

1 Nociones preliminares sobre problemas de valor inicial

1.1 Introducción

En este capítulo vamos a estudiar bajo qué condiciones los denominados *problemas de valor inicial* o *problemas de Cauchy* admiten soluciones y en qué casos podemos garantizar la unicidad de las mismas. Además se verá la regularidad de las mismas, su dependencia continua respecto a los datos y algunas cuestiones generales sobre su aproximación numérica. Se trata de un capítulo de revisión de conceptos, en el que no se entrará en detalles ni en demostraciones.

1.2 Existencia y unicidad de soluciones

En esta sección se recuerdan algunos resultados básicos sobre los problemas de valor inicial, empezando por su definición. Para ello, previamente se introduce el concepto de dominio de $\mathbb{R}^d$, con $d \in \mathbb{N}$.

Definición 1.1 Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^d$, con $d \in \mathbb{N}$, es un *dominio* de $\mathbb{R}^d$ (no confundir con el dominio de una función) si D es un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^d$. $\square$

Definición 1.2 (Problema de valor inicial o de Cauchy) Sea D un dominio de $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, un instante inicial $t_0 \in \mathbb{R}$ y un valor inicial $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $(t_0, \xi_0) \in \overline{D}$. Un *problema de valor inicial* (o *problema de Cauchy*) consiste en encontrar una función diferenciable $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ solución del problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in I \\ x(t_0) = \xi_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$ de forma que $t_0 \in \overline{I}$ y $(t, x(t)) \in D$ para todo $t \in I$. $\square$

Ejemplo 1.3 Un problema de valor inicial es

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{2x(t)}, & t > 0 \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

para el cual $x(t) = \sqrt{t}$, $t \geq 0$, es solución. Nótese que en este ejemplo la función

$$f(t, \xi) = \frac{1}{2\xi}$$

está definida sobre el conjunto $D = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ y $(t_0, \xi_0) = (0, 0) \in \overline{D}$. $\square$

Observación 1.4 Cuando $f \in \mathcal{C}(D)$ entonces, por el *Teorema Fundamental del Cálculo* y la *Regla de Barrow*, el problema de valor inicial (1.1) es equivalente a encontrar las soluciones $x(t)$ de la ecuación integral

$$x(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad \square$$

Observación 1.5 En la mayoría de las aplicaciones, t denota la *variable temporal* y x la *variable espacial* (aunque hay otros tipos de problemas, por ejemplo, de tipo geométrico, en lo que esto no suele ser así). Como se aprecia, un problema de valor inicial consta de una ecuación diferencial (denominada *autónoma* cuando f no depende de t) y de una condición inicial. Nótese que la continuidad de la función f no es necesaria para la existencia de solución del problema de valor inicial (1.1), pues no todas las funciones diferenciables son de clase $\mathcal{C}^1$. $\square$

Observación 1.6 Los problemas del tipo

$$\begin{cases} x^{(p)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(p-1)}(t)), & t \in I \\ x(t_0) = \xi_0 \\ x'(t_0) = \xi_1 \\ \dots \\ x^{(p-1)}(t_0) = \xi_{p-1} \end{cases}$$

con $t_0 \in \bar{I}$ y $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{p-1}\} \subset \mathbb{R}^n$ son un caso particular de problemas de valor inicial. Se pueden expresar en la forma (1.1) mediante el cambio de variable¹

$$y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t))^T$$

con

$$y_1(t) = x(t), y_2(t) = x'(t), \dots, y_p(t) = x^{(p-1)}(t).$$

En efecto, puesto que

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ \dots \\ y_{p-1}'(t) = y_p(t) \\ y_p'(t) = f(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t)), \end{cases}$$

se tiene la equivalencia

$$\begin{cases} x^{(p)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(p-1)}(t)), & t \in I \\ x(t_0) = \xi_0 \\ x'(t_0) = \xi_1 \\ \dots \\ x^{(p-1)}(t_0) = \xi_{p-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(t_0) = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{p-1})^T, \end{cases}$$

donde $y \in C^p(I; \mathbb{R}^{np})$ y $g : I \times \mathbb{R}^{np} \rightarrow \mathbb{R}^{np}$ viene dada por

$$g(t, \zeta) = (\zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_p, f(t, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p))^T,$$

siendo $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p)^T$. $\square$

Observación 1.7 Puesto que en el espacio vectorial de dimensión finita $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes, en todo lo que sigue denotaremos por $\|\cdot\|$ a una norma arbitraria de dicho espacio. A la hora de elegir una norma en concreto, tomaremos, salvo que se especifique lo contrario, la *norma infinito* de un vector $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ dada por

$$\|v\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n} |v_i|,$$

donde $|v_i|$ denota, respectivamente, el valor absoluto o el módulo de la componente i -ésima del vector v . $\square$

Veamos algunas condiciones que nos aseguren la existencia de soluciones del problema de valor inicial (1.1) así como su unicidad.

