

3 Métodos multipaso

3.1 Introducción

Los métodos estudiados en el Capítulo 2 son *métodos monopaso* (o de un paso) porque sólo utilizan la información de un elemento de la secuencia del método para calcular el siguiente. Un *método multipaso* utiliza varios valores anteriores para calcular el siguiente elemento del método. En este capítulo se introducen y analizan las nociones fundamentales de *consistencia*, *0-estabilidad* y *convergencia* que permiten el estudio general de los métodos multipaso. En él se van a considerar diversos métodos multipaso para la aproximación numérica de la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = \xi_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ y $t_0, T \in \mathbb{R}$ con $t_0 < T$. Recuérdese que, como se comentó en la Observación 1.16, supondremos que la función f es continua y lipschitziana en la segunda variable con constante de Lipschitz $L > 0$, por lo que el problema (3.1) tiene existencia y unicidad de solución. Además, dado $N \in \mathbb{N}$, tomando como paso $h = \frac{T-t_0}{N}$ dividiremos el intervalo $[t_0, T]$ en N subintervalos iguales por medio de puntos igualmente espaciados

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

3.2 Deducción de algunos métodos

En esta sección $x(t)$ denota una solución arbitraria de la ecuación diferencial

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [t_0, T]. \quad (3.2)$$

3.2.1 Método del Punto Medio

Teniendo en cuenta que

$$x'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h} \simeq \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h}$$

para $h > 0$ suficientemente pequeño, podemos aproximar la derivada

$$x'(t_{i+1}) = f(t_{i+1}, x(t_{i+1}))$$

por medio de la fórmula de diferencias finitas centrada

$$\frac{x(t_{i+2}) - x(t_i)}{2h} \simeq f(t_{i+1}, x(t_{i+1})),$$

lo que conduce al siguiente esquema:

Método del Punto Medio	
<u>Paso 1</u>	$x_0 \simeq \xi_0$
<u>Paso 2</u>	x_1 calculado mediante otro método
<u>Paso 3</u>	Para $i = 0, 1, \dots, N-2$ $x_{i+2} = x_i + 2hf(t_{i+1}, x_{i+1})$.

Teniendo en cuenta los conceptos definidos en la Sección 1.6, es claro que este método es explícito y de dos pasos.

Observación 3.1 El Método del Punto Medio también puede obtenerse a partir de la *Regla del Punto Medio* de integración aproximada

$$\int_{t_i}^{t_{i+2}} g(t) dt \simeq 2hg(t_{i+1}).$$

En efecto, basta observar que para todo $i = 0, 1, \dots, N-2$ se tiene que

$$x(t_{i+2}) - x(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+2}} x'(t) dt = \int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t, x(t)) dt \simeq 2hf(t_{i+1}, x(t_{i+1})). \quad \square$$

Definimos el *error local de truncamiento* del Método del Punto Medio, $\tau(t, h)$, asociado a una solución $x(t)$ de la ecuación diferencial (3.2) a partir del instante $t \in [t_0, T]$, como

$$\tau(t, h) = \frac{x(t+2h) - x(t)}{2h} - f(t+h, x(t+h)) = \frac{x(t+2h) - x(t)}{2h} - x'(t+h) \quad (3.3)$$

para todo $h \in (0, \frac{T-t}{2}]$, y el *error local de truncamiento* del Método del Punto Medio asociado a la solución $x(t)$, como la función $\bar{\tau} : (0, \frac{T-t_0}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{\tau}(h) = \max_{t \in [t_0, T-2h]} \|\tau(t, h)\|.$$

Por el *Teorema de Taylor*, si la función $x(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))^T$ es de clase $\mathcal{C}^3$ (según se ha visto en el Teorema 1.18 basta con que $f \in \mathcal{C}^2$), para todo $t \in [t_0, T-2h]$ se tiene que

$$x(t+2h) = x(t+h) + hx'(t+h) + \frac{h^2}{2}x''(t+h) + \frac{h^3}{6} \begin{pmatrix} (x^1)'''(\zeta^1) \\ (x^2)'''(\zeta^2) \\ \dots \\ (x^n)'''(\zeta^n) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

y

$$x(t) = x(t+h) - hx'(t+h) + \frac{h^2}{2}x''(t+h) - \frac{h^3}{6} \begin{pmatrix} (x^1)'''(\vartheta^1) \\ (x^2)'''(\vartheta^2) \\ \dots \\ (x^n)'''(\vartheta^n) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

donde $\zeta^k \in (t+h, t+2h)$ y $\vartheta^k \in (t, t+h)$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$. De esta forma, de (3.3), (3.4) y (3.5), se sigue que

$$\tau(t, h) = \frac{1}{12} \left(\begin{pmatrix} (x^1)'''(\zeta^1) \\ (x^2)'''(\zeta^2) \\ \dots \\ (x^n)'''(\zeta^n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x^1)'''(\vartheta^1) \\ (x^2)'''(\vartheta^2) \\ \dots \\ (x^n)'''(\vartheta^n) \end{pmatrix} \right) h^2. \quad (3.6)$$

Así pues,

$$\|\tau(t, h)\| \leq \frac{1}{12} \left(\left\| \begin{pmatrix} (x^1)'''(\zeta^1) \\ (x^2)'''(\zeta^2) \\ \dots \\ (x^n)'''(\zeta^n) \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} (x^1)'''(\vartheta^1) \\ (x^2)'''(\vartheta^2) \\ \dots \\ (x^n)'''(\vartheta^n) \end{pmatrix} \right\| \right) h^2 \leq \frac{cM_3}{6} h^2$$

para todo $t \in [t_0, T-2h]$ y, por tanto, el error local de truncamiento verifica que

$$\bar{\tau}(h) \leq \frac{cM_3}{6} h^2 \quad (3.7)$$

donde $c > 0$ y M_3 están definidos, respectivamente, en (2.14) y (2.13). De esta forma, el Método del Punto Medio es de orden de precisión 2.

