedad de positividad. A veces esta propiedad se enuncia diciendo que el único vector ortogonal a todos los del espacio es el nulo:

$$\forall\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}. \tag{3.11}$$

Teorema 7 (Pitágoras) *Dos vectores* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *son* ***ortogonales*** *si, y solamente si*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2. \tag{3.12}$$

Demostración: Es consecuencia inmediata del apartado 3. de la proposición 17. □

Proposición 19 (suplementario ortogonal) *Sea* M *un subespacio de* $\mathbb{R}^n$*, el conjunto*

$$M^{\perp} := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,\ \forall\ \mathbf{u} \in M,\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0\} \tag{3.13}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ *que es suplementario de* M*. Es decir,* $\mathbb{R}^n = M \oplus M^{\perp}$*.*

Demostración: Sea m la dimensión de M. Identifiquemos $M = \operatorname{Im} \mathbf{A}$ siendo $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ una matriz cuyas columnas son una base de M. Un vector $\mathbf{x}$ es de $M^{\perp}$ si, y solamente si, es ortogonal a los vectores de una base de M, es decir si $\mathbf{A}^t\, \mathbf{x} = \mathbf{0}$, así pues $M^{\perp} = \ker \mathbf{A}^t$. Como el rango de $\mathbf{A}$ es m, la dimensión del núcleo de $\mathbf{A}^t$ es $n - m$, luego para que M y $M^{\perp}$ sean suplementarios basta que su intersección sea nula; pero ello es evidente dado que el único vector ortogonal a sí mismo es el nulo, por lo que podemos concluir que $\mathbb{R}^n = M \oplus M^{\perp}$. □

Observación: Notemos que este razonamiento puede hacerse también considerando una matriz $\mathbf{A}$ cuyas columnas sean un generador de M, no necesariamente libre, en este caso pueden variar sus dimensiones (habrá tantas columnas como vectores posea el generador) pero no su rango, que coincide con la dimensión.

Observación: De la relación de dimensiones y de la definición se desprende que $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

Corolario: Dada una matriz real cualquiera $\mathbf{A}$ se verifica:

$$(\operatorname{Im}\mathbf{A})^{\perp} = \ker \mathbf{A}^t, \qquad (\operatorname{Im}\mathbf{A}^t)^{\perp} = \ker \mathbf{A}. \tag{3.14}$$

Teorema 8 (de la proyección ortogonal) *Sea M un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Entonces para cada vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ existen únicos $\mathbf{v} \in M$, $\mathbf{w} \in M^{\perp}$ de forma que $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$; además, para cualquier $\mathbf{z} \in M$ se cumple $d(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{z}\| \geq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.*

Demostración: De $\mathbb{R}^n = M \oplus M^{\perp}$ se desprende la descomposición $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, $\mathbf{v} \in M$, $\mathbf{w} \in M^{\perp}$ y su unicidad. En cuanto a la distancia, sea $\mathbf{z} \in M$ cualquiera,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{z}\|^2 = \|(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + (\mathbf{v} - \mathbf{z})\|^2 \overset{(*)}{=} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v} - \mathbf{z}\|^2 \geq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2.$$

La igualdad en $(*)$ se da en virtud del teorema de Pitágoras ya que $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ y $(\mathbf{v} - \mathbf{z})$ son ortogonales (el primero es un vector de $M^{\perp}$ y el segundo es de M). $\square$

Los resultados de este teorema motivan las dos definiciones siguientes:

Definición 43 *El vector $\mathbf{v}$ recibe el nombre de **proyección ortogonal** de $\mathbf{u}$ sobre M; lo denotaremos $P_M\mathbf{u}$.*

Definición 44 *Dado un subespacio M de $\mathbb{R}^n$, para cada vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ su distancia a M se define como*

$$d(\mathbf{u}, M) := \text{mín}\{d(\mathbf{u}, \mathbf{v}),\ \mathbf{v} \in M\} = \|\mathbf{u} - P_M\mathbf{u}\|. \tag{3.15}$$

Observación: El teorema de la proyección ortogonal no solo garantiza la existencia del mínimo sino que establece que se alcanza precisamente en la proyección de $\mathbf{u}$ sobre M.

3.2.1. Familias ortogonales

Definición 45 *Un conjunto de vectores $\mathcal{F} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ de $\mathbb{R}^n$ es **ortogonal** si $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ para $i \neq j$. Se dice que los vectores de $\mathcal{F}$ son **ortogonales dos a dos**.*

Definición 46 *Un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ es **ortonormal** si sus vectores son ortogonales dos a dos y **unitarios** (es decir de norma 1).*

Proposición 20 *Una familia ortogonal que no contiene el vector nulo es libre. En particular, toda familia ortonormal es libre.*

Demostración: Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_s\}$ un conjunto de vectores tales que $\mathbf{u}_j^t\mathbf{u}_k = 0,\ j \neq k$. Igualemos a cero una combinación lineal:

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_s\mathbf{u}_s = \mathbf{0} \tag{3.16}$$

y multipliquemos escalarmente por $\mathbf{u}_k$ para un índice k cualquiera,

$$\lambda_1 \mathbf{u}_k^t \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_k^t \mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_s \mathbf{u}_k^t \mathbf{u}_s = 0 \tag{3.17}$$

la expresión queda reducida a

$$\lambda_k \mathbf{u}_k^t \mathbf{u}_k = \lambda_k \|\mathbf{u}_k\|^2 = 0 \tag{3.18}$$

como el vector $\mathbf{u}_k$ es no nulo, tiene que ser $\lambda_k = 0$, haciendo variar k desde 1 hasta s queda probada la propiedad. $\square$

Corolario: (generalización del teorema de Pitágoras) Si los vectores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ son ortogonales dos a dos, entonces

$$\|\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_m\|^2 = \|\mathbf{u}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{u}_m\|^2. \tag{3.19}$$

Observación: El recíproco no es cierto para $m > 2$ como muestran los vectores

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

para los que se cumple $\|\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{e}_1\|^2 + \|\mathbf{e}_2\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 = 4$ pero no son ortogonales dos a dos ya que por ejemplo $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{u} \rangle = 1$.

Definición 47 *Una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ es aquella cuyos vectores son ortogonales dos a dos; si además son unitarios la base se llama ortonormal.*

Ejemplo:

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \quad \mathcal{B}_o = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$\mathcal{B}_1$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ mientras que $\mathcal{B}_o$ es ortonormal.

Observación: Sea $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ una base **ortogonal** de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_j \rangle}{\|\mathbf{u}_j\|^2} \mathbf{u}_j. \tag{3.20}$$

Si en la base $\mathcal{B}$ normalizamos cada vector $\mathbf{q}_j := \mathbf{u}_j / \|\mathbf{u}_j\|$ la nueva base $\mathcal{B}_o = (\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n)$ es **ortonormal** y la expresión anterior se simplifica:

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} \langle \mathbf{v}, \mathbf{q}_j \rangle \mathbf{q}_j \tag{3.21}$$

y el vector de coordenadas de $\mathbf{v}$ en la base ortonormal es muy sencillo:

$$[\mathbf{v}]^{\mathcal{B}_o} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}, \mathbf{q}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{q}_n \rangle \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

Además, y conforme a la fórmula (3.19), podemos expresar la norma:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \langle \mathbf{v}, \mathbf{q}_j \rangle^2}. \tag{3.23}$$

Mientras que el producto escalar de dos vectores $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ puede escribirse como:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \mathbf{v}, \mathbf{q}_j \rangle \langle \mathbf{q}_j, \mathbf{w} \rangle. \tag{3.24}$$

Definición 48 *Una matriz* $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *es* ***ortogonal*** *si* $\mathbf{Q}^t\mathbf{Q} = \mathbf{I}$*, es decir* $\mathbf{Q}^t = \mathbf{Q}^{-1}$.

Proposición 21 *Sea* $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$*. Entonces son equivalentes:*

1. $\mathbf{Q}$ *es ortogonal.*
2. $\mathbf{Q}$ *conserva el producto escalar, es decir:*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad \langle \mathbf{Q}\mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

3. $\mathbf{Q}$ *conserva la norma, es decir:*

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \|\mathbf{Q}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|.$$

Demostración: Comprobaremos la triple equivalencia mediante un razonamiento circular: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2) Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ dos vectores cualesquiera, entonces:

$$\langle \mathbf{Q}\mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{y} \rangle = (\mathbf{Q}\mathbf{x})^t\mathbf{Q}\mathbf{y} = \mathbf{x}^t\mathbf{Q}^t\mathbf{Q}\mathbf{y} = \mathbf{x}^t\mathbf{I}\mathbf{y} = \mathbf{x}^t\mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Basta tomar $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sean $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$ dos vectores canónicos,

$$\|\mathbf{Q}(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)\|^2 = \|\mathbf{Q}\mathbf{e}_i\|^2 + 2\langle \mathbf{Q}\mathbf{e}_i, \mathbf{Q}\mathbf{e}_j \rangle + \|\mathbf{Q}\mathbf{e}_j\|^2$$

$$\|\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j\|^2 = \|\mathbf{e}_i\|^2 + 2\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle + \|\mathbf{e}_j\|^2$$

Por hipótesis los primeros miembros son iguales $\|\mathbf{Q}(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)\|^2 = \|\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j\|^2$, igualemos los segundos:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Q}\mathbf{e}_i\|^2 + 2\langle \mathbf{Q}\mathbf{e}_i, \mathbf{Q}\mathbf{e}_j \rangle + \|\mathbf{Q}\mathbf{e}_j\|^2 &= \|\mathbf{e}_i\|^2 + 2\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle + \|\mathbf{e}_j\|^2 \\ \iff \langle \mathbf{Q}\mathbf{e}_i, \mathbf{Q}\mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle \iff \mathbf{e}_i^t \mathbf{Q}^t \mathbf{Q} \mathbf{e}_j &= \mathbf{e}_i^t \mathbf{e}_j \\ \iff (\mathbf{Q}^t\mathbf{Q})_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

Con lo que queda probado que $\mathbf{Q}^t\mathbf{Q} = \mathbf{I}$. □

Observación: Las columnas (y filas) de una matriz ortogonal $\mathbf{Q}$ constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar natural. Además, el hecho de conservar el producto escalar y la norma se traduce en que también se conservan los ángulos.

3.2.2. Ortonormalización de Gram-Schmidt y factorización QR

La base canónica en $\mathbb{R}^n$ es ortonormal, pero pueden encontrarse otras bases ortonormales construidas con direcciones predeterminadas. En este apartado se demuestra este resultado y se estudian algunas consecuencias importantes de este hecho.

Teorema 9 (Gram-Schmidt) *Sea* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ *una familia libre en* $\mathbb{R}^n$*, entonces existe una familia* ***ortonormal*** $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_m\}$ *tal que*

$$L[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k] = L[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_k], \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.25}$$

Demostración: Es de tipo constructivo,

$$\begin{aligned} &\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}, \\ &\tilde{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\tilde{\mathbf{q}}_2}{\|\tilde{\mathbf{q}}_2\|} \\ &\vdots \\ &\tilde{\mathbf{q}}_k = \mathbf{u}_k - \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1 - \cdots - \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{q}_{k-1} \rangle \mathbf{q}_{k-1}, \quad \mathbf{q}_k = \frac{\tilde{\mathbf{q}}_k}{\|\tilde{\mathbf{q}}_k\|} \qquad k = 3, \ldots, m. \end{aligned} \tag{3.26}$$

□

Observemos que el procedimiento seguido consiste simplemente en restar a cada vector su proyección ortogonal sobre el subespacio engendrado por los vectores anteriores; es decir, en la etapa k restamos al vector $\mathbf{u}_k$ su proyección sobre $L[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}]$, como puede verse en la figura 3.1.

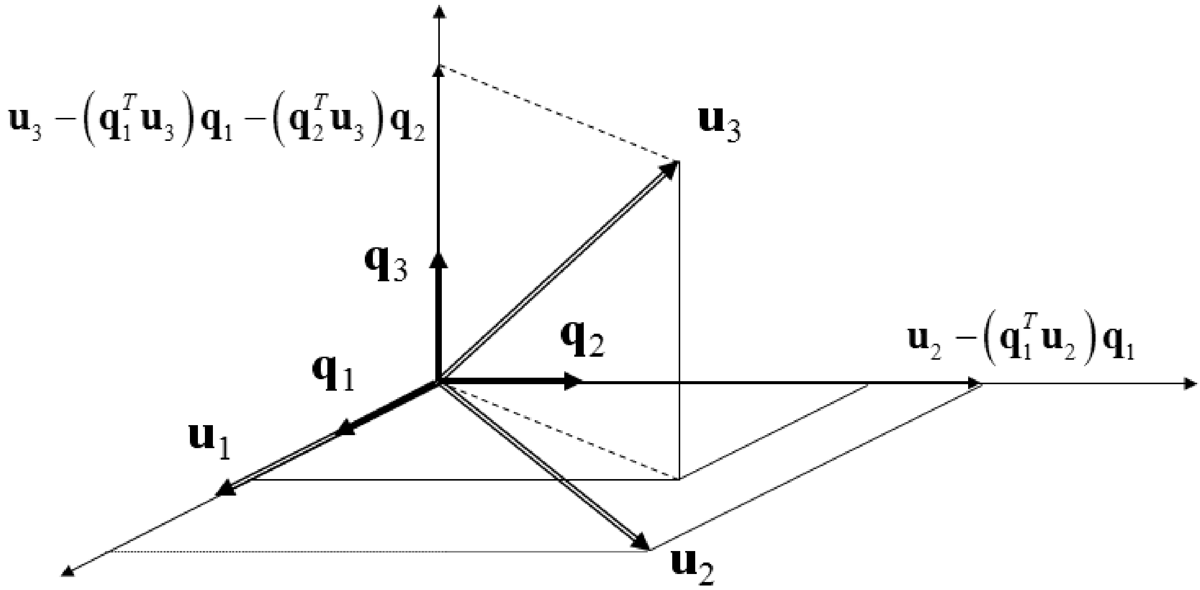


Figura 3.1: Gram-Schmidt para tres vectores

Consecuencia importante

Sea M un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión m y $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m+1}, \ldots, \mathbf{u}_n)$ una base de $\mathbb{R}^n$ obtenida *completando* una base de M; al ortonormalizar por Gram-Schmidt obtenemos una base ortonormal $\mathcal{B}_o = (\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m, \mathbf{q}_{m+1}, \ldots, \mathbf{q}_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Los vectores de esta base pueden agruparse de modo que los m primeros $(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m)$ constituyen una base ortonormal de M y el resto $(\mathbf{q}_{m+1}, \ldots, \mathbf{q}_n)$ una base ortonormal de $M^\perp$.

Teorema 10 (factorización QR) *Sea* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *de rango* m*, entonces existen matrices* $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *y* $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *tales que* $\mathbf{Q}^t\mathbf{Q} = \mathbf{I}$*,* $\mathbf{R}$ *es triangular superior con elementos positivos en su diagonal y tales que* $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$*. Además la factorización es única.*

Demostración: (no exigible) Para demostrar la existencia basta con aplicar el método de Gram-Schmidt a las columnas de $\mathbf{A}$ que son linealmente independientes (por hipótesis el rango de A es m), llamemos $\mathbf{u}_k$ a las columnas de $\mathbf{A}$ y denotemos por $\mathbf{q}_k$ los vectores obtenidos por Gram-Schmidt, despejemos en (3.26) los vectores $\mathbf{u}_k$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}_1 = \|\mathbf{u}_1\|\mathbf{q}_1,\\
&\mathbf{u}_2 = (\mathbf{u}_2^t\mathbf{q}_1)\ \mathbf{q}_1 + \|\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2^t\mathbf{q}_1)\ \mathbf{q}_1\|\ \mathbf{q}_2\\
&\vdots\\
&\mathbf{u}_k = (\mathbf{u}_k^t\mathbf{q}_1)\ \mathbf{q}_1 + (\mathbf{u}_k^t\mathbf{q}_2)\ \mathbf{q}_2 + \cdots + (\mathbf{u}_k^t\mathbf{q}_{k-1})\ \mathbf{q}_{k-1} + \|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_k^t\mathbf{q}_{k-1}\ \mathbf{q}_{k-1} - \cdots - \mathbf{u}_k^t\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_1\|\ \mathbf{q}_k\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

y escribamos matricialmente el resultado:

$$(\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_m) = (\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_m) \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix} = \mathbf{QR}.$$

Observemos que la matriz $\mathbf{R}$ puede contemplarse como la matriz de paso de la base de $\operatorname{Im}\mathbf{A}$ formada por las columnas de $\mathbf{Q}$ a la base formada por las columnas de $\mathbf{A}$. Es evidente que $\mathbf{R}$ es triangular superior con elementos positivos en la diagonal.

En cuanto a la unicidad, supongamos dos factorizaciones $\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \mathbf{PT}$ que cumplan los requisitos, es decir $\mathbf{Q}^t\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, $\mathbf{P}^t\mathbf{P} = \mathbf{I}$, $\mathbf{R}$ y $\mathbf{T}$ triangulares superiores con elementos diagonales positivos, y concluyamos que son iguales. Sígase atentamente la siguiente cadena:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Q}^t\mathbf{Q} = (\mathbf{PTR}^{-1})^t\ \mathbf{PTR}^{-1} = (\mathbf{TR}^{-1})^t\ \mathbf{P}^t\ \mathbf{PTR}^{-1} = (\mathbf{TR}^{-1})^t\ \mathbf{TR}^{-1}$$

La matriz $\mathbf{TR}^{-1}$ es triangular superior y su inversa es su traspuesta, pero la inversa de una matriz triangular superior es triangular superior y su traspuesta es triangular inferior, ambas cosas simultáneamente solo son posibles si $\mathbf{TR}^{-1}$ es diagonal e igual a su inversa. Si llamamos $r_i > 0$ a los elementos diagonales de $\mathbf{R}$ y $t_i > 0$ a los de $\mathbf{T}$ tenemos:

$$\mathbf{TR}^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{t_1}{r_1}, \ldots, \frac{t_m}{r_m}\right), \quad \mathbf{RT}^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{r_1}{t_1}, \ldots, \frac{r_m}{t_m}\right)$$

$$\mathbf{TR}^{-1} = \mathbf{RT}^{-1} \Rightarrow \frac{t_i}{r_i} = \frac{r_i}{t_i} \Rightarrow t_i^2 = r_i^2 \Rightarrow t_i = r_i.$$

Se concluye que $\mathbf{TR}^{-1} = \mathbf{I}$ y por tanto $\mathbf{T} = \mathbf{R}$: la factorización es única. □

3.3. Extensión a $\mathbb{C}^n$

Todo lo visto anteriormente puede extenderse al espacio $\mathbb{C}^n$; el producto escalar se define del siguiente modo:

Definición 49 (producto escalar usual) *Dados* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$*, su producto escalar usual es* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^t\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^h\mathbf{u}$.

Propiedades

De forma análoga a como ocurría en el caso real, se tienen las siguientes propiedades:

1. Linealidad en la primera componente, es decir:

$$\forall\ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n,\ \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad \langle \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \mu\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle. \tag{3.27}$$

2. Simetría *hermítica*:

$$\forall\ \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{C}^n \quad \langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\overline{\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}. \tag{3.28}$$

3. Positividad:

$$\forall\ \mathbf{u}\in\mathbb{C}^n,\ \mathbf{u}\neq\mathbf{0} \quad \langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle\in\mathbb{R}, \quad \langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle>0. \tag{3.29}$$

Observación: Las propiedades 1 y 2 conjuntamente implican una propiedad llamada *antilinealidad* en la segunda componente:

$$\forall\ \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{C}^n,\ \forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{C} \quad \langle\mathbf{u},\lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{w}\rangle=\overline{\lambda}\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+\overline{\mu}\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle. \tag{3.30}$$

Cuando una aplicación sobre $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n$ es lineal en la primera componente y antilineal en la segunda se dice que es *sesquilineal.*

Ejemplo: El producto escalar de $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1+i\\2-i\end{pmatrix}$ por $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1-2i\\2+3i\end{pmatrix}$ es:

$$\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\mathbf{v}^h\ \mathbf{u}=(1+2i\ \ 2-3i)\begin{pmatrix}1+i\\2-i\end{pmatrix}=(1+2i)(1+i)+(2-3i)(2-i)=-5i.$$

Observemos que el orden de los vectores es importante ya que, en virtud de la simetría hermítica, $\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle=\overline{\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}=5i$.

Norma y propiedades relacionadas

La definición de norma es idéntica a la dada en (3.5),

$$\mathbf{u}\in\mathbb{C}^n \ \ \|\mathbf{u}\|=\sqrt{\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}=\sqrt{\mathbf{u}^h\mathbf{u}}=\sqrt{\sum_{j=1}^n|u_j|^2}. \tag{3.31}$$

Ejemplo: La norma de $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1+i\\2-i\\-1\end{pmatrix}$ es $\|\mathbf{u}\|=\sqrt{|1+i|^2+|2-i|^2+1}=2\sqrt{2}$.

Observación: Las propiedades enunciadas en $\mathbb{R}^n$ generalmente son válidas en el espacio $\mathbb{C}^n$; por ejemplo, las desigualdades de Cauchy-Schwarz y triangular se cumplen en el caso complejo si bien las demostraciones que hemos dado solo son válidas en el caso real. El teorema de Pitágoras solo se cumple en su versión generalizada, es decir, la igualdad $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2$ para vectores $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{C}^n$ no implica la ortogonalidad (véase el ejercicio 3.16).

3.3.1. Matrices unitarias

Definición 50 (matriz unitaria) *Una matriz* $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *es* ***unitaria*** *si* $\mathbf{U}^h\mathbf{U} = \mathbf{I}$.

Enunciamos (sin demostración) el equivalente de la proposición 21 para matrices unitarias.

Proposición 22 *Sea* $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Entonces son equivalentes:*

1. $\mathbf{U}$ *es unitaria.*
2. $\mathbf{U}$ *conserva el producto escalar, es decir:*
$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n \quad \langle \mathbf{U}\mathbf{x}, \mathbf{U}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$
3. $\mathbf{U}$ *conserva la norma, es decir:*
$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \quad \|\mathbf{U}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|.$$

Observación: Como en el caso real, las columnas (y filas) de una matriz unitaria constituyen una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ con el producto escalar natural.

Ejemplo: La matriz
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$
es unitaria. Sus columnas forman una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$.

3.4. Extensión a espacios vectoriales generales

En esta sección presentamos generalizaciones de los conceptos de producto escalar y norma euclídea definidos en la sección 3.1 para el caso real, y en la sección 3.3 para el caso complejo.

Definición 51 *Sea* V *un espacio vectorial general sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$). *Una función* $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ *es un* ***producto interior*** *si para todo* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in V$ *y todo* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *se verifican:*

1) $\langle \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \mu\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$. *(Linealidad en la primera componente)*

2) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$ *(Simetría Hermítica)*

3) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$, *y* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ *si y solo si* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *(No negatividad y positividad)*

Observación: Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, se tiene que las propiedades **1**) y **2**) implican la *antilinealidad* en la segunda componente:

$$\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V,\ \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{y} + \mu\mathbf{z} \rangle = \overline{\lambda}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \overline{\mu}\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle.$$

En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la propiedad **2**) se convierte en $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, y la antilinealidad toma la forma

$$\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V,\ \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{y} + \mu\mathbf{z} \rangle = \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \mu\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle.$$

Ejemplos:

a) Consideremos el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$. De las propiedades que se desprenden de la definición 38, se tiene que la función $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{x}^t\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = \mathbf{y}^t\mathbf{x}$, es un producto interior sobre $\mathbb{R}^n$.

b) Análogamente, se tiene que en el espacio vectorial $V = \mathbb{C}^n$ (definición 49) la función $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \mathbf{u}^t\overline{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{v_j} = \mathbf{v}^h\mathbf{u}$, define un producto interior en $\mathbb{C}^n$.

Nota: Los productos interiores de los ejemplos a) y b) son llamados a menudo “producto escalar”.

c) Sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ elementos en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Consideremos la función definida por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2. \tag{3.32}$$

Dado que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2$, se tiene $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Las propiedades **1)** y **2)** se pueden demostrar de manera sencilla. Por tanto, la función definida en (3.32) es un producto interior en $\mathbb{R}^2$.

d) Sea $V = C[a, b]$ el espacio vectorial de todas funciones reales continuas en el intervalo $[a, b]$. Consideremos la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : C[a, b] \times C[a, b] \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Se puede demostrar que dicha función es un producto interior en $C[a, b]$.

e) Sea $V = \mathbb{R}^{m\times n}$, el espacio vectorial de la matrices reales de orden $m \times n$. Para $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, es sencillo demostrar que la función

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle := \mathrm{tr}(\mathbf{B}^t\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij},$$

es un producto interior en $\mathbb{R}^{m\times n}$. Aquí $\mathrm{tr}(\mathbf{B}^t\mathbf{A})$ denota la traza o suma de los elementos diagonales de la matriz $\mathbf{B}^t\mathbf{A}$ cuadrada de $n \times n$.

Definición 52 *Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}\,(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$. Una función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{K}$ es una* ***norma*** *si para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ y todo $\lambda \in \mathbb{K}$ se verifican:*

1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, *y* $\|\mathbf{x}\| = 0$ *si y solo si* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *(No negatividad y positividad)*

2) $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$ *(Homogeneidad)*

3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ *(Desigualdad triangular)*

Ejemplo: Si V es un espacio vectorial dotado de un producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle$, se tiene que la función

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle},$$

está bien definida y es llamada norma asociada (o norma inducida) al producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Para más ejemplos de normas que utilizaremos durante el curso, ver la sección 7.3.

3.5. Ejercicios

3.1.– Dados los vectores $(2,-1,1)$ y $(1,0,1)$, hallar su producto escalar, sus normas y el ángulo que forman.

3.2.– Sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ dos vectores distintos de $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 3)$. Utilizar la desigualdad triangular para demostrar que si se cumple la igualdad

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\| + \|\mathbf{x}-\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|$$

entonces $\mathbf{x}$ pertenece al subespacio generado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

3.3.– Hallar los valores de a, b y c para que sea ortogonal la familia

$$\{(1,-2,1,0), (1,a,3,-7), (b,4,-1,c)\}.$$

3.4.– Demostrar que dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tienen la misma norma si y solo si su suma $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ y su diferencia $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ son ortogonales.

3.5.– Sean F y G subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$. Demostrar las siguientes igualdades:

1. $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
2. $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

3.6.– Hallar una base ortonormal del plano $x+y=5z$, de forma que su primer vector sea proporcional a $(1,-1,0)$.

3.7.– Probar que los siguientes subespacios son suplementarios ortogonales en $\mathbb{R}^n$:

$$L: \ x_1 + \cdots + x_n = 0 \qquad M: \ x_1 = \cdots = x_n.$$

Calcular la proyección ortogonal del vector $(1,0,0,\cdots,0)$ sobre L.

3.8.– Determinar la proyección ortogonal del vector $(1,-1,0,2)$ sobre el subespacio generado por los dos vectores $(1,1,0,1)$ y $(0,2,-1,1)$.

3.9.– En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$ se considera el subespacio $\mathcal{M}$ generado por los vectores $(1,0,1,1), (1,1,0,1)$ y $(1,1,1,0)$. Se pide:

1. Calcular una base ortonormal del subespacio $\mathcal{M}^{\perp}$.
2. Descomponer el vector $\mathbf{b} = (7,7,7,7)$ como suma de sendos vectores de $\mathcal{M}$ y de $\mathcal{M}^{\perp}$.

3.10.– Escribir la distancia del vector $(1,3,2,0)$ al subespacio de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones $x_1 = x_2, \ x_3 = x_4$.

3.11.– Dados dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ de $\mathbb{R}^n$, se pide:

1. Determinar la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre la recta generada por $\mathbf{v}$.

2. Expresar la proyección anterior como el producto de una matriz por el vector $\mathbf{u}$.

3. Sea $n = 3$. Escribir la matriz $\mathbf{P}$ del apartado anterior para el vector $\mathbf{v} = (1, 1, 1)^t$. ¿Cuál es su rango? Determinar bases ortogonales de $\ker \mathbf{P}$ e $\operatorname{Im} \mathbf{P}$.

4. Determinar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ cuyo primer vector sea proporcional a $\mathbf{v} = (1, 1, 1)^t$.

3.12.– Sea a el menor entero positivo para el cual

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

es una base de $\mathbb{R}^3$. Se pide ortonormalizarla por Gram-Schmidt.

3.13.– Determinar la factorización QR de la matriz:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 8 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -7 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

3.14.– Calcular todos los posibles valores reales de a, b y c para que la siguiente matriz sea ortogonal:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2b & c \\ a & b & -c \\ a & -b & c \end{pmatrix}.$$

3.15.– Sea $\mathbf{Q}$ una matriz ortogonal de segundo orden y determinante igual a 1.

1. Calcular su forma más general.

2. Interpretar el significado geométrico de la transformación $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Qx}$.

3.16.– Dados los vectores complejos $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$, estúdiese si son ortogonales y compruébese que se cumple $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

3.17.– Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ tales que

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \ \wedge \ \|\mathbf{u}+i\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

¿Puede concluirse que son ortogonales?

3.18.– Calcular todos los posibles valores reales de a y b para que la siguiente matriz sea unitaria:

$$\begin{pmatrix} a & bi \\ a & -bi \end{pmatrix}.$$

3.19.– Sea $\mathbf{U} = \mathbf{A} + i\mathbf{B}$, con $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ reales, una matriz compleja unitaria. Comprobar que la matriz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix}$$

es ortogonal.

3.5.1. Cuestiones

3.20.– En $\mathbb{C}^3$ se considera el plano $\mathcal{P}$ de ecuación $x + (1+i)y - 2z = 0$. Decidir sobre la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones.

1. Los vectores reales de $\mathcal{P}$ tienen segunda componente nula.
2. Si $\mathbf{u} \in \mathcal{P}$ entonces $\overline{\mathbf{u}} \in \mathcal{P}$.
3. El único vector real de $\mathcal{P}$ es el vector nulo.
4. El vector $(0, 1-i, 1)$ pertenece a $\mathcal{P}$.
5. El vector $(1, 1+i, -2)$ es ortogonal a $\mathcal{P}$.

3.21.– Sean F y G dos subespacios de $\mathbb{R}^n$. Decidir sobre la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones.

1. $F \subset G \Rightarrow F^\perp \subset G^\perp$
2. $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$
3. $\mathbb{R}^n = F \oplus G \Rightarrow \mathbb{R}^n = F^\perp \oplus G^\perp$
4. $\mathbb{R}^n = F \oplus G^\perp \Rightarrow F = G$

3.22.– Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{u} \rangle = 0$ cualquiera que sea $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Decidir sobre la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

1. $\mathbf{A}$ es nula.

2. Los elementos diagonales de $\mathbf{A}$ son nulos.
3. $\det \mathbf{A} = 0$.
4. $\forall i, j \quad a_{ij} = -a_{ji}$
5. $\mathbf{A}$ es antisimétrica.
6. $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} \mathbf{A} \oplus \ker \mathbf{A}$

3.23.– Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Decidir sobre la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones.

1. $\mathbf{A}$ simétrica $\Rightarrow \mathbb{R}^n = \operatorname{Im} \mathbf{A} \oplus \ker \mathbf{A}$
2. $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} \mathbf{A} \oplus \ker \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}$ simétrica.
3. $\mathbf{A}$ antisimétrica $\Rightarrow \mathbb{R}^n = \operatorname{Im} \mathbf{A} \oplus \ker \mathbf{A}$
4. $\operatorname{Im} \mathbf{A} = (\ker \mathbf{A})^\perp \Rightarrow \mathbf{A}$ simétrica.

Capítulo 4

Proyecciones ortogonales y sus aplicaciones

4.1 Matriz de proyección ortogonal sobre un subespacio.

4.2 El problema de mínimos cuadrados. Soluciones de mínimos cuadrados de un sistema. Solución de mínima norma de un sistema compatible indeterminado. Solución de mínimos cuadrados y mínima norma de un sistema.

4.3 Matriz de simetría ortogonal respecto a un subespacio.

4.4 El producto vectorial en $\mathbb{R}^3$.

4.5 Giros en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

4.6 Ejercicios.

4.1. Matriz de proyección ortogonal

En el capítulo anterior, se dio la definición de proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio (Definición 43), que a su vez se basaba en el Teorema de la proyección ortogonal (Teorema 8). Recordémoslo aquí: Si M es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces para cada vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ existen únicos $\mathbf{v} \in M$, $\mathbf{w} \in M^\perp$ de forma que

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}.$$

El vector $\mathbf{v}$ recibe el nombre de **proyección ortogonal** de $\mathbf{u}$ sobre M. Asimismo, $\mathbf{w}$ es la **proyección ortogonal** de $\mathbf{u}$ sobre $M^\perp$.

A continuación vamos a deducir que este vector proyectado puede calcularse mediante una matriz, la llamada matriz de proyección ortogonal. Para ello, consideremos que M es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión m, y sea $\mathcal{B}_M = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$ una base **ortogonal** de M; por otro lado, su subespacio ortogonal $M^\perp$ tiene dimensión $n - m$, y denotemos $\mathcal{B}_{M^\perp} = (\mathbf{u}_{m+1}, \ldots, \mathbf{u}_n)$ una base ortogonal de $M^\perp$. Entonces, la reunión de dichas bases es

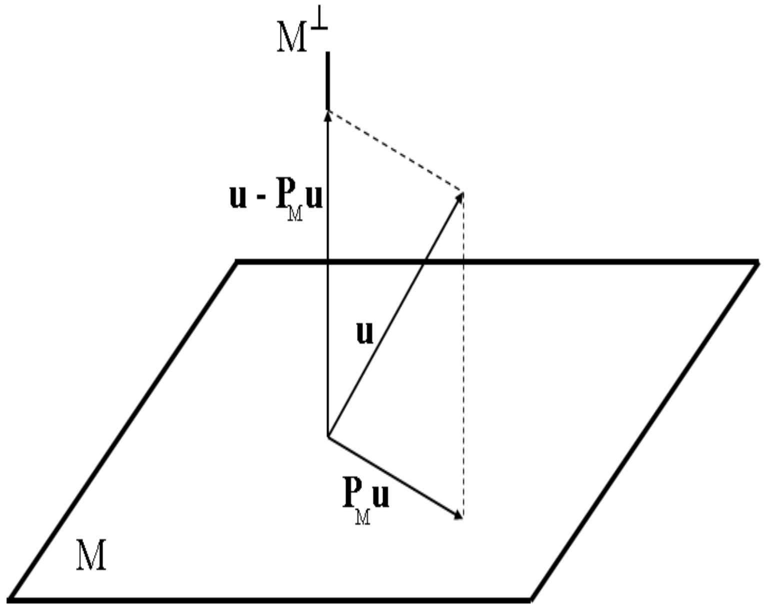


Figura 4.1: Proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre el subespacio M

una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$, y según la ecuación (3.20), todo vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ puede escribirse como

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_j \rangle}{\|\mathbf{u}_j\|^2} \mathbf{u}_j + \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_j \rangle}{\|\mathbf{u}_j\|^2} \mathbf{u}_j.$$

Pues bien, esta expresión puede reescribirse como $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, donde el primer sumando $\mathbf{v}$ es un vector perteneciente a M (es combinación lineal de una base de M) y el segundo sumando $\mathbf{w}$ es un vector perteneciente a $M^\perp$ (es combinación lineal de una base de $M^\perp$). Por tanto, $\mathbf{v}$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre M (y $\mathbf{w}$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $M^\perp$). En otras palabras, la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre M puede calcularse de la siguiente forma: basta encontrar una base ortogonal de M, $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$, y obtener el vector

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_j \rangle}{\|\mathbf{u}_j\|^2} \mathbf{u}_j. \tag{4.1}$$

Paralelamente, la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $M^\perp$ es

$$\mathbf{w} = \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_j \rangle}{\|\mathbf{u}_j\|^2} \mathbf{u}_j,$$

aunque también se puede calcular como $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$.

Así pues, el vector proyectado puede expresarse como

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \sum_{j=1}^{m} \mathbf{u}_j \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_j \rangle}{\|\mathbf{u}_j\|^2} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathbf{u}_j(\mathbf{u}_j^t \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}_j\|^2} = \\ &= \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^t}{\|\mathbf{u}_j\|^2} \right) \mathbf{u}\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_j \rangle = \mathbf{u}_j^t \mathbf{u}$. Obsérvese que la última expresión es un producto de matriz (entre paréntesis) por el vector $\mathbf{u}$. Por tanto, hemos demostrado que existe una matriz, que denotaremos $\mathbf{P}_M$, con

$$\mathbf{P}_M = \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^t}{\|\mathbf{u}_j\|^2} \tag{4.2}$$

tal que $\mathbf{v} = \mathbf{P}_M \mathbf{u}$. Esta matriz que proporciona el vector proyectado sobre M recibe el nombre de matriz de proyección ortogonal sobre M. Ahora que hemos demostrado su existencia, podemos definirla así:

Definición 53 (matriz de proyección ortogonal sobre un subespacio) *Sea M un subespacio de $\mathbb{R}^n$; se dice que $\mathbf{P}_M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es **matriz de proyección ortogonal sobre** M si, para cada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{P}_M \mathbf{u}$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre M.*

Una forma general de calcularla es mediante la expresión (4.2). En particular, la matriz de proyección ortogonal sobre la recta generada por un vector no nulo $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{P}_{L[\mathbf{v}]} = \frac{1}{\mathbf{v}^t \mathbf{v}} \mathbf{v}\mathbf{v}^t \tag{4.3}$$

En general, la ecuación (4.2) indica que la proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio se obtiene sumando las proyecciones ortogonales de dicho vector sobre las rectas vectoriales generadas por los vectores de una base ortogonal de dicho subespacio.

A continuación, damos otras expresiones de la matriz de proyección ortogonal:

Proposición 23

- *Si $\mathbf{Q}$ es una matriz cuyas columnas forman **base ortonormal** del subespacio M, entonces la matriz de proyección ortogonal sobre M es*

$$\mathbf{P}_M = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^t \tag{4.4}$$

- *Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuyas columnas forman **base** del subespacio M, entonces la matriz de proyección ortogonal sobre M es*

$$\mathbf{P}_M = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^t \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^t. \tag{4.5}$$

Demostración: El primer apartado se deduce de la expresión (4.2), sin más que tomar

$$\mathbf{q}_j := \frac{\mathbf{u}_j}{\|\mathbf{u}_j\|}$$

con lo que los vectores $\mathbf{q}_j$ son ortogonales y unitarios:

$$\mathbf{P}_M = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{q}_j \mathbf{q}_j^t = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1^t \\ \mathbf{q}_2^t \\ \vdots \\ \mathbf{q}_m^t \end{pmatrix} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^t.$$

Para el segundo apartado: dado que las columnas de $\mathbf{A}$ forman base de M, recordemos que una forma de obtener una base ortonormal de M es la factorización QR de $\mathbf{A}$. En efecto, si $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ (con $\mathbf{Q}$ de columnas ortonormales y $\mathbf{R}$ triangular superior invertible) entonces las columnas de $\mathbf{Q}$ son base ortonormal de M, y por tanto, podemos aplicar la expresión (4.4) tomando $\mathbf{Q} = \mathbf{AR}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_M &= \mathbf{QQ}^t = \left(\mathbf{AR}^{-1}\right)\left(\mathbf{AR}^{-1}\right)^t = \mathbf{AR}^{-1}\left(\mathbf{R}^{-1}\right)^t \mathbf{A}^t \\ &= \mathbf{A}\left(\mathbf{R}^t\mathbf{R}\right)^{-1}\mathbf{A}^t = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^t\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^t. \end{aligned}$$

En el último paso se ha utilizado que

$$\mathbf{A}^t\mathbf{A} = (\mathbf{QR})^t(\mathbf{QR}) = \mathbf{R}^t\mathbf{Q}^t\mathbf{QR} = \mathbf{R}^t\mathbf{R}$$

ya que $\mathbf{Q}^t\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ al tener $\mathbf{Q}$ columnas ortonormales. Esto concluye la demostración. □

4.1.1. Propiedades de las matrices de proyección ortogonal

Se cumplen las siguientes propiedades:

- $\mathbf{P}_M$ es simétrica ($\mathbf{P}_M^t = \mathbf{P}_M$) e idempotente ($\mathbf{P}_M^2 = \mathbf{P}_M$), como se deduce de la anterior expresión (4.2) de $\mathbf{P}_M$.
- $\operatorname{Im}\mathbf{P}_M = M$ y $\ker\mathbf{P}_M = M^\perp$, por lo que $\operatorname{Im}\mathbf{P}_M$ y $\ker\mathbf{P}_M$ son subespacios suplementarios ortogonales.
- Si $\mathbf{P}_M$ es matriz de proyección ortogonal sobre M, $\mathbf{P}_{M^\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_M$ lo es sobre $M^\perp$.

Proposición 24 *Si una matriz $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica e idempotente, entonces es matriz de proyección ortogonal sobre su imagen.*

Demostración: En efecto, para cada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\mathbf{u} = \mathbf{Pu} + \mathbf{u} - \mathbf{Pu}$. Se cumplen $\mathbf{Pu} \in \operatorname{Im}\mathbf{P}$ y, por las propiedades de $\mathbf{P}$, $\mathbf{u} - \mathbf{Pu} \in \ker\mathbf{P} = (\operatorname{Im}\mathbf{P})^\perp$. Por tanto, $\mathbf{Pu}$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\operatorname{Im}\mathbf{P}$. □

Nótese que $\operatorname{Im}\mathbf{P} = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{P})$.

Todo lo anterior es similar en el caso de $\mathbb{C}^n$ sustituyendo la trasposición por trasposición y conjugación, resultando la matriz de proyección ortogonal sobre un subespacio hermítica e idempotente.