Teorema 1.8 (Peano (versión local)) Si f es una función continua sobre el rectángulo

$$R = \{(t, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - t_0| \leq \alpha, \|\xi - \xi_0\| \leq \beta\} \quad (1.3)$$

para ciertos $\alpha, \beta > 0$, se verifica que existe, al menos, una solución $x(t)$ del problema de valor inicial (1.1) definida en el intervalo $[t_0 - h, t_0 + h]$ siendo

$$h = \min \left\{ \alpha, \frac{\beta}{M} \right\}, \quad (1.4)$$

donde

$$M = \max_{(t, \xi) \in R} \|f(t, \xi)\|.$$

¹En todo lo que sigue se utilizarán los vectores en formato columna, denotando por v^T el *traspuesto* del vector fila v .

DEMOSTRACIÓN. Véase [Coddington–Levinson, Teorema 1.2 del Capítulo 1]. $\square$

Las hipótesis del Teorema 1.8 garantizan existencia de soluciones locales pero no su unicidad, como se aprecia en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.9 Las funciones $x_1(t) \equiv 0$ y $x_2(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \sqrt{t^3}, & t > 0 \end{cases}$ son soluciones del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x(t)}, & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad \square$$

Teorema 1.10 (Peano (versión global)) Si $t_0 \in [a, b]$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ y $f \in \mathcal{C}([a, b] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ es una función acotada entonces existe, al menos, una solución $x(t)$ del problema de valor inicial (1.1) definida en el intervalo $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN. Véase [Guzmán, Teorema 4.1.3]. $\square$

Teorema 1.11 (Picard–Lindelöf (versión local)) Sea f una función continua sobre el rectángulo R dado en (1.3) que, además, es lipschitziana en la segunda variable en R , es decir, existe $L > 0$ (denominada constante de Lipschitz de f) tal que

$$\|f(t, \xi) - f(t, \eta)\| \leq L \|\xi - \eta\| \quad (1.5)$$

para todo $(t, \xi), (t, \eta) \in R$. Entonces se verifica que existe una única solución $x(t)$ del problema de valor inicial (1.1) definida en el intervalo $[t_0 - h, t_0 + h]$ donde h viene dado en (1.4).

DEMOSTRACIÓN. Véase [Coddington–Levinson, Teorema 2.3 del Capítulo 1]. $\square$

Corolario 1.12 Si $f = (f^1, f^2, \dots, f^n)^T$ es tal que las funciones $\{f^i\}_{i=1}^n$ y $\left\{\frac{\partial f^i}{\partial \xi_j}\right\}_{i,j=1}^n$ son continuas en el rectángulo R dado en (1.3), se verifica que existe una única solución $x(t)$ del problema de valor inicial (1.1) definida en el intervalo $[t_0 - h, t_0 + h]$ donde h viene dado en (1.4).

Ejemplo 1.13 El valor h que determina el Teorema 1.11 no es, en general, el mayor posible. En efecto, consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = (x(t))^2 \\ x(0) = 1. \end{cases} \quad (1.6)$$

Puesto que las funciones

$$f(t, \xi) = \xi^2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2) \text{ y } \frac{\partial f}{\partial \xi}(t, \xi) = 2\xi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2), \quad (1.7)$$

se verifica que f es continua y lipschitziana en la segunda variable en cualquier rectángulo R del tipo (1.3). Por tanto, aplicando el Teorema 1.11, se tiene garantizada la existencia y unicidad de solución del problema (1.6) en el intervalo $[-h, h]$, siendo

$$h = \min \left\{ \alpha, \frac{\beta}{(1 + \beta)^2} \right\}. \quad (1.8)$$

La regularidad (1.7) nos permite elegir α y β tan grandes como se quiera y, puesto que el máximo de la función