3.2.2 Método de Simpson

Si utilizamos la aproximación de la integral que determina la *Regla de Simpson*

$$\int_{t_i}^{t_{i+2}} g(t) dt \simeq \frac{h}{3} (g(t_{i+2}) + 4g(t_{i+1}) + g(t_i)),$$

cuyo error es $O(h^5)$ para funciones $g \in \mathcal{C}^4([t_i, t_{i+2}])$ (véase [Infante-Rey]) se tiene que

$$x(t_{i+2}) - x(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+2}} x'(t) dt = \int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t, x(t)) dt \simeq \frac{h}{3} (f(t_{i+2}, x(t_{i+2})) + 4f(t_{i+1}, x(t_{i+1})) + f(t_i, x(t_i))).$$

Se obtiene así el *Método de Simpson*, cuyo esquema numérico es

Método de Simpson	
<u>Paso 1</u>	$x_0 \simeq \xi_0$
<u>Paso 2</u>	x_1 calculado mediante otro método
<u>Paso 3</u>	Para $i = 0, 1, \dots, N-2$ $x_{i+2} = x_i + \frac{h}{3}(f(t_{i+2}, x_{i+2}) + 4f(t_{i+1}, x_{i+1}) + f(t_i, x_i)),$

que es un método implícito y de dos pasos. Definimos el *error local de truncamiento* del Método de Simpson, $\tau(t, h)$, asociado a una solución $x(t)$ de la ecuación diferencial (3.2) a partir del instante $t \in [t_0, T]$, como

$$\begin{aligned}\tau(t, h) &= \frac{x(t+2h) - x(t)}{2h} - \frac{1}{6}(f(t, x(t)) + 4f(t+h, x(t+h)) + f(t+2h, x(t+2h))) \\ &= \frac{x(t+2h) - x(t)}{2h} - \frac{1}{6}(x'(t) + 4x'(t+h) + x'(t+2h))\end{aligned}\quad (3.8)$$

para todo $h \in (0, \frac{T-t}{2}]$, y el *error local de truncamiento* del Método de Simpson asociado a la solución $x(t)$, como la función $\bar{\tau}: (0, \frac{T-t_0}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{\tau}(h) = \max_{t \in [t_0, T-2h]} \|\tau(t, h)\|.$$

Nótese que en la expresión (3.8) se ha dividido por $2h$ para que

$$\frac{x(t+2h) - x(t)}{2h} \simeq x'(t+h).$$

Por el *Teorema de Taylor*, si la función $x(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))^T$ es de clase $\mathcal{C}^3$ (según se ha visto en el Teorema 1.18 basta con que $f \in \mathcal{C}^2$), para todo $t \in [t_0, T-2h]$ se tiene que

$$\begin{cases} x(t+2h) = x(t+h) + hx'(t+h) + \frac{h^2}{2}x''(t+h) + \frac{h^3}{6}x'''(t+h) + \frac{h^4}{24}x^{iv}(t+h) + \frac{h^5}{120} \begin{pmatrix} (x^1)^v(\zeta^1) \\ (x^2)^v(\zeta^2) \\ \dots \\ (x^n)^v(\zeta^n) \end{pmatrix} \\ x(t) = x(t+h) - hx'(t+h) + \frac{h^2}{2}x''(t+h) - \frac{h^3}{6}x'''(t+h) + \frac{h^4}{24}x^{iv}(t+h) - \frac{h^5}{120} \begin{pmatrix} (x^1)^v(\vartheta^1) \\ (x^2)^v(\vartheta^2) \\ \dots \\ (x^n)^v(\vartheta^n) \end{pmatrix} \end{cases}\quad (3.9)$$

y

$$\begin{cases} x'(t+2h) = x'(t+h) + hx''(t+h) + \frac{h^2}{2}x'''(t+h) + \frac{h^3}{6}x^{iv}(t+h) + \frac{h^4}{24} \begin{pmatrix} (x^1)^v(\mu^1) \\ (x^2)^v(\mu^2) \\ \dots \\ (x^n)^v(\mu^n) \end{pmatrix} \\ x'(t) = x'(t+h) - hx''(t+h) + \frac{h^2}{2}x'''(t+h) - \frac{h^3}{6}x^{iv}(t+h) + \frac{h^4}{24} \begin{pmatrix} (x^1)^v(\nu^1) \\ (x^2)^v(\nu^2) \\ \dots \\ (x^n)^v(\nu^n) \end{pmatrix}, \end{cases}\quad (3.10)$$

donde $\zeta^k, \mu^k \in (t+h, t+2h)$ y $\vartheta^k, \nu^k \in (t, t+h)$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$. De esta forma, de (3.8), (3.9) y (3.10), se tiene que

$$\tau(t, h) = \frac{1}{240} \left(\begin{pmatrix} (x^1)^v(\zeta^1) \\ (x^2)^v(\zeta^2) \\ \dots \\ (x^n)^v(\zeta^n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x^1)^v(\vartheta^1) \\ (x^2)^v(\vartheta^2) \\ \dots \\ (x^n)^v(\vartheta^n) \end{pmatrix} \right) h^4 - \frac{1}{144} \left(\begin{pmatrix} (x^1)^v(\mu^1) \\ (x^2)^v(\mu^2) \\ \dots \\ (x^n)^v(\mu^n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x^1)^v(\nu^1) \\ (x^2)^v(\nu^2) \\ \dots \\ (x^n)^v(\nu^n) \end{pmatrix} \right) h^4.$$

Así pues,

$$\|\tau(t, h)\| \leq c \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{72} \right) M_5 h^4 = \frac{cM_5}{45} h^4$$

para todo $t \in [t_0, T - 2h]$, y, por tanto, el error local de truncamiento $\bar{\tau}(h)$ verifica que

$$\bar{\tau}(h) \leq \frac{cM_5}{45} h^4,$$

donde $c > 0$ está definido en (2.14) y

$$M_5 = \max_{t \in [t_0, T]} \|x^{(5)}(t)\|_\infty.$$

De esta forma, el Método de Simpson es de orden de precisión 4.

3.3 Métodos de Adams, Nyström y Milne

Sean $N, m \in \mathbb{N}$ e $i, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $t_{i+r}, t_{i+r-m} \in \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$. Siguiendo las ideas anteriores, al integrar la ecuación diferencial (3.2) entre los nodos t_{i+r-m} y t_{i+r} , se obtiene que

$$x(t_{i+r}) - x(t_{i+r-m}) = \int_{t_{i+r-m}}^{t_{i+r}} x'(t) dt = \int_{t_{i+r-m}}^{t_{i+r}} f(t, x(t)) dt. \quad (3.11)$$

Dada una solución $x(t)$ de la ecuación diferencial (3.2), para obtener los valores $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ que aproximen $x(t)$ en los nodos $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ hacemos lo siguiente: supuesto conocidos los valores $x_0, x_1, \dots, x_{i+r-1}$, para calcular el valor x_{i+r} reemplazamos la función desconocida $t \mapsto f(t, x(t))$ por un polinomio de interpolación $P_i(t)$ en los puntos $t_j \in \Delta_i$ (donde $\Delta_i \subset \{t_0, t_1, \dots, t_{i+r}\}$), que tome los valores

$$P_i(t_j) = f_j,$$

donde, con vistas a simplificar la notación, denotamos

$$f_j = f(t_j, x_j).$$

Como la aproximación x_{i+r} no se conoce, en el caso de que $t_{i+r} \in \Delta_i$, el método será implícito. Las elecciones concretas que vamos a hacer del conjunto Δ_i son:

- $\Delta_i = \{t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+r-1}\}$, con $r \in \mathbb{N}$, que proporcionan métodos explícitos. Nótese que el nodo $t_{i+r} \notin \Delta_i$ y $\text{card}(\Delta_i) = r$.
- $\Delta_i = \{t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+r}\}$, con $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, que proporcionan métodos implícitos. En este caso $t_{i+r} \in \Delta_i$ y $\text{card}(\Delta_i) = r + 1$.