4.2. Los problemas de mínimos cuadrados y de mínima norma

4.2.1. Introducción

Muchos de los problemas que surgen en Ingeniería se formulan como un sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ del que se busca la solución $\mathbf{x}$. En el caso de que dicha solución exista y sea única, hemos visto varios métodos para calcularla. Pero *¿y si el sistema no tiene solución, o bien la solución no es única?* De hecho, ambos casos se dan frecuentemente en Ingeniería:

- Por un lado, en numerosa ocasiones el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ resulta **incompatible**: o bien porque se trata de un problema con demasiadas restricciones y no tiene solución, o bien porque el sistema pasa a ser incompatible debido a errores de medida o de redondeo de datos. En este caso, es natural buscar aquellos valores de $\mathbf{x}$ que minimicen $\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|$. A estos valores se les denomina **soluciones de mínimos cuadrados (o pseudosoluciones)** del sistema.

- Por otro lado, en problemas con pocas restricciones se obtienen sistemas **compatibles indeterminados**: poseen infinitas soluciones entre las cuales hay que escoger una. A veces es útil elegir aquella solución $\mathbf{x}$ cuya norma $\|\mathbf{x}\|$ sea mínima (por ejemplo, en los casos donde se busca la solución de mínima energía). A dichas soluciones se les denomina **soluciones de mínima norma del sistema**.

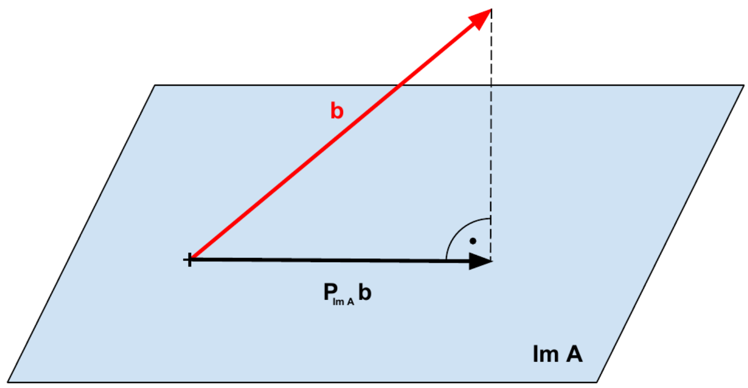
4.2.2. Soluciones de mínimos cuadrados de un sistema

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. En caso de que el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sea compatible, sus soluciones coinciden con aquellos valores de $\mathbf{x}$ para los cuales $\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\| = 0$. En caso de que el sistema sea incompatible, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\| > 0$, luego tiene sentido buscar los vectores $\mathbf{x}$ que minimizan $\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|$. Empleando la fórmula (3.15), se tiene

$$\text{mín}\,\{\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \text{mín}\,\{d(\mathbf{b}, \mathbf{v}), \mathbf{v} \in \operatorname{Im}\mathbf{A}\} = \|\mathbf{b} - \mathbf{P}_{\operatorname{Im}\mathbf{A}}\mathbf{b}\|.$$

Se concluye que $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ hace mínima la norma $\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|$ si y solo si es solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{P}_{\operatorname{Im}\mathbf{A}}\mathbf{b}$ (sistema siempre compatible). Esto nos lleva a adoptar la siguiente definición.

Definición 54 (solución de mínimos cuadrados) *Se denomina* ***solución de mínimos cuadrados*** *o* ***pseudosolución*** *del sistema lineal* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *a cualquier solución del sistema* $\mathbf{Ax} = \mathbf{P}_{\operatorname{Im}\mathbf{A}}\mathbf{b}$.



Observación: Si el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es compatible, entonces sus soluciones coinciden con sus soluciones de mínimos cuadrados.

Definición 55 (vector residuo) *Se define el vector **residuo** del sistema* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *como* $\mathbf{r} := \mathbf{b} - \mathbf{P}_{\mathrm{Im}\,\mathbf{A}}\mathbf{b}$.

No es necesario calcular explícitamente $\mathbf{P}_{\mathrm{Im}\,\mathbf{A}}\mathbf{b}$ para hallar las pseudosoluciones, ya que las siguientes ecuaciones proporcionan otro método de cálculo.

Definición 56 (ecuaciones normales) *Dado un sistema* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, *se denominan **ecuaciones normales** asociadas a él a las siguientes:*

$$\mathbf{A}^t\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^t\mathbf{b}. \tag{4.6}$$

Observación: El sistema de ecuaciones normales $\mathbf{A}^t\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^t\mathbf{b}$ es siempre compatible, ya que $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}^t = \mathrm{Im}(\mathbf{A}^t\mathbf{A})$.

Proposición 25 $\mathbf{x}_0$ *es solución de mínimos cuadrados del sistema* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *si y solo si* $\mathbf{x}_0$ *es solución de las ecuaciones normales de dicho sistema.*

Demostración:

$$\mathbf{A}^t\mathbf{Ax}_0 = \mathbf{A}^t\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{A}^t(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v} := \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0 \in \ker \mathbf{A}^t = (\mathrm{Im}\,\mathbf{A})^\perp \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{v} + \mathbf{Ax}_0 \in (\mathrm{Im}\,\mathbf{A})^\perp \oplus \mathrm{Im}\,\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{Ax}_0 = \mathbf{P}_{\mathrm{Im}\,\mathbf{A}}\mathbf{b}.$$

$\square$

La solución $\mathbf{x}_0$ de mínimos cuadrados es única si y solo si $\dim \ker \mathbf{A} = 0$ si y solo si $r(\mathbf{A}) = n$. Además, en este caso $r(\mathbf{A}^t\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}) = n$, luego $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$ es regular y la solución de mínimos cuadrados es $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{A}^t\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^t\mathbf{b}$.

Otra forma de llegar al mismo resultado es la siguiente: puesto que $r(\mathbf{A}) = n$, la matriz de proyección ortogonal sobre $\operatorname{Im}\mathbf{A}$ es $\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^t\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^t$ y

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}_{\operatorname{Im}\mathbf{A}}\mathbf{b} = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^t\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^t\mathbf{b}.$$

Dado que $r(\mathbf{A}) = n$, la ecuación anterior se verifica si y solo si $\mathbf{x}_0 = \left(\mathbf{A}^t\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^t\mathbf{b}$.

Ejemplo: Cálculo de un área por mínimos cuadrados

En este ejemplo vamos a calcular de forma aproximada el área de la superficie delimitada por la gráfica de una función no negativa que se aproximará por un polinomio, el cual a su vez se ajustará por mínimos cuadrados.

Se precisa conocer el área de una determinada zona natural de difícil acceso. De la imagen por satélite de googlemaps

se han tomado algunos valores de la frontera que se reflejan en la siguiente tabla:

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	3	1	1	2

y permiten aproximar la zona mediante una función no negativa $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ de forma que el área de la zona coincide con el área limitada por la gráfica de f, las rectas de ecuaciones $x = 2$ y $x = -2$ y el eje horizontal. Además, el perfil del área en su límite con el río (véase la figura) se parece a una parábola. Por ello el área buscada se aproxima mediante la fórmula

$$S = \int_{-2}^{2} p(x)dx$$

donde p es un polinomio de grado menor o igual que 2 que aproxima a la función f. De existir, se dice que p *interpola* la función en los puntos que coincide con ella.

- En primer lugar buscamos un polinomio $q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ de forma que $q(x) = f(x)$ en los valores de la tabla, es decir:

$$\begin{aligned} 4\alpha - 2\beta + \gamma &= 3 \\ \alpha - \beta + \gamma &= 1 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 1 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma &= 2 \end{aligned}$$

que matricialmente podemos escribir así:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Si este sistema fuese compatible ya tendríamos una aproximación polinómica de la función f, ahora bien, aunque la matriz $\mathbf{A}$ es de rango máximo (es una submatriz de una Vandermonde) es muy posible que el sistema sea incompatible, ya que un polinomio de segundo grado queda caracterizado con 3 datos independientes; al tener cuatro es más probable que la información lejos de ser redundante sea contradictoria.

- Se comprueba (hágalo el lector) que el sistema es incompatible, por lo tanto el polinomio q que toma *exactamente* los valores de la tabla no existe. Podríamos reformular el problema haciéndolo compatible escogiendo solo 3 puntos de interpolación en lugar de 4, pero esta aproximación tiene el inconveniente de que al interpolar en menos puntos el polinomio obtenido *se parece* menos a la función f. Otro planteamiento consistiría en tomar un polinomio de grado 3, pero esto presenta algún inconveniente, en particular que no podemos asegurar que dicho polinomio sea no negativo y por tanto su integral no representaría un área.

- Llegados a este punto optamos por resolver el sistema por mínimos cuadrados, en este caso lo haremos resolviendo las ecuaciones normales $\mathbf{A}^t\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}^t\mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix} 34 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

La solución única de este sistema es $(1/2, -1/5, 1/2)$.

- Tomamos como polinomio de aproximación a f el polinomio $p(x) = x^2/2 - x/5 + 1/2$. Es fácil comprobar que este polinomio es no negativo, o bien comprobando que no tiene raíces reales o bien expresándolo como suma de términos no negativos:

$$p(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{12}{25}$$

Para calcular el área aproximada S que íbamos buscando, observamos que al ser el intervalo simétrico respecto del origen, el sumando impar $-x/5$ tiene integral nula, por lo tanto:

$$S = \int_{-2}^{2} p(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x^2+1)\,dx = \int_{0}^{2}(x^2+1)\,dx = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}.$$

4.2.3. Solución de mínima norma de un sistema compatible indeterminado

Sean $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ un sistema compatible indeterminado. Se trata de encontrar, de entre todas sus soluciones, aquella cuya norma sea mínima.

Sea $\mathbf{x}_p$ una solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. El conjunto formado por las soluciones del sistema anterior es $\{\mathbf{x}_p + \mathbf{u} : \mathbf{u} \in \ker \mathbf{A}\}$. Veamos cuál tiene la mínima norma. Puesto que

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} \mathbf{A}^t \oplus \ker \mathbf{A},$$

$\mathbf{x}_p$ se puede descomponer de forma única como $\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$, donde $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{Im} \mathbf{A}^t$ e $\mathbf{y} \in \ker \mathbf{A}$. Obviamente, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}_{\operatorname{Im} \mathbf{A}^t}\mathbf{x}_p$ e $\mathbf{y} = \mathbf{P}_{\ker \mathbf{A}}\mathbf{x}_p$.

Teniendo en cuenta que $\operatorname{Im} \mathbf{A}^t$ y $\ker \mathbf{A}$ son suplementarios ortogonales y utilizando el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$\|\mathbf{x}_p + \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{x}_0 + \mathbf{y} + \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{x}_0\|^2 + \|\mathbf{y} + \mathbf{u}\|^2 \geq \|\mathbf{x}_0\|^2,$$

luego la mínima norma se alcanza en $\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}_{\operatorname{Im} \mathbf{A}^t}\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_p - \mathbf{y} = \mathbf{x}_p - \mathbf{P}_{\ker \mathbf{A}}\mathbf{x}_p$. Observamos además que la solución de mínima norma es única.

Dicha solución $\mathbf{x}_0$ es, por supuesto, independiente del vector $\mathbf{x}_p$ escogido inicialmente; efectivamente, si $\tilde{\mathbf{x}}_p$ es otra solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, entonces $\mathbf{x}_p - \tilde{\mathbf{x}}_p \in \ker \mathbf{A}$ y $\mathbf{P}_{\operatorname{Im} \mathbf{A}^t}\tilde{\mathbf{x}}_p = \mathbf{P}_{\operatorname{Im} \mathbf{A}^t}\mathbf{x}_p$.

Las figuras situadas a continuación ilustran el análisis anterior.

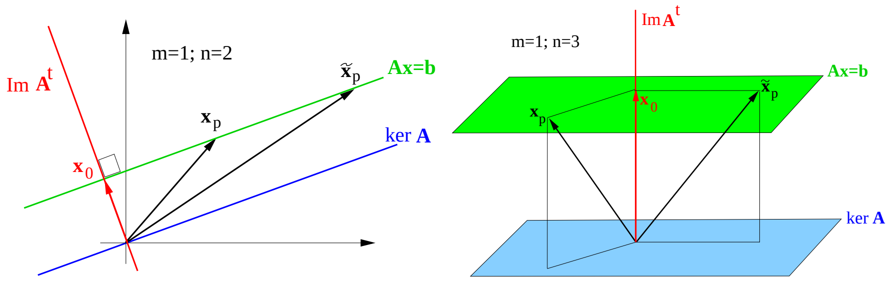


Figura 4.2: Solución de mínima norma de un sistema compatible indeterminado.

Cálculo de la solución de mínima norma de un sistema compatible indeterminado

Un primer paso **opcional** es estudiar si el sistema incluye ecuaciones que sean combinación lineal de las restantes y, en su caso, eliminarlas. Independientemente de que se efectúe o no este paso previo de simplificación, la solución de mínima norma puede obtenerse por cualquiera de los siguientes métodos:

1. Proyectando ortogonalmente **cualquiera** de las soluciones del sistema sobre $\operatorname{Im}\mathbf{A}^t$.

2. Determinando aquella solución que pertenezca a $\operatorname{Im}\mathbf{A}^t$.

3. Eligiendo, de entre todas las soluciones del sistema, aquella que sea ortogonal al $\ker\mathbf{A}$.

De los tres procedimientos, el más rápido suele ser el segundo, que se detalla a continuación: buscamos un vector $\mathbf{x}_0$ que satisfaga

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} \tag{4.7}$$

y tal que $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{Im}\mathbf{A}^t$; es decir, será una solución de la forma $\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^t\mathbf{w}$ para un cierto $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$. Sustituyendo esta expresión en (4.7), resulta el sistema compatible $m \times m$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^t\mathbf{w} = \mathbf{b}, \tag{4.8}$$

del que hallaremos una solución $\mathbf{w}_0$ que, finalmente, nos permitirá obtener la solución de mínima norma como $\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^t\mathbf{w}_0$.

- Si las filas de $\mathbf{A}$ son linealmente dependientes, el sistema (4.8) es indeterminado $\left(r\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^t\right) = r(\mathbf{A}) < m\right)$. En ese caso solamente será necesario el cálculo de <u>una</u> cualquiera de sus soluciones. Efectivamente, si $\mathbf{w}_0$ y $\mathbf{w}_1$ son dos soluciones de (4.8), entonces $\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_0 \in \ker\mathbf{A}\mathbf{A}^t = \ker\mathbf{A}^t$, luego $\mathbf{A}^t\mathbf{w}_1 = \mathbf{A}^t\mathbf{w}_0$.

- Si las filas de $\mathbf{A}$ son linealmente independientes, el sistema (4.8) es determinado $\left(r\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^t\right) = r(\mathbf{A}) = m\right)$ y la solución de mínima norma puede hallarse como $\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^t(\mathbf{A}\mathbf{A}^t)^{-1}\mathbf{b}$. Efectivamente, en este caso la matriz $\mathbf{A}\mathbf{A}^t$ es regular, la solución única del sistema (4.8) es $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^t\right)^{-1}\mathbf{b}$ y la solución de mínima norma buscada es $\mathbf{A}^t(\mathbf{A}\mathbf{A}^t)^{-1}\mathbf{b}$.
  Otro modo de llegar al mismo resultado es el siguiente: puesto que $r\left(\mathbf{A}^t\right) = r\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^t\right) = m$, la matriz de proyección ortogonal sobre $\operatorname{Im}\mathbf{A}^t$ es $\mathbf{A}^t\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^t\right)^{-1}\mathbf{A}$, luego la solución de mínima norma es

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}_{\operatorname{Im}\mathbf{A}^t}\mathbf{x}_p = \mathbf{A}^t\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^t\right)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}_p = \mathbf{A}^t\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^t\right)^{-1}\mathbf{b}.$$

4.2.4. Solución de mínimos cuadrados y mínima norma de un sistema

Se considera un sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Ahora se pretende determinar la solución de mínimos cuadrados del sistema **cuya norma es mínima**. Para ello, basta emplear los resultados de los apartados anteriores. Como se ha expuesto, las soluciones de mínimos cuadrados del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ coinciden con las soluciones de sus ecuaciones normales $\mathbf{A}^t\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^t\mathbf{b}$. De ellas, la que tiene norma mínima es la perteneciente a $(\ker \mathbf{A}^t\mathbf{A})^\perp = (\ker \mathbf{A})^\perp = \operatorname{Im} \mathbf{A}^t$.

Todo lo visto en este apartado es similar en el caso de $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, sustituyendo la trasposición por trasposición y conjugación.

Ejemplo: Calcúlese la solución de mínimos cuadrados y mínima norma del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Solución:</u> Para calcular las soluciones de mínimos cuadrados determinamos las soluciones del sistema de ecuaciones normales

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sistema que resulta compatible indeterminado, con soluciones

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{4} + \lambda,\ x_3 = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

De entre todas estas soluciones de mínimos cuadrados, la de mínima norma $\mathbf{x}_0$ es aquella que es ortogonal al núcleo de la matriz de coeficientes del sistema. Dicho núcleo, de acuerdo con las soluciones encontradas, está engendrado por el vector $\mathbf{u} = (0, 1, 1)^t$. Por tanto, hay que determinar λ para que la solución de mínima norma $\mathbf{x}_0 = (1,\ 1/4 + \lambda,\ \lambda)^t$ sea ortogonal al vector $\mathbf{u}$; es decir,

$$\mathbf{u}^t\,\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} + \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{4} + \lambda + \lambda = 2\lambda + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{8}$$

Se concluye que la solución de mínimos cuadrado y mínima norma igual a

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

4.3. Matriz de simetría ortogonal

Definición 57 (matriz de simetría ortogonal respecto a un subespacio) *Sea M un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{P}_M$ la matriz de la proyección ortogonal sobre M. Entonces*

$$\mathbf{S}_M := 2\mathbf{P}_M - \mathbf{I} \tag{4.9}$$

es la matriz de simetría ortogonal respecto de M.

4.3.1. Propiedades de las matrices de simetría ortogonal

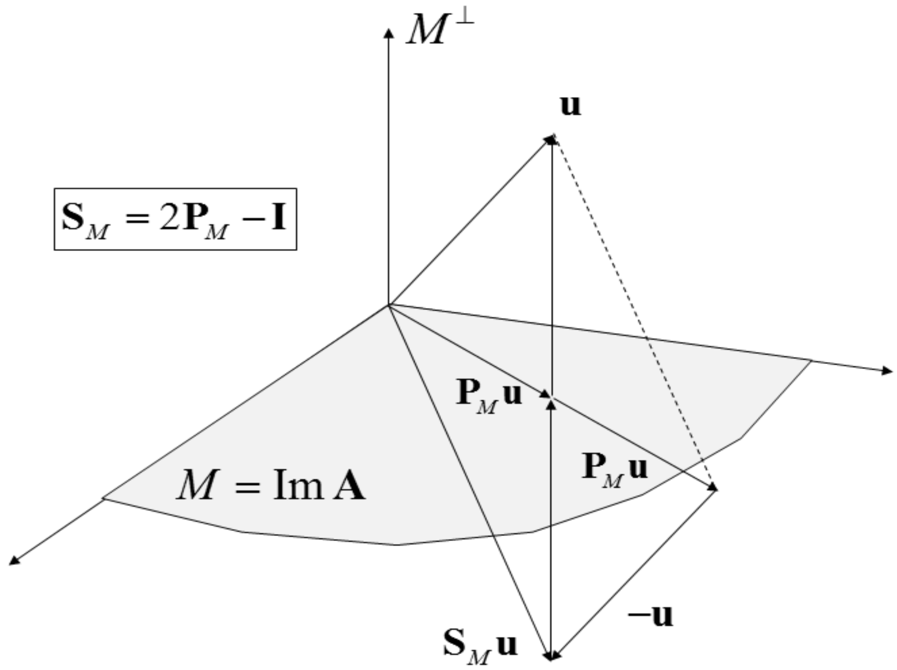


Figura 4.3: Matriz de simetría ortogonal

Se cumplen las siguientes propiedades:

- $\mathbf{S}_M$ es simétrica ($\mathbf{S}_M = \mathbf{S}_M^t$) y ortogonal ($\mathbf{S}_M\mathbf{S}_M^t = \mathbf{I}$). Es decir, $\mathbf{S}_M^{-1} = \mathbf{S}_M = \mathbf{S}_M^t$.
- $\mathbf{S}_M = \mathbf{P}_M - \mathbf{P}_{M^{\perp}}$

- Si $\mathbf{S}_M$ es matriz de simetría ortogonal respecto a M, entonces $-\mathbf{S}_M$ lo es respecto a $M^\perp$.
- $M = \ker(\mathbf{S}_M - \mathbf{I}) = \operatorname{Im}(\mathbf{S}_M + \mathbf{I})$
- $M^\perp = \ker(\mathbf{S}_M + \mathbf{I}) = \operatorname{Im}(\mathbf{S}_M - \mathbf{I})$
- En particular, si $M = L[\mathbf{v}]$ es la recta engendrada por un vector no nulo $\mathbf{v}$, la matriz de simetría ortogonal es:

$$\mathbf{S}_{L[\mathbf{v}]} = \frac{2}{\mathbf{v}^t\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^t - \mathbf{I} \tag{4.10}$$

- Otro caso particular es la matriz de simetría respecto a un hiperplano H de $\mathbb{R}^n$ (es decir, un subespacio de dimensión $n-1$), de ecuación $\mathbf{v}^t\mathbf{x} = 0$. La matriz de simetría ortogonal respecto a dicho hiperplano es, por la fórmula (4.10), $\mathbf{S}_H = -\mathbf{S}_{L[\mathbf{v}]}$. Dicha matriz de simetría se llama **matriz de Householder**, y está definida por el vector $\mathbf{v}$, no nulo, ortogonal a H. Su expresión es

$$\mathbf{H}_\mathbf{v} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{v}^t\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^t. \tag{4.11}$$

Proposición 26 *Si una matriz* $\mathbf{S}$ *es simétrica y ortogonal, entonces es matriz de simetría ortogonal respecto a* $\operatorname{Im}(\mathbf{S} + \mathbf{I})$.

Demostración: Para que $\mathbf{S}$ sea la matriz de una simetría ortogonal (véase la relación (4.9)) es necesario y suficiente que

$$\mathbf{P} := \frac{1}{2}(\mathbf{S} + \mathbf{I})$$

sea una proyección ortogonal; equivalentemente, por la proposición 24, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^t$. De la simetría de $\mathbf{S}$ se deduce inmediatamente la simetría de $\mathbf{P}$, en cuanto a la idempotencia:

$$\mathbf{P}^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{S} + \mathbf{I})^2 = \frac{1}{4}\left(\mathbf{S}^2 + 2\mathbf{S} + \mathbf{I}\right) = \frac{1}{2}(\mathbf{S} + \mathbf{I}) = \mathbf{P}.$$

Por último, $\mathbf{P}$ es matriz de proyección sobre su imagen, pero $\operatorname{Im}\mathbf{P} = \operatorname{Im}(\mathbf{S} + \mathbf{I})$. □

Todo lo visto en este apartado es similar en el caso de $\mathbb{C}^n$, sustituyendo la trasposición por trasposición y conjugación, resultando las matrices de simetría ortogonal hermíticas y unitarias.

4.4. El producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

Definición 58 (producto vectorial de dos vectores en $\mathbb{R}^3$) *Dados dos vectores* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *y* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$*, su producto vectorial* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *es*

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Esta expresión quizá no sea fácil de recordar de memoria, por lo que suele calcularse desarrollando por la primera fila (formada por los vectores canónicos) el determinante *simbólico*

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_3$$

4.4.1. Propiedades del producto vectorial

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^3$.

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son proporcionales
2. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$
3. $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Longleftrightarrow \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$
4. Producto mixto: $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{w}^t (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \det(\mathbf{u}|\mathbf{v}|\mathbf{w})$

4.4.2. El producto vectorial en forma matricial

Sea $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Se cumple que, para cada vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v} \tag{4.12}$$

La matriz anterior se denotará $\tilde{\mathbf{u}}$.

Observación: $\ker \tilde{\mathbf{u}} = L[\mathbf{u}]$.

4.5. Giros en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Definición 59 (Matriz de giro) $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(n = 2, 3)$ *es un una matriz de* ***giro*** *si es ortogonal y su determinante es igual a la unidad.*

4.5.1. Matriz de giro en $\mathbb{R}^2$

Sea $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, ortogonal y de determinante igual a 1. Conforme al ejercicio 3.46, dicha matriz será de la forma $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, donde $\varphi \in [0, 2\pi)$. Se tendrá, por tanto, que $\mathbf{G}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}$ y $\mathbf{G}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$. Estos resultados tienen la siguiente interpretación geométrica: se trata de un giro, en sentido contrario a las agujas del reloj, alrededor del origen de $\mathbb{R}^2$ de ángulo de giro igual a φ, tal como se indica en la figura 4.4.

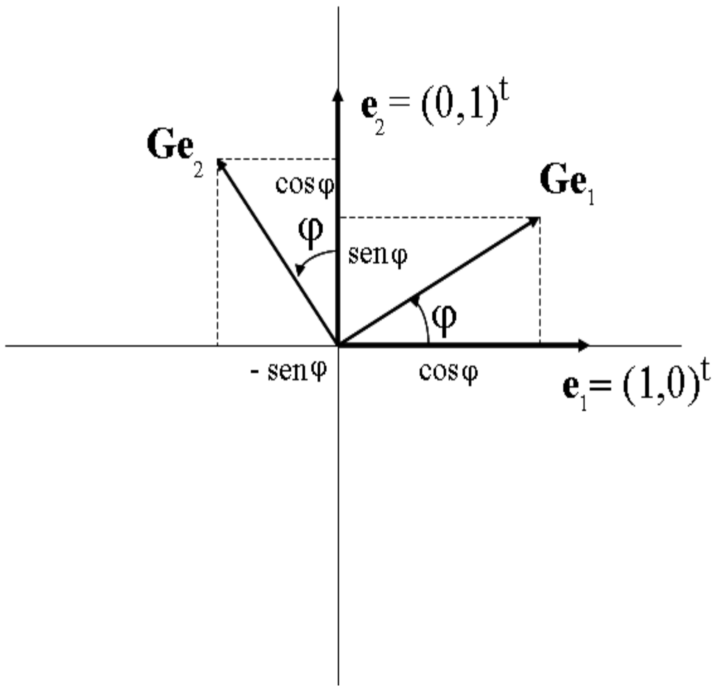


Figura 4.4: Giro en el plano

4.5.2. Matriz de giro en $\mathbb{R}^3$

Se comenzará utilizando el concepto geométrico de un giro de ángulo φ, alrededor de un eje orientado en uno de sus dos sentidos. En el caso de un vector, basta proyectar ortogonalmente dicho vector sobre el plano ortogonal al eje, efectuar el giro de ángulo φ de dicha proyección, en dicho plano, según la regla de avance del sacacorchos en el sentido del eje, y sumarle la proyección ortogonal del vector sobre el eje (véase la figura 4.5).

4.5.3. Cálculo de la matriz de giro en función de la proyección sobre el eje de giro (*no exigible*)

Si se considera $\mathbf{P} = \mathbf{u}\mathbf{u}^t$, matriz de proyección ortogonal sobre la recta $L[\mathbf{u}]$, donde $\mathbf{u}$ es unitario, todo vector $\mathbf{r}$ puede descomponerse como $\mathbf{r} = \mathbf{Pr} + (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{r}$, en donde la primera componente permanece invariante mediante el giro de ángulo φ y eje de giro $L[\mathbf{u}]$ y la segunda, perteneciente al plano ortogonal al eje de giro, al girar se transforma en $\cos\varphi(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{r} + \operatorname{sen}\varphi\ \mathbf{u} \times (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{r}$.

Así, pues, la matriz del giro puede escribirse en la forma

$$\mathbf{G} = \mathbf{P} + \cos\varphi\ (\mathbf{I} - \mathbf{P}) + \operatorname{sen}\varphi\ \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{I} - \mathbf{P})$$

y, dado que $\tilde{\mathbf{u}}\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{u}}\mathbf{u}\mathbf{u}^t = \mathbf{O}$, ya que $\mathbf{u} \in \ker \tilde{\mathbf{u}}$, se tiene, finalmente

$$\mathbf{G} = \mathbf{P} + \cos\varphi\ (\mathbf{I} - \mathbf{P}) + \operatorname{sen}\varphi\tilde{\mathbf{u}} \tag{4.13}$$

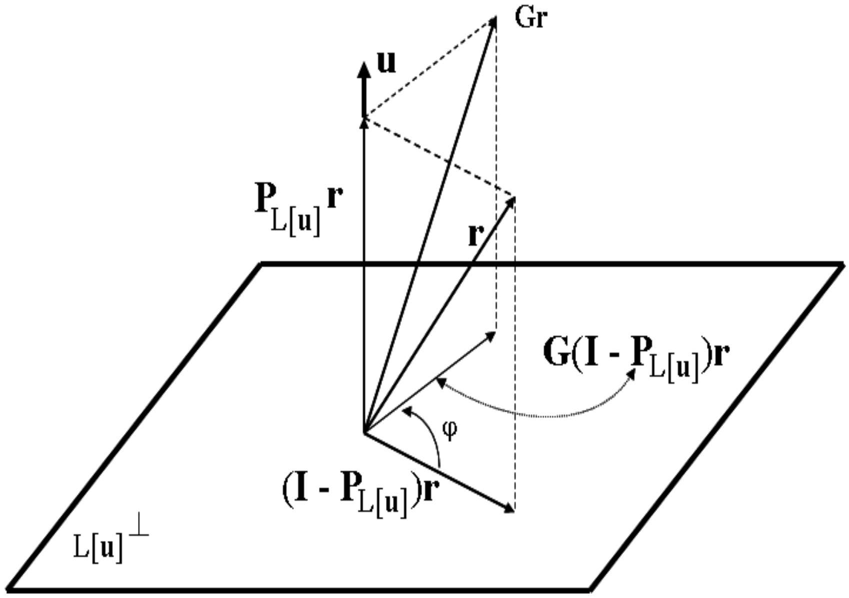


Figura 4.5: Giro en el espacio en función de la proyección sobre el eje de giro

Para demostrar que $\mathbf{G}$ es ortogonal de determinante igual a 1, considérese una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, donde $\mathbf{u}$ es el vector unitario anterior, y $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son dos vectores unitarios ortogonales pertenecientes al plano ortogonal a $L[\mathbf{u}]$, tales que $\det(\mathbf{u}|\mathbf{v}|\mathbf{w}) = 1$, lo cual equivale a que $\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \mathbf{u}$.

Según la expresión (4.13) de $\mathbf{G}$ se verifica $\begin{cases} \mathbf{Gu} = \mathbf{u} \\ \mathbf{Gv} = \cos\varphi\mathbf{v} + \operatorname{sen}\varphi\mathbf{w} \\ \mathbf{Gw} = -\operatorname{sen}\varphi\mathbf{v} + \cos\varphi\mathbf{w} \end{cases}$, de modo que

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix}^t$$

de donde se deduce que $\mathbf{G}$ es ortogonal, al serlo las matrices factores, y $\det\mathbf{G} = 1$.

El ejercicio 6.8 demuestra el recíproco; es decir, que toda matriz ortogonal de orden 3 y determinante igual a 1, es un giro alrededor de un eje de ángulo de giro igual a $\varphi \in [0, 2\pi)$.

4.6. Ejercicios

4.1.– Hállese la matriz de proyección ortogonal sobre la recta $x = y = 2z$. Calcúlese asimismo la matriz de simetría ortogonal respecto a esa misma recta.

4.2.– Escríbanse la matriz de proyección ortogonal sobre el plano $2x + 2y + z = 0$, y la matriz de simetría ortogonal respecto a dicho plano.

4.3.– Hállese la matriz de proyección ortogonal sobre el subespacio de $\mathbb{R}^4$ determinado por las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 \qquad\qquad & = & 0, \\ x_3 + x_4 & = & 0. \end{array} \right.$$

4.4.– Sea $\mathbf{P} = a \begin{pmatrix} b & c & -2 \\ -4 & 5 & d \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ una matriz no nula.

1. Calcúlense los valores reales a, b, c y d para que $\mathbf{P}$ sea la matriz de una proyección ortogonal en $\mathbb{R}^3$.

2. Siendo $\mathbf{P}$ la matriz obtenida a partir de los resultados del apartado 1, determínese una base ortonormal del subespacio M de $\mathbb{R}^3$ sobre el que proyecta $\mathbf{P}$.

3. Siendo $\mathbf{P}$ la matriz obtenida a partir de los resultados del apartado 1, determínese la matriz de proyección ortogonal sobre $M^\perp$.

4.5.– Determínense las matrices de Householder tales que

1. $\mathbf{H_v}(2, 2, -1)^t = (3, 0, 0)^t$

2. $\mathbf{H_w}(2, 2, -1)^t = (-3, 0, 0)^t$.

Estúdiese la relación que existe entre los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

4.6.– Calcúlese la solución de mínimos cuadrados del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.7.– Determínese la solución de mínimos cuadrados del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4.8.– Dados los puntos del plano de coordenadas (x_k, y_k) con $k = 1, 2, \ldots, n$, la recta de regresión de y sobre x es la recta de ecuación $y = mx + p$, cuyas pendiente m y ordenada en el origen p minimizan la expresión $\sum_{k=1}^{n}(y_k - mx_k - p)^2$. Dedúzcase la expresión explícita de los coeficientes m y p. Hállese la recta de regresión de los puntos $(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 1), (10, 2)$.

4.9.– Determínese la solución de mínima norma del sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{array} \right. .$$

4.10.–

1. Calcúlese la proyección ortogonal del vector $(1, 1, 1)$ sobre el subespacio

$$F = L\,[(1, 1, 0), (1, 2, 1), (0, 1, 1)]$$

2. Calcúlese la solución de mínimos cuadrados y mínima norma del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.11.– Sea $\mathbf{S} = a \begin{pmatrix} 1 & b & -8 \\ c & 7 & -4 \\ d & -4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

1. Calcúlense los valores reales a, b, c y d para que $\mathbf{S}$ sea la matriz de una simetría ortogonal en $\mathbb{R}^3$.

2. Siendo $\mathbf{S}$ la matriz obtenida a partir de los resultados del apartado 1 con $a > 0$, determínese una base ortonormal del subespacio L de $\mathbb{R}^3$ respecto al que $\mathbf{S}$ simetriza.

3. Siendo $\mathbf{S}$ la matriz obtenida a partir de los resultados del apartado 1 con $a < 0$, determínense unas ecuaciones cartesianas del subespacio M de $\mathbb{R}^3$ respecto al que $\mathbf{S}$ simetriza.

4. Estúdiese si M es el suplemento ortogonal de L en $\mathbb{R}^3$.

5. Estúdiese en cuál de los dos casos anteriores (2. o 3.) es $\mathbf{S}$ una matriz de Householder y determínese un vector $\mathbf{v}$ que la defina.

4.12.– Calcúlese la matriz de giro de ángulo $\frac{2\pi}{3}$ en torno al vector $(1, 1, 1)$.

4.6.1. Cuestiones

4.13.– Márquese la única proposición falsa.
Si $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es matriz de proyección ortogonal, entonces

1. $\mathbb{R}^n = \ker \mathbf{P} \oplus \operatorname{Im} \mathbf{P}$
2. $\mathbf{P}^t = \mathbf{P}^2$
3. $(\ker \mathbf{P})^{\perp} = \operatorname{Im}(\mathbf{I} - \mathbf{P})$
4. $\forall \mathbf{u} \in \operatorname{Im}(\mathbf{I} - \mathbf{P})$, $\mathbf{Pu} = \mathbf{0}$

4.14.– Indíquense las afirmaciones que son verdaderas y las que son falsas.
Si M es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, entonces

1. $\mathbf{S}_M = \mathbf{I} - 2\mathbf{P}_M$
2. $\mathbf{P}_M + \mathbf{P}_{M^\perp} = \mathbf{I}$
3. $\mathbf{S}_{M^\perp}\mathbf{P}_M = -\mathbf{P}_M$
4. $\mathbf{P}_{M^\perp}\mathbf{P}_M = \mathbf{O}$
5. $\mathbf{S}_{M^\perp}\mathbf{S}_M = -\mathbf{I}$

4.15.– Demuéstrese la siguiente proposición si es verdadera o dese un contraejemplo si es falsa: "Si $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es matriz de proyección ortogonal y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, entonces $\mathbf{Pb}$ es la solución de mínimos cuadrados y mínima norma del sistema $\mathbf{Px} = \mathbf{b}$".

Capítulo 5

Reducción por semejanza de una matriz

5.1 Introducción.

5.2 Matrices semejantes y matrices diagonalizables.

5.3 Valores y vectores propios. Polinomio característico.

5.4 Diagonalización. Teorema de Cayley-Hamilton. Aplicación.

5.5 Ejercicios. Cuestiones.

5.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos condiciones necesarias y suficientes para que una matriz sea semejante a una matriz diagonal (o dicho de otra forma, que pueda representarse por una matriz diagonal), lo que equivale a encontrar una base de vectores que se transforman en proporcionales a sí mismos. Un vector no nulo $\mathbf{x}$ es vector propio de $\mathbf{A}$ si se transforma en su propia dirección, es decir si se cumple que $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. El escalar λ es el valor propio asociado a $\mathbf{x}$.

En gran número de aplicaciones los valores y vectores propios tienen un claro significado geométrico. Consideremos por ejemplo la **matriz de simetría** respecto a un plano en $\mathbb{R}^3$. Todos los vectores de ese plano coinciden con sus transformados, luego son vectores propios asociados con el valor propio 1 ($\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$). Sin embargo, un vector perpendicular al plano de simetría mantiene su dirección y cambia de sentido ($\mathbf{Ax} = -\mathbf{x}$), luego es un vector propio asociado con el valor propio -1.

Consideremos ahora la **matriz de giro** que represente por ejemplo la apertura de una puerta en $\mathbb{R}^3$. ¿Hay algún vector asociado a la puerta que no cambie de dirección al girar la puerta 60º? Sí, los del eje de la puerta, que serán vectores propios asociados con el valor propio 1. Es fácil ver que no hay ningún otro vector asociado a la puerta que no cambie de dirección con ese giro.

El cálculo de valores y vectores propios tiene una gran importancia en muchas áreas de la ingeniería, como por ejemplo al **análisis sísmico** de estructuras. Otro ejemplo interesante es el algoritmo original de **Google** para ordenar los resultados de las búsquedas. Este algoritmo, denominado **PageRank**, está basado en el cálculo del vector propio asociado con el máximo valor propio de una matriz con tantas filas y columnas como páginas web hay en Internet, y formada a partir de los enlaces de llegada y de salida que relacionan cada página con las restantes.

Nota: Veremos a lo largo del tema que los valores propios están relacionados con las raíces de un cierto polinomio; en virtud del teorema fundamental del Álgebra (véase el apéndice 3) los polinomios complejos admiten tantas raíces como su grado indica. Para garantizar la existencia de valores propios contemplaremos únicamente matrices complejas, si bien en los ejemplos casi siempre serán reales pero vistas como complejas con parte imaginaria nula.

5.2. Matrices semejantes y matrices diagonalizables

Definición 60 *Dos matrices cuadradas* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *se dicen* ***semejantes*** *si existe una matriz invertible* $\mathbf{P}$ *tal que* $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$.

Definición 61 *Una matriz cuadrada* $\mathbf{A}$ *es* ***diagonalizable*** *cuando es semejante a una matriz diagonal, es decir cuando existe una matriz* $\mathbf{P}$ *invertible tal que* $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ *es diagonal.*

Las matrices semejantes comparten muchas propiedades, como se verá en detalle a lo largo de este tema. Por ejemplo, a partir de la definición es fácil observar que tienen el mismo determinante.

5.3. Valores y vectores propios

Definición 62 (valor y vector propio) *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz cuadrada de orden* n.

- *Se dice que un escalar* λ *de* $\mathbb{C}$ *es un* ***valor propio*** *o autovalor de la matriz* $\mathbf{A}$ *si existe un vector* $\mathbf{v}$, *perteneciente a* $\mathbb{C}^n$, ***no nulo*** *y tal que* $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

- *Se dice que un vector* $\mathbf{v}$ *de* $\mathbb{C}^n$ *es un* ***vector propio*** *o autovector de la matriz* $\mathbf{A}$ *si* $\mathbf{v}$ *es* ***no nulo*** *y además existe un escalar* λ *en* $\mathbb{C}$ *tal que* $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Observaciones:

- Dada una matriz $\mathbf{A}$ cuadrada cualquiera, la ecuación $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ admite la solución nula, cualquiera que sea el valor de λ; por ese motivo en la definición de vector propio se excluye el vector nulo. Es decir, los valores de λ *significativos* son los que resuelven la ecuación para vectores *no nulos*.

- Sin embargo, $\lambda = 0$ sí puede ser un valor propio de $\mathbf{A}$, en concreto, asociado a los vectores (no nulos) de $\ker \mathbf{A}$, es decir, cuando $\dim \ker \mathbf{A} \geq 1$.

- Si $\mathbf{A}$ es real y admite un valor propio real, los vectores propios correspondientes pueden escogerse reales.

- Si la matriz $\mathbf{A}$ es una matriz **diagonal**, entonces los elementos diagonales son valores propios, mientras que los vectores de la base canónica son vectores propios.

- Si la matriz $\mathbf{A}$ es **triangular**, entonces los elementos diagonales son sus valores propios, pero los vectores canónicos ya no son, en general, sus autovectores, aunque el que algunos puedan serlo dependerá de la estructura de la matriz triangular.

A todo valor propio corresponde, al menos, un vector propio y todos los vectores proporcionales al mismo (con excepción del vector nulo), ya que los proporcionales no nulos de un vector propio son vectores propios asociados al mismo valor propio.