$$\phi(\beta) = \frac{\beta}{(1 + \beta)^2}$$

se alcanza en $\beta_{\max} = 1$ y vale $\phi(\beta_{\max}) = \frac{1}{4}$ (compruébese), el valor más grande de $h > 0$ que puede considerarse en (1.8) es $h = \frac{1}{4}$, lo que determina existencia y unicidad de solución del problema (1.6) en el intervalo $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Por otra parte, mediante técnicas de integración elemental, se tiene que la solución del problema de valor inicial (1.6) es

$$x(t) = \frac{1}{1 - t}$$

(compruébese), que está definida en el intervalo $(-\infty, 1)$. $\square$

Teorema 1.14 (Picard–Lindelöf (versión global)) Sea $t_0 \in [a, b]$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ y $f \in \mathcal{C}([a, b] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ lipschitziana en la segunda variable, es decir, verifica (1.5) para todo $t \in [a, b]$ y $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$. Entonces existe una única solución $x(t)$ del problema de valor inicial (1.1) definida en el intervalo $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN. Véase [Guzmán, Teorema 4.1.1]. $\square$

Teniendo en cuenta que una condición suficiente (y fácilmente verificable en las aplicaciones) para que la función $f \in \mathcal{C}([a, b] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ sea lipschitziana en su segunda variable es que la matriz jacobiana

$$D_\xi f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial \xi_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}([a, b] \times \mathbb{R}^n; \mathcal{M}_n)$$

y sea acotada en $[a, b] \times \mathbb{R}^n$. Se tiene así se tiene el siguiente resultado:

Corolario 1.15 Sea $t_0 \in [a, b]$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ y $f = (f^1, f^2, \dots, f^n)^T$ tal que las funciones

$$\{f^i\}_{i=1}^n \in \mathcal{C}([a, b] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}) \text{ y } \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial \xi_j} \right\}_{i,j=1}^n \in \mathcal{C}([a, b] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}).$$

Si, además, las funciones $\left\{ \frac{\partial f^i}{\partial \xi_j} \right\}_{i,j=1}^n$ están acotadas en $[a, b] \times \mathbb{R}^n$, se verifica que existe una única solución $x(t)$ del problema de valor inicial (1.1) definida en el intervalo $[a, b]$.

Observación 1.16 En lo sucesivo supondremos que $t_0 \in [a, b]$ y que la función $f \in \mathcal{C}([a, b] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y es lipschitziana en la segunda variable por lo que, aplicando el Teorema 1.14, se tiene que los problemas de valor inicial de la forma (1.1) que se van a considerar van a tener solución y ésta va a ser única. $\square$

Observación 1.17 A pesar de que los resultados anteriores garantizan, bajo adecuadas hipótesis sobre la función f , existencia y unicidad de solución del problema de valor inicial (1.1), ninguno de ellos proporciona métodos que permitan obtener dicha solución. De hecho, en muy pocas ocasiones (sólo cuando la ecuación diferencial es de las integrables elementalmente) vamos a poder obtener la solución exacta del problema (1.1). De aquí la importancia de los Métodos Numéricos que estudiaremos en los siguientes capítulos, mediante los cuales podremos obtener valores aproximados de la solución. $\square$

1.3 Regularidad de las soluciones

Veamos, a continuación, cómo la regularidad de la función f del problema (1.1) determina, de manera muy sencilla, la regularidad de sus soluciones.

Teorema 1.18 Si $f \in \mathcal{C}^p(D)$ con $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces cualquier solución $x(t)$ de la ecuación diferencial

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I$$

tiene la regularidad $x \in \mathcal{C}^{p+1}(I)$.

DEMOSTRACIÓN. Lo probamos por inducción sobre p :

a) Si $p = 0$ el resultado es obvio.

b) Supuesto cierto el resultado para $p - 1$ lo probamos para p . Si $f \in \mathcal{C}^p(D)$, basta observar que la función

$$\begin{aligned} x^{(p+1)}(t) &= \frac{d^p}{dt^p} f(t, x(t)) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} f(t, x(t)) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} f(t, x(t)) \right) + D_\xi \left(\frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} f(t, x(t)) \right) x'(t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} f(t, x(t)) \right) + D_\xi \left(\frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} f(t, x(t)) \right) f(t, x(t)) \end{aligned}$$

es una función continua, por ser composición de funciones continuas. $\square$

1.4 Dependencia continua respecto a los datos de un problema de valor inicial

La solución $x(t)$ del problema (1.1) depende, en realidad, de t, t_0, ξ_0 y f , por lo que podríamos escribir la solución como $x(t; t_0, \xi_0, f)$. Puesto que la ecuación diferencial suele ser un modelo de algún fenómeno físico, económico, ..., cabe esperar ciertos errores en el modelo, en los datos, ... De este modo surgen, de modo natural, las siguientes preguntas: ¿Cómo se comportarán las soluciones frente a pequeños cambios del modelo o de los datos? ¿Son parecidas las soluciones? A continuación damos un resultado que trata de dar respuesta a estos interrogantes.