Como se ha dicho anteriormente, denotaremos $P_i(t)$ al único polinomio de grado menor o igual a $r - 1$ si el método es explícito, o de grado menor o igual a r si el método es implícito, que interpola los valores $\{(t_j, f_j)\}_j$ cuando $t_j \in \Delta_i$. De esta forma, a partir de (3.11), utilizaremos la aproximación

$$x(t_{i+r}) - x(t_{i+r-m}) = \int_{t_{i+r-m}}^{t_{i+r}} f(t, x(t)) dt \simeq \int_{t_{i+r-m}}^{t_{i+r}} P_i(t) dt,$$

que determina el método

$$x_{i+r} - x_{i+r-m} = \int_{t_{i+r-m}}^{t_{i+r}} P_i(t) dt. \quad (3.12)$$

Nótese que el número de pasos del método (3.12) es

$$\sigma = \max\{r, m\}$$

(el número de pasos viene determinado por el miembro de la izquierda de la igualdad (3.12) si $r \leq m$, y por el miembro de la derecha de la misma si $r \geq m$).

- Los métodos con $m = 1$ se denominan *Métodos de Adams*. Más concretamente,

- Métodos de Adams–Bashforth* si son explícitos.
- Métodos de Adams–Moulton* si son implícitos.

- Los métodos con $m = 2$ se califican como:

- Métodos de Nyström* si son explícitos.

ii) *Métodos de Milne* si son implícitos.

Observación 3.2 Puesto que los métodos anteriores son multipaso si $\sigma > 1$, para inicializarlos se necesitan σ valores iniciales $\{x_0, x_1, \dots, x_{\sigma-1}\}$ que aproximen los valores exactos $\{x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_{\sigma-1})\}$. Por regla general, se toma $x_0 = \xi_0$ y los valores $\{x_1, x_2, \dots, x_{\sigma-1}\}$ suelen obtenerse a partir de métodos de un número inferior de pasos. $\square$

Veamos, a continuación, la fórmula general y los principales casos particulares de las subfamilias de métodos mencionados anteriormente ($m = 1$ y $m = 2$).

3.3.1 Métodos de Adams–Bashforth

Estos métodos son explícitos y corresponden al caso en que $m = 1$, $r \in \mathbb{N}$ y

$$\Delta_i = \{t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+r-1}\},$$

por lo que el número de pasos de estos métodos es

$$\sigma = \max\{r, 1\} = r.$$

Puesto que $P_i(t)$ es el polinomio de interpolación de la función f en los nodos del conjunto Δ_i , por la *Fórmula de Interpolación de Lagrange*, dicho polinomio viene dado por

$$P_i(t) = \sum_{k=0}^{r-1} f(t_{i+k}, x_{i+k}) L_{ik}(t), = \sum_{k=0}^{r-1} f_{i+k} L_{ik}(t) \quad (3.13)$$

siendo

$$L_{ik}(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{r-1} \frac{t - t_{i+j}}{t_{i+k} - t_{i+j}}$$

los *polinomios básicos* en la interpolación de Lagrange para $k = 0, 1, \dots, r-1$ (véase [Infante–Rey]). Nótese que para todo $q \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ se verifica que

$$L_{ik}(t_{i+q}) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{r-1} \frac{t_{i+q} - t_{i+j}}{t_{i+k} - t_{i+j}} = \begin{cases} 1 & \text{si } q = k \\ 0 & \text{si } q \neq k. \end{cases}$$

De esta forma, los *Métodos de Adams–Bashforth* vienen dados por

$$x_{i+r} - x_{i+r-1} = \int_{t_{i+r-1}}^{t_{i+r}} P_i(t) dt = \sum_{k=0}^{r-1} f_{i+k} \int_{t_{i+r-1}}^{t_{i+r}} L_{ik}(t) dt. \quad (3.14)$$

La equidistancia entre los nodos del conjunto Δ_i permite que, para cada $i = 0, 1, \dots, N-r$, mediante el cambio de variable

$$t = t_i + sh, \quad (3.15)$$

se tenga

$$t - t_{i+j} = (s - j)h \text{ y } t_{i+k} - t_{i+j} = (k - j)h.$$

De esta forma, denotando

$$\varphi_k(s) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{r-1} \frac{s - j}{k - j} \text{ y } \beta_k = \int_{r-1}^r \varphi_k(s) ds$$

(independientes de i) para $k = 0, 1, \dots, r-1$, se tiene que

$$L_{ik}(t) = \varphi_k(s) \text{ y } \int_{t_{i+r-1}}^{t_{i+r}} L_{ik}(t) dt = h \int_{r-1}^r \varphi_k(s) ds = h\beta_k.$$

Obsérvese que los coeficientes $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}\}$ son independientes de la función f y del intervalo $[t_0, T]$; tan sólo dependen del número r de puntos de interpolación. Reemplazando estos valores en (3.14) se obtiene el siguiente esquema

Método de Adams–Bashforth de r pasos	
<u>Paso 1</u>	$x_0 \simeq \xi_0$
<u>Paso 2</u>	$\{x_1, x_2, \dots, x_{r-1}\}$ calculados mediante otros métodos
<u>Paso 3</u>	Para $i = 0, 1, \dots, N - r$ $x_{i+r} = x_{i+r-1} + h \sum_{k=0}^{r-1} \beta_k f_{i+k}.$

Casos particulares:

- a) $r = 1$. En este caso $\Delta_i = \{t_i\}$ y el único polinomio de grado 0 que pasa por (t_i, f_i) es

$$P_i(t) \equiv f_i,$$

por lo que

$$x_{i+1} - x_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_i(t) dt = hf_i$$

y se obtiene el Método de Euler (explícito).