De hecho, el conjunto de todos los vectores propios asociados a un determinado valor propio constituye, junto con el vector nulo, un subespacio vectorial al que se denominará **subespacio característico o propio** de la matriz asociado al susodicho valor.

Definición 63 *Si λ es valor propio de una matriz $\mathbf{A}$, se denomina* **subespacio característico (o subespacio propio) de A asociado a** λ *al conjunto de vectores propios asociados a λ, junto con el vector nulo.*

Obsérvese que dicho conjunto coincide con el subespacio $\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$. En efecto, basta observar que los vectores propios $\mathbf{v}$ asociados a λ verifican $\mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Es decir, son las soluciones no nulas del sistema lineal homogéneo $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, por consiguiente, el subespacio característico asociado a λ es el núcleo de la matriz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$.

Proposición 27 *Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son r vectores propios de una matriz $\mathbf{A}$, asociados respectivamente a r valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, distintos dos a dos, entonces dichos vectores son linealmente independientes.*

Demostración: Se demostrará por inducción sobre el número r de valores propios distintos. Está claro que el conjunto cuyo único vector propio es $\mathbf{v}_1$ es libre, porque es vector propio y, por tanto, no nulo. Supóngase ahora $r > 1$. Como hipótesis de inducción se establece que la proposición anterior es cierta para $r-1$ vectores propios en las condiciones del enunciado.

En base a dicha hipótesis, se parte de que los vectores $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente independientes.

Considérese la siguiente combinación lineal nula de los r vectores:

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0} \tag{5.1}$$

Se ha de probar que los escalares $\alpha_j, j = 1, \ldots, r$ son nulos. Premultiplicando la expresión (5.1) por $\mathbf{A}$ y teniendo en cuenta que $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ se obtiene:

$$\alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_r\lambda_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0} \tag{5.2}$$

Si a la expresión (5.2) se le resta la expresión (5.1) multiplicada por λ_1 se obtiene:

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{v}_2 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)\mathbf{v}_3 + \ldots + \alpha_r(\lambda_r - \lambda_1)\mathbf{v}_r = \mathbf{0} \tag{5.3}$$

Por la hipótesis de inducción en esta combinación lineal los vectores son linealmente independientes, luego los coeficientes deben ser nulos. Como $(\lambda_i - \lambda_1) \neq 0$, se sigue que $\alpha_k = 0, k = 2, \ldots, r$. Llevando este resultado a la expresión (5.1) y teniendo en cuenta que $\mathbf{v}_1$ es no nulo, se sigue que también $\alpha_1 = 0$ y por tanto los r vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son independientes. □

Observación: En particular, si una matriz $\mathbf{A}$ de orden n tiene n valores propios distintos, entonces escogiendo sendos vectores propios asociados a cada uno de ellos se construye una base de $\mathbb{C}^n$. Si se forma una matriz $\mathbf{P}$ con los vectores propios de esa base, entonces la matriz $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ es una matriz diagonal semejante a $\mathbf{A}$ y por tanto $\mathbf{A}$ es diagonalizable.

En efecto, las ecuaciones $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i, i = 1, 2, \ldots, n$ se pueden escribir conjuntamente en la forma:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

Si $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ y $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$ la ecuación (5.4) se puede escribir abreviadamente en las formas:

$$\mathbf{AP} = \mathbf{PD} \quad (\det\mathbf{P} \neq 0) \tag{5.5}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D} \tag{5.6}$$

Sin embargo, la existencia de n valores propios distintos es condición suficiente pero **no necesaria** para que exista tal base; por ejemplo, si se considera la matriz identidad, con "1" como único autovalor, toda base de $\mathbb{C}^n$ es de vectores propios de esta matriz. Se pueden encontrar otros ejemplos no tan triviales: matrices diagonales con elementos repetidos, etc.

Definición 64 (espectro y radio espectral) *Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada compleja.*

- *Se llama **espectro** de la matriz $\mathbf{A}$ al conjunto de todos sus valores propios.*
- *Se llama **radio espectral** de una matriz $\mathbf{A}$ al máximo de los módulos de los valores propios. Se suele denotar como $\rho(\mathbf{A})$.*

5.3.1. Polinomio característico

Ya se ha visto que si λ es un valor propio de una matriz $\mathbf{A}$, el subespacio característico asociado es precisamente $\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$. Para que el sistema homogéneo admita solución no trivial es necesario que la matriz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ tenga rango inferior a su orden o, equivalentemente, que su determinante sea nulo. He aquí entonces, un **procedimiento para calcular los valores y vectores propios** de una matriz: una vez calculadas las raíces de la ecuación $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, se resuelven los sistemas lineales homogéneos $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para cada una de dichas raíces y las soluciones no nulas serán vectores propios.

Si consideramos

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{5.7}$$

observamos que el desarrollo de tal determinante nos da un polinomio en la indeterminada λ, cuyo término de mayor grado, que se obtiene a partir del producto de los elementos de la diagonal, es λ^n; se trata, pues, de un polinomio mónico de grado igual al orden de la matriz.

Observación: Desde un punto de vista práctico (numérico), el cálculo de valores propios es difícil ya que no existe *regla* para calcular *a mano* las raíces de un polinomio de grado superior a 4; incluso las fórmulas para calcular las raíces de polinomios de grados 3 y 4 –aunque conocidas– son poco prácticas. En este curso los ejercicios son sencillos porque lo que se pretende es que se comprendan las ideas teóricas. En cualquier texto básico de Álgebra Numérica se explican algoritmos para el cálculo aproximado de valores propios.

Definición 65 *Dada* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$*, se llama* ***polinomio característico*** *de* $\mathbf{A}$*, y se denota por* $\chi_{\mathbf{A}}$*, al polinomio mónico de grado* n *definido por*

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) := |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|, \tag{5.8}$$

cuyas raíces son los autovalores de $\mathbf{A}$*.*

Definición 66 *Dada* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$*, un autovalor* λ *de* $\mathbf{A}$ *se dice que tiene* ***multiplicidad algebraica*** *igual a* m *si tiene multiplicidad* m *como raíz de* $\chi_{\mathbf{A}}$*. La dimensión del subespacio* $\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ *se llama* ***multiplicidad geométrica*** *de* λ*.*

Proposición 28 *Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.*

Demostración: Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ dos matrices semejantes, relacionadas por $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, entonces:

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{B}}(\lambda) &= \det\,(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B}) = \det\,(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) \\ &= \det\,[\mathbf{P}^{-1}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}] = \det\,(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \chi_{\mathbf{A}}(\lambda) \end{aligned}$$

Como corolario se deduce que dos matrices semejantes tienen la misma traza (opuesto del coeficiente de λ^{n-1} en el polinomio característico), así como el mismo determinante ($(-1)^n$ por el término independiente). $\square$

Observaciones: Sea $\mathbf{A}$ una matriz compleja de orden n, entonces:

- En virtud del corolario del teorema fundamental del Álgebra (véase el apéndice 3), $\mathbf{A}$ tiene n autovalores.
- El término independiente de $\chi_{\mathbf{A}}$ es $\chi_{\mathbf{A}}(0) = \det(-\mathbf{A}) = (-1)^n \det \mathbf{A}$. Por otro lado, el término independiente de un polinomio mónico es $(-1)^n$ multiplicado por el producto de sus raíces, concluimos que

$$\det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n, \tag{5.9}$$

  en donde los λ_j anteriores representan todos los autovalores de $\mathbf{A}$, multiplicados tantas veces como indiquen sus multiplicidades.

- El término de grado $n-1$ de $\chi_{\mathbf{A}}$ se obtiene también a partir de la suma de todos los elementos de la diagonal principal:

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{A}}(\lambda) &= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \ldots (\lambda - a_{nn}) + \cdots \\ &= \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})\lambda^{n-1} + (\text{términos de grado menor que } n-1) \end{aligned} \tag{5.10}$$

  Se observa, pues, que el coeficiente de grado $n-1$ de $\chi_{\mathbf{A}}$ es el opuesto de la traza de $\mathbf{A}$. Además dicho coeficiente coincide con el opuesto de la suma de las raíces y, en conclusión,

$$\mathrm{tr}\mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n, \tag{5.11}$$

  siendo los λ_j todos los autovalores de $\mathbf{A}$, sumados tantas veces como indiquen sus multiplicidades algebraicas.

- Si la matriz $\mathbf{A}$ es **invertible**, los valores propios de la inversa son los inversos de los valores propios de $\mathbf{A}$. Para comprobar la relación entre valores propios basta observar las equivalencias:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{v} = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v} \tag{5.12}$$

  Está claro que todos los valores propios λ de esta matriz han de ser distintos de cero, puesto que si la matriz es invertible, el sistema homogéneo asociado $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ solo admite solución trivial.

  Además, cada valor propio de $\mathbf{A}$ y su correspondiente inverso, valor propio de $\mathbf{A}^{-1}$, tienen igual multiplicidad algebraica.

- Las matrices reales de orden impar tienen, al menos, un valor propio real.

- La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

tiene como polinomio característico $\lambda^2 + 1$. Como matriz real no admite valores propios, mientras que como matriz compleja admite dos distintos i y $-i$: existe una base de $\mathbb{C}^2$ (no real) formada por vectores propios de $\mathbf{A}$.

- Si una matriz real (contemplada como matriz compleja) tiene un valor propio complejo α, con parte imaginaria no nula, entonces $\overline{\alpha}$ es también valor propio con la misma multiplicidad algebraica que α. Además, los vectores propios correspondientes pueden tomarse conjugados:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{A}\overline{\mathbf{v}} = \overline{\alpha}\,\overline{\mathbf{v}} \tag{5.14}$$

Como consecuencia, $\{\mathbf{v}, \overline{\mathbf{v}}\}$ es libre.

- La igualdad de los polinomios característicos es una condición necesaria, no suficiente de semejanza. Por ejemplo, la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

tiene por polinomio característico λ^2, al igual que la matriz nula, sin embargo $\mathbf{A}$ no es semejante a la nula ya que no tienen el mismo rango; además, la única matriz semejante a la matriz nula es ella misma.

- Dadas dos matrices $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, se verifica la siguiente relación:

$$\lambda^n \chi_{\mathbf{AB}}(\lambda) = \lambda^m \chi_{\mathbf{BA}}(\lambda) \tag{5.16}$$

Este resultado se demuestra parcialmente en el problema 5.15.

Ejemplo: Calcular los valores y vectores propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

Calculemos en primer lugar su polinomio característico

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 4 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda - 2) \tag{5.18}$$

Para calcular los vectores propios asociados con $\lambda = 1$ resolvamos:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

Las soluciones son los múltiplos de $\mathbf{v}_1^t = (1, 0, 1)$. Análogamente, los vectores propios asociados a $\lambda = 4$:

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

Las soluciones son los múltiplos de $\mathbf{v}_2^t = (0, 1, 0)$. Por último, para el valor propio $\lambda = 2$ se tiene

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

Las soluciones son los múltiplos de $\mathbf{v}_3^t = (0, 1, 2)$.

Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ son linealmente independientes. Si $\mathbf{P}$ es la matriz cuyas columnas son dichos vectores,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

el producto $\mathbf{AP}$ tiene como primera columna $\mathbf{v}_1$, como segunda $4\mathbf{v}_2$ y como tercera $2\mathbf{v}_3$. Dicho de otra forma, se verifica $\mathbf{AP} = \mathbf{P}\mathrm{diag}\,(1, 4, 2)$. Equivalentemente, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathrm{diag}\,(1, 4, 2)$.

Ejemplo: Calcular los valores y vectores propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

Calculemos en primer lugar su polinomio característico

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda - 1)^2 \tag{5.24}$$

Para calcular ahora los vectores propios asociados con $\lambda = 4$ resolvamos:

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.25}$$

Las soluciones son los múltiplos de $\mathbf{v}_1^t = (1, 1, 1)$. Los vectores propios asociados al valor propio doble $\lambda = 1$:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.26}$$

La matriz anterior tiene rango 1 y por tanto hay un subespacio propio de dimensión 2 asociado con $\lambda = 1$. Tomando x_2 y x_3 como variables libres a las que se da alternativamente valor 1 ó 0 se obtienen las soluciones $\mathbf{v}_2^t = (-1, 1, 0)$ y $\mathbf{v}_3^t = (-1, 0, 1)$. Los vectores propios correspondientes son todas las combinaciones lineales no nulas de estos dos vectores.

5.4. Diagonalización

En el primer ejemplo se ha encontrado una matriz diagonal **semejante** a la matriz original $\mathbf{A}$. Los elementos de la diagonal son los valores propios de $\mathbf{A}$, mientras que las columnas de la matriz $\mathbf{P}$ son vectores propios. En el segundo ejemplo también se han encontrado tres vectores propios linealmente independientes, a pesar de que uno de los valores propios es doble.

De una forma más general, si una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es semejante a una diagonal $\mathbf{D}$, entonces la relación $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$ significa que la columna j-ésima de $\mathbf{P}$ es proporcional a la j-ésima de $\mathbf{AP}$. Dicho con otras palabras, el elemento j de la diagonal $\mathbf{D}$ es un valor propio de $\mathbf{A}$ y tiene como vector propio asociado precisamente la columna j de $\mathbf{P}$. Se tiene que las columnas de $\mathbf{P}$ son una base de $\mathbb{C}^n$ formada por vectores propios de $\mathbf{A}$.

Proposición 29 *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz cuadrada de orden* n. *Supóngase que el polinomio característico de* $\mathbf{A}$ *admite la factorización:*

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\sigma_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{\sigma_r} \tag{5.27}$$

donde $\lambda_j, j = 1, \dots, r$ *son los valores propios distintos (dos a dos) de* $\mathbf{A}$ *y* σ_j *sus multiplicidades respectivas. Entonces, para cada* $j = 1, \dots, r$ *se tiene*

$$1 \leq dim\ \ker(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}) \leq \sigma_j \tag{5.28}$$

Es decir, la multiplicidad geométrica es menor o igual que la algebraica.

Demostración: La demostración se hará construyendo una matriz semejante a $\mathbf{A}$ y tal que admita λ_j como valor propio de multiplicidad al menos igual a la dimensión del subespacio característico asociado. Para ello, se considera una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$ tal que los m primeros vectores formen una base del subespacio $\ker(\mathbf{A} - \lambda_j\mathbf{I})$, supuesto de dimensión igual a m. Es obvio que m es mayor o igual que 1 puesto que λ_j se calcula de modo que la matriz $(\mathbf{A} - \lambda_j\mathbf{I})$ tenga determinante nulo y, en consecuencia, rango menor que n.

Si $\mathbf{P}$ representa la matriz cuyas columnas son los vectores de la base $\mathcal{B}$ entonces $\mathbf{P}$ es invertible y se verifica la igualdad

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_j\mathbf{I}_m & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

en la cual $\mathbf{I}_m$ representa la matriz identidad de orden m, $\mathbf{B}$ es una matriz $m \times (n-m)$ y $\mathbf{C}$ es cuadrada de orden $n-m$. Es claro que el polinomio característico de esta matriz coincide con el de $\mathbf{A}$ por semejanza y es igual a $(\lambda - \lambda_j)^m \chi_{\mathbf{C}}(\lambda)$. Se tiene entonces que λ_j es valor propio de $\mathbf{A}$ de multiplicidad por lo menos m. □

Proposición 30 (caracterización de matriz diagonalizable) *Sea $\mathbf{A}$ una matriz compleja, cuadrada de orden n. Entonces $\mathbf{A}$ es diagonalizable en $\mathbb{C}$ si, y solamente si, para cada valor propio de $\mathbf{A}$ las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden.*

Obsérvese que una matriz real puede ser no diagonalizable en $\mathbb{R}$, pero diagonalizable en $\mathbb{C}$, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.30}$$

Observaciones: Todas las propiedades siguientes se enuncian para una matriz cuadrada de orden n:

1. Si $\mathbf{A}$ es **diagonalizable**, entonces $\mathbf{A}^t, \bar{\mathbf{A}}$ y $\bar{\mathbf{A}}^t$ también lo son (y la matriz de paso que la diagonaliza es la inversa de la transpuesta de la de $\mathbf{A}$).

   En efecto, si $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$ diagonal, entonces

   $$\mathbf{D} = \mathbf{D}^t = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^t = \mathbf{P}^t\mathbf{A}^t(\mathbf{P}^{-1})^t = \mathbf{P}^t\mathbf{A}^t(\mathbf{P}^t)^{-1}. \tag{5.31}$$

2. Si $\mathbf{A}$ es **diagonalizable** e **invertible**, entonces $\mathbf{A}^{-1}$ también lo es (y la matriz de paso que la diagonaliza es la misma que la de $\mathbf{A}$).

   En efecto, si $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ con todos los λ_j no nulos, entonces

   $$\operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}) = \mathbf{D}^{-1} = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}. \tag{5.32}$$

3. Si $\mathbf{A}$ es **diagonalizable**, entonces cualquier potencia de $\mathbf{A}$ también lo es (y la matriz que la diagonaliza es la misma).

   En efecto, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ implica que

$$\begin{aligned} \operatorname{diag}\left(\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k\right) &= \mathbf{D}^k = \left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right)^k = \\ = \left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right)\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right)\cdots&\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{P} \end{aligned} \tag{5.33}$$

   El recíproco no es cierto. Una potencia diagonalizable no implica que $\mathbf{A}$ lo sea. Por ejemplo la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable, aunque su cuadrado es la matriz nula que es un caso particular de matriz diagonal.

5.4.1. Teorema de Cayley–Hamilton

Sea $\mathbf{A}$ una matriz compleja y sea

$$P(\lambda) = \sum_{j=0}^{m} a_j \lambda^j \tag{5.34}$$

un polinomio cualquiera. Se define la matriz $P(\mathbf{A})$ como la que se obtiene sustituyendo en la expresión del polinomio las potencias de λ por potencias de $\mathbf{A}$, es decir:

$$P(\mathbf{A}) := \sum_{j=0}^{m} a_j \mathbf{A}^j = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + \cdots + a_m\mathbf{A}^m \tag{5.35}$$

donde se toma por convenio, $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$.

Observaciones:

1. Si λ_0 es valor propio de una matriz $\mathbf{A}$, entonces para cualquier polinomio P, $P(\lambda_0)$ es valor propio de $P(\mathbf{A})$.

2. Los vectores propios de $\mathbf{A}$ lo son de $P(\mathbf{A})$ para cualquier polinomio P.

   ¡Atención! el recíproco no es, necesariamente, cierto. Considérese por ejemplo la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, cuyos valores propios son 1 y -1. Los correspondientes vectores propios son $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Considérese el caso particular $P(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$ y obsérvese que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$. Así como todos los vectores propios de $\mathbf{A}$ son vectores propios de $\mathbf{I}$, el recíproco no es cierto porque cualquier vector no nulo en $\mathbb{R}^2$, por ejemplo el $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, es vector propio de $\mathbf{I}$, pero no tiene por qué serlo de $\mathbf{A}$.

Definición 67 *Se dice que una matriz* $\mathbf{A}$ *es* ***raíz*** *de un polinomio* P *si la matriz* $P(\mathbf{A})$ *es la matriz nula.*

Teorema 11 (de Cayley-Hamilton) *Toda matriz es raíz de su polinomio característico. Es decir, si su polinomio característico es*

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \cdots + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

entonces

$$b_0\mathbf{I} + b_1\mathbf{A} + b_2\mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^n \equiv \mathbf{O} \tag{5.36}$$

Demostración: La demostración de este teorema excede el objeto de estos apuntes. □

Consecuencias:

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada, sea χ su polinomio característico y P un polinomio cualquiera.

1. En virtud del teorema de división euclídea de polinomios (Teorema 17 del Apéndice 3), $P(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A})$ siendo R el resto de dividir P entre χ.

2. En particular, el resultado anterior puede utilizarse para calcular potencias de $\mathbf{A}$ ya que $\mathbf{A}^m = P(\mathbf{A})$ para $P(\lambda) = \lambda^m$.

3. Si $\mathbf{A}$ es diagonalizable, entonces $P(\mathbf{A})$ también lo es, cualquiera que sea el polinomio P. En efecto, todas las potencias de $\mathbf{A}$ son diagonalizadas por la misma matriz $\mathbf{P}$ y como consecuencia la matriz $P(\mathbf{A})$ también es diagonalizada por $\mathbf{P}$. Si $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$, con $\mathbf{D}$ diagonal, entonces

$$\mathbf{P}^{-1}P(\mathbf{A})\mathbf{P} = P(\mathbf{D}) \tag{5.37}$$

Una aplicación interesante

Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función con sus derivadas. Así una de las más sencillas de resolver son las ecuaciones diferenciales en las que la derivada y la función tienen una dependencia lineal. Por ejemplo,

$$f'(t) = \lambda f(t). \tag{5.38}$$

Es claro, que la funciones de la forma

$$f(t) = c\,e^{\lambda t}$$

(donde c es una constante) son soluciones de (5.38), de hecho, son todas las posibles soluciones. Si, en lugar de una ecuación diferencial de una función, tenemos varias ecuaciones que involucran varias funciones, la solución no es tan sencilla de calcular. En estos casos la diagonalización de matrices es una buena herramienta para calcular la solución.

Ejemplo: Hállese el conjunto de funciones $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$, de clase C^1 (continua y con primera derivada continua) solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -\,x_1(t) - x_2(t) + 3x_3(t) \\ x_2'(t) &= +\,x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) &= -\,x_1(t) - x_2(t) + 3x_3(t). \end{aligned} \tag{5.39}$$

Hállese la solución del sistema en el caso de tener condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ y $x_3(0) = 0$.

La dificultad de resolver este sistema de ecuaciones diferenciales viene de que tenemos expresadas las derivadas de cada una de las funciones (x_1', x_2' y x_3'), en función de todas las funciones (x_1, x_2 y x_3). Así, si pudiéramos expresar la derivada de cada función solo en función de la propia función podríamos resolver el sistema de forma mucho más sencilla. Para ello, expresamos el sistema en forma matricial.

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

Los pasos que vamos a seguir son:

1. Diagonalizar la matriz $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$.
2. Hacer el cambio de variable $\mathbf{y}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t)$.
3. Resolver el sistema $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{D}\mathbf{y}(t)$.
4. Obtener la solución general de $\mathbf{x}(t)$ deshaciendo el cambio de variable.
5. Obtener la solución que cumple las condiciones iniciales imponiendo $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución: 1. Diagonalizamos la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones $\mathbf{A}$. Calculamos su polinomio característico:

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & -3 \\ -1 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = (\lambda-1)(\lambda-2)\lambda$$

Por lo tanto los valores propios son 0, 1 y 2 con multiplicidad 1. Para calcular los vectores propios asociados con $\lambda = 1$ resolvemos:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las soluciones son los múltiplos de $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Análogamente, los vectores propios asociados a $\lambda = 0$:

$$\mathbf{Av} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las soluciones son los múltiplos de $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por último, para el valor propio $\lambda = 2$ se tiene:

$$(2\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las soluciones son los múltiplos de $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por tanto $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, con

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Una vez hemos diagonalizado la matriz, ahora podemos hacer el cambio de variable $\mathbf{y}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t)$. Este cambio se puede hacer porque la matriz $\mathbf{P}$ es invertible, es decir, la aplicación que lleva $\mathbf{x}(t)$ a $\mathbf{y}(t)$ es biyectiva. Además, se tiene que $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}'(t)$, ya que al derivar los coeficientes de $\mathbf{P}^{-1}$ son constantes. Así, las soluciones del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{Ax}(t)$ son los $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{y}(t)$ con $\mathbf{y}(t)$ solución del sistema $\mathbf{Py}'(t) = \mathbf{PDy}(t)$, o lo que es lo mismo, solución del sistema $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{Dy}(t)$.
3. El sistema de ecuaciones diferenciales $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{Dy}(t)$ es,

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) \\ y_2'(t) &= 0 \\ y_3'(t) &= 2y_3(t). \end{aligned}$$

Por tanto cada ecuación se puede resolver de manera independiente. La solución general es de la forma $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} a\,e^t \\ b \\ c\,e^{2t} \end{pmatrix}$, donde a, b y c son constantes.
4. Deshaciendo el cambio de variable, las soluciones de $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{Ax}(t)$ son

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Py}(t) = a\,e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\,e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Imponiendo $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a-b \\ a+c \end{pmatrix}$ y resolviendo el sistema ($a = 1$, $b = 1$ y $c = -1$) se obtiene la solución que cumple las condiciones iniciales

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t + 1 - e^{2t} \\ e^t - 1 \\ e^t - e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Observaciones

El conjunto de funciones $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) = \{\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \text{ de clase } C^1\}$ junto con la suma de funciones y el producto por un número real es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Además, el subconjunto de funciones de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ que cumplen (5.39) es un subespacio vectorial del anterior.

El método para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales empleado aquí se puede aplicar en cualquier dimensión y para cualquier matriz $\mathbf{A}$ de coeficientes constantes siempre que la matriz $\mathbf{A}$ sea diagonalizable.

5.5. Ejercicios

5.1.– Calcular los valores y vectores propios de cada una de las siguientes matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

analizando si son o no diagonalizables. Para aquellas que sean diagonalizables determinar una matriz que las diagonalice.

5.2.– Calcular los valores de a y b que hacen que $(1,1,-1)^t$ sea un autovector de la matriz $\begin{pmatrix} -b & 2 & 0 \\ a & b & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

5.3.– Indicar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que $\begin{pmatrix} 1 & -a+1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ sea semejante a $\operatorname{diag}(1,-4,1)$.

5.4.– Hallar el valor del parámetro a que hace que la matriz $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ no sea diagonalizable.

5.5.– Estudiar si la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable y diagonalizarla en caso afirmativo.

5.6.– Hallar los valores propios de la matriz

$$\tilde{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

Interpretar el resultado geométricamente considerando el operador $\mathbf{L}(\mathbf{r}) := \mathbf{w} \times \mathbf{r}$ siendo $\mathbf{w} = (a,b,c)^t$.

5.7.– Comprobar que una matriz y su traspuesta tienen el mismo polinomio característico y, por tanto, los mismos valores propios. Analizar lo que sucede con los vectores propios.

5.8.– Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuyo polinomio característico es $\chi_{\mathbf{A}}(z) = (z-3)^{13}(z+4)^7$. Hallar el polinomio característico de $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$.

5.9.– Dados dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$, determínense los valores y vectores propios de la matriz de rango unidad $\mathbf{ab}^t$. Como aplicación, hállense los valores y vectores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{pmatrix}$$

5.10.– Establecer la relación que existe entre los valores y vectores propios de una matriz compleja $\mathbf{M}$ y los de la matriz $a\mathbf{I} + b\mathbf{M}$ siendo a, b números complejos no nulos arbitrarios –se aconseja revisitar el problema 2.6–. Como aplicación, deducir los valores y vectores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} c & d & \cdots & d \\ d & c & \cdots & d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d & d & \cdots & c \end{pmatrix}.$$

5.11.– Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $r(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A}) = 1$. Hallar los valores propios de $\mathbf{A}$, así como sus multiplicidades algebraicas y geométricas. Deducir si $\mathbf{A}$ es o no diagonalizable.

5.12.– Se dice que una matriz $\mathbf{A}$ es nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{A}^k = 0$. Sea $\mathbf{A}$ nilpotente.

1. Calcular los valores propios de $\mathbf{A}$ y de $\mathbf{A} - \mathbf{I}$
2. Deducir del apartado anterior la traza y el determinante de $\mathbf{A} - \mathbf{I}$.

5.13.– Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada invertible de orden n. Probar que la matriz inversa de $\mathbf{A}$ se puede expresar como un polinomio en $\mathbf{A}$. Obtener este polinomio (¿es único?) en el caso particular de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

5.14.– Se considera el polinomio $p(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3$ y la matriz $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Determinar los valores y vectores propios de $\mathbf{S}$.
2. Obtener explícitamente la matriz que resulta al evaluar el polinomio $p(z)$ en la matriz $\mathbf{S}$.

3. Determinar los valores y vectores propios de la matriz resultante, comprobando que siempre es diagonalizable.

4. Determinar los coeficientes de $p(z)$ para que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

sea $p(\mathbf{S})$. Deducir sus valores y vectores propios.

5.15.– Sean las matrices $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, demostrar que los valores propios no nulos de $\mathbf{AB}$ coinciden con los de $\mathbf{BA}$.

5.16.– Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calcular sus valores propios y deducir que es diagonalizable.

2. Determinar una base de vectores propios y comprobar que es una base ortogonal.

3. Deducir la existencia de una matriz ortogonal $\mathbf{Q}$ de forma que $\mathbf{Q}^t\mathbf{AQ}$ sea diagonal.

5.17.– Hállese el conjunto de funciones $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de clase C^1 (con primeras derivadas continuas) solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} y'(t) &= -\omega^2\, x(t) \\ x'(t) &= y(t) \end{aligned}$$

Hállese la solución del sistema en el caso de tener condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. (El sistema de ecuaciones anterior es equivalente a resolver $x''(t) = -\omega^2\, x(t)$, la ecuación diferencial del oscilador armónico.)

5.5.1. Cuestiones

5.18.– Dada la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ señalar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas:

1. $\mathbf{A}$ es diagonalizable para todo valor de α

2. Si $\alpha = 0$, entonces **A** tiene un subespacio propio de dimensión 2
3. Si **A** es diagonalizable, entonces $\alpha = 2$
4. Para algún valor de α, **A** tiene tres valores propios distintos
5. Si $\alpha = -2$, existen tres vectores propios de **A** linealmente independientes

5.19.– Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. $\lambda = 3$ es siempre un autovalor de **A**.
2. Si $a = -2$ entonces $\lambda = 0$ no es un autovalor de **A**.
3. Para $a = 0$ la matriz **A** no es diagonalizable.
4. Para $a = 0$, **A** es semejante a $\mathrm{diag}(1, 3, -2)$.

Capítulo 6

Matrices normales

6.1 Semejanza unitaria y diagonalización unitaria.

6.2 Matrices normales.

6.3 Teorema espectral. Aplicación a matrices hermíticas, antihermíticas y unitarias. Descomposición espectral.

6.4 Matrices hermíticas. Cociente de Rayleigh. Clasificación de matrices hermíticas. Matrices reales simétricas.

6.5 Ejercicios. Cuestiones.

6.1. Semejanza unitaria y diagonalización unitaria

Definición 68 (matrices semejantes unitariamente) *Se dice que dos matrices cuadradas complejas* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son* ***semejantes unitariamente*** *si existe una matriz unitaria* $\mathbf{U}$ *tal que* $\mathbf{B} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$.

Observación: Puesto que $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^h$, podemos expresar también la relación de semejanza unitaria como $\mathbf{B} = \mathbf{U}^h\mathbf{A}\mathbf{U}$.

Definición 69 (matriz diagonalizable unitariamente y ortogonalmente)

- *Dada* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *se dice que es* ***diagonalizable unitariamente*** *si es semejante unitariamente a una matriz diagonal, es decir, si existe una matriz unitaria* $\mathbf{U}$ *tal que* $\mathbf{D} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$ *es diagonal.*

- *Como caso particular, dada* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *se dice que es* ***diagonalizable ortogonalmente*** *si existe una matriz ortogonal* $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tal que* $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ *es diagonal.*

Observación: Los elementos diagonales de $\mathbf{D}$ son los autovalores de $\mathbf{A}$, mientras que las columnas de $\mathbf{U}$ constituyen una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ formada por autovectores de $\mathbf{A}$.

La anterior observación nos permite concluir una primera caracterización de las matrices diagonalizables unitariamente:

Proposición 31 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$; $\mathbf{A}$ *es diagonalizable unitariamente* $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ *es diagonalizable y sus subespacios propios son ortogonales dos a dos.*

6.2. Matrices normales

Definición 70 (matriz normal) $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *se dice que es **normal** si* $\mathbf{A}\mathbf{A}^h = \mathbf{A}^h\mathbf{A}$.

Ejemplos: Algunos ejemplos de matrices normales son:

- Las matrices hermíticas complejas (y en particular las reales simétricas).
- Las matrices antihermíticas complejas (y en particular las reales antisimétricas).
- Las matrices unitarias (y en particular las ortogonales).
- Las matrices diagonales.

Ejemplo: Existen muchas otras matrices normales que no pertenecen a ninguno de los tipos anteriores; por ejemplo, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es normal (compruébese).

Proposición 32 *Una matriz triangular es normal si y sólo si es diagonal.*

Demostración: Ya sabemos que toda matriz diagonal es normal. Vamos a demostrar que, dada una matriz triangular superior $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, la hipótesis de normalidad implica que $t_{ij} = 0$ siempre que $i < j$ (para matrices triangulares inferiores, observamos que una matriz es normal si y sólo si su transpuesta lo es).

Sea $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{nn} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$, tal que $\mathbf{T}^h\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{T}^h$.

Calculamos los elementos diagonales de los productos anteriores y les imponemos la igualdad:

$$(\mathbf{T}^h\mathbf{T})_{11} = |t_{11}|^2, \tag{6.1}$$

pero también

$$(\mathbf{T}\mathbf{T}^h)_{11} = |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + \ldots + |t_{1n}|^2. \tag{6.2}$$

La igualdad de los dos resultados anteriores implica que $t_{12} = t_{13} = \ldots = t_{1n} = 0$.

Del mismo modo,

$$(\mathbf{T}^h\mathbf{T})_{22} = |t_{22}|^2, \tag{6.3}$$

mientras que

$$(\mathbf{T}\mathbf{T}^h)_{22} = |t_{22}|^2 + |t_{23}|^2 + \ldots + |t_{2n}|^2, \tag{6.4}$$

de cuya igualdad se desprende que $t_{23} = t_{24} = \ldots = t_{2n} = 0$.

En general (supuesto que $t_{ij} = 0$ si $i < j$ para $i = 1, \ldots, k-1$),

$$(\mathbf{T}^h\mathbf{T})_{kk} = |t_{kk}|^2, \tag{6.5}$$

mientras que

$$(\mathbf{T}\mathbf{T}^h)_{kk} = |t_{kk}|^2 + |t_{k,k+1}|^2 + \ldots + |t_{kn}|^2, \tag{6.6}$$

lo que garantiza que $t_{k,k+1} = \ldots = t_{kn} = 0$. $\square$

Observación: Una matriz **compleja no real y simétrica** no es, en general, normal. Por ejemplo, si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^h\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}$, mientras que $\mathbf{A}\mathbf{A}^h = \begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix}$.

Observación: Si una matriz $\mathbf{A}$ es normal, entonces toda matriz de la forma $\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I}$, con $\alpha \in \mathbb{C}$, también lo es.

Observación: Si dos matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ son semejantes unitariamente, entonces $\mathbf{A}$ es normal si y sólo si $\mathbf{B}$ es normal.

6.3. Teorema espectral

El teorema espectral caracteriza de manera sencilla las matrices diagonalizables unitariamente. Éstas resultan ser, precisamente, las matrices normales.

Teorema 12 (Teorema espectral para matrices normales) *Una matriz* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *es diagonalizable unitariamente si y sólo si es normal.*

Demostración:

⇒) Si $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^h$, con $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, para una cierta $\mathbf{U}$ unitaria, entonces:

$$\mathbf{A}^h\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}^h\mathbf{U}^h\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^h = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{D}^h\mathbf{U}^h = \mathbf{U}\operatorname{diag}\left(|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2\right)\mathbf{U}^h; \tag{6.7}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^h = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^h\mathbf{U}\mathbf{D}^h\mathbf{U}^h = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{D}^h\mathbf{U}^h = \mathbf{U}\operatorname{diag}\left(|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2\right)\mathbf{U}^h, \tag{6.8}$$

luego $\mathbf{A}$ es normal. □

⇐) *(no exigible)*

Procederemos por inducción en n, el orden de la matriz. Para $n = 1$ el resultado es trivialmente cierto. Supongamos que lo es para matrices de orden $n-1$, es decir, que toda matriz normal de orden $n-1$ es diagonalizable unitariamente.

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz normal. $\mathbf{A}$ tiene algún autovalor $\lambda_1 \in \mathbb{C}$; sea $\mathbf{u}_1$ un vector propio unitario asociado a λ_1, ampliamos hasta una base $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ ortonormal de $\mathbb{C}^n$ y consideramos la matriz unitaria $\tilde{\mathbf{U}} = (\mathbf{u}_1|\ldots|\mathbf{u}_n)$. Se tiene que

$$\tilde{\mathbf{U}}^h\mathbf{A}\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{v}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{n-1} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{A}} \tag{6.9}$$

para unos ciertos $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n-1}$ y $\mathbf{A}_{n-1} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$.

La matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ es normal por ser semejante unitariamente a $\mathbf{A}$. Ahora bien,

$$\tilde{\mathbf{A}}^h = \begin{pmatrix} \overline{\lambda}_1 & \mathbf{0}^t \\ \overline{\mathbf{v}} & \mathbf{A}_{n-1}^h \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

y, por consiguiente,

$$(\tilde{\mathbf{A}}^h\tilde{\mathbf{A}})_{11} = |\lambda_1|^2 \tag{6.11}$$

mientras que

$$(\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}}^h)_{11} = |\lambda_1|^2 + \mathbf{v}^t\overline{\mathbf{v}}. \tag{6.12}$$

Como ambos resultados han de ser iguales, concluimos que $0 = \mathbf{v}^t\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^h\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$, es decir, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Así pues,

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

Ahora resulta evidente que la normalidad de esta matriz implica la de $\mathbf{A}_{n-1}$, ya que

$$\tilde{\mathbf{A}}^h\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{n-1}^h\mathbf{A}_{n-1} \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

mientras que

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}}^h = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{n-1}\mathbf{A}_{n-1}^h \end{pmatrix}, \tag{6.15}$$

de donde deducimos que $\mathbf{A}_{n-1}^h \mathbf{A}_{n-1} = \mathbf{A}_{n-1} \mathbf{A}_{n-1}^h$.

Al ser $\mathbf{A}_{n-1}$ una matriz normal de orden $n-1$, podemos aplicarle la hipótesis de inducción: existe $\mathbf{U}_{n-1} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ unitaria tal que

$$\mathbf{U}_{n-1}^h \mathbf{A}_{n-1} \mathbf{U}_{n-1} = \operatorname{diag}(\lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \mathbf{D}_{n-1}. \tag{6.16}$$

Consideramos finalmente la matriz

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}, \tag{6.17}$$

que es unitaria por ser producto de unitarias. Vamos a ver que esta matriz diagonaliza unitariamente a $\mathbf{A}$. En efecto,

$$\mathbf{U}^h \mathbf{A} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{n-1}^h \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}^h \mathbf{A} \tilde{\mathbf{U}} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{n-1} \end{pmatrix} = \tag{6.18}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{n-1}^h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{n-1} \end{pmatrix} = \tag{6.19}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{n-1}^h \mathbf{A}_{n-1} \mathbf{U}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{n-1} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n). \tag{6.20}$$

Lo cual prueba que $\mathbf{A}$ es diagonalizable unitariamente. □

A continuación particularizaremos este resultado en algunas clases de matrices normales de especial relevancia.

6.3.1. Aplicación a matrices hermíticas, antihermíticas y unitarias

Toda matriz $\mathbf{A}$ normal ($\mathbf{A}^h\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^h$) es diagonalizable unitariamente, es decir: para una cierta matriz unitaria $\mathbf{U}$,

$$\mathbf{U}^h \mathbf{A} \mathbf{U} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \mathbf{D} \text{ o, equivalentemente, } \mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^h,$$

en donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ son los autovalores de $\mathbf{A}$. En los casos particulares anteriormente destacados ($\mathbf{A}$ hermítica, antihermítica o unitaria) la matriz $\mathbf{D}$ es del mismo tipo que $\mathbf{A}$.

Matrices hermíticas

En este caso, puesto que $\mathbf{D}$ es hermítica,

$$\operatorname{diag}(\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n) = \mathbf{D}^h = \mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n). \tag{6.21}$$

Por tanto, los autovalores de una matriz hermítica son reales.

Recíprocamente, si una matriz **A** es diagonalizable unitariamente y sus autovalores son reales,

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\mathbf{U}^h \text{ con } \mathbf{U} \text{ unitaria y } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \tag{6.22}$$

entonces $\mathbf{A}^h = \mathbf{U}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\mathbf{U}^h = \mathbf{A}$, es decir, **A** es hermítica.

Todo ello se sintetiza en el resultado siguiente:

Teorema 13 (Teorema espectral para matrices hermíticas) *Sea* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$*;* **A** *es diagonalizable unitariamente con autovalores reales* $\Leftrightarrow$ **A** *es hermítica.*

Como caso particular, se deduce:

Corolario: (Teorema espectral para matrices reales simétricas) Una matriz real es diagonalizable ortogonalmente si y solo si es simétrica.

Matrices antihermíticas

Como en este caso **D** es antihermítica, tenemos que

$$\mathrm{diag}(\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n) = \mathbf{D}^h = -\mathbf{D} = \mathrm{diag}(-\lambda_1, \ldots, -\lambda_n), \tag{6.23}$$

de donde deducimos que los autovalores de una matriz antihermítica son imaginarios puros.

Recíprocamente, si una matriz **A** es diagonalizable unitariamente siendo todos sus autovalores imaginarios puros, entonces

$$\mathbf{A}^h = (\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^h)^h = \mathbf{U}\mathbf{D}^h\mathbf{U}^h = -\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^h = -\mathbf{A}, \tag{6.24}$$

es decir, **A** es antihermítica.

Como caso particular, toda matriz real y antisimétrica es diagonalizable unitariamente (¡no ortogonalmente!) con autovalores imaginarios puros.

Matrices unitarias

Puesto que **D** es unitaria cuando **A** lo es, tenemos que $\mathbf{I} = \mathbf{D}^h\mathbf{D} = \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2)$, lo que garantiza que todos los autovalores de cualquier matriz unitaria tienen módulo unidad.