Teorema 1.19 Sea D un dominio de $\mathbb{R}^{n+1}$ y supongamos que se cumplen las siguientes propiedades:

a) Las funciones $f \in \mathcal{C}(D)$ y $\tilde{f} \in \mathcal{C}(D)$.

b) La función f es lipschitziana en la segunda variable con constante de Lipschitz $L > 0$.

c) $\|f(t, \xi) - \tilde{f}(t, \xi)\| \leq \varepsilon$ para todo $(t, \xi) \in D$.

d) Las funciones $x(\cdot) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\tilde{x}(\cdot) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ son soluciones respectivas de los problemas de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [a, b] \\ x(a) = \xi_0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \tilde{x}'(t) = \tilde{f}(t, \tilde{x}(t)), & t \in [a, b] \\ \tilde{x}(a) = \tilde{\xi}_0, \end{cases} \quad (1.9)$$

con $(t, x(t)), (t, \tilde{x}(t)) \in D$ para todo $t \in [a, b]$.

Entonces, para todo $t \in [a, b]$, se verifica que

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq e^{L(t-a)} \|\xi_0 - \tilde{\xi}_0\| + \frac{e^{L(t-a)} - 1}{L} \varepsilon. \quad (1.10)$$

DEMOSTRACIÓN. Véase [Birkhoff–Rota, Teorema 3, página 145]. $\square$

Observación 1.20 La estimación (1.10) implica la *dependencia continua* de la solución respecto de los datos, en el siguiente sentido: si $\|\xi_0 - \tilde{\xi}_0\| \rightarrow 0$ y $\varepsilon \rightarrow 0$ entonces $\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \rightarrow 0$ para todo $t \in [a, b]$. Es decir, si los datos de los problemas (1.9) están próximos, las soluciones de los mismos también lo estarán. $\square$

1.5 Cuestiones generales sobre la aproximación numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias

Para aproximar numéricamente las soluciones $x \in \mathcal{C}^p(I; \mathbb{R}^n)$ de la ecuación diferencial (vectorial)

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(p)}(t)) = r(t) \quad (1.11)$$

sobre un intervalo temporal $I = [a, b]$, con $r \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$, se suele discretizar el intervalo temporal mediante una *mall*a de *nodos* del tipo $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$, con $N \in \mathbb{N}$, verificando que

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b.$$

Nótese que los puntos $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ constituyen una *partición* del intervalo I y no tienen por qué ser equiespaciados aunque, en muchas ocasiones, se considera el *paso de discretización* fijo

$$h = \frac{b-a}{N}$$

y la *mall*a de puntos

$$t_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

En este caso los nodos son *equidistantes*. Salvo que se exprese lo contrario, en todo lo que sigue se utilizará este tipo de discretización.

La aproximación numérica utiliza algún *esquema numérico* (o *algoritmo*) que sea capaz de encontrar una secuencia $\{x_0, x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^n$ de forma que aproxime la solución $x(t)$ en los nodos de la partición, es decir,

$$x_i \simeq x(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, N$$

(véase la Figura 1.1(a)).