- b) $r = 2$. En este caso $\Delta_i = \{t_i, t_{i+1}\}$ y el único polinomio de grado menor o igual que 1 que pasa por (t_i, f_i) y (t_{i+1}, f_{i+1}) es

$$P_i(t) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{h} (t - t_i), \quad (3.16)$$

por lo que

$$x_{i+2} - x_{i+1} = \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} P_i(t) dt = hf_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{2h} (t - t_i)^2 \Big|_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} = hf_i + 3 \frac{f_{i+1} - f_i}{2h} h^2 = \frac{h}{2} (3f_{i+1} - f_i).$$

Se obtiene así:

Método de Adams–Bashforth de 2 pasos	
<u>Paso 1</u>	$x_0 \simeq \xi_0$
<u>Paso 2</u>	x_1 calculado mediante otro método
<u>Paso 3</u>	Para $i = 0, 1, \dots, N - 2$ $x_{i+2} = x_{i+1} + \frac{h}{2} (3f_{i+1} - f_i).$

- c) $r = 3$.

Método de Adams–Bashforth de 3 pasos	
<u>Paso 1</u>	$x_0 \simeq \xi_0$
<u>Paso 2</u>	$\{x_1, x_2\}$ calculados mediante otros métodos
<u>Paso 3</u>	Para $i = 0, 1, \dots, N - 3$ $x_{i+3} = x_{i+2} + \frac{h}{12} (23f_{i+2} - 16f_{i+1} + 5f_i).$

- d) $r = 4$.

Método de Adams–Bashforth de 4 pasos	
<u>Paso 1</u>	$x_0 \simeq \xi_0$
<u>Paso 2</u>	$\{x_1, x_2, x_3\}$ calculados mediante otros métodos
<u>Paso 3</u>	Para $i = 0, 1, \dots, N - 4$ $x_{i+4} = x_{i+3} + \frac{h}{24} (55f_{i+3} - 59f_{i+2} + 37f_{i+1} - 9f_i).$

- e) $r = 5$.

Método de Adams–Bashforth de 5 pasos	
<u>Paso 1</u>	$x_0 \simeq \xi_0$
<u>Paso 2</u>	$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ calculados mediante otros métodos
<u>Paso 3</u>	Para $i = 0, 1, \dots, N - 5$ $x_{i+5} = x_{i+4} + \frac{h}{720}(1901f_{i+4} - 2774f_{i+3} + 2616f_{i+2} - 1274f_{i+1} + 251f_i).$

3.3.2 Métodos de Adams–Moulton

Estos métodos son implícitos y corresponden al caso en que $m = 1$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y

$$\Delta_i = \{t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+r}\},$$

por lo que el número de pasos de estos métodos es

$$\sigma = \max\{r, 1\} = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 0 \\ r & \text{si } r \geq 1. \end{cases}$$

Puesto que $P_i(t)$ es el polinomio de interpolación de la función f en los puntos $\{t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+r}\}$, por la *Fórmula de Interpolación de Lagrange*, dicho polinomio viene dado por

$$P_i(t) = \sum_{k=0}^r f(t_{i+k}, x_{i+k}) L_{ik}(t) = \sum_{k=0}^r f_{i+k} L_{ik}(t), \quad (3.17)$$

siendo

$$L_{ik}(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^r \frac{t - t_{i+j}}{t_{i+k} - t_{i+j}}$$

los *polinomios básicos* en la interpolación de Lagrange para $k = 0, 1, \dots, r$. De esta forma, los *Métodos de Adams–Moulton* vienen dados por

$$x_{i+r} - x_{i+r-1} = \int_{t_{i+r-1}}^{t_{i+r}} P_i(t) dt = \sum_{k=0}^r f_{i+k} \int_{t_{i+r-1}}^{t_{i+r}} L_{ik}(t) dt. \quad (3.18)$$

El cambio de variable (3.15) determina que

$$\varphi_k(s) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^r \frac{s - j}{k - j} \text{ y } \beta_k = \int_{r-1}^r \varphi_k(s) ds$$

para $k = 0, 1, \dots, r$, verifiquen que

$$L_{ik}(t) = \varphi_k(s) \text{ y } \int_{t_{i+r-1}}^{t_{i+r}} L_{ik}(t) dt = h\beta_k.$$

Reemplazando estos valores en (3.18) se obtiene el esquema numérico

Método de Adams–Moulton de $r \geq 1$ pasos	
<u>Paso 1</u>	$x_0 \simeq \xi_0$
<u>Paso 2</u>	$\{x_1, x_2, \dots, x_{r-1}\}$ calculados mediante otros métodos
<u>Paso 3</u>	Para $i = 0, 1, \dots, N - r$ $x_{i+r} = x_{i+r-1} + h \sum_{k=0}^r \beta_k f_{i+k}.$

Casos particulares:

- a) $r = 0$. Se trata de un caso especial en el que el número de pasos $\sigma = 1$ difiere de r . En este caso $\Delta_i = \{t_i\}$ y el único polinomio de grado 0 que pasa por (t_i, f_i) es

$$P_i(t) \equiv f_i,$$

por lo que

$$x_i - x_{i-1} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} P_i(t) dt = hf_i$$

y se obtiene el Método de Euler implícito.

- b) $r = 1$. En este caso $\Delta_i = \{t_i, t_{i+1}\}$ y el único polinomio de grado menor o igual que 1 que pasa por (t_i, f_i) y (t_{i+1}, f_{i+1}) es el dado en (3.16). Por tanto,

$$x_{i+1} - x_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_i(t) dt = hf_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{2h} (t - t_i)^2 \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} = hf_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{2h} h^2 = \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i)$$

y se obtiene el Método del Trapecio.

- c) $r = 2$.

Método de Adams–Moulton de 2 pasos	
<u>Paso 1</u>	$x_0 \simeq \xi_0$
<u>Paso 2</u>	x_1 calculado mediante otro método
<u>Paso 3</u>	Para $i = 0, 1, \dots, N-2$ $x_{i+2} = x_{i+1} + \frac{h}{12}(5f_{i+2} + 8f_{i+1} - f_i).$

- d) $r = 3$.

Método de Adams–Moulton de 3 pasos	
<u>Paso 1</u>	$x_0 \simeq \xi_0$
<u>Paso 2</u>	$\{x_1, x_2\}$ calculados mediante otros métodos
<u>Paso 3</u>	Para $i = 0, 1, \dots, N-3$ $x_{i+3} = x_{i+2} + \frac{h}{24}(9f_{i+3} + 19f_{i+2} - 5f_{i+1} + f_i).$

- e) $r = 4$.