Recíprocamente, si **A** es una matriz normal cuyos autovalores tienen módulo unidad, entonces

$$\mathbf{A}^h\mathbf{A} = (\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^h)^h\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^h = \mathbf{U}\mathbf{D}^h\mathbf{U}^h\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^h = \mathbf{U}\mathbf{D}^h\mathbf{D}\mathbf{U}^h = \tag{6.25}$$

$$= \mathbf{U}\,\mathrm{diag}(|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2)\mathbf{U}^h = \mathbf{U}^h\mathbf{I}\mathbf{U} = \mathbf{I}, \tag{6.26}$$

luego **A** es unitaria.

En particular, toda matriz real ortogonal es diagonalizable unitariamente con autovalores de módulo unidad, pero éstos pueden ser no reales (recuérdense las matrices de giro), luego no podemos hablar en general de diagonalización ortogonal.

6.3.2. Descomposición espectral

Toda $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal, diagonalizable unitariamente a través de $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1|\ldots|\mathbf{U}_n)$, puede expresarse de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\mathbf{U}^h = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^h, \tag{6.27}$$

es decir, como combinación lineal de matrices de rango 1, cada una de las cuales representa la matriz de proyección ortogonal sobre su correspondiente subespacio columna, siendo estos subespacios ortogonales entre sí y los autovalores de $\mathbf{A}$ los coeficientes de dicha combinación lineal. Nótese que el número de sumandos no nulos es igual al rango de $\mathbf{A}$.

Si ahora ordenamos los autovalores no nulos de $\mathbf{A}$ agrupando aquellos que sean iguales, es decir, consideramos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ autovalores de multiplicidades respectivas $m_1, m_2, \ldots, m_p$, con $m_1 + \ldots + m_p = r(\mathbf{A})$, los sumandos correspondientes al autovalor α_k en la expresión (6.27) se agrupan como sigue:

$$\alpha_k(\mathbf{U}_{k_1}\mathbf{U}_{k_1}^h + \ldots + \mathbf{U}_{k_{m_k}}\mathbf{U}_{k_{m_k}}^h) = \alpha_k \mathbf{P}_{\ker(\mathbf{A}-\alpha_k\mathbf{I})} \tag{6.28}$$

en donde el subespacio propio asociado al autovalor α_k se supone engendrado por las columnas $\mathbf{U}_{k_1}, \ldots, \mathbf{U}_{k_{m_k}}$ de $\mathbf{U}$.

En conclusión, se verifica la siguiente proposición:

Proposición 33 (Descomposición espectral de una matriz normal) *Toda matriz normal* $\mathbf{A}$ *puede expresarse como*

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \mathbf{P}_k, \tag{6.29}$$

en donde α_k *son los autovalores (distintos dos a dos) no nulos de* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{P}_k$ *representa la matriz de proyección ortogonal sobre el subespacio propio* $\ker(\mathbf{A} - \alpha_k\mathbf{I})$ *(estos subespacios son ortogonales dos a dos).*

6.4. Matrices hermíticas

6.4.1. Formas cuadráticas

Definición 71 (forma cuadrática) *Dada una matriz hermítica* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$*, se llama forma cuadrática asociada a* $\mathbf{A}$ *a la función de* $\mathbb{C}^n$ *a* $\mathbb{R}$ *definida mediante*

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^h\mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{6.30}$$

Por el Teorema espectral, toda matriz hermítica $\mathbf{A}$ es diagonalizable unitariamente, y sus autovalores son reales. Obsérvese que, si λ es un autovalor de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{u}$ un autovector asociado a λ,

$$\mathbf{u}^h\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\|\mathbf{u}\|^2. \tag{6.31}$$

Teorema 14 *Sea* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *hermítica, y sean* $\lambda_{\text{mín}}$ *y* $\lambda_{\text{máx}}$ *sus autovalores mínimo y máximo, respectivamente. Entonces, para todo* $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$*, se verifica que*

$$\lambda_{\text{mín}} \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^h\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \lambda_{\text{máx}} \|\mathbf{x}\|^2, \tag{6.32}$$

alcanzándose cada una de las igualdades en todos los vectores propios asociados, respectivamente, a $\lambda_{\text{mín}}$ *y* $\lambda_{\text{máx}}$*.*

Demostración: Por el teorema espectral para matrices hermíticas, existe una matriz unitaria $\mathbf{Q}$ tal que

$$\mathbf{Q}^h\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_{\text{mín}}, \cdots, \lambda_{\text{máx}}). \tag{6.33}$$

Denotando $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ se tiene que

$$\mathbf{x}^h\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^h\mathbf{Q}^h\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{y} = \mathbf{y}^h \operatorname{diag}(\lambda_{\text{mín}}, \cdots, \lambda_{\text{máx}})\,\mathbf{y} = \lambda_{\text{mín}}|y_1|^2 + \cdots + \lambda_{\text{máx}}|y_n|^2 \tag{6.34}$$

pero dicha cantidad puede acotarse superiormente por

$$\lambda_{\text{máx}}\left(|y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2\right) = \lambda_{\text{máx}} \|\mathbf{y}\|^2 = \lambda_{\text{máx}} \|\mathbf{x}\|^2 \tag{6.35}$$

(se ha usado que $\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{Q}\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|$ pues $\mathbf{Q}$ es unitaria). Así pues, $\mathbf{x}^h\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \lambda_{\text{máx}} \|\mathbf{x}\|^2$.

Por la ecuación (6.31), sabemos que la igualdad se alcanza si $\mathbf{x}$ es un vector propio asociado a $\lambda_{\text{máx}}$.

Análogamente, para la acotación inferior, se observa que la expresión (6.34) es mayor o igual que

$$\lambda_{\text{mín}}\left(|y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2\right) = \lambda_{\text{mín}} \|\mathbf{y}\|^2 = \lambda_{\text{mín}} \|\mathbf{x}\|^2 \tag{6.36}$$

luego $\lambda_{\text{mín}} \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^h\mathbf{A}\mathbf{x}$, concluyendo la demostración. □

6.4.2. Cociente de Rayleigh

Definición 72 (cociente de Rayleigh) *Dada* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *hermítica, el cociente de Rayleigh es la función de* $\mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ *a* $\mathbb{R}$ *definida por el cociente*

$$R(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^h\mathbf{A}\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} \qquad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \tag{6.37}$$

Obsérvese que si $\mathbf{u}$ es autovector de $\mathbf{A}$ asociado al autovalor λ, en virtud de la ecuación (6.31) se tiene que

$$R(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{u}^h\mathbf{A}\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} = \lambda. \tag{6.38}$$

Por otro lado, la ecuación (6.32) garantiza que

$$\lambda_{\text{mín}} \leq \frac{\mathbf{x}^h\mathbf{A}\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} \leq \lambda_{\text{máx}} \qquad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \tag{6.39}$$

y la continuidad de la función R en $\mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ garantiza que se alcanzan todos los valores del intervalo $[\lambda_{\text{mín}}, \lambda_{\text{máx}}]$.

Así pues, concluimos lo siguiente:

Proposición 34 *Sea* $\mathbf{A}$ *real y simétrica, sean* $\lambda_{\text{mín}}, \lambda_{\text{máx}}$ *los autovalores mínimo y máximo, respectivamente, de* $\mathbf{A}$*; entonces*

$$\min_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^h\mathbf{A}\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} = \lambda_{\text{mín}} \quad ; \quad \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^h\mathbf{A}\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} = \lambda_{\text{máx}}, \tag{6.40}$$

alcanzándose dichos valores en los correspondientes autovectores de $\mathbf{A}$ *asociados a* $\lambda_{\text{mín}}$ *y* $\lambda_{\text{máx}}$.

6.4.3. Clasificación de matrices hermíticas

Como hemos visto, los signos que puede tomar una forma cuadrática están determinados por los de los autovalores de la matriz hermítica que la define. Ello motiva la siguiente clasificación de las matrices hermíticas:

Sea $\mathbf{A}$ una matriz hermítica; se dice que:

- $\mathbf{A}$ es **semidefinida positiva** si $\mathbf{x}^h\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0 \ \forall\mathbf{x}$, lo que equivale a que sus autovalores sean positivos o nulos ($\lambda_k \geq 0$).
  - En particular, $\mathbf{A}$ es **definida positiva** si $\mathbf{x}^h\mathbf{A}\mathbf{x} > 0 \ \forall\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, es decir, si sus autovalores son positivos ($\lambda_k > 0$).
- $\mathbf{A}$ es **semidefinida negativa** si $\mathbf{x}^h\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0 \ \forall\mathbf{x}$; equivalentemente, si sus autovalores son negativos o nulos ($\lambda_k \leq 0$).
  - En particular, $\mathbf{A}$ es **definida negativa** si $\mathbf{x}^h\mathbf{A}\mathbf{x} < 0 \ \forall\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ o, lo que es lo mismo, si sus autovalores son negativos ($\lambda_k < 0$).
- $\mathbf{A}$ es **indefinida** si existen vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ tales que $\mathbf{x}^h\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ e $\mathbf{y}^h\mathbf{A}\mathbf{y} < 0$; ello equivale a que $\mathbf{A}$ posea algún autovalor positivo y alguno negativo.

Definición 73 (signatura) *Se define la signatura de una matriz hermítica* $\mathbf{A}$*, y se denota por* $\sigma(\mathbf{A})$*, como el número de sus autovalores positivos menos el número de sus autovalores negativos.*

Observación: Obsérvese que la signatura, en conjunción con el rango de la matriz (que coincide con el número de sus autovalores no nulos) nos permite clasificar la matriz.

La siguiente proposición cobrará importancia cuando estudiemos, en el último tema, la descomposición en valores singulares. Obsérvese que cualquier matriz de la forma $\mathbf{A}^h\mathbf{A}$ es hermítica y, por tanto, diagonalizable unitariamante con autovalores reales.

Proposición 35 *Para cualquier matriz* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$*, los autovalores de* $\mathbf{A}^h\mathbf{A}$ *son no negativos. En particular, si* $r(\mathbf{A}) = n$ *(columnas linealmente independientes), los autovalores de* $\mathbf{A}^h\mathbf{A}$ *son todos positivos.*

Demostración: Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor de $\mathbf{A}^h\mathbf{A}$ de vector propio unitario $\mathbf{u}$. Entonces

$$0 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{A}\mathbf{u})^h\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{u}^h\mathbf{A}^h\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{u}^h\lambda\mathbf{u} = \lambda\|\mathbf{u}\|^2 = \lambda. \tag{6.41}$$

En particular, si $r(\mathbf{A}) = n$, $\mathbf{u} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, luego $\lambda = \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|^2$ es positivo.

Corolario: Si $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathbf{A}^h\mathbf{A}$ es semidefinida positiva (definida positiva en caso de ser $r(\mathbf{A}) = n$).

6.4.4. Matrices reales simétricas

Toda matriz real simétrica es en particular una matriz hermítica. Por tanto, se le puede aplicar todo lo visto en esta sección. Pero además, existe un procedimiento más sencillo para clasificarla, sin necesidad de calcular sus autovalores. Nótese que, a estos efectos, no nos interesan las magnitudes de los autovalores, sino tan solo sus signos.

Definición 74 (Congruencia de matrices) *Dadas dos matrices* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, se dicen congruentes entre sí si existe* $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ***regular*** *tal que* $\mathbf{B} = \mathbf{P}^t\mathbf{A}\mathbf{P}$*.*

Observación: Obsérvese que la semejanza ortogonal es un caso particular (muy restrictivo) de congruencia: dos matrices reales simétricas son semejantes ortogonalmente si son congruentes y, además, la matriz de paso $\mathbf{P}$ es ortogonal ($\mathbf{P}^t = \mathbf{P}^{-1}$).

Teorema 15 (Ley de inercia de Sylvester) *Dos matrices reales simétricas, congruentes entre sí, tienen el mismo número de autovalores positivos, el mismo número de negativos y el mismo número de nulos.*

En virtud de este teorema, cuya demostración omitimos, podemos establecer el siguiente procedimiento, denominado **diagonalización por congruencia**, para encontrar los signos de los autovalores de $\mathbf{A}$ real y simétrica, que consistirá simplemente en hallar una matriz congruente con $\mathbf{A}$ que sea diagonal. Sus elementos diagonales no serán, en general, los autovalores de $\mathbf{A}$, pero tendrán los mismos signos que éstos.

Observamos primero que si realizamos una operación elemental sobre las filas de $\mathbf{A}$ y a continuación la misma operación sobre sus columnas, se conserva la simetría de la matriz.

Ello equivale a la post- y premultiplicación por una matriz elemental y su transpuesta: $\mathbf{E}_1^t\mathbf{A}\mathbf{E}_1$, obteniéndose una matriz congruente con la primera.

Reiteramos este proceso hasta obtener una matriz diagonal (lo cual siempre es posible porque equivale a triangularizar $\mathbf{A}$ mediante operaciones elementales de filas), y llegamos a:

$$\mathbf{E}_k^t \cdots \mathbf{E}_2^t\mathbf{E}_1^t\mathbf{A}\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\cdots\mathbf{E}_k = \mathbf{D}, \text{ es decir, } (\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\cdots\mathbf{E}_k)^t\mathbf{A}\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\cdots\mathbf{E}_k = \mathbf{D}. \qquad (6.42)$$

Así pues, tomando $\mathbf{P} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\cdots\mathbf{E}_k$, esto es, la matriz resultante de realizar sobre la identidad las mismas operaciones **de columnas** efectuadas sobre $\mathbf{A}$, tenemos que $\mathbf{P}^t\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$.

Ejemplo: Clasifíquese la matriz real y simétrica $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución: Diagonalizamos por congruencia realizando operaciones gaussianas:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} F_2' & = & F_2 + 2F_1 \\ F_3' & = & F_3 - F_1 \end{array} \right\} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{lcl} C_2' & = & C_2 + 2C_1 \\ C_3' & = & C_3 - C_1 \end{array} \right\} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} F_3' & = & F_3 + F_2 \\ C_3' & = & C_3 + C_2 \end{array} \right\} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así pues, la matriz es indefinida, siendo su rango igual a 2 y su signatura igual a 0.

Nota: Si además deseamos conocer la matriz $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{P}^t\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$, en donde $\mathbf{A}$ es la matriz de partida y $\mathbf{D}$ la diagonal congruente con ella, debemos realizar las mismas operaciones sólo por columnas sobre la matriz identidad, obteniéndose en este caso:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.5. Ejercicios

6.1.– Compruébese que las dos matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son semejantes pero no son unitariamente semejantes.

6.2.– Determínese una base ortonormal de vectores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6.3.– Diagonalícese unitariamente la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.4.– Diagonalícese unitariamente la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Indicación: Utilícense los resultados del ejercicio anterior.

6.5.– Diagonalícese ortogonalmente la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6.6.– Diagonalícese unitariamente la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.7.– *(Ejercicio avanzado)* Demuéstrese que una matriz compleja $\mathbf{A}$ es normal si y solo si cumple que

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \quad \|\mathbf{A}^h \mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|.$$

6.8.– Pruébese que toda matriz ortogonal del espacio tridimensional euclídeo ordinario se reduce a una de las tres posibilidades:

a) Un giro respecto de un eje.

b) Una simetría respecto de un plano.

c) La composición de dos transformaciones de los tipos anteriores.

6.9.– Determínense los valores del parámetro a que hacen definida positiva la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

6.10.– Clasifíquese la siguiente matriz real y simétrica

$$\begin{pmatrix} a+b & -a & -b \\ -a & a+c & -c \\ -b & -c & b+c \end{pmatrix}, \quad a,b,c>0.$$

6.11.– Calcúlense los valores máximo y mínimo de la función R definida en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ mediante

$$R(x,y,z) = \frac{3(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)}{x^2+y^2+z^2},$$

así como los vectores en los que se alcanzan dichos valores.

6.12.– Calcúlense los valores máximo y mínimo que alcanza sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ el cociente

$$\frac{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\|(x,y)\|^2},$$

indicando sobre qué vectores toma dichos valores.

6.13.– Diagonalícese por congruencia cada una de las siguientes matrices, indicando el rango y la signatura:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}; \; b) \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \; c) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -5 & -2 & 8 & 3 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.5.1. Cuestiones

6.14.– Sean a, b, c números reales no nulos. Se considera la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 13 & a & b \\ -a & 13 & c \\ -b & -c & 13 \end{pmatrix}$.

Determínese la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. $\mathbf{A}$ no es diagonalizable unitariamente.
2. $\mathbf{A}$ es diagonalizable unitariamente y todos sus autovalores son reales.
3. $\mathbf{A}$ es diagonalizable unitariamente y todos sus autovalores son imaginarios puros.
4. $\mathbf{A}$ es diagonalizable unitariamente y todos sus autovalores tienen parte real igual a 13.
5. $\mathbf{A}$ es normal.
6. Ningún autovalor de $\mathbf{A}$ es real.
7. Los subespacios propios de $\mathbf{A}$ son ortogonales dos a dos.

6.15.– Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Determínese la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. Si todos los autovalores de $\mathbf{A}$ son reales, entonces $\mathbf{A}$ es hermítica.
2. Si $\mathbf{A}^h\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^h$ y todos sus autovalores tienen módulo unidad, entonces $\mathbf{A}$ es unitaria.
3. $\mathbf{A}$ es diagonalizable unitariamente $\Leftrightarrow \mathbf{A}^h\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^h$.
4. Si $\mathbf{A}$ es normal y todos sus autovalores son reales, entonces $\mathbf{A}$ es real y simétrica.
5. $\mathbf{A}$ es simétrica $\Rightarrow$ $\mathbf{A}$ es diagonalizable unitariamente.
6. $\mathbf{A}$ es normal $\Rightarrow$ sus subespacios propios son ortogonales dos a dos.

Capítulo 7

Descomposición en valores singulares

7.1 Descomposición en valores singulares (DVS) de una matriz. Existencia y determinación de DVS de una matriz. Propiedades de la DVS. Expresiones de los valores singulares máximo y mínimo de una matriz. Matriz pseudoinversa.

7.2 Número de condición espectral de una matriz.

7.3 Normas vectoriales y matriciales. Normas en $\mathbb{C}^{m\times n}$ ($\mathbb{R}^{m\times n}$) o $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$). Normas matriciales inducidas por normas vectoriales.

7.4 Ejercicios.

Introducción

Con este tema concluye la asignatura de Álgebra. La Descomposición en Valores Singulares (DVS) utiliza, compendia y generaliza el contenido de los seis temas anteriores. Así, en la DVS aparecen bases ortogonales de la imagen y el núcleo de una matriz, así como sus suplementarios ortogonales (temas 1 y 3). A partir de la DVS se calcula con facilidad la pseudoinversa de una matriz, que puede considerarse como una generalización del concepto de inversa (tema 2) a cualquier matriz, no necesariamente cuadrada. Cuando la matriz es de rango máximo, la pseudoinversa conduce a la solución de mínimos cuadrados si el sistema es incompatible y a la de mínima norma si es indeterminado. En el caso más general permite hallar la solución de mínima norma de entre las que minimizan el error cuadrático. La DVS permite hallar fácilmente matrices de proyección ortogonal (tema 4).

Por otra parte, la DVS puede verse también como una generalización de la diagonalización por semejanza (tema 5) o de la descomposición espectral de una matriz normal (tema 6), con la ventaja de que existe siempre. El cálculo de la DVS se apoya en el cálculo de los valores y vectores propios de una matriz normal (tema 6), en el teorema de compleción de la base (tema 1) y en la ortogonalización de Gram-Schmidt (tema 3).

La DVS tiene numerosas aplicaciones teóricas y prácticas en diversas ramas de la ingeniería. Sin embargo, su generalidad no la convierte en la panacea general, en el método universal siempre aplicable. Cuando el tamaño crece, resulta mucho más costosa que los métodos alternativos basados en la eliminación de Gauss o en la factorización QR. Por este motivo, su uso debe limitarse a los casos en que sea imprescindible.

7.1. Descomposición en valores singulares (DVS) de una matriz

Teorema 16 *(Existencia de la DVS). Para cualquier matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, de rango igual a r, existen $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, unitaria, $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, unitaria, y $\mathbf{\Sigma} = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, donde $p = \text{mín}\{m, n\}$ tales que*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^h \tag{7.1}$$

y $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_p = 0$.

Demostración: Por la importancia del tema se ofrece a continuación una demostración de tipo constructivo. Es importante porque es el método que se sigue en la práctica para calcular una DVS de una matriz.

Se va a demostrar la existencia de la DVS detallando un procedimiento bien definido para calcular las matrices $\mathbf{U}$, $\mathbf{\Sigma}$ y $\mathbf{V}$, tales que la ec. (7.1) se cumple para cualquier matriz compleja $\mathbf{A}$. Sin pérdida de generalidad se supondrá $m \geq n$. Si $m < n$ el procedimiento que sigue se puede aplicar a $\mathbf{A}^h$.

La matriz $\mathbf{A}^h\mathbf{A}$ es hermítica, con valores propios no negativos. Suponiendo que la factorización (7.1) existe, esta matriz resulta ser:

$$\mathbf{A}^h\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^t\mathbf{U}^h\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^h = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^t\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^h = \mathbf{V}\mathbf{D}_n\mathbf{V}^h \tag{7.2}$$

de donde se deduce que $\mathbf{V}$ es una matriz unitaria que diagonaliza a $\mathbf{A}^h\mathbf{A}$, y $\mathbf{D}_n$ es la correspondiente matriz diagonal de valores propios, reales y no negativos, que se suponen ordenados de mayor a menor,

$$\mathbf{D}_n = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \qquad \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0 \tag{7.3}$$

Teniendo en cuenta que según la ecuación (7.2), $\mathbf{D}_n = \mathbf{\Sigma}^t\mathbf{\Sigma}$, la matriz rectangular y diagonal $\mathbf{\Sigma}$, con elementos diagonales no negativos, queda unívocamente determinada en la forma,

$$\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_n = 0 \tag{7.4}$$

cuyos σ_i son:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{A}^h\mathbf{A})}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{7.5}$$

Las expresiones (7.2) y (7.4) permiten calcular $\mathbf{V}$ y $\mathbf{\Sigma}$. Queda por determinar la matriz $\mathbf{U}$ de modo que sea unitaria y satisfaga la ec. (7.1). A partir de dicha ecuación se tendrá,

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma} \tag{7.6}$$

que en forma desarrollada se puede escribir,

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 & \cdots & \mathbf{V}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1\mathbf{U}_1 & \sigma_2\mathbf{U}_2 & \cdots & \sigma_n\mathbf{U}_n \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

De donde se deduce que

$$\mathbf{U}_j = \frac{\mathbf{A}\mathbf{V}_j}{\sigma_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, r \tag{7.8}$$

La ecuación (7.8) sólo permite calcular las r columnas de $\mathbf{U}$ asociadas con valores singulares no nulos. Como esta matriz debe ser unitaria, hay que demostrar que las columnas obtenidas mediante la ec. (7.8) constituyen un sistema ortonormal. En efecto,

$$\mathbf{U}_i^h\mathbf{U}_j = \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}\mathbf{V}_i^h\mathbf{A}^h\mathbf{A}\mathbf{V}_j = \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}\lambda_j\delta_{ij} = \delta_{ij}, \qquad j = 1, 2, \ldots, r \tag{7.9}$$

Las restantes columnas de $\mathbf{U}$ se pueden calcular ampliando el sistema ortonormal $\{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}_r\}$ a una base ortonormal $(\mathbf{U}_1, \ldots, \mathbf{U}_r, \mathbf{U}_{r+1}, \ldots, \mathbf{U}_m)$ de $\mathbb{C}^m$ de modo que $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1|\cdots|\mathbf{U}_m)$ resulte unitaria.

Para $j = r+1, \ldots, n$, se cumple $\mathbf{A}^h\mathbf{A}\mathbf{V}_j = 0$, y, al ser $\ker\mathbf{A} = \ker\left(\mathbf{A}^h\mathbf{A}\right)$ (véase problema 2.11), se tiene que $\mathbf{A}\mathbf{V}_j = \mathbf{0}$; con lo cual queda totalmente demostrada la fórmula (7.1). $\square$

Definición 75 (valores singulares) *Si* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$*, los*

$$\sigma_j = \sqrt{\lambda_j(\mathbf{A}^h\mathbf{A})}, \; j = 1, 2, \ldots, p \tag{7.10}$$

donde $p = \text{mín}\{m, n\}$*, se denominan* ***valores singulares*** *de* $\mathbf{A}$*.*

Definición 76 (descomposición en valores singulares) *La fórmula* $\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^h$ *se denomina* ***descomposición en valores singulares (DVS) de*** $\mathbf{A}$*.*

Nótese que $\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^h = \sum_{j=1}^{r}\sigma_j\mathbf{U}_j\mathbf{V}_j^h$. Es decir, toda $\mathbf{A}$ de rango r se puede expresar como suma de r matrices de rango 1 utilizando la DVS. Esta observación da lugar a la siguiente definición:

Definición 77 (forma reducida de la DVS) *Si* $\{\mathbf{U}_j, j = 1, ..., r\}$ *es una familia ortonormal de vectores de* $\mathbb{C}^m$*,* $\{\mathbf{V}_j, j = 1, ..., r\}$ *es una familia ortonormal de vectores de* $\mathbb{C}^n$*, y* $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$*, entonces la expresión*

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{r}\sigma_j\mathbf{U}_j\mathbf{V}_j^h$$

se denomina ***forma reducida de la descomposición en valores singulares de*** $\mathbf{A}$*.*

Observación: La DVS no es única, ya que $\mathbf{V}$ no es única y $\mathbf{U}$, en general, tampoco lo es. Según el método de cálculo que se acaba de describir, la indeterminación está en el cálculo de los vectores propios de $\mathbf{A}^h\mathbf{A}$, que constituyen las columnas de la matriz unitaria $\mathbf{V}$ (para valores propios simples de $\mathbf{A}^h\mathbf{A}$ podrían tomarse vectores propios unitarios relacionados por medio del factor $e^{i\varphi}$; para valores propios múltiples podrían elegirse diferentes bases ortonormales del correspondiente subespacio propio). Tampoco el cálculo de las columnas de $\mathbf{U}$ correspondientes a los valores singulares nulos está determinado (la ampliación de la familia ortonormal $\{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}_r\}$, cuando $r < m$, a una base ortonormal de $\mathbb{C}^m$ no es única; sólo queda unívocamente determinada la matriz $\mathbf{U}$ cuando todos los valores singulares son no nulos).

Observación: Las columnas de $\mathbf{U}$ son vectores propios de la matriz $\mathbf{AA}^h$. En efecto, sustituyendo $\mathbf{A}$ por su DVS, dada por (7.1),

$$\mathbf{AA}^h = \mathbf{U\Sigma V}^h\mathbf{V\Sigma}^t\mathbf{U}^h = \mathbf{U\Sigma\Sigma}^t\mathbf{U}^h = \mathbf{UD}_m\mathbf{U}^h \tag{7.11}$$

Sin embargo, no es correcto calcular de modo independiente la matriz $\mathbf{U}$ según la expresión (7.11) y la matriz $\mathbf{V}$ según la expresión (7.2). Una vez calculada una de ellas, la segunda debe ser calculada según la expresión (7.1), tal como se ha hecho para $\mathbf{U}$ a partir de la expresión (7.8).

Observación: Las matrices $\mathbf{A}^h\mathbf{A}$ y $\mathbf{AA}^h$ tienen los mismos valores propios no nulos y con las mismas multiplicidades. Si $m > n$ o $n > m$, el valor propio nulo tendrá multiplicidad algebraica aumentada en $m - n$ en $\mathbf{AA}^h$ o en $n - m$ en $\mathbf{A}^h\mathbf{A}$, respectivamente. De hecho, se sabe que

$$\lambda^m \chi_{\mathbf{A}^h\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n \chi_{\mathbf{AA}^h}(\lambda) \tag{7.12}$$

Este resultado permite calcular los valores singulares de $\mathbf{A}$ (véase (7.10)) a partir de los valores propios de $\mathbf{A}^h\mathbf{A}$ o de $\mathbf{AA}^h$, siendo conveniente elegir la de menor orden. En el caso de efectuar la DVS a partir de $\mathbf{AA}^h$, hay que tener en cuenta que la DVS será la de $\mathbf{A}^h = \mathbf{V\Sigma}^t\mathbf{U}^h$.

7.1.1. Propiedades de la DVS

Se cumplen las siguientes propiedades:

1. Los vectores columna de las matrices $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ proporcionan bases ortonormales de los cuatro subespacios asociados a la matriz $\mathbf{A}$, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\mathbf{A} &= \mathrm{Im}\left(\mathbf{AA}^h\right) = L[\mathbf{U}_1, \ldots, \mathbf{U}_r] \\ \ker\mathbf{A} &= \ker\left(\mathbf{A}^h\mathbf{A}\right) = L[\mathbf{V}_{r+1}, \ldots, \mathbf{V}_n] \\ \ker\mathbf{A}^h &= L[\mathbf{U}_{r+1}, \ldots, \mathbf{U}_m] \\ \mathrm{Im}\mathbf{A}^h &= L[\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_r]. \end{aligned}$$

donde r es el rango de $\mathbf{A}$, y se ha utilizado que $\ker\mathbf{A}^h = (\mathrm{Im}\,\mathbf{A})^\perp$.

2. Si $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es normal, entonces sus valores singulares son los módulos de sus valores propios, comprobémoslo:

   Sea$\mathbf{W}$ una matriz unitaria que diagonalice $\mathbf{A}$, es decir:

$$\mathbf{W}^h\mathbf{A}\mathbf{W} = \mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

   y podemos suponer los valores propios ordenados en módulo de mayor a menor $|\lambda_1| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq 0$, entonces:

$$\mathbf{W}^h\mathbf{A}^h\mathbf{A}\mathbf{W} = \mathbf{W}^h\mathbf{A}^h\mathbf{W}\mathbf{W}^h\mathbf{A}\mathbf{W} = \mathbf{D}^h\mathbf{D} = \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2) = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^n),$$

   de donde se deduce la relación entre los valores propios y los valores singulares: $\sigma_j = |\lambda_j|$.

Representación esquemática de la DVS

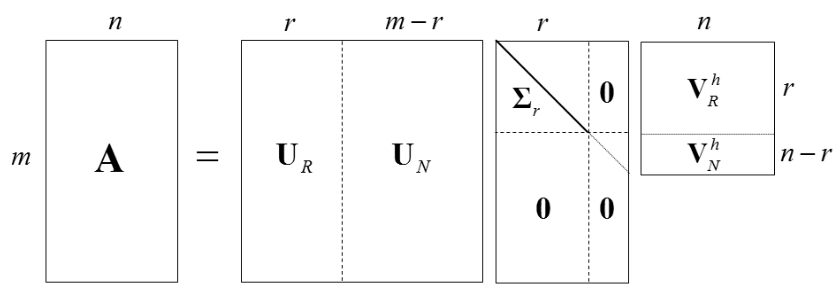


Figura 7.1: Representación gráfica de la DVS de una matriz de rango r.

La Figura 7.1 representa la DVS de una matriz rectangular con $r < n < m$. Las matrices $\mathbf{U}_R$ y $\mathbf{V}_R$ corresponden con las r primeras columnas de $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$, respectivamente. La DVS se puede escribir de las siguientes formas (forma general y forma reducida):

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^h = \mathbf{U}_R\mathbf{\Sigma}_r\mathbf{V}_R^h = \sum_{j=1}^{r}\sigma_j\mathbf{U}_j\mathbf{V}_j^h \tag{7.13}$$

Obsérvense, en primer lugar, los tamaños de las distintas matrices: $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son cuadradas (unitarias), mientras que $\mathbf{\Sigma}$ tiene el mismo tamaño que $\mathbf{A}$. Obsérvese, también, que las submatrices $\mathbf{U}_N$ y $\mathbf{V}_N$ no intervienen en el resultado de la DVS, al estar multiplicadas por submatrices nulas de la matriz $\mathbf{\Sigma}$. Recuérdese que las columnas de $\mathbf{U}_R$ son una base ortonormal de Im$\mathbf{A}$ y que las columnas de $\mathbf{V}_R$ lo son de Im$\mathbf{A}^h$. Asimismo las columnas de $\mathbf{V}_N$ y de $\mathbf{U}_N$ son respectivamente bases ortonormales de ker$\mathbf{A}$ y de ker$\mathbf{A}^h$.

7.1.2. Expresiones de los valores singulares máximo y mínimo de una matriz

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, donde $m \geq n$. Teniendo en cuenta el concepto de norma euclídea de un vector, definida en el capítulo 3, se tienen

$$\sigma_{máx} = \sqrt{\lambda_{máx}(\mathbf{A}^h\mathbf{A})} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 \tag{7.14}$$

$$\sigma_{mín} = \sqrt{\lambda_{mín}(\mathbf{A}^h\mathbf{A})} = \min_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \min_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 \tag{7.15}$$

donde $\sigma_{máx}$ y $\sigma_{mín}$ son, respectivamente, los valores singulares máximo y mínimo de $\mathbf{A}$ y las normas euclídeas se han denotado con el subíndice 2.

La demostración puede realizarse de forma similar a la del teorema 13 del capítulo 6, considerando la diagonalización unitaria de la matriz hermítica $\mathbf{A}^h\mathbf{A}$, cuyos valores propios máximo y mínimo son, respectivamente, $\sigma^2_{máx}$ y $\sigma^2_{mín}$.

En el caso de que $m < n$, bastaría utilizar las fórmulas (7.14) y (7.15) con la matriz $\mathbf{A}^h$ en vez de $\mathbf{A}$.

7.1.3. Matriz pseudoinversa

Definición 78 (matriz pseudoinversa) *La matriz pseudoinversa de* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$*, siendo* $\mathbf{U\Sigma V}^h = \sum_{j=1}^r \sigma_j \mathbf{U}_j \mathbf{V}_j^h$*, una de sus DVS, se define*[1] *como*

$$\mathbf{A}^+ = \sum_{j=1}^r \sigma_j^{-1} \mathbf{V}_j \mathbf{U}_j^h \tag{7.16}$$

A partir de la definición anterior, si $\mathbf{\Sigma} = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ no nulos, es fácil comprobar que

$$\mathbf{\Sigma}^+ = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1^{-1} & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{O} \\ 0 & \cdots & \sigma_r^{-1} & \\ \hline & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

Por tanto, la expresión anterior de la pseudoinversa de $\mathbf{A}$ puede escribirse, tambien, como

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V\Sigma}^+\mathbf{U}^h$$

Proposición 36 *Dado el sistema* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$*, donde* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *y* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$*, la solución de mínimos cuadrados y mínima norma de dicho sistema es* $\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$.

[1] La unicidad de la matriz pseudoinversa será justificada más adelante.

Demostración: Por una parte, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ es solución de mínimos cuadrados:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x}_0 &= \mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \mathbf{A}\left(\sum_{j=1}^{r}\sigma_j^{-1}\mathbf{V}_j\mathbf{U}_j^h\right)\mathbf{b} = \left(\sum_{j=1}^{r}\sigma_j^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}_j\mathbf{U}_j^h\right)\mathbf{b} = \\ &= \left(\sum_{j=1}^{r}\sigma_j^{-1}\sigma_j\mathbf{U}_j\mathbf{U}_j^h\right)\mathbf{b} = \left(\sum_{j=1}^{r}\mathbf{U}_j\mathbf{U}_j^h\right)\mathbf{b} = \mathbf{P}_{\mathrm{Im}\,\mathbf{A}}\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Por otra parte, es solución de mínima norma:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^+\mathbf{b} = \left(\sum_{j=1}^{r}\sigma_j^{-1}\mathbf{V}_j\mathbf{U}_j^h\right)\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{r}\sigma_j^{-1}\mathbf{U}_j^h\mathbf{b}\mathbf{V}_j$$

es decir, $\mathbf{x}_0 \in L\left[\{\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_r\}\right] = \mathrm{Im}\mathbf{A}^h = (\ker\mathbf{A})^\perp$. □

Proposición 37 *La pseudoinversa de* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *está univocamente determinada.*

Demostración: Se cumple, por la proposición anterior, que $\forall\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$, el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una **única** solución de mínimos cuadrados y mínima norma, dada por $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$. Supóngase que existiese otra matriz $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, tal que $\forall\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$ dicha solución fuese $\mathbf{B}\mathbf{b}$. Se tendría, pues, $\forall\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$, $\mathbf{B}\mathbf{b} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$, lo cual implica que $\mathbf{B} = \mathbf{A}^+$. □

7.2. Número de condición espectral de una matriz

En primer lugar se motivará el concepto de número de condición espectral de una matriz.

Perturbación del término independiente de un sistema lineal

Sean $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, de rango igual a n, y el sistema compatible y determinado $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Se desea estudiar la variación $\Delta\mathbf{x}_0$ del vector solución $\mathbf{x}_0$ del sistema inicial ante variaciones $\Delta\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ del vector $\mathbf{b}$, en el supuesto de que el sistema $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ siga siendo compatible y determinado.

Se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x}_0 &= \mathbf{b} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}_0) &= \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}\end{aligned}$$

que equivale a

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} \tag{7.17}$$
$$\mathbf{A}\Delta\mathbf{x}_0 = \Delta\mathbf{b} \tag{7.18}$$

Teniendo en cuenta (7.14) y (7.15) se obtiene

$$\sigma_{máx}(\mathbf{A}) \geq \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}_0\|_2}{\|\mathbf{x}_0\|_2} = \frac{\|\mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{x}_0\|_2} \tag{7.19}$$

$$\sigma_{mín}(\mathbf{A}) \leq \frac{\|\mathbf{A}\Delta\mathbf{x}_0\|_2}{\|\Delta\mathbf{x}_0\|_2} = \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|_2}{\|\Delta\mathbf{x}_0\|_2} \tag{7.20}$$

Y, a partir de lo anterior

$$\begin{aligned} \|\Delta\mathbf{x}_0\|_2 &\leq \frac{1}{\sigma_{mín}(\mathbf{A})}\|\Delta\mathbf{b}\|_2 \\ \frac{1}{\|\mathbf{x}_0\|_2} &\leq \sigma_{máx}(\mathbf{A})\frac{1}{\|\mathbf{b}\|_2} \end{aligned}$$

Multiplicando miembro a miembro se llega a

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}_0\|_2}{\|\mathbf{x}_0\|_2} \leq \frac{\sigma_{máx}(\mathbf{A})}{\sigma_{mín}(\mathbf{A})}\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2} \tag{7.21}$$

Definición 79 (número de condición espectral) *El número de condición espectral de $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, de rango igual a n, que se denota $c_2(\mathbf{A})$, se define como*

$$c_2(\mathbf{A}) = \sqrt{\frac{\lambda_{máx}(\mathbf{A}^h\mathbf{A})}{\lambda_{mín}(\mathbf{A}^h\mathbf{A})}} = \frac{\sigma_{máx}(\mathbf{A})}{\sigma_{mín}(\mathbf{A})}.$$

Si $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es normal e invertible, teniendo en cuenta que los valores singulares de $\mathbf{A}$ coinciden con los módulos de los valores propios de $\mathbf{A}$, se obtiene

$$c_2(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_{máx}(\mathbf{A})}{\sigma_{mín}(\mathbf{A})} = \frac{|\lambda_1(\mathbf{A})|}{|\lambda_n(\mathbf{A})|} \tag{7.22}$$

en el supuesto de que los valores propios de $\mathbf{A}$ cumplen $|\lambda_1(\mathbf{A})| \geq \cdots \geq |\lambda_n(\mathbf{A})| > 0$.

Es inmediato ver que $c_2(\mathbf{A}) \geq 1$.

Definición 80 (error relativo del vector solución) *El cociente $\frac{\|\Delta\mathbf{x}_0\|_2}{\|\mathbf{x}_0\|_2}$, que aparece en (7.21), es el error relativo, medido por la norma euclidea, del vector solución del sistema cuando el vector* $\mathbf{b}$ *se modifica.*

El resultado (7.21) queda, por tanto, como

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}_0\|_2}{\|\mathbf{x}_0\|_2} \leq c_2(\mathbf{A})\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2}$$

Por tanto, el número de condición proporciona una cota superior para el posible aumento del error relativo, cuando se modifica el término independiente del sistema. Esta cota superior es óptima (es decir, alcanzable).

Pueden obtenerse expresiones que relacionan $\Delta\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_0$ y $c_2(\mathbf{A})$, cuando la matriz $\mathbf{A}$ pasa a ser $\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}$ o cuando se modifican conjuntamente la matriz $\mathbf{A}$ y el vector $\mathbf{b}$.

7.3. Normas vectoriales y matriciales

En esta sección se generaliza el concepto de norma de un vector y se extiende a matrices de cualquier tipo. De esta manera se puede cuantificar un error definido como diferencia entre dos matrices. Las normas de vectores y matrices sirven para estudiar cómo se propagan a la solución de los sistemas de ecuaciones lineales los pequeños errores o perturbaciones que se introduzcan en los datos del problema: la matriz y el término independiente. Se define también el número de condición de una matriz, que es un número real mayor o igual que 1 que cuantifica la sensibilidad que esta matriz tiene ante dichos errores. Los valores singulares de una matriz ofrecen la mejor caracterización de dicha sensibilidad. ¿Por qué definir distintos tipos de normas? En espacios de dimensión finita todas las normas son equivalentes lo que significa que si dos vectores o dos matrices son suficientemente parecidos según una norma, también lo serán según cualquier otra norma. La pluralidad de normas se justifica entonces por la mayor o menor dificultad con la que permiten establecer ciertos resultados teóricos y por el muy distinto esfuerzo de cálculo que requieren.