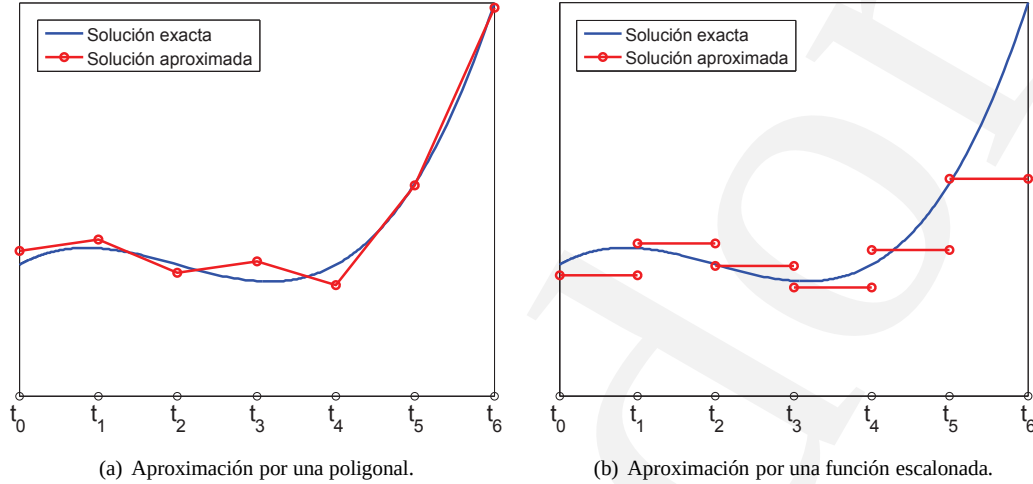


Figura 1.1: Ejemplos de aproximaciones de una función.

En la mayoría de los casos, estos esquemas numéricos se basan en encontrar una aproximación discreta de la función F que involucre nodos de la partición y valores aproximados mediante una relación del tipo

$$F_h(t_{i-r}, \dots, t_i, \dots, t_{i+s}, x_{i-r}, \dots, x_i, \dots, x_{i+s}) = 0, \quad (1.12)$$

que nos permita obtener la secuencia $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$.

A partir de aquí se obtienen los *errores locales* $\varepsilon_i(h)$ definidos como

$$\varepsilon_i(h) = x(t_i) - x_i, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

De esta forma, se obtiene un vector de errores

$$\varepsilon(h) = (\varepsilon_0(h), \varepsilon_1(h), \dots, \varepsilon_N(h))^T \in \mathbb{R}^{n(N+1)} \quad (1.13)$$

cuya “magnitud” queremos medir.

Tal y como se ha visto, las aproximaciones numéricas no suelen proporcionar, por regla general, una función $x^h(t)$ que sea una aproximación de la solución exacta $x(t)$ en todo el intervalo $[a, b]$, sino un conjunto de vectores x_i que aproximan los valores $x(t_i)$ (o, en otros casos, cierto promedio de la solución en un intervalo “próximo” a t_i). No obstante, a partir de estos valores aproximados se pueden obtener diversas funciones $x^h(t)$ que aproximen $x(t)$. Por ejemplo, se puede hacer una interpolación lineal a trozos mediante la *poligonal*

$$x^h(t) = x_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{h} (t - t_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \quad (1.14)$$

para $i = 0, 1, \dots, N - 1$ (véase la Figura 1.1(a)) o, también, considerar la aproximación por la función escalonada

$$x^h(t) = x_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}) \quad (1.15)$$

para $i = 0, 1, \dots, N - 1$ (véase la Figura 1.1(b)). Nótese que, mientras que la función $x^h(t)$ definida en (1.14) es siempre continua en todo el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b) salvo, quizás, en los puntos $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$, la función $x^h(t)$ considerada en (1.15) es, en general, discontinua en los nodos $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$.

Llegados a este punto, podríamos preguntarnos por $\|x - x^h\|$ donde $\|\cdot\|$ es una norma en un espacio funcional. Por ejemplo, una vez fijada una norma arbitraria $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$, las normas funcionales más usuales que suelen considerarse para una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, son

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} \|f(t)\|, \quad \|f\|_1 = \int_a^b \|f(t)\| dt, \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b \|f(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

o, en general, para $1 \leq p < +\infty$,

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1.16)$$

siendo $f \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R}^n)$.²

En lo sucesivo trataremos principalmente con la norma $\|\cdot\|_\infty$. En este caso, generalmente se intenta reducir, en la medida de lo posible, uno de los siguientes errores:

a) *Error de discretización global absoluto*: Se define como

$$\varepsilon_{\text{abs}}(h) = \|\varepsilon(h)\|_\infty = \max_{i=0,1,\dots,N} \|x(t_i) - x_i\|,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma que se esté utilizando en $\mathbb{R}^n$.

b) *Error de discretización global relativo*: Este tipo de error tiene en cuenta el tamaño de la magnitud que aproxima y viene dado por

$$\varepsilon_{\text{rel}}(h) = \frac{\varepsilon_{\text{abs}}(h)}{\|x(t)\|_\infty},$$

supuesto que $x \neq 0$ en $[a, b]$.