Método de Adams–Moulton de 4 pasos	
<u>Paso 1</u>	$x_0 \simeq \xi_0$
<u>Paso 2</u>	$\{x_1, x_2, x_3\}$ calculados mediante otros métodos
<u>Paso 3</u>	Para $i = 0, 1, \dots, N-4$ $x_{i+4} = x_{i+3} + \frac{h}{720}(251f_{i+4} + 646f_{i+3} - 264f_{i+2} + 106f_{i+1} - 19f_i).$

3.3.3 Métodos de Nyström

Estos métodos son explícitos y corresponden al caso en que $m = 2$, $r \in \mathbb{N}$ y

$$\Delta_i = \{t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+r-1}\},$$

por lo que el número de pasos de estos métodos es

$$\sigma = \max\{r, 2\} = \begin{cases} 2 & \text{si } r = 1 \\ r & \text{si } r \geq 2. \end{cases}$$

Al igual que en los Métodos de Adams–Bashforth, el polinomio de interpolación $P_i(t)$ de la función f en los puntos $\{t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+r-1}\}$ viene dado en (3.13). De esta forma, los Métodos de Nyström se obtienen a partir de la relación

$$x_{i+r} - x_{i+r-2} = \int_{t_{i+r-2}}^{t_{i+r}} P_i(t) dt = \sum_{k=0}^{r-1} f_{i+k} \int_{t_{i+r-2}}^{t_{i+r}} L_{ik}(t) dt. \quad (3.19)$$

El cambio de variable (3.15) determina que

$$\varphi_k(s) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{r-1} \frac{s-j}{k-j} \quad \text{y} \quad \beta_k = \int_{r-2}^r \varphi_k(s) ds$$

para $k = 0, 1, \dots, r-1$, verifiquen la relación

$$L_{ik}(t) = \varphi_k(s) \quad \text{y} \quad \int_{t_{i+r-2}}^{t_{i+r}} L_{ik}(t) dt = h\beta_k.$$

Reemplazando estos valores en (3.19) se obtiene el siguiente esquema

Métodos de Nyström de $r \geq 2$ pasos	
<u>Paso 1</u>	$x_0 \simeq \xi_0$
<u>Paso 2</u>	$\{x_1, x_2, \dots, x_{r-1}\}$ calculados mediante otros métodos
<u>Paso 3</u>	Para $i = 0, 1, \dots, N-r$ $x_{i+r} = x_{i+r-2} + h \sum_{k=0}^{r-1} \beta_k f_{i+k}.$

Casos particulares:

- a) $r = 1$. Se trata de un caso especial en el que el número de pasos $\sigma = 2$ difiere de r . En este caso $\Delta_i = \{t_i\}$ y el único polinomio de grado 0 que pasa por (t_i, f_i) es

$$P_i(t) \equiv f_i,$$

por lo que

$$x_{i+1} - x_{i-1} = \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} P_i(t) dt = 2hf_i$$

y se obtiene el Método del Punto Medio.

- b) $r = 2$. En este caso $\Delta_i = \{t_i, t_{i+1}\}$ y el único polinomio $P_i(t)$ de grado menor o igual que 1 que pasa por (t_i, f_i) y (t_{i+1}, f_{i+1}) es el dado en (3.16). Por tanto,

$$x_{i+2} - x_i = \int_{t_i}^{t_{i+2}} P_i(t) dt = 2hf_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{2h} (t - t_i)^2 \Big|_{t_i}^{t_{i+2}} = 2hf_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{2h} 4h^2 = 2hf_{i+1}$$

y vuelve a obtenerse el Método del Punto Medio.

- c) $r = 3$.

Método de Nyström de 3 pasos	
<u>Paso 1</u>	$x_0 \simeq \xi_0$
<u>Paso 2</u>	x_1, x_2 calculados mediante otro método
<u>Paso 3</u>	Para $i = 0, 1, \dots, N-3$ $x_{i+3} = x_{i+1} + \frac{h}{3} (7f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i).$

3.3.4 Métodos de Milne

Estos métodos son implícitos y corresponden al caso en que $m = 2$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y

$$\Delta_i = \{t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+r}\},$$

por lo que el número de pasos de estos métodos es

$$\sigma = \max\{r, 2\} = \begin{cases} 2 & \text{si } r \in \{0, 1\} \\ r & \text{si } r \geq 2. \end{cases}$$

Al igual que en los Métodos de Adams–Moulton, el polinomio de interpolación $P_i(t)$ de la función f en los puntos $\{t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+r-1}\}$ viene dado en (3.17). De esta forma, los *Métodos de Milne* se obtienen como

$$x_{i+r} - x_{i+r-2} = \int_{t_{i+r-2}}^{t_{i+r}} P_i(t) dt = \sum_{k=0}^r f_{i+k} \int_{t_{i+r-2}}^{t_{i+r}} L_{ik}(t) dt. \quad (3.20)$$

El cambio de variable (3.15) hace que

$$\varphi_k(s) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^r \frac{s-j}{k-j} \text{ y } \beta_k = \int_{r-2}^r \varphi_k(s) ds$$

para $k = 0, 1, \dots, r$, cumplan la relación

$$L_{ik}(t) = \varphi_k(s) \text{ y } \int_{t_{i+r-2}}^{t_{i+r}} L_{ik}(t) dt = h\beta_k.$$

Reemplazando estos valores en (3.20) se obtiene el esquema numérico

Método de Milne de $r \geq 2$ pasos	
<u>Paso 1</u>	$x_0 \simeq \xi_0$
<u>Paso 2</u>	$\{x_1, x_2, \dots, x_{r-1}\}$ calculados mediante otros métodos
<u>Paso 3</u>	Para $i = 0, 1, \dots, N-r$ $x_{i+r} = x_{i+r-2} + h \sum_{k=0}^r \beta_k f_{i+k}.$

Casos particulares:

- a) $r = 0$. Se trata de un caso especial en el que el número de pasos $\sigma = 2$ difiere de r . En este caso $\Delta_i = \{t_i\}$ y el único polinomio de grado 0 que pasa por (t_i, f_i) es

$$P_i(t) \equiv f_i,$$

por lo que

$$x_i - x_{i-2} = \int_{t_{i-2}}^{t_i} P_i(t) dt = 2hf_i,$$

de donde se obtiene

Método de Milne de 2 pasos	
<u>Paso 1</u>	$x_0 \simeq \xi_0$
<u>Paso 2</u>	x_1 calculado mediante otro método
<u>Paso 3</u>	Para $i = 0, 1, \dots, N-2$ $x_{i+2} = x_i + 2hf_{i+1},$

que es, precisamente, la unión de dos Métodos de Euler implícitos independientes, sobre un conjunto de nodos temporales de paso $2h$: uno de ellos comenzando en t_0 con valor x_0 y otro comenzando en t_1 con valor x_1 . Se obtienen así dos conjuntos independientes (uno por cada Método de Euler implícito) que constituyen la aproximación numérica buscada:

$$\begin{cases} \{x_0, x_2, x_4, \dots, x_N\} \text{ y } \{x_1, x_3, x_5, \dots, x_{N-1}\} & \text{si } N \text{ es par} \\ \{x_0, x_2, x_4, \dots, x_{N-1}\} \text{ y } \{x_1, x_3, x_5, \dots, x_N\} & \text{si } N \text{ es impar.} \end{cases}$$

- b) $r = 1$. Se trata también de un caso especial en el que el número de pasos $\sigma = 2$ difiere de r . En este caso $\Delta_i = \{t_i, t_{i+1}\}$ y el único polinomio $P_i(t)$ de grado menor o igual que 1 que pasa por los puntos (t_i, f_i) y (t_{i+1}, f_{i+1}) es el dado en (3.16). Por tanto,

$$x_{i+1} - x_{i-1} = \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} P_i(t) dt = 2hf_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{2h} (t - t_i)^2 \Big|_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} = 2hf_i$$

y vuelve a obtenerse el Método del Punto Medio. Nótese que, en este caso, el término de f_{i+1} ha “desaparecido” en el proceso de integración, por lo que este método resulta ser explícito.

- c) $r \in \{2, 3\}$. Se obtiene el *Método de Simpson* considerado en la Sección 3.2.2 (compruébese).

Observación 3.3 Nótese que cuando $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ se obtienen métodos de 2 pasos. Puesto que para $r = 1$ y $r \in \{2, 3\}$ se obtienen, respectivamente, el Método del Punto Medio y el Método de Simpson, se suele denominar Método de Milne de 2 pasos el correspondiente al valor $r = 0$. $\square$

Observación 3.4

- a) Hay que puntualizar que, aunque en las fórmulas generales de los métodos anteriores aparecen coeficientes β_k , tal y como se ha visto, estos toman, en general, valores distintos en cada una de ellas.
- b) Aunque teóricamente pueden considerarse Métodos de Adams, Nyström o Milne con un mayor número de pasos, en la práctica no suele hacerse debido, fundamentalmente, a que las expresiones de las fórmulas van siendo más complicadas a medida que aumenta el número de pasos. $\square$

El análisis de la convergencia de los Métodos de Adams, Nyström y Milne se verá en la siguiente sección, como casos particulares de una familia más general de métodos multipaso.

3.4 Métodos multipaso lineales

3.4.1 Preliminares

Todos los métodos multipaso estudiados hasta ahora (y algunos de los monopaso) son parte de una familia de métodos más generales que se denominan *métodos lineales de r pasos* en los que la fórmula general es del tipo

$$\sum_{k=0}^r \alpha_k x_{i+k} = h \sum_{k=0}^r \beta_k f_{i+k} \quad (3.21)$$

para $i = 0, 1, \dots, N - r$, donde los coeficientes $\{\alpha_k\}_{k=0}^r$ y $\{\beta_k\}_{k=0}^r$ son independientes de i , h y f y se supone que

$$\alpha_r \neq 0 \text{ y } |\alpha_0| + |\beta_0| > 0. \quad (3.22)$$

Estos métodos se califican como lineales de r pasos puesto que x_{i+r} es combinación lineal de x_{i+k} y $f_{i+k} = f(t_{i+k}, x_{i+k})$ para $k = 0, 1, \dots, r$ y, para calcular x_{i+r} , se necesitan conocer los r valores anteriores $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+r-1}\}$. El esquema numérico de estos métodos es:

Métodos lineales de r pasos	
<u>Paso 1</u>	$x_0 \simeq \xi_0$
<u>Paso 2</u>	$\{x_1, x_2, \dots, x_{r-1}\}$ calculados mediante otros métodos
<u>Paso 3</u>	Para $i = 0, 1, \dots, N - r$ $\sum_{k=0}^r \alpha_k x_{i+k} = h \sum_{k=0}^r \beta_k f_{i+k}.$

(3.23)

Observación 3.5

- a) El Método de Euler y el resto de θ -Métodos, estudiados en el Capítulo 2, son casos particulares de métodos lineales de un paso. En cambio, los Métodos de Taylor y de Runge–Kutta no son, en general, métodos lineales.
- b) Nótese que el método multipaso (3.23) no cambia si se multiplica cada miembro de la igualdad (3.21) por una constante no nula. Por eso, en la práctica, suele tomarse $\alpha_r = 1$.

- c) Las condiciones dadas en (3.22) eliminan métodos “aparentemente” de r pasos que, en realidad, son de un número inferior de pasos. Por ejemplo, el método

$$x_{i+2} = x_{i+1} + hf_{i+1}$$

es, en realidad, el Método de Euler explícito

$$x_{i+1} = x_i + hf_i.$$

- d) Para poder aplicar el método multipaso (3.23) es necesario inicializarlo con los r primeros valores $\{x_0, x_1, \dots, x_{r-1}\}$. El problema de valor inicial (3.1) nos proporciona el valor $x_0 \simeq \xi_0$ y los $r-1$ valores restantes $\{x_1, x_2, \dots, x_{r-1}\}$ suelen obtenerse mediante otros métodos (como los de Euler, Taylor, Runge–Kutta, ...) con el orden de precisión adecuado en función del orden del método multipaso. Puesto que estos valores son aproximados, llevan asociados un error y, por tanto, no es de esperar que el método (3.23) converja si se ha hecho una mala elección de los mismos. $\square$

Se distinguen dos tipos de métodos de r pasos:

- a) Explícitos, cuando $\boxed{\beta_r = 0}$. En estos métodos se verifica que

$$\alpha_r x_{i+r} + \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k x_{i+k} = h \sum_{k=0}^{r-1} \beta_k f_{i+k},$$

por lo que se puede despejar x_{i+r} en términos de los r valores anteriores $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+r-1}\}$. Se tiene así el siguiente esquema

$$\begin{cases} x_0, x_1, \dots, x_{r-1} \text{ dados} \\ x_{i+r} = \frac{1}{\alpha_r} \sum_{k=0}^{r-1} (-\alpha_k x_{i+k} + h \beta_k f_{i+k}), \quad i = 0, 1, \dots, N-r. \end{cases} \quad (3.24)$$