7.3.1. Normas vectoriales

En todo lo que sigue $E = \mathbb{K}^{m\times n}$ o $E = \mathbb{K}^n$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definición 81 *Una norma en E es una aplicación*

$$\|\cdot\| \ : \ E \ \longrightarrow \ \mathbb{R} \tag{7.23}$$

que verifique las siguientes propiedades:

1)

$$\forall \mathbf{z} \in E,\ \|\mathbf{z}\| \geq 0, \ \text{ y } \qquad \|\mathbf{z}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{z} = \mathbf{0}. \tag{7.24}$$

2)

$$\forall \mathbf{z} \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \|\lambda \mathbf{z}\| = |\lambda| \|\mathbf{z}\| \tag{7.25}$$

3)

$$\forall \mathbf{z}, \mathbf{w} \in E,\ \|\mathbf{z}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{z}\| + \|\mathbf{w}\| \qquad \textit{(Desigualdad triangular)}. \tag{7.26}$$

Ejemplo 1. Tres ejemplos clásicos de norma en $E = \mathbb{C}^n$ son:

- **norma 1:**

$$\|\mathbf{z}\|_1 = |z_1| + \cdots + |z_n| \tag{7.27}$$

- **norma 2** o norma euclídea (norma inducida por el producto escalar definido en el capítulo 3, a la que ya se ha hecho referencia al considerar las expresiones de los valores singulares máximo y mínimo):

$$\|\mathbf{z}\|_2 = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2} \tag{7.28}$$

– **norma** ∞ o norma del supremo:

$$\|\mathbf{z}\|_\infty = \max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\} \tag{7.29}$$

Se puede comprobar con relativa facilidad que cada una de las expresiones anteriores satisface las tres condiciones de la definición de norma.

Observación: Toda norma $\|\cdot\|$ en E induce una distancia $d(\mathbf{z}, \mathbf{w}) := \|\mathbf{z} - \mathbf{w}\|$ en E. En particular, la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$ induce la distancia habitual.

Definición 82 (normas equivalentes) *Se dice que dos normas $\|\cdot\|_i$, $\|\cdot\|_j$ en E son* **equivalentes** *si existen unas constantes reales $\alpha, \beta > 0$ tales que*

$$\forall \mathbf{z} \in E, \qquad \alpha\|\mathbf{z}\|_i \leq \|\mathbf{z}\|_j \leq \beta\|\mathbf{z}\|_i \tag{7.30}$$

Proposición 38 *En los espacios vectoriales de dimensión finita todas las normas son equivalentes.*

Ejemplo 2. La **norma de Frobenius** viene definida por

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(\mathbf{A}^h\mathbf{A})} = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{r} \sigma_j^2} \tag{7.31}$$

donde los σ_j son los valores singulares no nulos de $\mathbf{A}$.

7.3.2. Normas matriciales inducidas por normas vectoriales

Definición 83 *Sean $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $\|\cdot\|_p$, $p \in \{1, 2, \infty\}$, una norma vectorial definida tanto en $\mathbb{C}^m$ como en $\mathbb{C}^n$. Se denomina* ***norma matricial*** *$\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{C}^{m\times n}$* ***inducida por*** *dicha* ***norma vectorial*** *a*

$$\|\mathbf{A}\|_p := \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} \tag{7.32}$$

Se puede demostrar de un modo sencillo que la definición anterior verifica las propiedades de norma. En lo sucesivo con frecuencia se omitirá el subíndice p y se entenderá que la norma es una de las normas vectoriales $p = \{1, 2, \infty\}$, y la correspondiente norma matricial inducida.

Como consecuencia de la definición,

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \qquad \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| \tag{7.33}$$

Se verifica

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \left\|\mathbf{A}\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \tag{7.34}$$

Si $\mathbf{A}$ es regular se cumple

$$\|\mathbf{A}^{-1}\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \left(\min_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|\right)^{-1} \tag{7.35}$$

Proposición 39 *Si $\|\cdot\|$ es una norma matricial, inducida por una norma vectorial,*

$$\forall \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}, \forall \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times p}, \qquad \|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\| \tag{7.36}$$

Demostración: *Si $\mathbf{y}$ es un vector unitario tal que $\|\mathbf{AB}\| = \|(\mathbf{AB})\,\mathbf{y}\|$, se tiene:*

$$\|\mathbf{AB}\| = \|(\mathbf{AB})\,\mathbf{y}\| = \|\mathbf{A}\,(\mathbf{By})\| \leq \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{By}\| \leq \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\| \tag{7.37}$$

Ejemplos de normas matriciales inducidas

Ejemplos relevantes de normas matriciales inducidas por normas vectoriales son los siguientes:

- **Norma 1:** Utilizando la norma $\|\cdot\|_1$ en $\mathbb{C}^m$ y $\mathbb{C}^n$,

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{\|\mathbf{u}\|_1=1} \|\mathbf{Au}\|_1 = \max_k \|\mathbf{A}_k\|_1 \tag{7.38}$$

  es decir, coincide con el máximo de las normas 1 de los vectores columna $\mathbf{A}_k$ de $\mathbf{A}$.

- **Norma 2 o norma espectral:** Utilizando la norma $\|\cdot\|_2$ en $\mathbb{C}^m$ y $\mathbb{C}^n$,

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{\|\mathbf{u}\|_2=1} \|\mathbf{Au}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^h\mathbf{A})} = \sigma_{\text{máx}} \tag{7.39}$$

  donde $\rho(\mathbf{A}^h\mathbf{A})$ es el radio espectral de dicha matriz y $\sigma_{\text{máx}}$ es el valor singular máximo de $\mathbf{A}$.

- **Norma ∞:** Utilizando la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{C}^m$ y $\mathbb{C}^n$,

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{\|\mathbf{u}\|_\infty=1} \|\mathbf{Au}\|_\infty = \max_j \|\mathbf{A}^j\|_1 \tag{7.40}$$

  es decir, coincide con el máximo de las normas 1 de los vectores fila $\mathbf{A}^j$ de $\mathbf{A}$.

Se satisfacen las relaciones,

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \|\mathbf{A}^t\|_1, \qquad \|\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{A}^t\|_2 = \|\mathbf{A}^h\|_2 \tag{7.41}$$

y, para cualquiera de las normas 1, 2, ∞ se cumple

$$\|\mathbf{A}\| = \left\|\overline{\mathbf{A}}\right\| \tag{7.42}$$

Observación: La norma de Frobenius no está inducida por ninguna norma vectorial, como se comprueba considerando la matriz identidad de orden n, ya que $\|\mathbf{I}_n\|_F = \sqrt{n}$.

Proposición 40 *Cualquier norma matricial $\|\cdot\|$ en $\mathbb{C}^{n\times n}$ inducida por una norma vectorial verifica*

$$\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\| \tag{7.43}$$

Demostración: Si $\mathbf{x}$ es un vector propio de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, se tiene $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{x}\|$, de donde $|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\|$, lo cual implica que el radio espectral de $\mathbf{A}$ está acotado superiormente por la norma de $\mathbf{A}$. $\square$

7.4. Ejercicios

7.1.– Determínese una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -8 \\ 6 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & -8 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.2.– Hállese una descomposición en valores singulares (DVS) de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

7.3.– Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calcúlese una matriz $\mathbf{Q}$ ortogonal tal que $\mathbf{Q}^t\mathbf{A}\mathbf{Q}$ sea diagonal.
2. Dedúzcase una descomposición en valores singulares $\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^t$ de $\mathbf{A}$, expresando las matrices $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ en función de $\mathbf{Q}$.

7.4.– Sea $\mathbf{A}$ una matriz compleja. Demuéstrense las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{A}, \overline{\mathbf{A}}, \mathbf{A}^t, \mathbf{A}^h$ tienen los mismos valores singulares.
2. Si las filas (o columnas) de $\mathbf{A}$ son ortonormales, entonces los valores singulares de dicha matriz son todos iguales a la unidad. En particular, los valores singulares de una matriz unitaria son 1.
3. Si $\mathbf{A}$ es cuadrada entonces el producto de sus valores singulares coincide con el módulo del determinante de la matriz.

7.5.– Hállese una descomposición en valores singulares (DVS) de la matriz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

así como su pseudoinversa. **Indicación:** Se recomienda diagonalizar (ortogonalmente) en primer lugar $\mathbf{M}^t\mathbf{M}$.

7.6.– Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $\mathbf{A}^+$ su matriz pseudoinversa:

1. Si $m = n$ y $\mathbf{A}$ es invertible, entonces $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$.
2. Si el rango de $\mathbf{A}$ es igual a n, entonces $\mathbf{A}^+ = \left(\mathbf{A}^h\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^h$.

3. Si el rango de $\mathbf{A}$ es igual a m, entonces $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^h \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^h\right)^{-1}$.

7.7.– Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calcúlense sus valores singulares.

2. Hállese una descomposición en valores singulares $\mathbf{U\Sigma V}^t$ de $\mathbf{A}$, de modo que la primera columna de $\mathbf{V}$ sea un vector canónico.

3. Calcúlese la pseudoinversa de $\mathbf{A}$ como suma de r matrices de rango 1, siendo r el rango de la matriz $\mathbf{A}$.

4. Calcúlese la solución de mínimos cuadrados y mínima norma del sistema $\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7.8.– Determínese el número de condición espectral de la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -11 & -2 \end{pmatrix}$.

7.9.– Hállense las normas 1, 2 e ∞ de los siguientes vectores:

$$\mathbf{u} = (1, -2, 0, 2)\,, \qquad \mathbf{v} = (1, -i, 3+4i, -2+i)\,.$$

7.10.– Represéntese los conjuntos del plano $\mathbb{R}^2$ y del espacio $\mathbb{R}^3$ determinados por las siguientes condiciones:

$$\|\mathbf{x}\|_1 \leq 1, \qquad \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1, \qquad \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1$$

7.11.– Hállese la norma 2 de cada una de las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

7.12.– Estúdiese la relación entre el radio y la norma espectrales de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$. Compruébese que el resultado se extiende a cualquier matriz normal.

7.4.1. Cuestiones

7.13.– Se considera la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Indíquese la única proposición falsa:

1. $\mathbf{A}$ sólo tiene dos valores singulares distintos
2. La norma espectral de $\mathbf{A}$ vale 28
3. $\min\limits_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sqrt{14}$
4. El número de condición espectral de $\mathbf{A}$ vale $\sqrt{2}$

7.14.– Se considera la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Indíquese la única proposición falsa:

1. $\|\mathbf{A}\|_1 = 6$
2. El número de condición espectral de $\mathbf{A}$ vale $\sqrt{5}$
3. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\frac{\|\mathbf{Ax}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \leq \sqrt{5}$
4. $\|\mathbf{A}\|_\infty = 3$

7.15.– Se considera la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Indíquense las proposiciones verdaderas y las falsas:

1. Para todo vector $\mathbf{u}$ unitario de $\mathbb{R}^3$, $\|\mathbf{Au}\|_2 \geq \sqrt{2}$
2. $\|\mathbf{A}^t\|_2 = \|\mathbf{A}\|_2$

3. Todos los autovalores de $\mathbf{AA}^t$ son reales y no negativos

4. El número de condición espectral de $\mathbf{A}$ vale 5

5. $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{10}$

7.16.– Si $\mathbf{M}^+$ es la matriz pseudoinversa de $\mathbf{M}$, indíquense las proposiciones verdaderas y las falsas:

1. Si $\mathbf{P}$ es una matriz de proyección ortogonal, entonces $\mathbf{P}^+ = \mathbf{P}$

2. Si $\mathbf{S}$ es una matriz de simetría ortogonal, entonces $\mathbf{S}^+ = \mathbf{S}$

3. Si $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ de rango igual a n, entonces $\mathbf{A}^+ = \left(\mathbf{A}^h\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^h$

4. Si $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ de rango igual a m, entonces $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^h\left(\mathbf{AA}^h\right)^{-1}$

5. Si $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A}$ es invertible.

Soluciones a los ejercicios propuestos

Capítulo 1

1.1.–

1. Puesto que los tres vectores forman una matriz cuadrada de orden 3, el procedimiento más sencillo consiste en averiguar para qué valores del parámetro no se anula el determinante de dicha matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a + 3 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 3$$

   que son los valores de a que hacen linealmente independientes dichos vectores.

2. Precisamente para este valor el vector $(a, 1, 0)$ depende linealmente de los dos primeros, por lo que tenemos que estudiar si el nuevo vector $(1, 1, -1)$ depende linealmente de aquéllos. Por el mismo procedimiento de antes,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

   luego el tercer vector es combinación lineal de los dos primeros. De hecho, se aprecia a simple vista que es la diferencia entre el segundo y el primero.

1.2.–

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & \lambda & 3 \\ 3 & 2 & 5 & \mu \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & \mu-9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 20-4\lambda & 3\mu-27 \end{pmatrix}$$

(en el último paso se ha multiplicado la tercera fila por 3 y se le ha restado la segunda multiplicada por 4). La independencia lineal equivale a que la última fila de esta matriz triangular tenga algún elemento no nulo, es decir, a que $(\lambda, \mu) \neq (5, 9)$.

1.3.– Escribimos los tres vectores como las filas de una matriz (alterando el orden para facilitar las operaciones) y procedemos a triangular mediante operaciones gaussianas:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1-i & 1 \\ 1+i & 1 & 0 \\ 1+i & 1-3i & 1-i \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} F_3' = F_3 - F_2 \\ F_2' = F_2 + (1+i)F_1 \end{array} \right\} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1-i & 1 \\ 0 & 3 & 1+i \\ 0 & -3i & 1-i \end{pmatrix}$$

$$\left\{ F_3'' = F_3' + iF_2' \right\} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1-i & 1 \\ 0 & 3 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que nos permite concluir que los tres vectores son linealmente dependientes.
Otra forma: También se podría haber calculado el determinante de la matriz y como da 0 (compruébese), se tiene los tres vectores son linealmente dependientes.

1.4.–

1. P está constituido por los vectores de $\mathbb{R}^4$ que satisfacen **simultáneamente** dos ecuaciones implícitas **homogéneas**, lo cual como sabemos caracteriza a un subespacio.

   $\dim P = 4 - 2 = 2$ pues está caracterizado por dos ecuaciones en $\mathbb{R}^4$. Si en dichas ecuaciones tratamos (x_3, x_4) como parámetros libres y les damos los valores $(1,0)$ y $(0,1)$, obtenemos dos vectores de P linealmente independientes, es decir, una base de P: $((1,0,1,0),(0,1,0,1))$.

2. La condición de pertenencia a H equivale a $x+y+z=0 \vee x-y+z=0$, es decir, la **unión** de dos planos de $\mathbb{R}^3$ que (salvo que fuesen coincidentes) **no** es subespacio. En efecto, los vectores $(1,-1,0)$ y $(1,1,0)$ pertenecen a H, mientras que su suma $(2,0,0)$ no pertenece. Así pues, este conjunto no es cerrado para la suma.

3. M no puede ser subespacio puesto que no contiene al vector nulo.

4. El vector nulo pertenece a N, pues su producto vectorial por cualquier vector es $\mathbf{0}$. Sean dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in N$, es decir, $\mathbf{u} \times (1,2,-1) = \mathbf{0}$ y $\mathbf{v} \times (1,2,-1) = \mathbf{0}$; sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cualesquiera escalares. Veamos si podemos concluir que la combinación lineal $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ pertenece a N. En efecto, por las propiedades del producto vectorial,

   $$(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \times (1,2,-1) = (\alpha\mathbf{u}) \times (1,2,-1) + (\beta\mathbf{v}) \times (1,2,-1) =$$

   $$= \alpha(\mathbf{u} \times (1,2,-1)) + \beta(\mathbf{v} \times (1,2,-1)) = \alpha\mathbf{0} + \beta\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

   Así pues, N es cerrado para las combinaciones lineales, es decir, subespacio vectorial.

   Otra forma: Desarrollando el producto vectorial tenemos que los vectores de N son aquellos que cumplen que $(x,y,z) \times (1,2,-1) = (-y+2z, x+z, 2x+y) = (0,0,0)$. Igualando coordenada a coordenada, tenemos tres ecuaciones implícitas homogéneas y por lo tanto es un espacio vectorial. De las tres ecuaciones solo dos son linealmente independientes (compruébese). Por tanto, cualquier vector no nulo que cumpla las ecuaciones será una base.

Otra forma: N está formado por los vectores cuyo producto vectorial por $(1, 2, -1)$ es nulo, es decir, los proporcionales a $(1, 2, -1)$, luego $N = L[(1, 2, -1)]$. Ello nos permite a su vez concluir que una base la constituye ese mismo vector.

5. Sabemos que la unión de subespacios no lo es salvo que uno de ellos se encuentre contenido en el otro. Así pues, nuestra tarea se reduce a comprobar si la recta está contenida en el plano, o lo que es lo mismo, si el vector $(1, -3, 2)$ es combinación lineal de $(1, -2, 1), (1, -1, 0)$. En efecto,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

nos indica que el tercer vector depende linealmente de los dos primeros. En conclusión, en este caso sí tenemos un subespacio, que coincide con $L[(1, -2, 1), (1, -1, 0)]$.

Así pues, es obvio que una base es $((1, -2, 1), (1, -1, 0))$.

6. De nuevo tenemos una unión de subespacios, pero en esta ocasión

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

lo que garantiza que los tres vectores son linealmente independientes; así,
$L[(2, -3, 0)] \not\subseteq L[(1, -2, 1), (1, -1, 0)]$ y no tenemos subespacio.
También podríamos haber concluido que los vectores eran linealmente independientes viendo que el determinante de la matriz es distinto de 0.

1.5.–

1. El tercer vector es 7 veces el primero menos el doble del segundo. (Escríbase la matriz cuyas filas son dichos vectores, triangúlese mediante operaciones gaussianas y se observará que los tres restantes vectores son linealmente independientes.)

2. Por ejemplo, $((1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (0, 1, 0, -1))$ (hemos suprimido el tercer vector porque sabemos que es combinación lineal de los restantes).

3. Basta ampliar la anterior con un cuarto vector de la forma $(2, 2, 2, c)$ y que sea independiente de los de la base anterior. Tras los cálculos, resulta ser válido para todo $c \neq 2$.

1.6.–

$$(a, b, c) = x_1(1, 1, 0) + x_2(1, 0, 1) + x_3(0, 1, 1) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_3).$$

Se trata de resolver el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= a \\ x_1 + x_3 &= b \\ x_2 + x_3 &= c \end{aligned}$$

Es sencillo observar que sumando las dos primeras ecuaciones y restando la tercera, obtenemos $2x_1 = a + b - c$, es decir, $x_1 = \dfrac{a+b-c}{2}$.

Procediendo de igual modo con x_2 y x_3 (o simplemente observando la simetría de a, b, c respecto a x_1, x_2, x_3), concluimos que el vector de coordenadas es

$$(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}\left(a + b - c, a - b + c, -a + b + c\right).$$

1.7.– Debemos comprobar que los vectores de $\mathcal{V}$ son linealmente independientes. Tomamos una combinación lineal arbitraria de dichos vectores y la igualamos a $\mathbf{0}$,

$$\alpha(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3) + \beta(-2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \gamma(-\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) = \mathbf{0},$$

lo que equivale a

$$(\alpha - 2\beta)\mathbf{u}_1 + (\beta - \gamma)\mathbf{u}_2 + (\alpha + \gamma)\mathbf{u}_3 = \mathbf{0},$$

lo que, en virtud de la independencia lineal de los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, implica que los tres coeficientes de esta última combinación lineal son nulos. Ello nos proporciona un sistema lineal homogéneo en α, β, γ cuya matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(obsérvese que sus columnas son los vectores de coordenadas respecto a $\mathcal{B}$ de los vectores de $\mathcal{V}$), que mediante operaciones gaussianas entre las filas nos conduce a

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es decir: el sistema sólo tiene la solución nula, lo que asegura que los tres vectores de $\mathcal{V}$ son linealmente independientes y, por consiguiente, $\mathcal{V}$ es base de $\mathbb{R}^3$.

Para calcular el vector de coordenadas pedido, igualamos las dos expresiones de dicho vector,

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \alpha(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3) + \beta(\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_1) + \gamma(\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2) = (\alpha - 2\beta)\mathbf{u}_1 + (\beta - \gamma)\mathbf{u}_2 + (\alpha + \gamma)\mathbf{u}_3$$

y, por la unicidad de las coordenadas, nos queda el sistema

$$\begin{aligned} \alpha - 2\beta &= 1 \\ \beta - \gamma &= 1 \\ \alpha + \gamma &= 1 \end{aligned}$$

Lo escribimos matricialmente y resolvemos por el método de eliminación de Gauss triangularizando la matriz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

que despejando "de abajo a arriba" nos proporciona $\gamma = -\frac{2}{3}$, $\beta = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$.

El vector de coordenadas es $\dfrac{1}{3}(5, 1, -2)$.

1.8.–

1. Dado que la base está compuesta de 3 vectores, el número de ecuaciones independientes será $5 - 3 = 2$. Si escribimos las ecuaciones paramétricas de M,

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha + \gamma \\ x_2 &= \beta + \gamma \\ x_3 &= \alpha - \beta \\ x_4 &= \beta - \gamma \\ x_5 &= \alpha - \gamma \end{aligned}$$

observamos fácilmente que $x_3 = x_1 - x_2 = x_5 - x_4$, luego unas ecuaciones implícitas son

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ x_3 + x_4 - x_5 &= 0. \end{aligned}$$

2. Como ya disponemos de las ecuaciones, basta imponer que el vector dado las verifique, es decir: $1 - 1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 0$; $0 + b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1$.

3.
$$(1, 1, 0, 1, 1) = \lambda(1, 0, 1, 0, 1) + \mu(0, 1, -1, 1, 0) + \nu(1, 1, 0, -1, -1)$$

equivale al sistema

$$\begin{aligned} \lambda + \nu &= 1 \\ \mu + \nu &= 1 \\ \lambda - \mu &= 0 \\ \mu - \nu &= 1 \\ \lambda - \nu &= 1 \end{aligned}$$

cuya resolución es inmediata y proporciona los valores $\lambda = \mu = 1, \nu = 0$.

El vector de coordenadas es, pues, $(1, 1, 0)$. También podríamos haber observado por simple inspección que el vector considerado es la suma de los dos primeros de la base.

1.9.–

1. Escribiendo los tres vectores como filas de una matriz y realizando dos sencillas operaciones de reducción gaussiana,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

observamos que la dimensión del subespacio es 2, luego el número de ecuaciones implícitas independientes será $4-2=2$. Una base es por ejemplo $((1,2,0,1), (0,-2,1,-2))$. Así, las ecuaciones paramétricas serán $x_1=\alpha, x_2=2\alpha-2\beta, x_3=\beta, x_4=\alpha-2\beta$. De ahí se deduce inmediatamente que $x_2=2x_1-2x_3$ y $x_4=x_1-2x_3$, con lo que unas ecuaciones implícitas de H pueden ser:

$$\begin{aligned} x_1-2x_3-x_4 &= 0 \\ 2x_1-x_2-2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

<u>Otra forma:</u> Colocamos los tres vectores como las columnas de una matriz, y forzamos, realizando operaciones de reducción gaussiana por filas, a que un cuarto vector columna genérico de $\mathbb{R}^4$ sea combinación lineal de ellos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 0 & -2 & x_2 \\ 0 & 1 & 2 & x_3 \\ 1 & -1 & -3 & x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -2 & -4 & x_2-2x_1 \\ 0 & 1 & 2 & x_3 \\ 0 & -2 & -4 & x_4-x_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_3+x_2-2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_3+x_4-x_1 \end{array}\right)$$

lo que nos permite deducir las mismas ecuaciones implícitas obtenidas antes.

<u>Nota:</u> Pese a haberse obtenido casualmente las mismas ecuaciones por ambos procedimientos, existe una infinidad de pares de ecuaciones implícitas equivalentes; se trata en definitiva de dos ecuaciones independientes cualesquiera que sean verificadas por los vectores que generan H.

2. La dimensión de cualquier suplementario de H vale $4-2=2$. Para encontrar un suplementario bajo los requisitos del enunciado, debemos hallar dos vectores cuyas combinaciones lineales satisfagan dichos requisitos y sean linealmente independientes con los dos que generan H. Probamos, por ejemplo, con $(1,0,1,1),(0,0,1,1)$ (sus combinaciones lineales tienen sus dos últimas componentes iguales, pero no todas nulas), y comprobamos si al reunirlos con una base de H obtenemos una base de $\mathbb{R}^4$. Por comodidad en las operaciones colocamos estos dos vectores como la primera y la última fila de una matriz, y mediante sencillas operaciones gaussianas,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

concluimos que los cuatro vectores son linealmente independientes y por tanto nuestra elección ha sido válida. Así, una base de un posible suplementario la constituye $((1,0,1,1),(0,0,1,1))$, de donde se deduce inmediatamente que unas ecuaciones implícitas de dicho subespacio son $x_2=0, x_3-x_4=0$.

<u>Nota:</u> El suplementario, aun verificando la condición adicional exigida por el enunciado, no es único.

1.10.– El subespacio V tiene dimensión $4-2=2$ (ya que una de las ecuaciones depende linealmente de las otras dos). Su suplementario en $\mathbb{R}^4$ es cualquier subespacio L de dimensión 2 ($\dim L = 4-\dim V = 2$) tal que $L\cap V=\{(0,0,0,0)\}$. Por tanto, dicho suplementario no es único. Basta tomar, por ejemplo, el subespacio L de ecuaciones $x_1=x_2=0$, que son dos ecuaciones independientes de las que determinan V.

1.11.–

1. Es claro que $((1,0,2,2),(1,1,0,1))$ es una base de U. Así, unas ecuaciones paramétricas de U son $x_1=\alpha+\beta$, $x_2=\beta$, $x_3=2\alpha$ y $x_4=2\alpha+\beta$. De aquí podemos obtener inmediatamente unas ecuaciones implícitas de U: $x_1=x_2+x_3/2$ y $x_4=x_2+x_3$.

   El vector $(1,2,-2,0)$ de la base de V cumple estas ecuaciones y por tanto la $\dim(U\cap V)\geq 1$. De hecho, como el vector $(0,1,1,2)$ no cumple las ecuaciones de U tenemos que $\dim(U\cap V)=1$ y de la relación de Grassmann $\dim(U+V)=3$. Una base de $U\cap V$ es la formada por el vector $(1,2,-2,0)$ que ya hemos visto que pertenece a ambos subespacios. Una manera sencilla de obtener una base de $U+V$ es dar 3 vectores linealmente independientes que estén en U o en V. Por ejemplo, una posible base de $U+V$ es $((1,0,2,2),(1,2,-2,0),(0,1,1,2))$ dada por un vector de U que no está en V, un vector de $U\cap V$ y un vector de V que no está en U (3 vectores de $U+V$ linealmente independientes).
   <u>Nota:</u> Estas bases no son únicas.

2. Como antes, se tiene que $((1,2,1,0),(0,-1,0,1))$ es una base de U. Así, unas ecuaciones paramétricas de U son $x_1=\alpha$, $x_2=2\alpha-\beta$, $x_3=\alpha$ y $x_4=\beta$. De aquí podemos obtener inmediatamente unas ecuaciones implícitas de U: $x_1=x_3$ y $x_2=2x_1-x_4$.
   A simple vista, unas ecuaciones implícitas de V son $x_1=x_2$ y $x_3=x_4$.
   Entonces $U\cap V$ es el conjunto de vectores que cumplen las ecuaciones de U y V a la vez. Estos son los vectores tal que $x_1=x_2=x_3=x_4$, y una base de este subespacio es la formada por el vector $(1,1,1,1)$. Aplicando la relación de Grassmann obtenemos que $\dim(U+V)=2+2-1=3$ y una posible base de $U+V$ es $((0,-1,0,1),(1,1,1,1),(0,0,1,1))$ formada por un vector de U que no está en V, un vector de $U\cap V$ y un vector de V que no está en U (3 vectores de $U+V$ linealmente independientes).
   <u>Nota:</u> Las bases dadas no son únicas. Nótese también que ninguno de los dos vectores de la base de V pertenece a U y sin embargo $U\cap V\neq\{(0,0,0,0)\}$.

1.12.– Tanto F como G están contenidos en $F+G$, cuya dimensión no puede exceder de la suma de las dimensiones ni de la del total $\mathbb{R}^n$, luego

$$\text{máx}(p,q) \le \dim(F+G) \le \text{mín}(p+q,n).$$

Por otro lado, $F \cap G$ está contenido tanto en F como en G, y como la relación de Grassmann nos dice que $\dim(F\cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F+G) \ge \dim F + \dim G - n$,

$$\text{máx}(0, p+q-n) \le \dim(F\cap G) \le \text{mín}(p,q).$$

1.13.–

1. Es claro que los vectores pedidos son:

$$\mathbf{q}_1 = (1,1,1,1),\ \mathbf{q}_2 = (-1,2,-2,1),\ \mathbf{q}_3 = (1,4,0,3),\ \mathbf{q}_4 = (3,0,4,1).$$

2. Este apartado puede hacerse de varias formas; lo más sencillo es aplicar reducción gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2'=F_2+F_1, \\ F_3'=F_3-F_1, \\ F_4'=F_4-3F_1;}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Se concluye que los vectores $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_2$ generan H y son linealmente independientes, por tanto tomamos como base $\mathcal{B}_H = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$.

3. Tenemos que encontrar dos vectores que junto con $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_2$ formen una base de $\mathbb{R}^4$. Lo más sencillo es tantear con los vectores canónicos. Si escogemos, por ejemplo, los dos primeros $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ resulta:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

así pues podemos tomar T como el subespacio que admite por base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Para hacer la descomposición que nos piden, buscamos las coordenadas de $\mathbf{v}$ en la base $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$$

sustituyendo:

$$(3,-2,3,0) = a_1(1,1,1,1) + a_2(-1,2,-2,1) + b_1(1,0,0,0) + b_2(0,1,0,0)$$

operando llegamos a $a_1 = -a_2 = b_1 = -b_2 = 1$, es decir:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = (2, -1, 3, 0) + (1, -1, 0, 0).$$

El vector $(2, -1, 3, 0)$ pertenece a H y $(1, -1, 0, 0)$ a T.

Nota: El suplementario no es único. De hecho, se puede elegir un suplementario T que contenga al vector $\mathbf{v}$. En dicho caso, como $\mathbf{v} \in T$ tendríamos que $\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{v}$ con $\mathbf{0} \in H$ y $\mathbf{v} \in T$.

4. El vector $\mathbf{v}$ corresponde al polinomio $V(x)$, el vector $(1, 0, 0, 0)$ al polinomio 1 y $(0, 1, 0, 0)$ al x, por tanto

   $$V(x) = 3 - 2x + 3x^2 = a_1 Q_1(x) + a_2 Q_2(x) + b_1 + b_2 x = Q_1(x) - Q_2(x) + 1 - x.$$

   Nota: Está descomposición dependerá del suplementario T escogido en el apartado anterior y de su base.

1.14.– 1. F / 2. V / 3. F / 4. F / 5. V

1.15.– 1. V / 2. V / 3. V / 4. F / 5. V

1.16.– 1. F / 2. F / 3. V / 4. F / 5. F

1.17.– 1. V / 2. V / 3. V / 4. V / 5. F

1.18.– 1. V / 2. F / 3. F / 4. F / 5. V

Capítulo 2

1.1.– Podemos escribir el vector $(2,-1)$ como combinación lineal de los del enunciado, de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 13 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

luego, por la propiedad de linealidad,

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 5f\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 13f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} - 13\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ -59 \\ -47 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, la matriz de la aplicación lineal f es aquella matriz $\mathbf{A}$ que verifica $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$. De los datos anteriores se deduce que

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

entonces podemos hallar dicha matriz $\mathbf{A}$ como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 29 & -17 \\ -23 & 13 \\ -18 & 11 \end{pmatrix}.$$

De ello también se deduciría que la imagen por f de $(2,-1)$ es

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & -17 \\ -23 & 13 \\ -18 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ -59 \\ -47 \end{pmatrix}.$$

1.2.– La matriz buscada puede calcularse así:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}.$$

1.3.– Para $a = 3$, $\dim \operatorname{Im} \mathbf{A} = r(\mathbf{A}) = 2$ y $\dim \ker \mathbf{A} = 4 - 2 = 2$. Unas ecuaciones paramétricas del núcleo son

$$\begin{cases} x_1 = -8\alpha - 17\beta \\ x_2 = 5\alpha + \beta \\ x_3 = 7\alpha \\ x_4 = 7\beta \end{cases}$$

y una base de la imagen es $((1,2,1),(2,5,1))$.

Observación: Un procedimiento general para encontrar una base para la imagen de una matriz $\mathbf{A}$, es reducir mediante operaciones elementales por **columnas** a la matriz $\mathbf{A}$. Los vectores no nulos que nos queden al final del proceso, serán una base del subespacio $\operatorname{Im}\mathbf{A}$.

Aplicando el procedimiento anterior a la matriz $\mathbf{A}$ (para $a=3$), nos queda:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, una base alternativa para $\operatorname{Im}\mathbf{A}$ es la constituida por los vectores $((1,2,1),(0,1,-1))$.

Para $a \neq 3$, $\dim \operatorname{Im}\mathbf{A} = r(\mathbf{A}) = 3$, $\dim\ker\mathbf{A} = 4-3 = 1$, la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es una base de $\operatorname{Im}\mathbf{A}$ y unas ecuaciones paramétricas del núcleo son:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 = 11\alpha \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = -5\alpha \end{array} \right. .$$

1.4.–

1. La matriz pedida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

   Otra forma: Teniendo en cuenta que el producto de cualquier matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ por el j-ésimo vector canónico da como resultado la j-ésima columna de $\mathbf{A}$, es decir $\mathbf{A}\mathbf{e}_j = C_j(\mathbf{A})$, nos queda:

$$C_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Por otro lado,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = C_1(\mathbf{A}) + C_2(\mathbf{A})$$

$$\Rightarrow \quad C_2(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Para la tercera columna de $\mathbf{A}$ tenemos:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} &= \mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{A}(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3) = C_1(\mathbf{A})+C_2(\mathbf{A})+C_3(\mathbf{A})\\ &\Rightarrow\ C_3(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2. Una base del núcleo es $((1,2,1))$ y una base de la imagen es $((3,2,1),(-1,-2,-3))$. Unas ecuaciones cartesianas del núcleo son $2x-y=0; y-2z=0$. Una ecuación cartesiana de la imagen es $x-2y+z=0$.

3. Los transformados de los vectores de M son combinación lineal de los transformados de los vectores que generan M, y éstos son:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}.$$

   Dado que $((1,-2,-5),(4,4,4))$ son vectores linealmente independientes, podemos asegurar que forman base de dicho subespacio.

1.5.–

1. Puesto que $4 = \dim(\ker\mathbf{A}) + \dim(\operatorname{Im}\mathbf{A})$ y $1 \le \dim(\operatorname{Im}\mathbf{A}) < \dim(\ker\mathbf{A})$, la única posibilidad es $\dim(\operatorname{Im}\mathbf{A}) = 1$ y $\dim(\ker\mathbf{A}) = 3$, luego $r(\mathbf{A}) = 1$.

2. Observamos que $(1,2,3,4)+(4,3,2,1) = (5,5,5,5)$ y $(4,3,2,1)\in\ker\mathbf{A}$, luego el vector suma de las 4 columnas de $\mathbf{A}$ es

$$C_1(\mathbf{A})+C_2(\mathbf{A})+C_3(\mathbf{A})+C_4(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\mathbf{A}\begin{pmatrix}5\\5\\5\\5\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\mathbf{A}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+\mathbf{A}\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{5}\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{3}{5}\\\frac{2}{5}\\\frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

1.6.– Para calcular el rango de la matriz cuadrada $\mathbf{M}$ de orden n, a cada columna restamos la siguiente (empezando desde la primera columna hasta la penúltima); esto nos lleva a la matriz

$$\begin{pmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ b-a & a-b & \ddots & \vdots & 0 & b \\ 0 & b-a & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a-b & 0 & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & b-a & a-b & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b-a & a \end{pmatrix}$$

que tiene el mismo rango que $\mathbf{M}$. A continuación, a la primera fila le sumamos todas las demás, obteniendo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (n-1)\,b+a \\ b-a & a-b & \ddots & \vdots & 0 & b \\ 0 & b-a & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a-b & 0 & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & b-a & a-b & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b-a & a \end{pmatrix}.$$

Si además colocamos la primera fila en último lugar, llegamos a una matriz escalonada que tiene el mismo rango que $\mathbf{M}$:

$$\begin{pmatrix} b-a & a-b & \ddots & \vdots & 0 & b \\ 0 & b-a & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a-b & 0 & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & b-a & a-b & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b-a & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a+(n-1)\,b \end{pmatrix}$$

luego el rango es máximo si $a \neq b$ y $a \neq (1-n)b$; en ese caso $\mathbf{M}$ es invertible. Además, el rango de $\mathbf{M}$ es:

- n si $a \neq b$ y $a \neq (1-n)b$
- $n-1$ si $a = (1-n)b \neq 0$
- 1 si $a = b \neq 0$
- 0 si $a = b = 0$.

1.7.– Las inversas son, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 58 & -26 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -49 & 22 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$$

1.8.– Si a cada fila se le resta la posterior multiplicada por a, se obtiene la matriz identidad; realizando el mismo proceso sobre las filas de la identidad se deduce la inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En general, toda matriz triangular proviene de realizar combinaciones lineales entre las filas de la matriz identidad, del tipo $a_{k,k}F_k + \sum_{m>k} a_{k,m}F_m$ (para triangulares superiores, por ejemplo), desde la primera fila ($k = 1$) hasta la última ($k = n$). La matriz es invertible si y sólo si dichas operaciones son reversibles, y para ello es necesario y suficiente que $a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}$ (elementos de la diagonal principal) sean no nulos. En tal caso, la operaciones elementales inversas son del tipo $a_{k,k}^{-1}(F_k - \sum_{m>k} a_{k,m}F_m)$, desde la última fila ($k = n$) hasta la primera ($k = 1$). Efectuadas sobre las filas de la identidad, proporcionan la matriz inversa, que resulta ser triangular del mismo tipo (superior, en el caso del ejemplo indicado).

1.9.– Considerando desde la última fila hasta la segunda de la matriz del enunciado, si a cada fila se le suman todas sus anteriores, se obtiene una matriz bidiagonal (del tipo de la del ejercicio anterior, con $a = 1$); si a continuación a cada fila (desde la penúltima a la primera) se le suma su siguiente fila, se obtiene finalmente la matriz identidad. Ello indica que este tipo de matrices son invertibles, y sus inversas se obtienen efectuando esas mismas operaciones sobre las filas de la matriz identidad.

En el caso particular de la matriz de orden 6 del enunciado, su inversa es

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para el caso general de la matriz de orden n con la misma estructura de la del enunciado, realizando estas mismas operaciones entre filas se llega a que su inversa es

$$\begin{pmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n-1 & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estos son ejemplos de matrices dispersas (es decir, con gran cantidad de elementos nulos) cuyas inversas no son dispersas.

1.10.–

1. El vector de coordenadas de $\mathbf{v} = (2,1,1)$ respecto a la base $\mathcal{B}$ es el vector $[\mathbf{v}]^{\mathcal{B}}$ solución del sistema
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} [\mathbf{v}]^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Resolviéndolo se obtienen las coordenadas $[\mathbf{v}]^{\mathcal{B}} = (3,-2,-3)^t$.

2. La matriz $\mathbf{P}$ de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{V}$ tiene por columnas las coordenadas de los vectores de $\mathcal{V}$ respecto de la base $\mathcal{B}$. Por ejemplo, su primera columna será el vector de coordenadas obtenido en el apartado anterior. Procediendo columna a columna hallaríamos la matriz $\mathbf{P}$; de hecho, obsérvese que estaríamos resolviendo la ecuación matricial
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
de donde se obtiene explícitamente
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$
Nótese que esto coincide con la expresión $\mathbf{P} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{V}$ explicada en los apuntes (donde $\mathbf{B}$ es la matriz cuyas columnas contienen los vectores de la base $\mathcal{B}$, y $\mathbf{V}$ tiene por columnas los vectores de la base $\mathcal{V}$).

3. La matriz.de cambio de base de $\mathcal{V}$ a $\mathcal{B}$ es la inversa de la de cambio de base de de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{V}$, es decir,
$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

4. Se nos dice que un vector $\mathbf{u}$ tiene coordenadas $[\mathbf{u}]^{\mathcal{B}} = (1,2,3)^t$ respecto a la base $\mathcal{B}$ y nos piden sus coordenadas $[\mathbf{u}]^{\mathcal{V}}$ respecto a la base $\mathcal{V}$. Esto quiere decir que

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}\ [\mathbf{u}]^{\mathcal{B}} = \mathbf{V}\ [\mathbf{u}]^{\mathcal{V}}.$$

Despejamos la incógnita $[\mathbf{u}]^{\mathcal{V}}$:

$$[\mathbf{u}]^{\mathcal{V}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}\ [\mathbf{u}]^{\mathcal{B}} = \mathbf{P}^{-1}\,[\mathbf{u}]^{\mathcal{B}}$$

y simplemente operamos, aprovechando la matriz obtenida en el apartado anterior:

$$[\mathbf{u}]^{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que desde el principio también podíamos haber aplicado directamente la expresión que aparece en los apuntes:

$$[\mathbf{u}]^{\mathcal{B}} = \mathbf{P}\,[\mathbf{u}]^{\mathcal{V}}$$

de donde se deduce inmediatamente: $[\mathbf{u}]^{\mathcal{V}} = \mathbf{P}^{-1}\,[\mathbf{u}]^{\mathcal{B}}$, llegando al mismo resultado.