Estos errores se generan por la acumulación sucesiva de lo que se conoce como *error local de truncamiento*, que de una manera general y poco precisa (veremos más adelante las definiciones concretas), es el error algorítmico $\tau(h)$ cometido en la aproximación del operador diferencial cuando se utiliza la solución exacta $x(t)$, de tal forma que

$$F_h(t_{i-r}, \dots, t_i, \dots, t_{i+s}, x(t_{i-r}), \dots, x(t_i), \dots, x(t_{i+s})) + \tau(h) = 0.$$

A estos *errores algorítmicos* hay que añadir los *errores de entrada* de datos (debidos a imprecisiones o fallos de los instrumentos de medida) y los *errores del ordenador* que, de forma general, pueden dividirse en:

- a) *Errores de desbordamiento y redondeo*, debidos a la incapacidad de un ordenador de representar, de manera exacta, todos los números reales.
- b) *Errores operacionales*, cometidos por el ordenador al operar con números.

La acumulación de todos los errores que intervienen en el proceso forman lo que se conoce como *errores de salida*. Esquemáticamente:

Errores de entrada	+	Errores algorítmicos	+	Errores del ordenador	=	Errores de salida
-----------------------	---	-------------------------	---	--------------------------	---	----------------------

En los capítulos siguientes, intentaremos dar respuesta a los siguientes interrogantes:

- ¿Cómo resolver numéricamente una ecuación diferencial?
- ¿Cómo medir el grado de aproximación obtenido?
- ¿Cómo comparar dos métodos numéricos distintos para determinar el mejor de ellos?

Podemos adelantar que la última pregunta no está bien formulada, en el sentido de que no hay un método que sea el “mejor” de todos. Para calificar a un método como “bueno”, suelen tenerse en cuenta diversos aspectos como su *precisión*, su *coste* de implementación en el ordenador (se trata de elegir esquemas numéricos en los que el *gasto de memoria*, tanto para la ejecución del algoritmo como para el almacenamiento de los datos, no sea “muy grande”),...

1.6 Una clasificación básica de los esquemas numéricos de aproximación de problemas de valor inicial

Por regla general, en este tipo de problemas, se está interesado en conocer (al menos aproximadamente) la solución del problema para instantes posteriores al instante inicial. Utilizando la notación expuesta en la Sección 1.5 para las aproximaciones numéricas, para este tipo particular de problemas se irán calculando, sucesivamente, los valores $x_1, x_2, x_3, \dots$ (uno tras otro). Para ello, una vez calculados los términos $\{x_0, x_1, \dots, x_i\}$, se suele calcular x_{i+1} mediante esquemas numéricos de uno de los dos tipos siguientes:

²Las normas anteriores están definidas sobre espacios funcionales más generales como $L^\infty((a, b); \mathbb{R}^n)$, $L^1((a, b); \mathbb{R}^n)$, $L^2((a, b); \mathbb{R}^n)$ y $L^p((a, b); \mathbb{R}^n)$, respectivamente.

a) *Esquemas explícitos de k pasos:*

$$x_{i+1} = G_h(t_{i-(k-1)}, \dots, t_i, t_{i+1}, x_{i-(k-1)}, \dots, x_{i-1}, x_i).$$

b) *Esquemas implícitos de k pasos:*

$$x_{i+1} = G_h(t_{i-(k-1)}, \dots, t_i, t_{i+1}, x_{i-(k-1)}, \dots, x_i, x_{i+1}).$$

Nótese que para determinar x_{i+1} debe resolverse una ecuación implícita cuya existencia y unicidad de soluciones debe demostrarse en cada caso.

En las expresiones anteriores, G_h es una función que se deduce de la expresión (1.12) despejando x_{i+1} .

Definición 1.21 Un método es *monopaso* (o de *un paso*) si $k = 1$, es decir, para calcular x_{i+1} es suficiente conocer x_i . Un método será *multipaso* en caso contrario. $\square$

Observación 1.22 Debe tenerse en cuenta que, dado que (en general) para calcular x_{i+1} en un esquema de k pasos se necesitan conocer los k términos inmediatamente anteriores en la secuencia $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, los primeros k términos de la misma no podrán ser calculados con tal esquema. Una manera de evitar esto es *inicializar el método* utilizando esquemas numéricos de un menor número de pasos. $\square$