- b) Implícitos, si $\boxed{\beta_r \neq 0}$. Puesto que

$$\alpha_r x_{i+r} + \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k x_{i+k} = h \beta_r f_{i+r} + h \sum_{k=0}^{r-1} \beta_k f_{i+k} = h \beta_r f(t_{i+r}, x_{i+r}) + h \sum_{k=0}^{r-1} \beta_k f_{i+k},$$

si consideramos

$$A = \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k x_{i+k}, \quad B = \sum_{k=0}^{r-1} \beta_k f_{i+k} \quad \text{y} \quad \psi(\eta) = \frac{h \beta_r f(t_{i+r}, \eta) + hB - A}{\alpha_r}, \quad (3.25)$$

se verifica que

$$x_{i+r} = \psi(x_{i+r}) \quad (3.26)$$

y, por tanto, el valor x_{i+r} se obtiene como punto fijo de la función ψ . Si la función f es lipschitziana en la segunda variable de constante de Lipschitz $L > 0$, se tiene que la función ψ es, también, lipschitziana con constante de Lipschitz

$$\Lambda = \frac{h|\beta_r|L}{|\alpha_r|}$$

(compruébese). De esta forma, para pasos h verificando

$$0 < h < \frac{|\alpha_r|}{|\beta_r|L}, \quad (3.27)$$

se verifica que ψ es, de hecho, una función contractiva por lo que el Teorema del Punto Fijo de Banach (véase el Teorema 2.2) garantiza la existencia de un único punto $x_{i+r} \in \mathbb{R}^n$ verificando (3.26). Además, el punto fijo x_{i+r} se obtiene como límite de la sucesión

$$\begin{cases} x_{i+r}^{[0]} \text{ arbitrario} \\ x_{i+r}^{[q+1]} = \psi(x_{i+r}^{[q]}), \quad q \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{cases} \quad (3.28)$$

es decir,

$$x_{i+r} = \lim_{q \rightarrow +\infty} x_{i+r}^{[q]},$$

y se tiene la siguiente estimación del error de truncamiento:

$$\|x_{i+r}^{[q]} - x_{i+r}\| \leq \frac{\Lambda^q}{1 - \Lambda} \|x_{i+r}^{[1]} - x_{i+r}^{[0]}\|$$

para todo $q \in \mathbb{N}$.

Notación 3.6 Puesto que un método lineal de r pasos puede caracterizarse mediante las secuencias de coeficientes $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ y $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_r\}$, vamos a considerar los polinomios

$$\varrho(z) = \sum_{k=0}^r \alpha_k z^k \text{ y } \sigma(z) = \sum_{k=0}^r \beta_k z^k$$

y denominaremos (ϱ, σ) -Método al método multipaso considerado en (3.23). Nótese que ϱ es un polinomio de grado r (pues $\alpha_r \neq 0$) y σ es un polinomio de grado menor o igual que r (sólo tiene grado r cuando el (ϱ, σ) -Método es implícito). $\square$

3.4.2 Consistencia y orden de precisión de los métodos

Tal y como se ha comentado en la Observación 3.5, el (ϱ, σ) -Método (3.23) es equivalente al $(\mu\varrho, \mu\sigma)$ -Método que se obtiene, a partir del anterior, multiplicándolo por una constante $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Siguiendo la filosofía empleada hasta el momento sobre los errores locales de truncamiento, puesto que

$$\frac{\mu}{h} \sum_{k=0}^r \alpha_k x(t + kh) \simeq \mu \sum_{k=0}^r \beta_k f(t + kh, x(t + kh)) \quad (3.29)$$

para todo $t \in [t_0, T)$, veamos cómo debemos elegir el parámetro μ para que la expresión (3.29) converja a $x'(t)$ cuando $h \rightarrow 0$. Puesto que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\mu \sum_{k=0}^r \beta_k f(t + kh, x(t + kh)) \right) = \mu \sum_{k=0}^r \beta_k f(t, x(t)) = \mu \sigma(1) x'(t),$$

basta tomar

$$\mu = \frac{1}{\sigma(1)}$$

en el supuesto de que

$$\sigma(1) \neq 0. \quad (3.30)$$

Tal y como se verá más adelante (véanse las Observaciones 3.25 y 3.43), la condición (3.30) es necesaria para la convergencia del (ϱ, σ) -Método. Puesto que los métodos convergentes son los únicos interesantes desde el punto de vista de las aplicaciones, en todo lo que sigue (salvo que se explicita lo contrario) supondremos, por tanto, que el (ϱ, σ) -Método (3.23) verifica la hipótesis (3.30).

Los comentarios anteriores motivan la siguiente definición:

Definición 3.7 Para un (ϱ, σ) -Método (3.23) que verifica (3.30) se tiene que:

- a) El *error local de truncamiento*, $\tau(t, h)$, asociado a una solución x de la ecuación diferencial (3.2) a partir del instante $t \in [t_0, T)$, viene dado por

$$\frac{1}{h\sigma(1)} \sum_{k=0}^r \alpha_k x(t + kh) = \frac{1}{\sigma(1)} \sum_{k=0}^r \beta_k f(t + kh, x(t + kh)) + \tau(t, h), \quad h \in \left(0, \frac{T-t}{r}\right].$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \tau(t, h) &= \frac{1}{h\sigma(1)} \sum_{k=0}^r (\alpha_k x(t + kh) - h\beta_k f(t + kh, x(t + kh))) \\ &= \frac{1}{h\sigma(1)} \sum_{k=0}^r (\alpha_k x(t + kh) - h\beta_k x'(t + kh)), \quad h \in \left(0, \frac{T-t}{r}\right]. \end{aligned}$$

- b) El *error local de truncamiento* asociado a la solución x es la función $\bar{\tau} : (0, \frac{T-t_0}{r}] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{\tau}(h) = \max_{t \in [t_0, T-rh]} |\tau(t, h)|. \quad \square \quad (3.31)$$

Vamos a introducir, a continuación, las nociones de consistencia y orden de precisión de un método multipaso lineal.