1.11.– El contenido $\ker \mathbf{A} \subset \ker \mathbf{A}^h\mathbf{A}$ es trivial. El contenido $\ker \mathbf{A}^h\mathbf{A} \subset \ker \mathbf{A}$ se deduce de

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} \in \ker \mathbf{A}^h\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A}^h\mathbf{A}\mathbf{u} = 0 \Rightarrow \mathbf{u}^h\mathbf{A}^h\mathbf{A}\mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{A}\mathbf{u})^h(\mathbf{A}\mathbf{u}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |(\mathbf{A}\mathbf{u})_i|^2 = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{A}\mathbf{u})_i = 0 \quad \forall i = 1,...,n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{u} \in \ker \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Por tanto, $r(\mathbf{A}^h\mathbf{A}) = n - \dim\ker \mathbf{A}^h\mathbf{A} = n - \dim\ker \mathbf{A} = r(\mathbf{A})$, y

$$\mathbf{A}^h\mathbf{A} = \mathbf{O} \Leftrightarrow \ker \mathbf{A}^h\mathbf{A} = \mathbb{C}^n \Leftrightarrow \ker \mathbf{A} = \mathbb{C}^n \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{O}.$$

1.12.– Las matrices $\mathbf{BC}$ y $\mathbf{CB}$ son cuadradas de orden n y m respectivamente. Léase atentamente la cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} \text{traza } (\mathbf{BC}) &= \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{BC})_{kk} = \sum_{k=1}^{n} F_k(\mathbf{B})C_k(\mathbf{C}) \\ = \sum_{k=1}^{n}(b_{k1}c_{1k} + \cdots + b_{km}c_{mk}) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} b_{kj}c_{jk}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} c_{jk}b_{kj}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} F_j(\mathbf{C})C_j(\mathbf{B}) = \sum_{j=1}^{m}(\mathbf{CB})_{jj} = \text{ traza } (\mathbf{CB}) \end{aligned}$$

1.13.– En efecto, una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ tiene rango 1 si y sólo si es no nula, y sus columnas son proporcionales a un vector $\mathbf{a}$; por tanto puede escribirse como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \mathbf{ab}^t$$

de donde se obtiene que todas sus filas son proporcionales al vector $\mathbf{b}^t$.

Además, si la matriz es cuadrada ($m = n$), entonces se verifica

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{ab}^t\mathbf{ab}^t = \mathbf{a}(\mathbf{b}^t\mathbf{a})\mathbf{b}^t = (\mathbf{b}^t\mathbf{a})\mathbf{A},$$

donde hemos utilizado que $\mathbf{b}^t\mathbf{a}$ es un número y por tanto conmuta con la matriz $\mathbf{A} = \mathbf{ab}^t$. De hecho, ese número $\mathbf{b}^t\mathbf{a} = \sum_{k=1}^n b_ka_k$ coincide exactamente con la suma de los elementos de la diagonal principal de $\mathbf{A}$; es decir, es la traza de $\mathbf{A}$. Por todo ello, $\mathbf{A}^2 = \mathrm{traza}\,(\mathbf{A})\,\mathbf{A}$.

1.14.– La solución del primer sistema es : $x = 3-z-\frac{19}{6}v$, $y = \frac{5}{2}-\frac{3}{2}z-\frac{5}{6}v$, $u = -\frac{3}{2}-\frac{5}{2}z+\frac{3}{2}v$ $\forall z, v \in \mathbb{R}$. La del segundo resulta $x = 2y + 3$, $z = -y$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

1.15.– Si denominamos (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$ los tres vértices incógnita, relacionándolos con sus puntos medios se llega a plantear los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 + x_2 = 8 \\ x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + x_3 = 4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} y_1 + y_2 = 2 \\ y_2 + y_3 = 4 \\ y_1 + y_3 = 6 \end{array}\right.$$

que dan como solución los vértices $(0, 2)$, (8,0) y (4,4). La solución es única puesto que la matriz de coeficientes es invertible; sin embargo, para el problema del cuadrilátero, la matriz de coeficientes resulta ser

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que no es invertible pues no posee rango máximo, ya que la suma de las columnas pares es igual a la suma de las impares. En general, la matriz de orden n

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es invertible si y sólo si n es impar (lo cual puede comprobarse, por ejemplo, desarrollando por la primera columna el determinante de dicha matriz). En resumen, el problema de calcular los vértices de un polígono de n lados a partir de sus puntos medios sólo tiene solución si n es impar.

1.16.– Aplicando el método de Gauss, el primer sistema es equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & b^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & b(1-b) \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & 1+b-(a+1)b^2 \end{array}\right).$$

Por tanto, es compatible determinado si y sólo si $a \notin \{1, -2\}$. Si $a = 1$, obviamente el sistema tiene solución (no única) sólo cuando $b = 1$. Si $a = -2$, existe solución (indeterminada) cuando y sólo cuando $1 + b + b^2 = 0$, es decir, si $b = (1 + i\sqrt{3})/2$ o bien $b = (1 - i\sqrt{3})/2$.

Las mismas operaciones entre filas llevan el segundo sistema a la forma

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & ab & b \\ 0 & a-1 & b(1-a) & 1-b \\ 0 & 0 & b(1-a)(a+2) & 2-(a+1)b \end{array}\right).$$

Se observa que tiene solución única si y sólo si $a \notin \{1, -2\}$ y $b \neq 0$ simultáneamente; posee infinitas soluciones si $a = b = 1$ o bien si $a = b = -2$, y en el resto de los casos es incompatible.

1.17.– La respuesta correcta es (C).

1.18.– 1. V / 2. F / 3. V / 4. V / 5. F

1.19.– 1. F / 2. F / 3. F / 4. V / 5. V / 6. F

1.20.– 1. V / 2. V / 3. F / 4. F / 5. V

Capítulo 3

3.1.– Dados los vectores $(2,-1,1)$ y $(1,0,1)$, su producto escalar es $\langle (2,-1,1), (1,0,1)\rangle = 3$, sus normas respectivas son $\|(2,-1,1)\| = \sqrt{6}$, $\|(1,0,1)\| = \sqrt{2}$ y y el ángulo que forman cumple

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

así que $\alpha = \pi/6$.

3.2.– Por la desigualdad triangular se tiene

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}-\mathbf{x}+\mathbf{x}-\mathbf{w}\| \overset{(*)}{\leq} \|\mathbf{v}-\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}-\mathbf{w}\|.$$

Sabemos (véase pág. 51) que la igualdad en $(*)$ se da si y solo si los vectores son proporcionales con constante de proporcionalidad no negativa, luego existe $a \geq 0$ tal que

$$\mathbf{v}-\mathbf{x} = a(\mathbf{x}-\mathbf{w}),$$

despejamos $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{1+a}(\mathbf{v}+a\mathbf{w}).$$

Obsérvese que $1+a > 0$ ya que a es no negativo.

3.3.– Si se impone que el producto escalar entre cada dos de ellos sea nulo, se llega a $a = 2$, $b = 9$, $c = 2$.

3.4.– Se deduce fácilmente observando que $\langle \mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}-\mathbf{w}\rangle = \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2$.

3.5.– Para demostrar la igualdad $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ probaremos en primer lugar $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$:

$$\mathbf{x} \in (F+G)^\perp \Leftrightarrow \forall \mathbf{y} \in F+G \quad \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = 0$$

$$F \subset F+G \Rightarrow \forall \mathbf{y} \in F \ \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{x} \in F^\perp;\ G \subset F+G \Rightarrow \forall \mathbf{y} \in G \ \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{x} \in G^\perp$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} \in F^\perp \cap G^\perp.$$

Y ahora comprobemos que también se verifica $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in F^\perp \cap G^\perp &\Rightarrow \forall \mathbf{y} \in F \ \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = 0 \wedge \forall \mathbf{z} \in G \ \langle \mathbf{x},\mathbf{z}\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \forall (\mathbf{y}+\mathbf{z}) \in F+G \ \langle \mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z}\rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{x} \in (F+G)^\perp. \end{aligned}$$

Demuéstrese el segundo apartado aplicando el primero y sabiendo que para un subespacio cualquiera $M \subset \mathbb{R}^n$ se cumple $(M^\perp)^\perp = M$.

3.6.– $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),\ \frac{1}{\sqrt{54}}(5,5,2)\right)$.

3.7.– Se trata de un hiperplano L y una recta M, cuyo vector director es $(1,1,\ldots,1)^t$, precisamente el vector normal al hiperplano L. Por tanto, son subespacios suplementarios ortogonales.

Por otro lado, cada vector $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ puede escribirse como

$$\mathbf{x} = (x_1 - c, \cdots, x_n - c) + c(1, \ldots, 1)$$

donde $c = \ (x_1 + \cdots + x_n)/n$, de forma que $\mathbf{x}$ se ha escrito como un vector de L más otro de M (denominados proyección ortogonal de $\mathbf{x}$ sobre L y M, respectivamente).

En particular, si $\mathbf{x} = (1,0,0,\cdots,0)^t$ su proyección ortogonal sobre L es

$$\frac{1}{n}(n-1, -1, \cdots, -1).$$

3.8.– $\frac{1}{3}(4{,}0,2,2)$.

3.9.–

1. $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}(-2,1,1,1)\right)$.

2.
$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.10.– La distancia entre un vector y un subespacio es la norma de la diferencia entre el vector dado y su proyección sobre dicho subespacio. En este caso se obtiene que la distancia es 2.

3.11.– 1. En virtud del teorema de la proyección ortogonal el vector $\mathbf{u}$ puede expresarse como $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v} + \mathbf{w}$ para un cierto escalar λ y $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$, siendo $\mathbf{Pu} := \lambda\mathbf{v}$ la proyección pedida. Determinamos λ multiplicando escalarmente por $\mathbf{v}$:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \lambda\mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \lambda\|\mathbf{v}\|^2 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \lambda\|\mathbf{v}\|^2;$$

al ser $\mathbf{v}$ no nulo, su norma es positiva y podemos despejar λ, con lo que obtenemos:

$$\mathbf{Pu} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}.$$

2. $\mathbf{Pu} = \frac{\mathbf{v}^t\mathbf{u}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^t}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{u}$. La matriz pedida es $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^t}{\|\mathbf{v}\|^2}$.

3.

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^t}{\|\mathbf{v}\|^2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de $\mathbf{P}$ es 1, sus columnas son proporcionales a $\mathbf{v}$, por lo que una base de la imagen es $(\mathbf{v})$. La matriz $\mathbf{P}$ es simétrica, entonces (véase fórmula (3.14)) su núcleo e imagen son suplementarios ortogonales. Dos vectores ortogonales y ortogonales a $(\mathbf{v})$ nos darán una base ortogonal del núcleo, por ejemplo:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right).$$

4. La reunión de bases ortonormales de núcleo e imagen de $\mathbf{P}$ nos proporcionan la base pedida:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right).$$

3.12.– Para calcular a hacemos el determinante de la matriz formada por los tres vectores,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1.$$

El menor entero positivo es $a = 1$. Para ortonormalizar por Gram–Schmidt, síganse las fórmulas (3.26) con la misma notación. Entonces:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{q}_2 = \frac{\tilde{\mathbf{q}}_2}{\|\tilde{\mathbf{q}}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathbf{q}}_3 = \mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_2 \rangle \mathbf{q}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{q}_3 = \frac{\tilde{\mathbf{q}}_3}{\|\tilde{\mathbf{q}}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La base pedida es:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

3.13.– Para calcular las columnas de la matriz $\mathbf{Q}$ se aplica el método de Gram-Schmidt a las columnas de la matriz propuesta, a la que llamaremos $\mathbf{A}$, y se obtiene:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se tiene $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ $(*)$ con $\mathbf{R}$ triangular superior de orden 3; observemos que para obtener esta matriz no hace falta despejar las columnas de $\mathbf{A}$ en función de las de $\mathbf{Q}$, basta con multiplicar por la izquierda en $(*)$ por $\mathbf{Q}^t$ y tener presente que $\mathbf{Q}^t\mathbf{Q} = \mathbf{I}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR} \Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{Q}^t\mathbf{QR} = \mathbf{Q}^t\mathbf{A}.$$

Al efectuar este último producto se llega a:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -10 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

3.14.– $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$, $c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3.15.– Sea $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz ortogonal; es decir $\mathbf{Q}^t\mathbf{Q} = \mathbf{I}$. Efectuando el producto llegamos a:

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 = 1 &\Rightarrow \exists\ \theta \in \mathbb{R},\ a = \cos\theta, c = \operatorname{sen}\theta \\ b^2 + d^2 = 1 &\Rightarrow \exists\ \varphi \in \mathbb{R},\ b = \cos\varphi, d = \operatorname{sen}\varphi \\ ab + cd = 0 &\Rightarrow \cos\theta\cos\varphi + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi = 0 \\ &\Rightarrow \cos(\theta - \varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \theta + \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{3.44}$$

Por otro lado, $\det\mathbf{Q} = ad - bc$, pero, conforme a las fórmulas anteriores

$$ad - bc = \cos\theta\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\varphi - \theta) \tag{3.45}$$

Si $\det\mathbf{Q} = 1$, combinando (3.44) y (3.45) se llega a

$$\varphi = \theta + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \cos\varphi = -\operatorname{sen}\theta,\ \operatorname{sen}\varphi = \cos\theta;$$

1. Por tanto, las matrices ortogonales de orden 2 y determinante 1 son de la forma:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{3.46}$$

2. La aplicación $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Qx}$ transforma el primer vector canónico $\mathbf{e}_1$ en la primera columna de $\mathbf{Q}$, geométricamente equivale a girar $\mathbf{e}_1$ un ángulo θ en sentido antihorario, y lo mismo vale para el segundo vector canónico que se transforma en la segunda columna de $\mathbf{Q}$. Debido a la linealidad, transformar por $\mathbf{Q}$ un vector cualquiera consiste en girarlo un ángulo θ en sentido antihorario. Además, un ejercicio elemental prueba $\mathbf{x}^t\mathbf{Qx} = \cos\theta\ \|\mathbf{x}\|^2$ para cualquier vector $\mathbf{x}$. Si este es no nulo, entonces forma un ángulo con su transformado cuyo coseno es $\cos\theta$.

3.16.–

$$\begin{gathered} \langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \mathbf{v}^h\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = -2i \neq 0; \\ \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = |1 + i|^2 + |-1 + i|^2 = 4,\ \|\mathbf{u}\|^2 = 2 = \|\mathbf{v}\|^2 \end{gathered}$$

Observamos que se cumple $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ a pesar de que los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no son ortogonales. Este resultado no contradice el teorema de Pitágoras que solo es cierto para espacios **reales**.

3.17.–

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2, \\ \|\mathbf{u} + i\mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \langle\mathbf{u}, i\mathbf{v}\rangle + \langle i\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2. \end{aligned}$$

Las condiciones del enunciado equivalen a

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 2\mathrm{Re}\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbf{u}, i\mathbf{v} \rangle + \langle i\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = -i\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + i\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 2\,\mathrm{Im}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Pero si el número complejo $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ tiene partes real e imaginaria nulas es nulo, luego se concluye que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.

3.18.– $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3.19.– De la condición $\mathbf{U}^h\mathbf{U} = \mathbf{I}$ se obtiene que $\mathbf{A}^t\mathbf{A} + \mathbf{B}^t\mathbf{B} = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^t\mathbf{B} = \mathbf{B}^t\mathbf{A}$. Por tanto

$$\mathbf{M}^t\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^t & \mathbf{B}^t \\ -\mathbf{B}^t & \mathbf{A}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^t\mathbf{A} + \mathbf{B}^t\mathbf{B} & -\mathbf{A}^t\mathbf{B} + \mathbf{B}^t\mathbf{A} \\ -\mathbf{B}^t\mathbf{A} + \mathbf{A}^t\mathbf{B} & \mathbf{B}^t\mathbf{B} + \mathbf{A}^t\mathbf{A} \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

3.20.– 1. V / 2. F / 3. F / 4. V / 5. F

3.21.– 1. F / 2. V / 3. V / 4. F

3.22.– 1. F / 2. V / 3. F / 4. V / 5. V / 6. V

3.23.– 1. V / 2. F / 3. V / 4. F

Capítulo 4

4.1.– Una base de la recta $x = y = 2z$ es $((2,2,1))$. Por tanto, la matriz de proyección ortogonal sobre dicha recta es

$$\mathbf{P} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de simetría ortogonal respecto de dicha recta es

$$\mathbf{S} = 2\mathbf{P} - \mathbf{I} = \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 8 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

4.2.– La recta, subespacio suplementario ortogonal del plano $2x + 2y + z = 0$ es $L\left[(2,2,1)\right]$. Por tanto, la matriz de proyección ortogonal sobre dicho plano es

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

La matriz de simetría ortogonal respecto a dicho plano es

$$\mathbf{S} = 2\mathbf{P} - \mathbf{I} = \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que se trata de la matriz de Householder, definida por el vector $\mathbf{v} = (2,2,1)^t$, de modo que puede ser calculada mediante la expresión:

$$\mathbf{S} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{v}^t\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^t$$

y, luego, calcular la matriz de proyección ortogonal por medio de $\mathbf{P} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I} + \mathbf{S}\right)$.

Obsérvese, también, que es igual a la matriz opuesta de la obtenida en el ejercicio 4.1, ya que $2x + 2y + z = 0$ y $L\left[(2,2,1)\right]$ son suplementarios ortogonales.

4.3.– Una base del subespacio de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right.$$

es $\left((1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\right)$. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, entonces la matriz de proyección ortogonal sobre dicho subespacio es:

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^t\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

De modo alternativo, dado que la base obtenida es ortogonal, basta considerar los vectores columna $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 0, 0)^t$, $\mathbf{u}_2 = (0, 0, 1, -1)^t$ y aplicar la fórmula

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^t}{\|\mathbf{u}_1\|^2} + \frac{\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^t}{\|\mathbf{u}_2\|^2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un último método consiste en normalizar los dos vectores de dicha base, para obtener la matriz de proyección ortogonal por medio de:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.4.–

1. Para que $\mathbf{P} = a\begin{pmatrix} b & c & -2 \\ -4 & 5 & d \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sea proyección ortogonal es necesario y suficiente que $\mathbf{P}$ sea simétrica e idempotente ($\mathbf{P} = \mathbf{P}^t$ y $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$). Por la simetría de $\mathbf{P}$ se tiene $c = -4, d = -2$. Introduciéndolos en la igualdad $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$, se obtiene:

$$a\begin{pmatrix} b & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} = a^2\begin{pmatrix} b^2+20 & -4b-16 & -2b-8 \\ -4b-16 & 45 & -18 \\ -2b-8 & -18 & 72 \end{pmatrix},$$

   de donde se deduce $a = \frac{1}{9}, b = 5$.

2. El subespacio sobre el que proyecta $\mathbf{P} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ es su subespacio columna (es decir, la imagen de $\mathbf{P}$). Como el rango de $\mathbf{P}$ es igual a 2, una base de dicho subespacio M es $((-2, -2, 8), (-4, 5, -2))$, o bien $((1, 1, -4), (0, 1, -2))$. Una base ortonormal es, por ejemplo, $\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}(1, 1, -4), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)\right)$.

3. La matriz de la proyección ortogonal sobre $M^\perp$ es $\mathbf{I} - \mathbf{P} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4.5.–

1. La matriz de Householder, definida por el vector $\mathbf{v}$, viene dada por $\mathbf{H_v}\,(2,2,-1)^t = (3,0,0)^t$. Por tanto, puede determinarse $\mathbf{v} = (2,2,-1) - (3,0,0) = (-1,2,-1)$, y dicha matriz de Householder es:
$$\mathbf{H_v} = \mathbf{I} - \frac{2}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
Puede demostrarse que, en general, si $\mathbf{v} = \mathbf{u} - (\|\mathbf{u}\|, 0, \ldots, 0) \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{H_v u} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{u}\| & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^t$. Además, no existe otra matriz de Householder $\mathbf{H} \neq \mathbf{H_v}$ que cumpla $\mathbf{Hu} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{u}\| & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^t$.

2. La matriz de Householder, definida por el vector $\mathbf{w}$, viene dada por $\mathbf{H_w}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$. Por tanto, $\mathbf{w} = (2,2,-1) - (-3,0,0) = (5,2,-1)$, y dicha matriz de Householder es:
$$\mathbf{H_w} = \mathbf{I} - \frac{2}{30}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} - \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 25 & 10 & -5 \\ 10 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -10 & -10 & 5 \\ -10 & 11 & 2 \\ 5 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ (obtenidos en ambos apartados) son ortogonales entre sí. Este último resultado puede comprobarse de modo general: sean
$$\mathbf{H_v x} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{x}\| & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^t \qquad \mathbf{H_w x} = \begin{pmatrix} -\|\mathbf{x}\| & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^t.$$
Entonces $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\,\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{w} = \mathbf{x} + \|\mathbf{x}\|\,\mathbf{e}_1$, donde $\mathbf{e}_1$ es el primer vector canónico, y se tiene que
$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\,\mathbf{e}_1, \mathbf{x} + \|\mathbf{x}\|\,\mathbf{e}_1 \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + x_1\|\mathbf{x}\| - x_1\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}\|^2 = 0.$$

4.6.– La matriz de coeficientes del sistema incompatible
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
es de rango igual a 2; por tanto, su solución de mínimos cuadrados es única. Dicha solución puede obtenerse a partir de las ecuaciones normales (sistema que resulta compatible determinado):
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$
resultando $x = \frac{1}{3}, y = 1$.

4.7.– La matriz de coeficientes del sistema incompatible

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es de rango igual a 2; por tanto, su solución de mínimos cuadrados es única. Dicha solución puede obtenerse a partir de las ecuaciones normales (sistema que resulta compatible determinado):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

resultando $x = \frac{3}{2}, y = -\frac{3}{2}$.

4.8.– Obsérvese que

$$\sum_{k=1}^{n} (mx_k + p - y_k)^2 = \left\| \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \mathbf{A} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} - \mathbf{y} \right\|^2$$

Los valores m, p que minimizan esta expresión son las soluciones de mínimos cuadrados del sistema de matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ (de rango 2, ya que las abscisas x_k se supone que no son todas iguales) y vector de términos independientes $\mathbf{y}$. Por tanto, la solución de mínimos cuadrados es única y se calcula resolviendo el sistema compatible y determinado de ecuaciones normales:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 & \sum_{k=1}^{n} x_k \\ \sum_{k=1}^{n} x_k & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ \sum_{k=1}^{n} y_k \end{pmatrix}$$

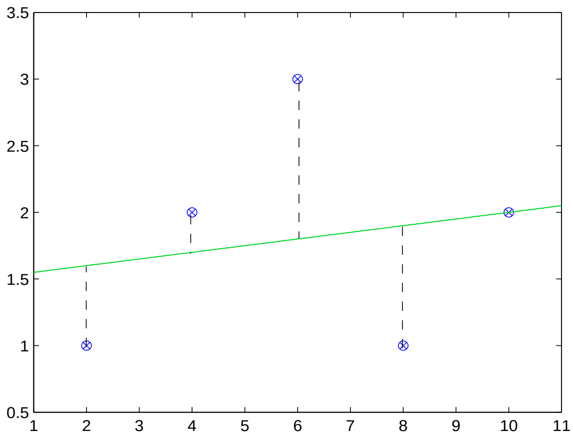
Para resolverlo, es cómodo utilizar las definiciones de media, que se denotará $\bar{x}$, y varianza de un vector $\mathbf{x}$, que se denotará $\sigma_{\mathbf{x}}$, a saber:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad \sigma_{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2;$$

y la correlación entre dos vectores $\sigma_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right) - \bar{x}\bar{y}$. Se obtienen finalmente las soluciones

$$m = \frac{\sigma_{\mathbf{x},\mathbf{y}}}{\sigma_{\mathbf{x}}}, \quad p = \bar{y} - \frac{\sigma_{\mathbf{x},\mathbf{y}}}{\sigma_{\mathbf{x}}} \bar{x}.$$

En Estadística, la recta de regresión suele escribirse como $y = \frac{\sigma_{\mathbf{x},\mathbf{y}}}{\sigma_{\mathbf{x}}}(x - \bar{x}) + \bar{y}$. En el caso particular del enunciado, la recta de regresión es $y = 0{,}05x + 1{,}5$ tal y como aparece en la siguiente figura.



Puntos del ejemplo y recta de regresión asociada

4.9.– La solución de mínima norma del sistema de ecuaciones compatible e indeterminado

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}$$

es la única solución que pertenece a $\mathrm{Im}\mathbf{A}^t$, siendo $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes del sistema anterior.

Por tanto, el vector solución será de la forma $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \\ -\alpha+\beta \\ \alpha-\beta \end{pmatrix}$, cuyas componentes han de cumplir las ecuaciones del sistema; es decir,

$$\left\{ \begin{aligned} 4\alpha - 2\beta &= 2 \\ -2\alpha + 4\beta &= 2 \end{aligned} \right. ,$$

cuyas soluciones son $\alpha = \beta = 1$. De donde se deduce que la solución de mínima norma es $(2, 0, 0, 0)$.

OTRO MÉTODO, **sólo válido si las filas de A son independientes**: en ese caso, la solución de mínima norma del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ viene dada por la fórmula

$$\mathbf{x}_{min} = \mathbf{A}^h \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^h\right)^{-1} \mathbf{b}.$$

En este ejercicio, $\mathbf{A}$ es una matriz de 2 filas independientes, así que podemos aplicar esta fórmula (y al ser matriz real, $\mathbf{A}^h = \mathbf{A}^t$):

$$\mathbf{x}_{min} = \mathbf{A}^t \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^t\right)^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4.10.–

1. Se observa fácilmente que el subespacio F es un plano de ecuación $x-y+z=0$. Su subespacio ortogonal es la recta $L[(1,-1,1)]$; por tanto, la proyección de $\mathbf{v}=(1,1,1)$ sobre el plano F puede calcularse como
$$\mathbf{P}_F(\mathbf{v})=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

2. Las soluciones de mínimos cuadrados (o pseudosoluciones) del sistema $\mathbf{Ax}=\mathbf{v}$ son las soluciones del sistema
$$\mathbf{Ax}=\mathbf{P}_{\mathrm{Im}(\mathbf{A})}(\mathbf{v}).$$
En este caso, vemos que las columnas de $\mathbf{A}$ generan el subespacio F, luego $\mathrm{Im}(\mathbf{A})=F$ y basta resolver el sistema $\mathbf{Ax}=\mathbf{P}_F(\mathbf{v})$, es decir:
$$\mathbf{Ax}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$
Se obtienen fácilmente las soluciones de dicho sistema: el vector de términos independientes es igual a la segunda columna de $\mathbf{A}$, multiplicada por $\frac{2}{3}$, luego una solución particular es $\left(0,\frac{2}{3},0\right)^t$. Y por otro lado $\ker(\mathbf{A})=L[(1,-1,1)^t]$ luego las soluciones pedidas son
$$\mathbf{x}=\left(t,\frac{2}{3}-t,t\right),\quad t\in\mathbb{R}.$$
Estas son las soluciones de mínimos cuadrados del sistema inicial $\mathbf{Ax}=(1,1,1)^t$. Obsérvese que las mismas pseudosoluciones se habrían obtenido también mediante las ecuaciones normales, que es otro método aplicable.

   De entre ellas, la de mínima norma es aquella ortogonal a los vectores de una base del núcleo de $\mathbf{A}$, esto es, ortogonal al vector $(1,-1,1)$. Por tanto, ha de cumplirse $t-\left(\frac{2}{3}-t\right)+t=0$; resultando $t=\frac{2}{9}$. La solución de mínimos cuadrados y mínima norma es, finalmente, $\frac{2}{9}(1,2,1)$.

4.11.–

1. Para que $\mathbf{S}=a\begin{pmatrix}1&b&-8\\c&7&-4\\d&-4&1\end{pmatrix}$ sea simetría ortogonal es necesario y suficiente que $\mathbf{S}$ sea simétrica y ortogonal ($\mathbf{S}=\mathbf{S}^t$ y $\mathbf{S}^t\mathbf{S}=\mathbf{I}$). Por la simetría de $\mathbf{S}$ se tiene $b=c$ y $d=-8$; y por ser $\mathbf{S}$ ortogonal $b+7c-4d=0, -8-4c+d=0, -8b-28-4=0$. Dichas ecuaciones tienen como soluciones $b=-4, c=-4, d=-8$. Además, por ser $\mathbf{S}$ ortogonal, cada columna es un vector unitario, lo cual implica que $81a^2=1$; es decir, $a=\pm\frac{1}{9}$.

2. Si $a = \frac{1}{9}$, entonces $\mathbf{S} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{S}$ simetriza respecto al subespacio $L = \operatorname{Im}(\mathbf{S}+\mathbf{I}) = \ker(\mathbf{S}-\mathbf{I})$ que es el plano de ecuación $2x + y + 2z = 0$. Una base de dicho plano está constituida por $\mathbf{u}_1 = (1,-2,0)^t$, $\mathbf{u}_2 = (0,2,-1)^t$; ortogonalizándolos por Gram-Schmidt, se tiene:

$$\mathbf{v}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ -1 \end{pmatrix}$$

y normalizando, se obtiene la base ortonormal pedida: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$.

3. Si $a = -\frac{1}{9}$, entonces $\mathbf{S} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{S}$ simetriza respecto al subespacio $M = \operatorname{Im}(\mathbf{S}+\mathbf{I}) = \ker(\mathbf{S}-\mathbf{I})$, cuyas ecuaciones implícitas son

$$\begin{cases} 5x - 2y - 4z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

es decir, se trata de una recta vectorial, generada por el vector $(2,1,2)$.

4. La recta M, subespacio de dimensión 1, obtenida en el apartado 3., está generada por el vector $(2,1,2)$, que es ortogonal al plano L de dimensión 2. Por tanto, M es el subespacio suplementario ortogonal de L en $\mathbb{R}^3$.

   También puede razonarse sabiendo que si $\mathbf{S}$ es una simetría ortogonal respecto a un subespacio F, entonces $-\mathbf{S}$ es una simetría ortogonal respecto a $F^\perp$. En efecto, si $\mathbf{P}$ es la proyección ortogonal respecto a F, entonces $\mathbf{S} = 2\mathbf{P} - \mathbf{I}$; de donde $-\mathbf{S} = \mathbf{I} - 2\mathbf{P} = 2(\mathbf{I}-\mathbf{P}) - \mathbf{I}$, y se sabe que $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ es la proyección ortogonal sobre $F^\perp$.

5. Para que $\mathbf{S}$ sea una matriz de Householder tiene que ser una simetría respecto a un plano (hiperplano en $\mathbb{R}^3$). Dicha situación se presenta en el caso 2. En ese caso la matriz de Householder está definida por el vector $\mathbf{v} = (2,1,2)$, o cualquier otro vector proporcional a él, no nulo.

4.12.– Utilizamos la fórmula que proporciona la matriz del giro

$$\mathbf{G} = \mathbf{P} + (\cos\varphi)(\mathbf{I}-\mathbf{P}) + (\operatorname{sen}\varphi)\,\tilde{\mathbf{u}}.$$

En este caso el ángulo de giro es $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, el eje de giro viene dado por el vector unitario $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^t$, y, a partir de él se definen las matrices

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}\mathbf{u}^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Introduciéndolo en la fórmula se obtiene

$$\mathbf{G} = \mathbf{P} + \left(\frac{-1}{2}\right)(\mathbf{I} - \mathbf{P}) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\tilde{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.13.– La única proposición falsa es la tercera.

4.14.– 1. F / 2. V / 3. V / 4. V / 5. V

4.15.– La proposición es verdadera

En efecto, las ecuaciones normales del sistema $\mathbf{Px} = \mathbf{b}$ vienen dadas por $\mathbf{P}^t\mathbf{Px} = \mathbf{P}^t\mathbf{b}$, que equivale, al ser $\mathbf{P}$ simétrica e idempotente, a $\mathbf{Px} = \mathbf{Pb}$. $\mathbf{x} = \mathbf{Pb}$ es una solución de mínimos cuadrados del sistema, ya que $\mathbf{P}(\mathbf{Pb}) = \mathbf{Pb}$. Dicha solución de mínimos cuadrados es la de mínima norma, ya que $\mathbf{Pb} \in \mathrm{Im}\mathbf{P} = \mathrm{Im}\mathbf{P}^t$.

Capítulo 5

5.1.–

- Los valores propios de $\mathbf{A}$ son $-2, 1$; una base de vectores propios es $((2,1),(1,2))$, por tanto es diagonalizable. Una matriz que diagonaliza a $\mathbf{A}$ es
$$\mathbf{P_A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
y podemos asegurar que
$$\mathbf{P_A^{-1} A P_A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- La matriz $\mathbf{B}$ admite como único valor propio 1 doble y el subespacio característico correspondiente está generado por $(1,2)$, por tanto no es diagonalizable.

- Los valores propios de $\mathbf{C}$ son $0, 1, -1$ y sus vectores propios correspondientes son $(1,-1,-1), (1,-2,0), (1,-2,2)$ o cualesquiera no nulos proporcionales a ellos. Por tanto la matriz $\mathbf{C}$ es diagonalizable; una matriz que la diagonaliza es
$$\mathbf{P_C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
y verifica $\mathbf{P_C^{-1} C P_C} = diag\,(0,1,-1)\,.$

- La matriz $\mathbf{D}$ tiene como polinomio característico $\lambda(\lambda+1)^2$. Los valores propios son pues 0 y -1 (doble). Un vector propio asociado a $\lambda = 0$ es $(1,-1,1)$. El subespacio propio asociado a $\lambda = -1$ tiene dimensión 2. Una posible base de dicho subespacio está formada por los vectores $(-1,1,0), (-1,0,1)$. Como hay tres vectores propios independientes, la matriz es diagonalizable y una matriz que la diagonaliza es
$$\mathbf{P_D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
puesto que $\mathbf{P_D^{-1} D P_D} = diag\,(0,-1,-1)\,.$

- El polinomio característico de la matriz $\mathbf{E}$ es $(\lambda+1)(\lambda-1)^2$ y dos vectores propios independientes son $(1,-2,2)$ asociado a -1 y $(1,-2,0)$ asociado a 1; como este último valor propio es doble y su subespacio característico es de dimensión 1, la matriz no es diagonalizable.

- Para la matriz $\mathbf{F}$, el polinomio característico es $(\lambda-1)^3$, el subespacio característico está generado por el vector $(1,-2,0)$, como es de dimensión 1 no existe base de vectores propios.

5.2.– Multiplíquese la matriz por el vector, se obtiene $(2-b, a+b-1, -a)$ al imponer que este vector sea proporcional a $(1,1,-1)$ se obtiene $a=b=1$.

5.3.– Cualquiera que sea el valor de a, los valores propios de la matriz son 1 doble y -4. Para que la matriz sea diagonalizable el subespacio propio asociado a 1 tiene que tener dimensión 2, lo cual ocurre para $a=2$.

5.4.– Los valores propios de la matriz son -1, $-1 \pm \sqrt{a+2}$. Si $a \neq -2$ son simples y por tanto la matriz es diagonalizable, Para $a=-2$ la matriz tiene un valor propio triple por lo que no es diagonalizable, ya que las matrices con un único valor propio solo son diagonalizables si son múltiplo escalar de la identidad.

5.5.– Calculemos en primer lugar los autovalores de la matriz:

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 6 \\ -1 & \lambda & -2 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 5\lambda = \lambda(\lambda-1-2i)(\lambda-1+2i)$$

Al ser los valores propios distintos la matriz es diagonalizable.

Un vector propio asociado a $\lambda_1 = 0$ cumple las ecuaciones:

$$x_1 = -2x_3,\ x_2 = 6x_3$$

tomamos, por ejemplo, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$. Para el autovalor $\lambda_2 = 1+2i$ resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1+2i & -1 & 6 \\ -1 & 1+2i & -2 \\ -1 & 0 & -1+2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la tercera ecuación obtenemos $x_1 = (-1+2i)x_3$ y, restando a la segunda ecuación la tercera, $x_2 = x_3$. Un vector que satisface estas dos ecuaciones es $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1+2i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Para finalizar, un vector propio asociado a $\lambda_3 = 1-2i = \overline{\lambda}_2$ es precisamente $\overline{\mathbf{w}}$. La matriz $\mathbf{P} = [\mathbf{v}\ \ \mathbf{w}\ \ \overline{\mathbf{w}}]$ diagonaliza $\mathbf{A}$, es decir:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \operatorname{diag}(0, 1+2i, 1-2i).$$

5.6.– Los valores propios son 0 y $\pm i\|\mathbf{w}\|$. La matriz $\tilde{\mathbf{w}}$ representa el operador lineal $\mathbf{L}$.

5.7.– El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta y como consecuencia también tienen el mismo polinomio característico, en efecto:

$$\chi_{\mathbf{A}^t}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}^t) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^t = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \chi_{\mathbf{A}}(\lambda)$$

Por lo que respecta a los vectores propios, en caso de que la matriz sea diagonalizable se puede escribir

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D} \Rightarrow (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^t = \mathbf{D}^t = \mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{P}^t\mathbf{A}^t\mathbf{P}^{-t} = \mathbf{D}$$

de donde se deduce que los vectores propios de $\mathbf{A}^t$ son las columnas de $\mathbf{P}^{-t}$. En general, si λ es un valor propio de $\mathbf{A}$ lo único que se puede afirmar es que $\dim\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \dim\ker(\mathbf{A}^t - \lambda\mathbf{I})$ pero los subespacios son distintos y por tanto los vectores propios también serán, por lo general, distintos.

5.8.– $\chi_{\mathbf{A}-2\mathbf{I}}(z) = (z-1)^{13}(z+6)^7$.

5.9.– Si n es mayor que 1, la matriz es de rango 1 y su núcleo (de ecuación $\mathbf{b}^t\mathbf{x} = 0$) es de dimensión $n-1$, por tanto 0 es valor propio de multiplicidad al menos $n-1$; por otro lado $(\mathbf{a}\mathbf{b}^t)\mathbf{a} = (\mathbf{b}^t\mathbf{a})\mathbf{a}$, luego $\mathbf{b}^t\mathbf{a}$ es valor propio con vector asociado $\mathbf{a}$. La matriz es diagonalizable siempre que el valor propio $\mathbf{b}^t\mathbf{a}$ sea no nulo.

La matriz del enunciado puede factorizarse

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

admite como valor propio no nulo $1+2+\dots+n = n(n+1)/2$ asociado al vector propio $(1, 2, \dots, n)$. El subespacio propio asociado a cero tiene por ecuación $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$.

5.10.–

$$\lambda \text{ autovalor de } \mathbf{M} \iff a + \lambda b \text{ autovalor de } a\mathbf{I} + b\mathbf{M}.$$

El polinomio característico de la matriz dada es $\chi(z) = (z-(c-d))^{n-1}(z-(c+(n-1)d))$. Los valores propios son pues $(c-d)$ y $(c+(n-1)d)$, con multiplicidades $n-1$ y 1, respectivamente.

5.11.– En una matriz de rango 1, $\mathbf{A} = \mathbf{u}\mathbf{v}^h$, hay $n-1$ valores propios nulos y solo 1 no nulo, que será igual a la traza de la matriz, es decir, $\mathbf{v}^h\mathbf{u}$. En el caso considerado en este ejercicio los valores propios son 1 (simple) y 0 (de multiplicidades algebraica y geométrica $n-1$). La matriz es diagonalizable.

5.12.–

1. Supóngase la matriz de orden n, entonces:

$$\chi_{\mathbf{A}}(z) = z^n, \quad \chi_{\mathbf{A}-\mathbf{I}}(z) = (z+1)^n.$$

Los valores propios de $\mathbf{A}$ son todos nulos, y los de $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ valen todos -1.

2. traza $(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = -n$, $\det(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = (-1)^n$.

5.13.– El teorema de Cayley-Hamilton garantiza que

$$\mathbf{O} = \chi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n - \cdots + (-1)^n \det \mathbf{A}\ \mathbf{I},$$

de forma que si $\det \mathbf{A} \neq 0$ podemos despejar la matriz identidad:

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{n-1} - \cdots\right)(-1)^{n+1}/\det \mathbf{A};$$

así, se obtiene la inversa de $\mathbf{A}$ expresada como un polinomio de grado $n-1$ en $\mathbf{A}$. La matriz $\mathbf{A}$ del enunciado tiene por polinomio característico $x^3 - 9x^2 + 13x - 1$, luego $\mathbf{A}^3 - 9\mathbf{A}^2 + 13\mathbf{A} = \mathbf{I} = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^2 - 9\mathbf{A} + 13\mathbf{I}\right)$ de modo que

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^2 - 9\mathbf{A} + 13\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

así $\mathbf{A}^{-1} = H(\mathbf{A})$ con $H(x) = x^2 - 9x + 13$.

El polinomio no es único; por ejemplo, si es $Q(x)$ un polinomio mónico de grado m con término independiente no nulo, se tiene

$$\mathbf{O} = \chi(\mathbf{A})Q(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{n+m} + \cdots + (-1)^n \det \mathbf{A}Q(0)\mathbf{I}$$

puede despejarse la matriz identidad y multiplicarse por la inversa de $\mathbf{A}$ que queda expresada como un polinomio en $\mathbf{A}$ de grado $n+m-1$.

5.14.–

1. El polinomio característico de $\mathbf{S}$ es $z^4 - 1$, sus raíces son las cuartas de la unidad $1, -1, i, -i$. Al ser simples la matriz es diagonalizable; como vectores propios (en el mismo orden) se obtienen $(1,1,1,1), (1,-1,1,-1), (1,i,-1,-i), (1,-i,-1,i)$.

2. Las primeras potencias de la matriz $\mathbf{S}$ son las siguientes:

$$\mathbf{S}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{S}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en $p(\mathbf{S})$ se obtiene,

$$p(\mathbf{S}) = c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{S} + c_2\mathbf{S}^2 + c_3\mathbf{S}^3 = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \end{pmatrix}$$

3. Los valores propios son $p(1), p(-1), p(i), p(-i)$. Los vectores propios de $\mathbf{S}$ lo son de $p(\mathbf{S})$. Toda matriz que sea un polinomio en una matriz diagonalizable es a su vez diagonalizable.

4. $p(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3$. Los valores propios son $p(1) = 10, p(-1) = -2, p(i) = -2 - 2i, p(-i) = -2 + 2i$, según el apartado anterior, los vectores propios son los de $\mathbf{S}$, calculados en el primer apartado.

5.15.– Sea $\lambda \neq 0$ un valor propio de $\mathbf{AB}$ asociado a un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$. Entonces

$$\mathbf{ABv} = \lambda\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{Bv} \neq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{BA}(\mathbf{Bv}) = \mathbf{B}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{Bv}$$

se deduce que λ es valor propio de $\mathbf{BA}$ y un vector propio asociado es $\mathbf{Bv}$.

Puede demostrarse (no trivialmente) que además las multiplicidades algebraicas y geométricas son las mismas. Probaremos la igualdad de las geométricas.

Supóngase $\dim\ker(\mathbf{AB} - \lambda\mathbf{I}) = s$ y sea $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s)$ una base de dicho núcleo. La familia $\{\mathbf{Bv}_1, \ldots, \mathbf{Bv}_s\}$ es libre (demuéstrese) lo cual significa que $\dim\ker(\mathbf{BA} - \lambda\mathbf{I}) \geq s$. Intercambiando los papeles de $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{BA}$ se concluye la igualdad.

5.16.–

1. Calculemos el polinomio característico:

$$\begin{aligned} \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) - 4(\lambda - 2) - 4\lambda = (\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda - 4). \end{aligned}$$

   Dado que los valores propios son simples podemos concluir que la matriz es diagonalizable.

2. Resolvemos el sistema lineal $(\mathbf{A} + 2\,\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y obtenemos que las soluciones son proporcionales al vector $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 2)^t$; análogamente un vector propio asociado a 1 es $\mathbf{v}_2 = (2, 1, -2)^t$ y por último $\mathbf{v}_3 = (2, -2, 1)^t$ es vector propio para el autovalor 4. Observamos que la base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ es ortogonal (los vectores son ortogonales dos a dos). Notemos que la ortogonalidad no depende de los vectores concretos que hemos escogido, ya que cualquier otra base de vectores propios estaría formada por vectores proporcionales a los anteriores, lo cual preservaría la ortogonalidad.

3. Si la matriz $\mathbf{Q}$ diagonaliza por semejanza la matriz $\mathbf{A}$ cada una de sus sus columnas tiene que ser un vector propio de $\mathbf{A}$, por ejemplo, si $\mathbf{Q}^t\mathbf{AQ} = \mathrm{diag}(-2, 1, 4)$ entonces su primera columna $\mathbf{q}_1$ tiene que ser proporcional a $\mathbf{v}_1$, lo mismo para la segunda y tercera columnas de $\mathbf{Q}$. Por otro lado, que $\mathbf{Q}$ sea una matriz ortogonal recordemos que significa que sus columnas son ortogonales dos a dos y de norma 1, así pues

basta tomar $\mathbf{q}_j = \mathbf{v}_j/\|\mathbf{v}_j\|$, $j = 1,2,3$. Observamos que $\|\mathbf{v}_j\| = 3$ para todo j; en definitiva, podemos tomar:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.17.– El vector que buscamos es $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ y satisface el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{f}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A}\,\mathbf{f}(t)$$

donde $\mathbf{A}$ es la matriz de coeficientes del sistema. Calculamos su polinomio característico:

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) \quad = \begin{vmatrix} \lambda - 0 & -1 \\ \omega^2 & \lambda - 0 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 = (\lambda - i\omega)(\lambda + i\omega).$$

Los valores propios son $i\omega$ y $-i\omega$ con multiplicidad 1. Para calcular los vectores propios asociados con $\lambda = i\omega$ resolvemos:

$$(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} i\omega & -1 \\ \omega^2 & i\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las soluciones son las combinaciones lineales de $\mathbf{p}_1 = (1\ i\omega)^t$. Como $\mathbf{A}$ es matriz real, entonces los vectores propios asociados a $\lambda = -i\omega$ son las combinaciones lineales de $\mathbf{p}_2 = (1\ -i\omega)^t$.

Por tanto $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, con

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix}.$$

Haciendo el cambio de variable

$$\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{f}(t) = \mathbf{P}^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

se tiene que $\mathbf{g}'(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{f}'(t)$, ya que al derivar los coeficientes de $\mathbf{P}^{-1}$ son constantes. Así, las soluciones del sistema $\mathbf{f}'(t) = \mathbf{Af}(t)$ son los $\mathbf{f}(t) = \mathbf{Pg}(t)$ con $\mathbf{g}(t)$ solución del sistema $\mathbf{Pg}'(t) = \mathbf{PDg}(t)$, o lo que es lo mismo, solución del sistema

$$\mathbf{g}'(t) = \mathbf{Dg}(t).$$

Este nuevo sistema de ecuaciones diferenciales $\mathbf{g}'(t) = \mathbf{Dg}(t)$ es

$$u'(t) = i\omega u(t)$$
$$v'(t) = -i\omega v(t)$$

con lo que cada ecuación se puede resolver de manera independiente. La solución de cada ecuación viene dada por la exponencial compleja. Aunque no se ha visto en clase, es sencillo comprobar que es solución mediante la identidad de Euler, si $\theta \in \mathbb{R}$ se tiene que $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ (véase en el Apéndice 2 de los apuntes). Así,

$$\begin{aligned}(e^{i\omega t})' &= (\cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t))' = -\omega \operatorname{sen}(\omega t) + i\omega \cos(\omega t) \\ &= i\omega(\cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t)) = i\omega e^{i\omega t}\end{aligned}$$

y la solución general es $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} a\, e^{i\omega t} \\ b\, e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$, donde a y b son constantes. Deshaciendo el cambio de variable, las soluciones del sistema inicial $\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t)$ son

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = a\, e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} + b e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix}.$$

Imponiendo $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a\omega i - b\omega i \end{pmatrix}$ y resolviendo el sistema ($a = b = \frac{1}{2}$) se obtiene la solución que cumple las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + \ e^{-i\omega t}) \\ \frac{i\omega}{2}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\omega \operatorname{sen}(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Nótese que la solución general $x(t) = ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}$ es la solución del oscilador armónico y es equivalente a $x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega t)$ y a $x(t) = C \cos(\omega t + \phi)$ con C_1, C_2, C y ϕ constantes.

5.18.– Denótese $\mathbf{A}$ la matriz. El polinomio característico es $(\lambda - 3)^2(\lambda - 2)$.

$$\text{rango } (\mathbf{A} - 3\,\mathbf{I}) = \begin{cases} 2 & \alpha \neq 2 \\ 1 & \alpha = 2 \end{cases}$$

En consecuencia: 1. F / 2. F / 3. V / 4. F / 5. F

5.19.– El polinomio característico es $[\lambda^2 + (1-a)\lambda - (a+2)](\lambda - 3)$.
1. V / 2. F / 3. F / 4. V

Capítulo 6

6.1.– Son semejantes puesto que la primera matriz es diagonalizable y semejante a diag$(1,0)$, que es la segunda matriz. Sin embargo, no son semejantes unitariamente ya que la segunda es una matriz normal y la primera no.

6.2.– Los valores propios son 8 (simple) y -1 (doble); una base ortonormal de vectores propios asociados es

$$\left(\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{-2\sqrt{5}}{5},0\right),\left(\frac{4\sqrt{5}}{15},\frac{2\sqrt{5}}{15},\frac{-\sqrt{5}}{3}\right)\right).$$

El primero corresponde al autovalor 8 y está univocamente determinado salvo el signo. En cuanto a los dos últimos, asociados al -1, pueden escogerse en el plano de ecuación $2x_1+x_2+2x_3=0$, siendo válidos una infinidad de otros resultados.

6.3.– Los valores propios de esta matriz real antisimétrica son 0 y $\pm 3i$. Un vector unitario de $\ker \mathbf{A}$ es $\mathbf{u}_1=\frac{1}{3}(2,2,1)$.

$$\ker(\mathbf{A}-3i\mathbf{I})=\ker\begin{pmatrix} -3i & -1 & 2\\ 1 & -3i & -2\\ -2 & 2 & -3i\end{pmatrix}=\ker\begin{pmatrix} 1-3i & -1-3i & 0\\ -2 & 2 & -3i\end{pmatrix},$$

de donde obtenemos fácilmente el vector $(1+3i,1-3i,-4)$, que al normalizarlo nos da $\mathbf{u}_2=\frac{1}{6}(1+3i,1-3i,-4)$.

En cuanto a $\ker(\mathbf{A}+3i\mathbf{I})$, al tratarse de una matriz real, basta conjugar el vector anterior: $\mathbf{u}_3=\frac{1}{6}(1-3i,1+3i,-4)$.

Así pues, tomando la matriz unitaria $\mathbf{U}=(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_3)$, se tiene que

$$\mathbf{U}^h\mathbf{A}\mathbf{U}=\operatorname{diag}(0,3i,-3i).$$

6.4.– La matriz del enunciado puede escribirse como $3\mathbf{I}+\mathbf{A}$, en donde $\mathbf{A}$ es la matriz antisimétrica (y por tanto normal) del ejercicio anterior, luego es normal. Sus vectores propios (y por tanto la matriz unitaria que la diagonaliza) son los mismos de $\mathbf{A}$, mientras que sus valores propios son $3, 3+3i, 3-3i$.

6.5.– Obsérvese que $r(\mathbf{A})=2$, luego $\dim(\ker\mathbf{A})=4-2=2$ y, puesto que $\mathbf{A}$ es diagonalizable, 0 ha de ser valor propio doble. La traza nula indica que los dos restantes deben ser opuestos entre sí. En efecto,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 & 1\\ -1 & 1-\lambda & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1-\lambda & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & -2-\lambda & -2\\ 1 & -1 & -1-\lambda & -1\\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & \lambda+2 & 2\\ -1 & 1 & \lambda+1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda+4 & 2 \\ -1 & 0 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda(\lambda+2) - 2(\lambda+4)) = \lambda^2(\lambda^2 - 8).$$

Así pues, los autovalores son 0 (doble), $2\sqrt{2}$ y $-2\sqrt{2}$.

Las ecuaciones simplificadas de $\ker \mathbf{A}$ son $x_1 - x_2 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$. Una base ortonormal del mismo es, por ejemplo, la formada por $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)$.

Calculamos los vectores propios asociados a $\sqrt{2}$:

$$\mathbf{A} - 2\sqrt{2}\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1-2\sqrt{2} & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1-2\sqrt{2} & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1-2\sqrt{2} & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1-2\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} & -2-2\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1+\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

A la vista de la primera y de la última ecuación, observamos que el vector debe ser de la forma $(\alpha, -\alpha, \beta, \beta)$ (obsérvese que esta expresión caracteriza los vectores ortogonales a los dos vectores propios ya calculados). Introduciendo esa expresión en la segunda ecuación, deducimos que $-\sqrt{2}\alpha + (2+\sqrt{2})\beta = 0$. Tomamos, por ejemplo, $\beta = 1$ y obtenemos el vector $(1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}, 1, 1)$ como vector propio asociado al autovalor $\sqrt{2}$. Lo normalizamos:

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}(1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}, 1, 1).$$

De igual modo se obtiene que un vector propio unitario asociado al autovalor $-\sqrt{2}$ es

$$\mathbf{u}_4 = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}(1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}, 1, 1).$$

En conclusión: si $\mathbf{Q}$ es la matriz ortogonal $(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_3|\mathbf{u}_4)$, se verifica que $\mathbf{Q}^t\mathbf{A}\mathbf{Q} = \operatorname{diag}(0, 0, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.

6.6.– Obsérvese que la matriz es de la forma $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{H}$, en donde $\mathbf{H}$ es real, antisimétrica y ortogonal; los autovalores de $\mathbf{H}$ serán imaginarios puros, conjugados dos a dos y al mismo tiempo de módulo unidad, luego forzosamente han de ser $\pm i$ (ambos dobles). Consecuentemente, nuestra matriz $\mathbf{A}$ tendrá los dos autovalores dobles $1 \pm i$.

También es sencillo calcular los valores propios directamente:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \\ -1 & 1-\lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2.$$

$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm i$, de modo que tenemos los autovalores $1+i,\ 1-i$ dobles.

$$\ker(\mathbf{A} - (1+i)\mathbf{I}) = \ker \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix},$$

de donde fácilmente podemos tomar dos vectores ortonormales como

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,i),\ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-i,0).$$

Ello nos permite escoger a su vez sus conjugados

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-i),\ \mathbf{u}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,i,0).$$

como vectores propios ortonormales asociados al autovalor $1-i$.

En conclusión: si $\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -i & 0 & i \\ i & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$, se cumple que $\mathbf{U}$ es unitaria y $\mathbf{U}^h\mathbf{A}\mathbf{U} =$ $\mathrm{diag}(1+i, 1+i, 1-i, 1-i)$.

6.7.– Si $\mathbf{A}$ es normal, entonces $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$,

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle = (\mathbf{A}\mathbf{x})^h\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^h\mathbf{A}^h\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^h\mathbf{A}\mathbf{A}^h\mathbf{x} = (\mathbf{A}^h\mathbf{x})^h\mathbf{A}^h\mathbf{x} = \|\mathbf{A}^h\mathbf{x}\|^2.$$

Para demostrar el recíproco vamos a probar que, si $\mathbf{A}$ verifica la condición $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^h\mathbf{x}\|\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, entonces $\mathbf{A}^h\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{A}^h$ es la matriz nula. Puesto que esta última matriz es hermítica y por tanto diagonalizable, basta ver que todos sus autovalores son nulos.

Supongamos que, para algún $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, se verifica que $(\mathbf{A}^h\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{A}^h)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, con $\lambda \in \mathbb{C}$. Ello implica que $\mathbf{u}^h(\mathbf{A}^h\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{A}^h)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}^h\mathbf{u} = \lambda\|\mathbf{u}\|^2$. Ahora bien, el primer miembro de la igualdad anterior vale

$$\mathbf{u}^h\mathbf{A}^h\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\mathbf{A}\mathbf{A}^h\mathbf{u} = (\mathbf{A}\mathbf{u})^h\mathbf{A}\mathbf{u} - (\mathbf{A}^h\mathbf{u})^h\mathbf{A}^h\mathbf{u} = \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{A}^h\mathbf{u}\|^2 = 0,$$

lo que permite concluir que $\lambda = 0$.

6.8.– Toda matriz ortogonal (y, por tanto, unitaria) de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ tiene sus tres valores propios de módulo 1, que pueden ser todos reales o bien uno real y dos complejos no reales conjugados entre sí. $\mathbf{A}$ es, por consiguiente, semejante unitariamente (ortogonalmente en caso de que los tres autovalores sean reales) a una matriz diagonal con dichos autovalores. Por tanto, pueden darse los siguientes casos:

- Valor propio 1 triple: aplicación identidad (*giro* de ángulo 0).
- Valores propios 1 doble y -1 simple: *simetría respecto a un plano.*
- Valores propios -1 doble y 1 simple: simetría respecto a una recta, que coincide con un *giro* de ángulo π respecto a dicha recta.
- Valor propio -1 triple: la opuesta de la identidad *(simetría respecto al origen)*.
- Valores propios $1, \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha$ (α no múltiplo de π): *giro de ángulo α respecto a una recta.*
- Valores propios $-1, \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha$ (α no múltiplo de π): *composición* del giro anterior con la simetría respecto al plano normal al eje de giro.

6.9.– La matriz del enunciado puede escribirse como $\mathbf{B} = (a-1)\mathbf{I} + \mathbf{A}$, donde $\mathbf{A}$ es la matriz de orden 3 con todos los elementos iguales a 1. Como $\mathbf{A}$ tiene rango 1, sus valores propios son 0 (doble) y $traza(\mathbf{A}) = 3$ (simple). Por tanto, los valores propios de $\mathbf{B}$ son: $\lambda_1 = a-1$ (doble) y $\lambda_2 = a+2$ (simple). Finalmente, para que $\mathbf{B}$ sea definida positiva, sus dos autovalores deben ser positivos; se deduce que esto ocurre si y sólo si $a > 1$.

6.10.– Denotando por $\mathbf{A}$ a la matriz anterior, se cumple que

$$(x,y,z)\mathbf{A}(x,y,z)^t = (a+b)\,x^2 + (a+c)\,y^2 + (b+c)\,z^2 - 2axy - 2bxz - 2cyz =$$
$$a(x-y)^2 + b(x-z)^2 + c(z-y)^2 \geq 0.$$

A la vista de este resultado, $\mathbf{A}$ deberá ser o bien definida o bien semidefinida positiva. Ahora bien, $r(\mathbf{A}) = 2$ ya que la suma de sus filas vale $\mathbf{0}$, luego no puede ser definida y es, por tanto, semidefinida positiva ($r = \sigma = 2$).

6.11.– La forma cuadrática del numerador determina la matriz simétrica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Como la suma de los elementos de cada fila vale 5, se deduce que $\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, es decir, 5 es valor propio que tiene por autovector a $(1,1,1)$.

Por otro lado, los dos restantes autovalores satisfacen

$$5 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{tr}\mathbf{A} = 9 \Rightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = 4;$$

$$5\lambda_2\lambda_3 = \det(\mathbf{A}) = 20 \Rightarrow \lambda_2\lambda_3 = 4,$$

lo que nos permite deducir que $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. (Obsérvese que $\mathbf{A}$ es una matriz de las ya estudiadas en el ejercicio 6.9, con $a = 3$; así que podríamos haber deducido directamente que sus valores propios son $a + 2 = 5$ simple y $a - 1 = 2$ doble.)

El subespacio propio asociado al autovalor doble es

$$\ker(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = L[(1,-1,0),(1,0,-1)].$$

En conclusión:

- $\max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} R(\mathbf{x}) = 5$, que se alcanza sobre los vectores de la forma (α,α,α) con $\alpha \neq 0$.
- $\min_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} R(\mathbf{x}) = 2$, que se alcanza sobre los vectores de la forma $(\alpha+\beta,-\alpha,-\beta)$ con $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$.

6.12.–
Representamos la forma cuadrática del numerador mediante una matriz simétrica:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5x^2+5y^2+2xy = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dicha matriz simétrica tiene por autovalores 6 y 4, de subespacios propios respectivos $L[(1,1)]$ y $L[(1,-1)]$. Así, el máximo del cociente es 6, valor que se alcanza sobre los vectores (α,α) $\forall\alpha \neq 0$, mientras que el mínimo vale 4, que es alcanzado en los vectores $(\alpha,-\alpha)$ $\forall\alpha \neq 0$.

6.13.– Téngase en cuenta que, en todos estos ejemplos, los únicos resultados determinados unívocamente por la matriz son los signos de los elementos diagonales de la matriz diagonal (y consecuentemente el rango y la signatura); las magnitudes de dichos elementos, así como las operaciones entre filas/columnas, y la matriz de paso, pueden variar tratándose de soluciones igualmente correctas.

a) La matriz tiene obviamente rango 1. Realizamos operaciones entre filas para intentarla convertir en matriz diagonal, por ejemplo: a la tercera fila se le suma la segunda, y a la segunda fila se le suma el doble de la primera; si se repiten esas mismas operaciones entre columnas, se llega a la matriz $\operatorname{diag}(1,0,0)$ que es congruente con la matriz de partida $\mathbf{A}$.

Matricialmente, se cumple que $\mathbf{P}^t\mathbf{A}\mathbf{P} = \operatorname{diag}(1,0,0)$ donde $\mathbf{P}$ es la matriz que realiza sólo las operaciones entre columnas (a saber: C_3+C_2, C_2+2C_1). Esta matriz es:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y se dice que $\mathbf{P}$ diagonaliza a $\mathbf{A}$ por congruencia. Además, se tiene que el rango y la signatura de $\mathbf{A}$ son los de $\operatorname{diag}(1,0,0)$, es decir, $r = \sigma = 1$.

b) Si a la primera fila de la matriz del enunciado se le suma la segunda fila, y a la segunda se le resta la tercera, repitiendo dichas operaciones entre columnas obtenemos la matriz $\mathrm{diag}(-1, 2, 1)$ que es congruente con la de partida. Es decir, una posible diagonalización por congruencia la proporciona la matriz

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

que lleva la matriz del enunciado a $\mathrm{diag}(-1, 2, 1)$. Por tanto, $r = 3$ y $\sigma = 1$.

c) La matriz es congruente por ejemplo con $\mathrm{diag}(1, -1, 0, 0)$ a través de la matriz de paso $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. De ello se deduce que $r = 2$ y $\sigma = 0$.

6.14.– 1. F / 2. F / 3. F / 4. V / 5. V / 6. F / 7. V

6.15.– 1. F / 2. V / 3. V / 4. F / 5. F / 6. V

Capítulo 7

7.1.–

1. Calculemos la DVS de la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -8 \\ 6 & 3 & -6 \end{pmatrix}$, es decir, escribámosla como $\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^t$ con $\boldsymbol{\Sigma}$ diagonal y $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ matrices ortogonales. La diagonal $\boldsymbol{\Sigma}$ tiene el mismo número de columnas y filas que $\mathbf{A}$, y su diagonal principal contiene los dos valores singulares de $\mathbf{A}$. Para determinarlos, primero calculamos los autovalores de la matriz $\mathbf{A}\mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} 144 & 108 \\ 108 & 81 \end{pmatrix}$, que es de rango 1 (igual que $\mathbf{A}$) y fácilmente se obtiene que sus autovalores son 0 y su traza, esto es, 225. Sus raíces cuadradas son sus valores singulares, que ordenados de mayor a menor son $\sigma_1 = \sqrt{225} = 15$, $\sigma_2 = 0$. Así pues,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, sabemos que las columnas de $\mathbf{U}$ contienen una base ortonormal de autovectores de $\mathbf{A}\mathbf{A}^t$. Como esta matriz la hemos calculado ya, es fácil obtener que, para el autovalor 0, su subespacio propio es $\ker\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^t\right) = L[(-3,4)^t]$ y por tanto el otro subespacio propio, asociado al autovalor 225, es $L[(4,3)^t]$. Teniendo en cuenta el orden en el que aparecen los respectivos valores singulares en $\boldsymbol{\Sigma}$, se tiene que

$$\mathbf{U} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por último, apliquemos la igualdad $\mathbf{A}^t = \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^t\mathbf{U}^t$, que implica $\mathbf{A}^t\mathbf{U} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^t$; esto quiere decir que $\mathbf{A}^t\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k\sigma_k$ para $k = 1, 2$. Por tanto,

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{A}^t\mathbf{u}_1}{\sigma_1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que este vector es unitario, tal y como garantiza el teorema. Por otro lado, para $k = 2$, debe cumplirse que $\mathbf{A}^t\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2\sigma_2 = \mathbf{0}$ de donde no podemos despejar $\mathbf{v}_2$; de hecho, basta con que sea cualquier vector unitario ortogonal a $\mathbf{v}_1$. En otras palabras, la matriz unitaria $\mathbf{V}$ sólo tiene unívocamente determinada su primera columna que es $\mathbf{v}_1 = (2, 1, -2)/3$. Una posible matriz es

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

El lector podría comprobar que, en efecto, $\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^t = \mathbf{A}$.

OBSERVACIÓN: Al tratarse de una matriz de rango 1, se obtiene automáticamente la forma reducida de la DVS:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -8 \\ 6 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 15 \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix} = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^t$$

de donde se tiene que $\sigma_1 = 15$, (y ya podemos escribir $\mathbf{\Sigma}$ dado que $\sigma_2 = 0$ por tener $\mathbf{A}$ rango 1), pero además se obtiene que la primera columna de $\mathbf{U}$ es $\mathbf{u}_1 = (4/5, 3/5)^t$ y la primera columna de $\mathbf{V}$ es $\mathbf{v}_1 = (2/3, 1/3, -2/3)^t$. Añadiendo vectores columna apropiados para que $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ resulten de columnas ortonormales, se finaliza el cálculo de $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$.

2. En cuanto a la matriz $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & -8 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, calculamos la matriz $\mathbf{B}^t\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 81 \end{pmatrix} = 81\mathbf{I}$ de donde los dos valores singulares de $\mathbf{B}$ son $\sigma_1 = \sigma_2 = 9$. La matriz diagonal de la DVS es

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y las columnas de $\mathbf{V}$ forman una base ortonormal de autovectores de $\mathbf{B}^t\mathbf{B} = 81\mathbf{I}$; como todo vector es autovector de un múltiplo de la identidad, como matriz $\mathbf{V}$ bastaría cualquier matriz unitaria de orden 2. Pero la elección de $\mathbf{V}$ condiciona la construcción de $\mathbf{U}$, así que proponemos elegir $\mathbf{V}$ como la matriz unitaria más sencilla posible, que es $\mathbf{V} = \mathbf{I}$.

Una vez que tenemos $\mathbf{V}$, de nuevo $\mathbf{U}$ se obtiene aplicando $\mathbf{B} = \mathbf{U\Sigma V}^t$ de donde $\mathbf{BV} = \mathbf{U\Sigma}$ y esto significa que $\mathbf{Bv}_k = \mathbf{u}_k\sigma_k$ para $k = 1, 2$. Como todos los valores singulares son no nulos, podemos despejar $\mathbf{u}_k$:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{Bv}_1}{\sigma_1} = \frac{1}{9}\mathbf{B}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{Bv}_2}{\sigma_2} = \frac{1}{9}\mathbf{B}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ se obtienen directamente ortogonales y unitarios, como garantiza la teoría. Forman las primeras columnas de la matriz unitaria $\mathbf{U}$, de la que simplemente añadimos una tercera columna unitaria y ortogonal a las otras dos:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Es inmediato comprobar que $\mathbf{B} = \mathbf{U\Sigma V}^t$ puesto que

$$\mathbf{U\Sigma V}^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & -8 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}.$$

7.2.– Siendo $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$, se tiene $\mathbf{A}^h\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}$, cuyos valores propios son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 0$. Unos vectores propios unitarios de $\mathbf{A}^h\mathbf{A}$ son $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, asociado a $\lambda_1 = 4$, y $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$, asociado a $\lambda_2 = 0$. Se tiene $\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Los valores singulares son $\sigma_1 = 2$ y $\sigma_2 = 0$; y se tiene $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La primera columna de $\mathbf{U}$ se determina como $\mathbf{U}_1 = \frac{1}{\sigma_1}\mathbf{AV}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$. La segunda columna de $\mathbf{U}$ se determina de modo que sea unitaria y ortogonal a $\mathbf{U}_1$. Por dicha ortogonalidad, ha de cumplirse la ecuación $-ix - 1y = 0$ (téngase en cuenta que se trata del producto escalar estándar complejo). Por consiguiente, $\mathbf{U}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$. Se tiene $\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$. Finalmente, $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^h$.

7.3.–

1. Como $\mathbf{A}$ es real y simétrica, se trata de una matriz normal con valores propios reales, diagonalizable ortogonalmente. Los valores propios de $\mathbf{A}$ son $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 0$. Los subespacios propios asociados a los valores propios anteriores son, respectivamente, $\ker(\mathbf{A}-3\mathbf{I}) = L[(1,2,2)]$, $\ker(\mathbf{A}+3\mathbf{I}) = L[(2,-2,1)]$ y $\ker(\mathbf{A}) = L[(2,1,-2)]$, resultando dichos subespacios ortogonales dos a dos.

   La matriz
   $$\mathbf{Q} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
   es, por tanto, ortogonal, y se cumple $\mathbf{Q}^t\mathbf{AQ} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Al ser $\mathbf{A}$ normal sus valores singulares son iguales a los módulos de sus valores propios; es decir, en este caso, son iguales a 3 (doble) y a 0 (simple).

2. Por el apartado anterior, se tiene $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\,\mathrm{diag}\,(3,-3,0)\,\mathbf{Q}^t$, con $\mathbf{Q}$ unitaria real; pero esta igualdad NO es una DVS dado que la matriz diagonal que aparece no

tiene elementos diagonales positivos o nulos (al menos posee un elemento diagonal negativo), así que no son los valores singulares de $\mathbf{A}$.

No obstante, podemos escribir:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Q}^t = \mathbf{U\Sigma V}^t$$

donde

$$\mathbf{U} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{Q} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

En efecto, $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son matrices unitarias (en este caso, ortogonales) y $\mathbf{\Sigma}$ es diagonal con elementos diagonales positivos o nulos: de hecho, $3, 3, 0$ son los valores singulares de $\mathbf{A}$.

OBSERVACIÓN: Este ejercicio es un ejemplo de cómo obtener la **DVS de una matriz normal** muy fácilmente a partir de su **diagonalización unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^h$:** cada valor propio $\lambda_k \neq 0$ se escribe como $\lambda_k = \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|} |\lambda_k|$. En el caso de $\lambda_k = 0$, lo escribimos como $\lambda_k = 1 \cdot 0$. De esta forma, la matriz $\mathbf{D}$ que contiene los autovalores puede escribirse como producto de dos diagonales:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r, 0, ..., 0) = \\ &= \operatorname{diag}\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}, \frac{\lambda_2}{|\lambda_2|}, ..., \frac{\lambda_r}{|\lambda_r|}, 1, ..., 1\right) \operatorname{diag}(|\lambda_1|, |\lambda_2|, ..., |\lambda_r|, 0, ..., 0) = \mathbf{D}'\mathbf{\Sigma}. \end{aligned}$$

De esta forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^h = (\mathbf{QD}')\, \mathbf{\Sigma Q}^h = \mathbf{U\Sigma V}^h$$

donde se obtiene directamente $\mathbf{U} = \mathbf{QD}'$ (que es unitaria pues es producto de unitarias), $\mathbf{V} = \mathbf{Q}$ (unitaria), y $\mathbf{\Sigma} = \operatorname{diag}(|\lambda_1|, |\lambda_2|, ..., |\lambda_r|, 0, ..., 0)$ con elementos diagonales positivos o nulos (esto también corrobora el hecho de que los valores singulares de una matriz normal son los módulos de sus autovalores).

Como caso particular, si una matriz normal posee valores propios reales mayores o iguales que cero (como por ejemplo las matrices semidefinidas positivas o definidas positivas), su diagonalización unitaria coincide exactamente con una DVS de la matriz.

7.4.–

1. Los valores singulares de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^h$ coinciden porque $\mathbf{A}^h\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}\mathbf{A}^h$ admiten los mismos valores propios no nulos con las mismas multiplicidades (véase el Ejercicio 5.15). El valor singular nulo, de existir, tendrá multiplicidad igual a $\min(m,n) - r(\mathbf{A})$ y será valor singular de $\mathbf{A}$ y de $\mathbf{A}^h$. Además, los valores propios de $\mathbf{A}^h\mathbf{A}$ (hermítica) son reales luego su matriz conjugada $\overline{\mathbf{A}}^h\overline{\mathbf{A}}$ tiene los mismos valores propios; ello implica que $\overline{\mathbf{A}}$ y $\mathbf{A}$ poseen los mismos valores singulares. Finalmente, al conjugar $\mathbf{A}^h$ obtenemos $\mathbf{A}^t$, que por tanto tiene los mismos valores singulares que $\mathbf{A}^h$, y que $\mathbf{A}$ y que $\overline{\mathbf{A}}$.

   OBSERVACIÓN: Otra forma de deducirlo es utilizar la igualdad elemental de la DVS: $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^h$, de donde se obtienen automáticamente DVS de $\overline{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A}^t$, y $\mathbf{A}^h$:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{A}} &= \overline{\mathbf{U\Sigma V}}^h = \overline{\mathbf{U}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^t\\ \mathbf{A}^t &= \overline{\mathbf{V}}\mathbf{\Sigma}^t\mathbf{U}^t\\ \mathbf{A}^h &= \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^t\mathbf{U}^h\end{aligned}$$

   y se observa que las matrices diagonales que aparecen en estas DVS ($\mathbf{\Sigma}$ o $\mathbf{\Sigma}^t$) poseen los mismos elementos diagonales, es decir, estas matrices poseen los mismos valores singulares.

2. Supuesta $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, si las filas (o columnas) de dicha matriz son ortogonales dos a dos y unitarias, entonces $\mathbf{A}\mathbf{A}^h = \mathbf{I}_m$ (o $\mathbf{A}^h\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$); por tanto, 1 es el único valor singular de $\mathbf{A}$ con multiplicidad igual a m (o n). En el caso de $\mathbf{A}$ ortogonal, 1 es su único valor singular con multiplicidad igual al orden de la matriz.

3. $\det\left(\mathbf{A}^h\mathbf{A}\right) = \det\left(\mathbf{A}^h\right)\det\mathbf{A} = |\det\mathbf{A}|^2$; por otro lado, $\det\left(\mathbf{A}^h\mathbf{A}\right) = \prod_{k=1}^{n}\lambda_k\left(\mathbf{A}^h\mathbf{A}\right) = \prod_{k=1}^{n}\sigma_k^2(\mathbf{A})$. Como consecuencia, $\prod_{k=1}^{n}\sigma_k(\mathbf{A}) = |\det\mathbf{A}|$.

7.5.– Al multiplicar $\mathbf{M}^t$ por $\mathbf{M}$, resulta la matriz

$$\mathbf{M}^t\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 45 & 27 & 45 & 27\\ 27 & 45 & 27 & 45\\ 45 & 27 & 45 & 27\\ 27 & 45 & 27 & 45\end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico se obtiene fácilmente. Aún más, se pueden conocer sus autovalores directamente razonando del siguiente modo: la matriz es normal y de rango 2 luego $\lambda = 0$ es un autovalor de multiplicidad $4-2 = 2$; por otro lado todas las filas suman 144, que es otro autovalor suyo (pues posee como autovector asociado al $(1,1,1,1)^t$); por último, la traza es la suma de los cuatro autovalores, de los cuales falta por calcular uno:

$$180 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 + 0 + 144 + \lambda_4 \Longrightarrow \lambda_4 = 36.$$

Resumiendo, los cuatro autovalores de $\mathbf{M}^t\mathbf{M}$ son, de mayor a menor: 144, 36, 0 (doble).

OTRA FORMA: Los valores propios de $\mathbf{M}^t\mathbf{M}$ son los valores de λ que anulan el siguiente determinante:

$$\det\left(\mathbf{M}^t\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}\right)=\det\begin{pmatrix}45-\lambda & 27 & 45 & 27\\ 27 & 45-\lambda & 27 & 45\\ 45 & 27 & 45-\lambda & 27\\ 27 & 45 & 27 & 45-\lambda\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}45-\lambda & 27 & 45 & 27\\ 27 & 45-\lambda & 27 & 45\\ \lambda & 0 & -\lambda & 0\\ 0 & \lambda & 0 & -\lambda\end{pmatrix}$$

(en la última igualdad, a la fila 3 le hemos restado la fila 1, y a la fila 4 le hemos restado la fila 2, ya que estas operaciones no varían el determinante). A continuación, para hacer aún más ceros, a la columna 1 le sumamos la columna 3, y a la columna 2 le sumamos la columna 4:

$$\det\left(\mathbf{M}^t\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}\right)=\det\begin{pmatrix}90-\lambda & 54 & 45 & 27\\ 54 & 90-\lambda & 27 & 45\\ 0 & 0 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2\det\begin{pmatrix}90-\lambda & 54\\ 54 & 90-\lambda\end{pmatrix}.$$

Obsérvese que para llegar a esta última expresión, simplemente hemos desarrollado el determinante por la última fila y luego por la penúltima. Ello nos indica que $\lambda=0$ es autovalor doble, y los otros dos no son más que los autovalores de la matriz $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}90 & 54\\ 54 & 90\end{pmatrix}=$ $18\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, que son los de la matriz $\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ multiplicados por 18, así que resultan ser $18\times 8=144$ y $18\times 8=36$.

También, sin necesidad de realizar más operaciones, podemos utilizar que los valores propios delas matrices 2×2 de la forma $\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$ son $a\pm b$, luego los de esta matriz $\mathbf{B}$ son $90+54=144$ y $90-54=36$. Por todo ello, los valores propios de $\mathbf{M}^t\mathbf{M}$ son $\lambda_1=144$, $\lambda_2=36$ y $\lambda_3=\lambda_4=0$.

OTRA FORMA: Observamos que $\mathbf{M}^t\mathbf{M}$ presenta una estructura por cajas, es decir, $\mathbf{M}^t\mathbf{M}=\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{A}\\ \mathbf{A} & \mathbf{A}\end{pmatrix}$ con $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$; entonces se obtiene que el polinomio característico de $\mathbf{M}^t\mathbf{M}$ es igual a $\lambda^2\det(\lambda\mathbf{I}-2\mathbf{A})$. Así pues, los autovalores de $\mathbf{M}^t\mathbf{M}$ son los de $\mathbf{A}$ multiplicados por 2, y 0 (que es autovalor doble). En este caso $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}45 & 27\\ 27 & 45\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, cuyos autovalores son 72 y 18; por tanto, se deduce que los valores propios de $\mathbf{M}^t\mathbf{M}$ son $\lambda_1=144$, $\lambda_2=36$ y $\lambda_3=\lambda_4=0$ (doble).

Después de haber calculado estos autovalores de $\mathbf{M}^t\mathbf{M}$ (de cualquiera de las formas expuestas), se diagonaliza ortogonalmente esta matriz; es decir, se calcula una base ortonormal de autovectores asociados, que forma las columnas de la matriz (ortogonal) $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{V}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2}\\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0\\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Por otro lado, $\mathbf{M}$ posee tres valores singulares, que son: $\sigma_1 = \sqrt{144} = 12$, $\sigma_2 = \sqrt{36} = 6$, $\sigma_3 = 0$ luego

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, aplicando la fórmula $\mathbf{u}_j = \mathbf{A}\mathbf{v}_j/\sigma_j$ para $j = 1, 2$ se calculan las dos primeras columnas de $\mathbf{U}$, y la tercera columna se completa de forma que $\mathbf{U}$ sea ortogonal:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En resumen, una DVS de $\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^t$ viene dada por

$$\mathbf{U} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La pseudoinversa de $\mathbf{M}$ es

$$\mathbf{M}^+ = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^+\mathbf{U}^t = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{U}^t = \frac{1}{12}\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1^t + \frac{1}{6}\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2^t = \frac{1}{72}\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que para obtener la pseudoinversa de $\mathbf{M}$ basta conocer sólo las primeras 2 columnas de $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ y los 2 valores singulares no nulos, puesto que $\mathbf{M}$ tiene rango 2. En general, si la matriz tiene rango r, bastaría sólo conocer las r primeras columnas de $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$, y sus r valores singulares no nulos.

7.6.– Sea $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^h$ una DVS de $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

1. Si $\mathbf{A}$ es invertible, sus valores singulares son no nulos, luego $\mathbf{\Sigma}^+ = \mathbf{\Sigma}^{-1}$ y entonces $\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^+\mathbf{U}^h = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^h = \mathbf{A}^{-1}$.

2. $\mathbf{A}^h = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^t\mathbf{U}^h$; $\mathbf{A}^h\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^t\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^h = \mathbf{V}\,\mathrm{diag}\,(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2)\,\mathbf{V}^h$. Si $\mathbf{A}$ tiene rango n, entonces $\mathbf{A}^h\mathbf{A}$ es invertible,

$$\left(\mathbf{A}^h\mathbf{A}\right)^{-1} = \mathbf{V}\,\mathrm{diag}\left(\sigma_1^{-2}, \ldots, \sigma_n^{-2}\right)\mathbf{V}^h$$

y se tiene

$$\left(\mathbf{A}^h\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^h = \mathbf{V}\,\mathrm{diag}\left(\sigma_1^{-2}, \ldots, \sigma_n^{-2}\right)\mathbf{V}^h\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^t\mathbf{U}^h = \mathbf{V}\,\mathrm{diag}\left(\sigma_1^{-2}, \ldots, \sigma_n^{-2}\right)\mathbf{\Sigma}^t\mathbf{U}^h =$$
$$\mathbf{V}\,\mathrm{diag}\left(\sigma_1^{-1}, \ldots, \sigma_n^{-1}\right)\mathbf{U}^h = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^+\mathbf{U}^h = \mathbf{A}^+.$$

3. $\mathbf{A}\mathbf{A}^h = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Sigma}^t\mathbf{U}^h = \mathbf{U}\,\mathrm{diag}\,(\sigma_1^2,\ldots,\sigma_m^2)\,\mathbf{U}^h$. Si $\mathbf{A}$ tiene rango m, entonces $\mathbf{A}\mathbf{A}^h$ es invertible,
$$\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^h\right)^{-1} = \mathbf{U}\,\mathrm{diag}\left(\sigma_1^{-2},\ldots,\sigma_m^{-2}\right)\mathbf{U}^h,$$
y se tiene
$$\mathbf{A}^h\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^h\right)^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^t\mathbf{U}^h\mathbf{U}\,\mathrm{diag}\left(\sigma_1^{-2},\ldots,\sigma_n^{-2}\right)\mathbf{U}^h = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^t\,\mathrm{diag}\left(\sigma_1^{-2},\ldots,\sigma_n^{-2}\right)\mathbf{U}^h = \mathbf{V}\,\mathrm{diag}\left(\sigma_1^{-1},\ldots,\sigma_n^{-1}\right)\mathbf{U}^h = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^+\mathbf{U}^h = \mathbf{A}^+$$
De modo alternativo, los resultados de los tres apartados anteriores pueden justificarse, sin realizar ningún cálculo, sabiendo que la matriz pseudoinversa $\mathbf{A}^+$ proporciona la solución de mínimos cuadrados y mínima norma del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, para cada $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, por medio de $\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$. Hay que tener en cuenta, solamente, cuál es dicha solución (véase el capítulo 4) en los tres casos anteriores: sistema de matriz de coeficientes invertible, siempre compatible y determinado (en el primer caso), matriz de coeficientes de rango igual al número de columnas , con solución de mínimos cuadrados única (en el segundo caso) y matriz de coeficientes de rango igual al número de filas, siempre compatible, cuyas soluciones son todas de mínimos cuadrados, con solución de mínima norma única (en el tercer caso).

7.7.–

1. Los valores propios de $\mathbf{A}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ son $\lambda_1 = 8$ doble, y $\lambda_2 = 0$, luego $\mathbf{A}$ tiene valores singulares $\sigma_1 = \sigma_2 = 2\sqrt{2}$, $\sigma_3 = 0$.

2. Del apartado anterior se tiene que
$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Las columnas de la matriz $\mathbf{V}$ forman base ortonormal de autovalores de $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$ (recién calculada): el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 8$ es el plano $x = y$; una base ortonormal del mismo viene dada por $\mathbf{V}_1 = (0,0,1)^t$ (como se pide) y $\mathbf{V}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^t$, que son ortogonales entre sí y unitarios. Un vector propio unitario, asociado a $\lambda_2 = 0$, es $\mathbf{V}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^t$. Por tanto, resulta
$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las columnas de la matriz $\mathbf{U}$ se calculan de la siguiente forma:

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{\sigma_1}\mathbf{A}\mathbf{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{U}_2 = \frac{1}{\sigma_2}\mathbf{A}\mathbf{V}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Las columnas $\mathbf{U}_3$ y $\mathbf{U}_4$ han de ser unitarias, ortogonales entre sí y ortogonales a $\mathbf{U}_1$ y a $\mathbf{U}_2$. Imponiendo la última condición, se obtienen las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right. ,$$

una de cuyas soluciones es $\mathbf{U}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)^t$. Para obtener $\mathbf{U}_4$ ha de cumplirse, además de las dos ecuaciones anteriores, la ecuación $x_2 + x_3 = 0$, una de cuyas soluciones es $\mathbf{U}_4 = \frac{1}{2}(-1,-1,1,1)^t$. Por tanto, resulta

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Como $\mathbf{A} = \sigma_1 \mathbf{U}_1 \mathbf{V}_1^t + \sigma_2 \mathbf{U}_2 \mathbf{V}_2^t$; la pseudoinversa de $\mathbf{A}$ es

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{\sigma_1}\mathbf{V}_1\mathbf{U}_1^t + \frac{1}{\sigma_2}\mathbf{V}_2\mathbf{U}_2^t = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Aplicando la matriz pseudoinversa recién obtenida, la solución de mínimos cuadrados y mínima norma del sistema es

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

7.8.– Los dos valores singulares de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -11 & -2 \end{pmatrix}$ son $\sigma_1 = 10\sqrt{2}$, $\sigma_2 = 5\sqrt{2}$. Por tanto, su número de condición espectral es

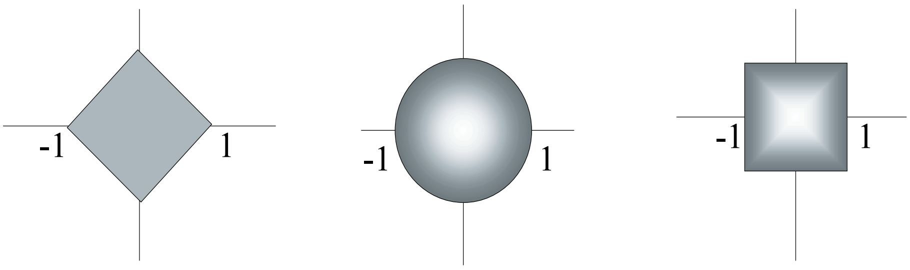
$$c_2(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2.$$

7.9.– Sean $\mathbf{u} = (1, -2, 0, 2)$ y $\mathbf{v} = (1, -i, 3 + 4i, -2 + i)$. Se tiene

$$\|\mathbf{u}\|_1 = 5, \quad \|\mathbf{u}\|_2 = 3, \quad \|\mathbf{u}\|_\infty = 2;$$
$$\|\mathbf{v}\|_1 = 7 + \sqrt{5}, \ \|\mathbf{v}\|_2 = 4\sqrt{2}, \ \|\mathbf{v}\|_\infty = 5.$$

7.10.– En $\mathbb{R}^2$ $\|\mathbf{x}\|_1 \leq 1$ es el conjunto de puntos interiores y frontera del cuadrado de vértices $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$; $\|\mathbf{x}\|_2 \leq 1$ es el conjunto de puntos pertenecientes al círculo unidad incluida su frontera; $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1$ es el conjunto de puntos interiores y frontera del cuadrado de vértices $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$.

La siguiente figura muestra los conjuntos anteriores.



Bolas unidad en $\mathbb{R}^2$ para las normas 1, 2 e infinito.

En $\mathbb{R}^3$ $\|\mathbf{x}\|_1 \leq 1, \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1, \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1$ son, respectivamente, es el conjunto de puntos interiores y frontera del octaedro regular de lado $\sqrt{2}$, de la esfera unidad y del cubo de lado 2, todos ellos centrados en el origen.

7.11.– $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{11}$, $\|\mathbf{B}\|_2 = 3$, $\|\mathbf{C}\|_2 = 9$ (al ser $\mathbf{C}$ matriz normal, su norma espectral coincide con su radio espectral); $\|\mathbf{D}\|_2 = \sqrt{30}$ (al tratarse de un vector, su norma espectral coincide con su norma 2 o norma euclídea).

7.12.– La norma y el radio espectrales de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ son ambos iguales a 7.

Si $\mathbf{A}$ es normal, denotando $\sigma_{\text{máx}}(\mathbf{A})$ al valor singular máximo de $\mathbf{A}$, se tiene $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^h\mathbf{A})} = \sigma_{\text{máx}}(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{A})$.

Obsérvese que, en el caso de $\mathbf{A}$ normal, de lo anterior se deduce que $\rho(\mathbf{A}^h\mathbf{A}) = (\rho(\mathbf{A}))^2$ lo cual no es válido para toda matriz $\mathbf{A}$.

7.13.– La segunda proposición es falsa.

7.14.– La tercera proposición es falsa.

7.15.– 1. V / 2. V / 3. V / 4. F / 5. V

7.16.– 1. V / 2. V / 3. V / 4. V / 5. F

Apéndice 1: Nociones de teoría de conjuntos

1.1 Definiciones y propiedades. Pertenencia e inclusión. Los cuantificadores. Lógica formal.

1.2 Unión e intersección de conjuntos. Conjuntos complementarios. Producto cartesiano.

1.3 Aplicaciones. Composición. Inversa.

1.1. Conjuntos y lógica formal

1.1.1. Definiciones básicas

- Un **conjunto** es una colección de objetos, que se denominan **elementos** del conjunto.
- Los elementos de un conjunto siempre son distintos dos a dos, y no se presupone ningún orden entre ellos. Por ejemplo los conjuntos $\{a, a, b\}$ y $\{b, a\}$ son iguales.
- Se llama **conjunto vacío** y se denota por $\varnothing$ el conjunto que no tiene ningún elemento.
- Un conjunto se dice **finito** si contiene un número finito de elementos, que en ese caso podrán numerarse y, por tanto, todo conjunto E finito y no vacío puede expresarse como $E = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, siendo n (entero positivo) el número de sus elementos.
- En el caso anterior, diremos que E tiene **cardinal** n, y lo denotaremos por $\mathrm{Card}\ (E) = n$.
- Un conjunto se dice **infinito** si tiene infinitos elementos.

1.1.2. Relaciones de pertenencia e inclusión

- **Relación de pertenencia:** Si E es un conjunto y a es un elemento del mismo, se denota por $a \in E$ ("a pertenece a E"). En caso contrario, escribimos $a \notin E$.

- **Relación de inclusión:** Sean E y F dos conjuntos, se dice que E está contenido en F (y se denota por $E \subset F$) si todo elemento de E pertenece a F. También se puede escribir $F \supset E$ ("F contiene a E").

- Si $E \subset F$, también se dice que E es un **subconjunto** de F.

- Cualquiera que sea el conjunto E, se tiene que $\varnothing \subset E$.

- **Igualdad de conjuntos.** Dos conjuntos E y F son iguales ($E = F$) si y sólo si $E \subset F$ y $F \subset E$.

- Así pues, $E \neq F$ significa que existe algún elemento de E que no pertenece a F o algún elemento de F que no pertenece a E.

1.1.3. Los cuantificadores

- **Cuantificador universal:** Se denota por el símbolo $\forall$ (*para todo*). Sea $\mathcal{P}$ una proposición que depende de los elementos a del conjunto E. Si la proposición es verdadera para todos los elementos del conjunto, escribiremos

$$\forall a \in E \ \ , \ \ \mathcal{P}(a).$$

  Por ejemplo, $\forall a \in \mathbb{Z}, \ a \in \mathbb{Q}$; es decir, todo número entero es racional.

- **Cuantificador existencial:** Se denota por el símbolo $\exists$ (*existe*). Sea $\mathcal{P}$ una proposición que depende de los elementos a del conjunto E. Si la proposición es verdadera para algún elemento del conjunto, escribiremos

$$\exists a \in E \ \ , \ \ \mathcal{P}(a).$$

  Por ejemplo, $\exists a \in \mathbb{Q}, \ a \in \mathbb{N}$; es decir, existe un número racional que es natural.

- Cuando existe un único elemento puede escribirse $\exists! a \in E$.

- Denotaremos por $\neg\mathcal{P}$ la **negación** de la proposición $\mathcal{P}$ (es decir, la proposición que se cumple únicamente cuando no se cumple $\mathcal{P}$, y viceversa.

- Negación de proposiciones con cuantificadores: se comprueba fácilmente que:
  - $\neg(\forall a \in E, \ \mathcal{P}(a))$ si y sólo si $\exists a \in E, \ \neg\mathcal{P}(a)$
  - $\neg(\exists a \in E, \ \mathcal{P}(a))$ si y sólo si $\forall a \in E, \ \neg\mathcal{P}(a)$

- Como ejemplo de la utilización de los cuantificadores anteriores, puede expresarse la relación de inclusión de la forma siguiente:

$$E \subset F \text{ si y sólo si } \forall a \in E, \ a \in F$$

La negación de dicha inclusión se expresa:

$$\neg(E \subset F) \text{ si y sólo si } \exists a \in E,\ a \notin F$$

1.1.4. Inclusión y lógica formal

- Si una proposición $\mathcal{P}_2$ se cumple siempre que se cumpla otra cierta proposición $\mathcal{P}_1$, escribiremos
$$\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2$$
y diremos que "$\mathcal{P}_1$ implica $\mathcal{P}_2$", o bien que $\mathcal{P}_1$ es una **condición suficiente** para $\mathcal{P}_2$, o bien que $\mathcal{P}_2$ es una **condición necesaria** para $\mathcal{P}_1$. También diremos "si $\mathcal{P}_1$ entonces $\mathcal{P}_2$".

- Si $\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_2 \Rightarrow \mathcal{P}_1$, escribiremos
$$\mathcal{P}_1 \Leftrightarrow \mathcal{P}_2$$
(léase "$\mathcal{P}_1$ si y sólo si $\mathcal{P}_2$") y diremos que $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son proposiciones **equivalentes**.

- La proposición $\mathcal{P}_2 \Rightarrow \mathcal{P}_1$ se llama la **recíproca** de $\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2$

- Si E es el conjunto de los elementos que satisfacen una proposición $\mathcal{P}_1$, y F es el conjunto de los elementos que satisfacen otra proposición $\mathcal{P}_2$, entonces
$$(\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2) \Leftrightarrow E \subset F.$$

1.2. Operaciones con conjuntos

1.2.1. Unión e intersección de conjuntos

- Dados dos conjuntos E y F, se define su **unión** como $E \cup F$.
$$E \cup F := \{a : a \in E \ \vee \ a \in F\}$$
El símbolo $\vee$ equivale a la disyunción "o".

  Esta definición se extiende naturalmente a la unión de una familia finita de conjuntos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$:
$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{a : \exists\ j,\ a \in A_j\}.$$

- Obsérvese que, para cualquier conjunto A, se tiene que $A \cup \varnothing = A$.

- Se define la intersección de dos conjuntos E y F como

$$E \cap F := \{a : a \in E \ \wedge \ a \in F\}.$$

  El símbolo $\wedge$ equivale a la conjunción "y".

  Asimismo,

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

  denota la intersección de una familia finita $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

- Obsérvese que, para cualquier conjunto A, se tiene que $A \cap \varnothing = \varnothing$.

- Dos conjuntos A y B se dicen **disjuntos** (entre sí) si $A \cap B = \varnothing$.

  Propiedades: (En todo lo que sigue, A, B, C son conjuntos).

  - $A \cap B \subset A \subset A \cup B$. (Igualmente para B). También es válida para uniones e intersecciones infinitas.
  - $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (propiedad distributiva de la intersección respecto a la unión).
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (propiedad distributiva de la unión respecto a la intersección).

1.2.2. Conjuntos complementarios

- Dados E y F conjuntos, se define la **diferencia** de E y F como

$$E \setminus F := \{a \in E : a \notin F\}.$$

- Dados A y E conjuntos, con $A \subset E$ se define el **complementario** de A respecto a E, y se denota A^c o bien A' o también $c(A)$, como

$$A^c := E \setminus A = \{a \in E : a \notin A\}.$$

  Propiedades: En todo lo que sigue, suponemos $A, B \subset E$.

  - $(A^c)^c = A$.
  - $A \cup A^c = E$.
  - $A \cap A^c = \varnothing$.
  - $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$ $(*)$; veremos después la importante traducción de esta propiedad a la lógica formal.
  - $A \setminus B = A \cap B^c$.

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

  Estas dos últimas propiedades se conocen como *Leyes de Morgan*.

- Si A, subconjunto de E, está constituido por los elementos de E que satisfacen una determinada propiedad $\mathcal{P}$, entonces A^c es el conjunto de los elementos de E para los cuales $\mathcal{P}$ es falsa, es decir,

$$A^c = \{a \in E : \neg\mathcal{P}(a)\}.$$

- La propiedad $(*)$ antes vista, y traduciendo los conjuntos A, B a proposiciones lógicas $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$, se convierte en

$$(\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{P}_2 \Rightarrow \neg\mathcal{P}_1).$$

  La proposición que se encuentra a la derecha de la doble implicación se denomina proposición **contrarrecíproca** de la de la izquierda. Ambas son equivalentes y, a veces, es más fácil demostrar la proposición contrarrecíproca de una dada que la proposición original. Este *truco* se emplea a menudo en razonamientos matemáticos, y es la herramienta conocida como **paso al contrarrecíproco**.

- No debe confundirse lo anterior con el método de razonamiento conocido como **reducción al absurdo** (o por contradicción); en este caso, para demostrar $(\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2)$ se suponen simultáneamente ciertas ($\mathcal{P}_1$ y $\neg\mathcal{P}_2$), y se llega a una contradicción.

1.2.3. Producto cartesiano

- Dados dos conjuntos E y F, se define su **producto cartesiano** $E \times F$ como

$$E \times F := \{(x, y) : x \in E,\ y \in F\}.$$

  Los elementos (x, y) de $E \times F$ se llaman **pares ordenados**.

- Recursivamente, puede extenderse la definición anterior a cualquier número finito de conjuntos: dados $E_1, E_2, \ldots, E_n$, se define

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_j \in E_j,\ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

  Los elementos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se denominan n-**uplas**.

- Dos n-uplas formadas por los mismos elementos son distintas si aquéllos aparecen en cada una en un orden diferente: De otra forma, dos n-uplas son iguales si:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Leftrightarrow \forall i = 1, 2, \ldots, n,\ \ x_i = y_i$$

- Cuando $E_1 = E_2 = \ldots = E_n = E$, se denota $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ por E^n.

1.3. Aplicaciones entre conjuntos

1.3.1. Definiciones

- Sean E y F conjuntos no vacíos. Una **aplicación** f de E en F es un subconjunto de $E \times F$ tal que:

  $$\forall x \in E, \text{ existe un único } y \in F \text{ tal que } (x, y) \in f.$$

  Se denota por
  $$f : E \to F.$$

- Cuando $(x, y) \in f$, con $x \in E,\ y \in F$, se denota por

  $$f(x) = y$$

  y se dice que y es la **imagen** por f de x. También se dice que x es una **contraimagen** de y mediante f.

- Obsérvese que, a la vista de la notación anterior, una aplicación de E a F no es más que una *regla de asignación* que, a cada elemento de E, le asigna un **único** elemento de F.

- E se llama **dominio** o **conjunto inicial** de f; F se denomina **conjunto final** de f. Obsérvese que cada elemento del conjunto inicial tiene una única imagen.

- Dados una aplicación $f : E \to F$, y un subconjunto $A \subset E$, se define la **imagen** de A por f como
  $$f(A) := \{f(x) : x \in A\},$$
  que es un subconjunto de F.

  Dado un subconjunto $B \subset F$, se define la **contraimagen** o imagen recíproca de B mediante f como
  $$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\},$$
  que es un subconjunto de A.

  Nota: La notación $f^{-1}(B)$ **no** supone la existencia de la aplicación inversa de f, que se definirá más adelante; $f^{-1}(B)$ existe cualesquiera que sean la aplicación f y el subconjunto B del conjunto final.

- Dadas dos aplicaciones f y g, definidas entre los mismos conjuntos E y F, decimos que $f = g$, si y sólo si
  $$\forall x \in E,\ f(x) = g(x).$$

- Una aplicación $f : E \to F$ se dice **inyectiva** si

$$\forall x, y \in E, \text{ si } f(x) = f(y), \text{ entonces } x = y,$$

  es decir, que cada elemento del conjunto final tiene, como máximo, una única contraimagen.

- Una aplicación $f : E \to F$ se dice **suprayectiva** si $f(E) = F$ o, lo que es lo mismo,

$$\forall y \in F, \; \exists x \in E \text{ tal que } f(x) = y,$$

  es decir, si cada elemento del conjunto final tiene, como mínimo, una contraimagen.

- Una aplicación se dice **biyectiva** si es a la vez inyectiva y suprayectiva, es decir, si cada elemento del conjunto final tiene una única contraimagen.

- Una aplicación biyectiva de E a F también se denomina una **biyección** entre E y F.

- Obsérvese que dos conjuntos **finitos** tienen el mismo número de elementos si y sólo si existe una aplicación biyectiva entre ellos.

- Dado un conjunto E, se define la aplicación identidad de E, y se denota por I_E, como aquella

$$I_E : E \to E$$

  tal que, $\forall x \in E, \; I_E(x) = x$, que, obviamente, es una aplicación biyectiva.

1.3.2. Composición de aplicaciones

- Dados tres conjuntos E, F, G y dos aplicaciones

$$f : E \to F \text{ y } g : F \to G,$$

  se define la **composición** de f y g como la aplicación $g \circ f$ (léase "f compuesta con g") como

$$g \circ f : E \to G$$

  tal que, $\forall x \in E$,

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

  Es decir, el resultado de aplicar sucesivamente f y g. Obsérvese que la imagen de E por f ha de estar contenida en el conjunto inicial de g.

- **Propiedades de la composición:**

- Dadas tres aplicaciones $f : E \to F,\ g : F \to G$ y $h : G \to H$, se tiene que
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$
es decir, la composición de aplicaciones es **asociativa**.
- Para toda aplicación $f : E \to F$, se tiene que $f \circ I_E = f$ y $I_F \circ f = f$.
- La composición de dos aplicaciones inyectivas es inyectiva.
- La composición de dos aplicaciones suprayectivas es suprayectiva.
- Como consecuencia de las dos anteriores, la composición de dos aplicaciones biyectivas es biyectiva.

- Sean $f : E \to F$ y $g : F \to G$ dos aplicaciones; se cumple:
  - $g \circ f$ inyectiva $\Rightarrow f$ inyectiva.
  - $g \circ f$ suprayectiva $\Rightarrow g$ suprayectiva.
  - $g \circ f$ biyectiva $\Rightarrow f$ inyectiva y g suprayectiva.

1.3.3. La aplicación inversa

- **Construcción de la aplicación inversa:** Si $f : E \to F$ es biyectiva, quiere decir que:
$$\forall y \in F, \exists ! x \in E \text{ tal que } f(x) = y.$$
Así pues, podemos definir una nueva aplicación $f^{-1} : F \to E$ de la siguiente manera:
$$\forall y \in F,\ f^{-1}(y) = x \text{ tal que } f(x) = y.$$
Es obvio que, $\forall x \in E,\ f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$, y que $\forall y \in F,\ f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$.

- Dada una aplicación **biyectiva** $f : E \to F$, existe una única aplicación $g : F \to E$ tal que $g \circ f = I_E$ y $f \circ g = I_F$; esta aplicación se llama la inversa de f, y se denota por f^{-1}.

- Por otro lado, es obvio que, dada una aplicación cualquiera f, si existe una aplicación f^{-1} que satisfaga la condición anterior, entonces f es biyectiva.

- Para una aplicación $f : E \to E$, y para cada número natural n, se usa la notación:
$$f^0 = I_E;$$
$$f^n = f \circ \overset{n}{\ldots} \circ f \text{ si } n \geq 1.$$
Si además f es biyectiva, se denota $f^{-n} = f^{-1} \circ \overset{n}{\ldots} \circ f^{-1}$.

- **Propiedades:**

  Dadas dos aplicaciones **biyectivas** $f : E \to F$ y $g : F \to G$, se cumple que:

  - $(f^{-1})^{-1} = f$.
  - $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Apéndice 2: Los números complejos

2.1 Definición axiomática. Operaciones con números complejos.

2.2 La conjugación y el módulo: propiedades. Representación trigonométrica. Módulo del producto de dos complejos. La desigualdad triangular. Argumento del producto de dos complejos.

2.3 Potencias n–ésimas. Fórmula de De Moivre. Raíces n–ésimas.

2.1. Definición y propiedades

Se pretende construir un conjunto que contenga naturalmente a los números reales, cuyas operaciones sean coherentes con las del cuerpo real y en el cual todo elemento admita raíz cuadrada. Para ello:

Definición 84 *El conjunto de los números complejos, que se denota por $\mathbb{C}$, es:*

$$\mathbb{C} := \{x + yi, \ x, y \in \mathbb{R}, \, i^2 = -1\}$$

Observación: El *número i* se denomina *unidad imaginaria.* Un número complejo $z := x + yi$ queda determinado unívocamente por los dos números reales (x, y) que lo definen, así puede identificarse geométricamente el conjunto de los números complejos con el plano $\mathbb{R}^2$. Esta expresión del número complejo z se denomina *forma binómica.*

Definición 85 *Dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, el número real a se llama* ***parte real*** *de z, mientras que el número real b se denomina* ***parte imaginaria*** *de z. Se denotan por*

$$Re\, z = a \quad , \quad \mathrm{Im}\, z = b.$$

Observación: Los números reales son los que tienen parte imaginaria nula; los números complejos con parte real nula se llaman **imaginarios puros**.

Los números complejos se suman agrupando sus partes reales e imaginarias y se multiplican operando formalmente y teniendo presente que $i^2 = -1$. Esto es:

Definición 86 *Dados dos números complejos $z := a + bi$, $w := c + di$ se define su **suma** como*

$$z + w := (a + c) + (b + d)i.$$

*y su **producto***

$$zw := (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Geométricamente, la suma de vectores se corresponde con la conocida *regla del paralelogramo.*

La suma y el producto *heredan* de los números reales las propiedades que se enuncian a continuación.

Propiedades:

1. Asociativas: $\forall z, w, u \in \mathbb{C},\ (z + w) + u = z + (w + u)$, $(zw)u = z(wu)$.

2. Para la suma existe un elemento neutro que es el 0 y para el producto un elemento unidad que es el 1.

3. Elemento opuesto (respecto de la suma): $\forall z = a + bi \in \mathbb{C},\ \exists(-z) = -a + (-b)i \in \mathbb{C}$ tal que $z + (-z) = 0$.

4. Elemento inverso (respecto del producto): $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \exists z^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$.

5. Conmutativas: $\forall z, w \in \mathbb{C},\ z + w = w + z$, $zw = wz$.

6. Propiedad distributiva del producto respecto a la suma: $\forall z, w, u \in \mathbb{C}$, se tiene que $z(w + u) = zw + zu$.

Este conjunto de propiedades nos permite decir que la terna $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tiene estructura de **cuerpo** (conmutativo).

2.2. Conjugación, módulo y argumento

Definición 87 *Dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, definimos su **conjugado**, y lo denotamos por $\overline{z}$, como el complejo $a - ib$.*

La interpretación geométrica de la conjugación es que los vectores correspondientes a complejos conjugados entre sí son simétricos respecto al eje de abscisas.

Propiedades de la conjugación:

- $\forall z \in \mathbb{C},\ \overline{\overline{z}} = z.$
- $\forall z, w \in \mathbb{C},\ \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}.$
- $\forall z, w \in \mathbb{C},\ \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$
- $\forall z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})\ ;\ \operatorname{Im} z = \dfrac{-i}{2}(z - \overline{z}) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}.$

Definición 88 *Dado $z = x + iy \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{R}$, definimos su **módulo** como*

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Geométricamente, mide la longitud del vector que representa z en el plano. También se cumple, evidentemente, que $|z| \geq 0$ y $(|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0)$.

Propiedades del módulo:

- $\forall z \in \mathbb{C},\ |\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|.$
- $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = |\overline{z}|.$
- $\forall z, w \in \mathbb{C},\ |zw| = |z||w|.$
- **Desigualdad triangular:** $\forall z, w \in \mathbb{C},\ |z+w| \leq |z|+|w|$; además, si $w \neq 0$, entonces $|z + w| = |z| + |w| \Leftrightarrow z = \alpha w$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$.

Observación: Si $|z| = 1$, entonces $z\overline{z} = 1$, es decir: $z^{-1} = \overline{z}$.

2.2.1. Argumento de un complejo

Dados $x, y \in \mathbb{R}$ no simultáneamente nulos, se pueden encontrar valores de $\theta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ \ ;\ \ \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Por ejemplo, si $x > 0$, se puede tomar $\theta = \arctan \frac{y}{x}$; si $x = 0$, se puede tomar $\theta = \frac{\pi}{2}$ si $y > 0$ y $\theta = -\frac{\pi}{2}$ si $y < 0$; si $x < 0$, puede tomarse $\theta = \pi - \arctan \frac{y}{x}$.

Definición 89 *Dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, el **argumento** de z es el conjunto*

$$\mathrm{Arg\ (z)} := \{\theta \in \mathbb{R}\ /\ \mathrm{z} = |\mathrm{z}|(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)\}. \tag{2.47}$$

Habitualmente diremos *un valor del argumento* de z para indicar cualquier elemento del conjunto Arg (z). Por abuso de lenguaje se simplifica y se dice simplemente *un argumento* de z. En particular, se llama **argumento principal** de z al único de los valores anteriores que pertenece al intervalo $(-\pi, \pi]$. En cada intervalo de longitud 2π hay un único valor del argumento. El que está en el intervalo $[0, 2\pi)$ se llama **ángulo polar**. Geométricamente, el ángulo polar de z corresponde al ángulo, medido en sentido positivo (esto es, contrario a las agujas del reloj), que forma con el eje de abscisas el vector que representa a z.

La expresión $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ se llama *forma trigonométrica* de z.

Observación: Cualesquiera dos valores del argumento de un mismo número complejo difieren en un múltiplo entero de 2π.

Si θ es un valor del argumento de un número complejo z, entonces

- $-\theta$ es un valor del argumento de $\overline{z}$.
- $\pi + \theta$ es un valor del argumento de $-z$.

2.3. Potencias. Fórmula de De Moivre

Proposición 41 *Dados dos complejos no nulos* $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ *y* $|w|(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$*, se cumple que*

$$zw = |z||w| \left(\cos(\theta + \varphi) + i \operatorname{sen}(\theta + \varphi)\right).$$

Es decir, que ***el argumento de un producto es la suma de los argumentos****.*

El resultado anterior motiva la siguiente notación:

Identidad de Euler

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} := \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \tag{2.48}$$

Así pues, la expresión general de cualquier número complejo no nulo es $re^{i\theta}$, $\theta, r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$.

Cuando un número complejo se escribe según la expresión anterior, se dice que está en *forma exponencial.*

De modo que, si tenemos dos números complejos de módulo unidad $e^{i\theta}$ y $e^{i\varphi}$, su producto vale $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi}$; además, la unidad, que es el número de módulo 1 y argumento 0, se puede expresar como $1 = e^{i0}$; es decir, que esta notación es coherente con las propiedades de la exponencial.

Nota: En el contexto presente, la identidad de Euler no es más que una notación, pero en realidad responde al concepto de exponencial de un número complejo que se estudia en matemáticas más avanzadas.

Observación: El producto de un número z por otro de módulo unidad $e^{i\theta}$, se interpreta geométricamente como el resultado de girar el vector que representa z un ángulo θ en sentido positivo (que es el contrario a las agujas del reloj).

2.3.1. Fórmula de De Moivre

Dados $\theta \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta. \tag{2.49}$$

(Donde para n negativo se entiende potencia $-n$ del inverso).

Así pues, la potenciación de números complejos (para potencias enteras) consiste en elevar el módulo a la correspondiente potencia y multiplicar el argumento por dicha potencia:

$$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}. \tag{2.50}$$

Apéndice 3: Polinomios

3.1 Polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Operaciones con polinomios. Grado de un polinomio.

3.2 División euclídea de polinomios. Teorema del resto. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos polinomios.

3.3 Raíces de un polinomio: simples y múltiples. El teorema fundamental del Álgebra.

3.1. Polinomios con coeficientes en un cuerpo

A lo largo de todo el apéndice, la letra $\mathbb{K}$ representa un cuerpo que será siempre el real o el complejo.

Definición 90 *Dado* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *cuerpo, un polinomio con coeficientes en* $\mathbb{K}$ *es una expresión de la forma*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

en donde $a_j \in \mathbb{K}$ *y* $n \in \mathbb{N}$. *Los* a_j *son los coeficientes del polinomio* P. *Si* $a_n \neq 0$ *en la expresión anterior, se dice que* P *tiene grado* n*;* a_n *se dice el coeficiente principal de* P*, si* $a_n = 1$ *se dice que el polinomio es mónico. El coeficiente* a_0 *se denomina término independiente.*

Definición 91 *El conjunto de todos los polinomios con coeficientes en* $\mathbb{K}$ *se denota por* $\mathbb{K}[x]$*; el conjunto de los polinomios de* $\mathbb{K}[x]$ *cuyo grado es* ***menor o igual*** *que* $n \in \mathbb{N}$ *se denota por* $\mathbb{K}_n[x]$.

Observación: Es importante notar que lo que determina un polinomio son sus coeficientes a_j; la indeterminada x puede nombrarse mediante cualquier otra letra o símbolo. Cuando el cuerpo $\mathbb{K}$ es el de los complejos, a menudo se utiliza la letra z para la indeterminada.

3.1.1. Operaciones con polinomios

Definición 92 *Dados dos polinomios* $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ *y* $Q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$*, se define su* ***suma****:*

$$(P+Q)(x) := P(x) + Q(x) = \sum_{j=0}^{\text{máx}(m,n)} (a_j + b_j)x^j,$$

(en donde suponemos que $a_j = 0$ *si* $j > n$ *y* $b_j = 0$ *si* $j > m$*) y su* ***producto****:*

$$(PQ)(x) := P(x)Q(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{i+j=k} a_i b_j x^k.$$

Es decir, que para sumar polinomios sumamos los coeficientes de términos de igual grado. Para multiplicarlos, multiplicamos todos los términos del primero por todos los del segundo y sumamos, agrupando los coeficientes de igual grado. El grado del producto es la suma de los grados de los factores.

3.2. División euclídea de polinomios

Definición 93 *Dados dos polinomios no nulos* P, Q *de* $\mathbb{K}[x]$*, se dice que* Q ***divide*** *a* P *(se denota por* $Q|P$*) si existe un polinomio* $C \in \mathbb{K}[x]$ *tal que* $P = CQ$ *(también se dice que* Q *es un* ***divisor*** *de* P *y que* P *es un* ***múltiplo*** *de* Q*).*

Definición 94 *Dados dos polinomios no nulos* P, Q *de* $\mathbb{K}[x]$*, se define un máximo común divisor de* P *y* Q *como un polinomio* D*, de grado máximo, tal que* $D|P$ *y* $D|Q$*.*

Definición 95 *Dados dos polinomios no nulos* P, Q *de* $\mathbb{K}[x]$*, se define un mínimo común múltiplo de* P *y* Q *como un polinomio* M*, de grado mínimo, tal que:* $P|M$ *y* $Q|M$*.*

Teorema 17 *[de división de Euclides] Dados* $P, Q \in \mathbb{K}[x]$*, con* $Q \neq 0$*, existen únicos* $C, R \in \mathbb{K}[x]$ *tales que*

$$P = CQ + R$$

y grado$(R) <$ *grado*(Q)*.*

Observación: $R = 0$ si y solo si Q divide a P.

Proposición 42 *Si* $P = CQ + R$*, entonces m.c.d.*$(P, Q) =$*m.c.d.*(Q, R)*.*

De esta proposición se deduce el **Algoritmo de Euclides** para el cálculo del máximo común divisor de dos polinomios:

Dados P, Q, con grado$(P) \geq$ grado(Q), hacemos la división euclídea $P = C_1 Q + R_1$; si R_1 es no nulo, volvemos a dividir: $Q = C_2 R_1 + R_2$; de nuevo, si R_2 es no nulo, volvemos a dividir $R_1 = C_3R_2 + R_3$, y reiteramos el proceso hasta que lleguemos a un resto $R_{k+1} = 0$. Como $R_{k-1} = C_{k+1}R_k$, en virtud de la proposición anterior tenemos que

$$\text{m.c.d.}(P, Q) = \text{m.c.d.}(Q, R_1) = \text{m.c.d.}(R_1, R_2) = \ldots = \text{m.c.d.}(R_{k-1}, R_k) = R_k$$

es decir, que un **máximo común divisor de P y Q es el último resto no nulo** obtenido en el proceso anterior.

Teorema 18 (del resto) *Para cualquier polinomio $P \neq 0$, y para cualquier $a \in \mathbb{K}$, el resto de dividir $P(x)$ entre $x - a$ vale $P(a)$.*

3.3. Raíces de un polinomio

Dado un polinomio de segundo grado, $ax^2 + bx + c$, la fórmula para calcular sus raíces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

es conocida desde la antigüedad; sabemos también que si el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ no es nulo, el polinomio admite dos raíces distintas y si es nulo tiene una raíz doble. ¿Qué ocurre para polinomios de grado mayor que 2? En el siglo XVI se encontraron fórmulas para obtener explícitamente las raíces de polinomios de tercer y cuarto grado y desde entonces hasta el siglo XIX fueron muchos los esfuerzos que se hicieron por encontrar una fórmula general. Fue un jovencísimo matemético francés, Évariste Galois (1811-1832), quien demostró la inexistencia de tal fórmula.

En este epígrafe indicamos algunos resultados relacionados con raíces de polinomios pero nos parece adecuado indicar la diferencia sustancial entre la existencia *teórica* de raíces y el cálculo *explícito* de las mismas.

Definición 96 *Dado $P \in \mathbb{K}[x]$, se dice que $a \in \mathbb{K}$ es una raíz de P si $P(a) = 0$ (i.e. si P es divisible entre $x - a$).*

Se dice que a es una raíz múltiple de orden $m \geq 2$ si $P(x) = (x - a)^m Q(x)$ con $Q(a) \neq 0$; para $m = 1$, se dice que a es una raíz simple.

Proposición 43 (Caracterización de las raíces múltiples) *Dados $P \in \mathbb{K}[x]$ y $a \in \mathbb{K}$, a es raíz de P múltiple de orden m si y solo si*

$$P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(m-1)}(a) = 0 \text{ pero } P^{(m)}(a) \neq 0.$$

Teorema 19 (Fundamental del Álgebra) *Todo polinomio complejo no constante posee alguna raíz.*

Si P es un polinomio de grado $n > 1$, tiene alguna raíz $a_1 \in \mathbb{C}$; entonces $P(z) = (z - a_1)Q(z)$, donde Q es un polinomio de grado $n - 1$ que también tendrá alguna raíz $a_2 \in \mathbb{C}$; podemos aplicar el teorema recursivamente hasta llegar a un polinomio de grado 0 (es decir, constante), lo que nos permite concluir el siguiente resultado:

Corolario: (factorización en $\mathbb{C}[z]$) Todo polinomio complejo de grado n puede escribirse como producto de factores n lineales, es decir:

$$P(z) = \alpha(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n),$$

en donde $\alpha \in \mathbb{C}$ es el coeficiente principal de P y $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ son sus raíces.

Observación: Otra forma de expresar la factorización es

$$P(z) = \alpha \prod_{k=1}^{p} (z - \alpha_k)^{m_k}$$

en donde α_k son las raíces distintas y m_k sus respectivas multiplicidades y $\sum_{k=1}^{p} m_k = n$.

Observación: (Raíces de polinomios reales.) Sea $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \in \mathbb{C}[z]$; Entonces $\overline{P(z)} = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 \overline{z} + \dots + \overline{a}_n \overline{z}^n$, con lo que $z_0 \in \mathbb{C}$ será raíz de P si y solo si su conjugada $\overline{z}_0$ lo es del polinomio $\overline{P}$ (el polinomio cuyos coeficientes son los conjugados de los de P), y ambas tienen la misma multiplicidad.

En particular, si $P \in \mathbb{R}[x]$, z_0 será raíz de P si y solo si $\overline{z}_0$ lo es. Así, las raíces de un polinomio con coeficientes reales, o bien son reales, o bien aparecen como pares de complejos conjugados, ambos de la misma multiplicidad.

Como consecuencia, todo polinomio real y de grado impar tiene alguna raíz real.

3.3.1. Raíces de polinomios con coeficientes enteros

Proposición 44 *Sea $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$, con $a_j \in \mathbb{Z}\ \forall j$ y $a_0 \neq 0$; si $\frac{t}{s}$ (fracción irreducible) es una raíz racional de P, entonces $t|a_0$ y $s|a_n$.*

En particular, si P es mónico, sus raíces racionales tienen que ser números enteros divisores de $a_0 \neq 0$.

Ejercicios

1.– Dados los números complejos $z = 3 + 2i$ y $w = 4 - i$, exprésense en forma binómica los siguientes números complejos:

$$z + w,\ 3z - 4w,\ iz + w,\ zw,\ z/w.$$

2.– Exprésese en forma binómica el número complejo

$$\frac{2 + 11i}{3 + 4i}.$$

3.– Determínese el argumento principal y la forma exponencial de los números complejos

$$1,\ i,\ 1 + i,\ \sqrt{3} + i,\ -1 - \sqrt{3}i.$$

4.– Utilícese la fórmula de De Moivre para expresar $\cos 3\theta$ como un polinomio en $\cos\theta$ y $\operatorname{sen} 3\theta$ en función de potencias de $\operatorname{sen}\theta$. Dedúzcanse las igualdades:

$$\begin{aligned} \cos^3\theta &= \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 3\theta, \\ \text{sen}^3\theta &= \frac{3}{4}\text{sen }\theta - \frac{1}{4}\text{sen }3\theta. \end{aligned}$$

5.– Calcúlese un polinomio sabiendo que el resto de dividirlo por $x+2$ es -2, el cociente de dividirlo entre $x^2 - 4$ es $3x$ y su derivada admite 1 como raíz.

6.– Calcúlese un polinomio $p(z)$ de grado 2 que verifique

$$p(1) = p(2) = -1 + 3i, \quad p(i) = 0.$$

¿Es único?, ¿existe algún polinomio de grado 3 que cumpla esas condiciones?, ¿es único?

7.– Factorícese el polinomio $P(z) = 2z^4 - z^3 - 7z^2 + 3z + 3$.

Indicación: Utilícese la proposición 4 para establecer las raíces racionales.

8.– Factorícese el polinomio $P(z) = 4z^4 - 12z^3 + 13z^2 - 12z + 9$ sabiendo que alguna de sus raíces es imaginaria pura.

9.– Calcúlense las dos raíces cuadradas del número complejo $-80 - 18i$.

Indicación: Resuélvase el sistema de ecuaciones que resulta al identificar las partes real e imaginaria en la ecuación $(x + iy)^2 = -80 - 18i$.

Como aplicación, resuélvase la ecuación de segundo grado

$$z^2 - (5 + i)z + (26 + 7i) = 0.$$

10.– Calcúlense las raíces de la ecuación $z^2 + |z|^2 = 1 + i$.

Bibliografía incompleta

512-BUR A J. de Burgos *Álgebra Lineal y geometría cartesiana.* McGraw–Hill. Madrid, 2006.

512-BUR B J. de Burgos *Álgebra Lineal: definiciones, teoremas y resultados.* García-Maroto. Madrid, 2007.

512-GRO S. I. Grossmann, *Álgebra Lineal.* McGraw–Hill. México, 2007.

512-LAY D. C. Lay, *Álgebra Lineal y sus aplicaciones.* 3a. ed., Pearson Addison Wesley, México 2007.

¿? C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* SIAM[2]

512-NOB B.Ñoble B., J. W. Daniel, *Álgebra lineal aplicada.* Prentice-Hall Hispanoamericana. México, 1989.

512-ROJ J. Rojo *Álgebra Lineal.* McGraw–Hill. Madrid, 2001.

512-VIL–P De la Villa A. *Problemas de Álgebra.* Clagsa. Madrid, 1994.

Nota: El número 512 y las siglas que anteceden a cada libro se refieren a la signatura de registro de los libros en la biblioteca de la E.T.S.I. Industriales.

[2]Este libro aún no está en la biblioteca, pero se puede consultar online