Definición 3.8

- a) Dada una función $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, el (ϱ, σ) -Método (3.23) es consistente con la ecuación diferencial (3.2) si el error local de truncamiento $\bar{\tau}$ dado en (3.31) asociado a cualquier solución x de dicha ecuación tiene la propiedad de que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \bar{\tau}(h) = 0.$$

Además, se dice que el (ϱ, σ) -Método (3.23) es de orden de precisión $p \in \mathbb{N}$ para la ecuación diferencial (3.2) si para cualquier solución x de dicha ecuación se verifica que

$$\bar{\tau}(h) = O(h^p).$$

- b) El (ϱ, σ) -Método (3.23) es consistente si, para toda $f \in \mathcal{C}([t_0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, se verifica que el (ϱ, σ) -Método (3.23) es consistente con la ecuación diferencial (3.2). Además, el (ϱ, σ) -Método (3.23) es de orden de precisión $p \in \mathbb{N}$ si, para toda $f \in \mathcal{C}^p([t_0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, se verifica que el (ϱ, σ) -Método (3.23) es de orden de precisión p para la ecuación diferencial (3.2). $\square$

Observación 3.9 Obviamente, si $f \in \mathcal{C}^p([t_0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, todo método multipaso de orden de precisión $p \in \mathbb{N}$ para la ecuación diferencial (3.2) es consistente con dicha ecuación, pues

$$\bar{\tau}(h) = O(h^p) \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0. \quad \square$$

Observación 3.10 La función $\tau(t, h)$ está definida para todo $(t, h) \in \mathcal{U}$ (es decir, $\tau : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$), siendo $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto (véase la Figura 3.1)

$$\mathcal{U} = \{(t, h) \in \mathbb{R}^2 : h > 0, t, t + rh \in [t_0, T]\} = \bigcup_{t \in [t_0, T]} \{t\} \times \left(0, \frac{T-t}{r}\right] = \bigcup_{h \in (0, \frac{T-t_0}{r}]} [t_0, T - rh] \times \{h\}. \quad \square \quad (3.32)$$

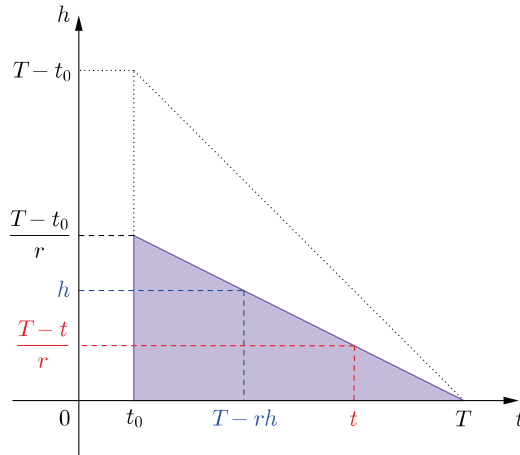


Figura 3.1: Conjunto $\mathcal{U}$.

Claramente, si $f \in \mathcal{C}([t_0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, la función $\tau \in \mathcal{C}(\mathcal{U})$ (por ser composición de funciones continuas) y, como se ha definido anteriormente,

$$\tau(t, h) = \frac{1}{h\sigma(1)} \sum_{k=0}^r (\alpha_k x(t + kh) - h\beta_k x'(t + kh)). \quad (3.33)$$

Veamos bajo qué condiciones puede extenderse por continuidad la definición de $\tau(t, h)$ a $h = 0$.

Lema 3.11 Sea $f \in \mathcal{C}([t_0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y $x(t)$ una solución arbitraria y no idénticamente nula de la ecuación diferencial (3.2). Una condición necesaria y suficiente para que $\tau(t, h) \in \mathcal{C}(\overline{\mathcal{U}})$ es que $\varrho(1) = 0$, en cuyo caso

$$\tau(t, 0) = \left(\frac{\varrho'(1)}{\sigma(1)} - 1 \right) x'(t), \quad t \in [t_0, T].$$

DEMOSTRACIÓN. Por ser $f \in \mathcal{C}([t_0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, por el Teorema 1.18 se tiene que $x \in \mathcal{C}^1([t_0, T]; \mathbb{R}^n)$. Por lo comentado anteriormente, basta demostrar la continuidad de la función $\tau(\cdot, \cdot)$ cuando $h = 0$. Para ello, dado $(s, 0) \in \overline{\mathcal{U}}$ veamos bajo qué condiciones existe el límite

$$\lim_{\substack{(t,h) \rightarrow (s,0) \\ (t,h) \in \mathcal{U}}} \tau(t, h), \quad (3.34)$$

en cuyo caso, bastaría definir

$$\tau(s, 0) = \lim_{\substack{(t,h) \rightarrow (s,0) \\ (t,h) \in \mathcal{U}}} \tau(t, h). \quad (3.35)$$

A partir de la relación (3.33), desarrollando por Taylor $x(t + kh)$ en torno a $x(t)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \tau(t, h) &= \frac{1}{h\sigma(1)} \sum_{k=0}^r (\alpha_k x(t + kh) - h\beta_k x'(t + kh)) \\ &= \frac{1}{h\sigma(1)} \sum_{k=0}^r \left[\alpha_k \left(x(t) + k \begin{pmatrix} (x^1)'(\zeta_k^1) \\ (x^2)'(\zeta_k^2) \\ \vdots \\ (x^n)'(\zeta_k^n) \end{pmatrix} h \right) - h\beta_k x'(t + kh) \right] \\ &= \frac{1}{h\sigma(1)} \left(\sum_{k=0}^r \alpha_k \right) x(t) + \frac{1}{\sigma(1)} \sum_{k=1}^r k\alpha_k \begin{pmatrix} (x^1)'(\zeta_k^1) \\ (x^2)'(\zeta_k^2) \\ \vdots \\ (x^n)'(\zeta_k^n) \end{pmatrix} - \frac{1}{\sigma(1)} \sum_{k=0}^r \beta_k x'(t + kh) \\ &= \frac{\varrho(1)}{h\sigma(1)} x(t) + \frac{1}{\sigma(1)} \sum_{k=1}^r k\alpha_k \begin{pmatrix} (x^1)'(\zeta_k^1) \\ (x^2)'(\zeta_k^2) \\ \vdots \\ (x^n)'(\zeta_k^n) \end{pmatrix} - \frac{1}{\sigma(1)} \sum_{k=0}^r \beta_k x'(t + kh), \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde $\zeta_k^j \in (t, t + kh)$ para $k = 0, 1, \dots, r$ y $j = 1, 2, \dots, n$. Dado que $x \neq 0$, existe $t \in [t_0, T]$ tal que $x(t) \neq 0$. Por tanto, la condición necesaria y suficiente para que exista el límite (3.35) es que $\varrho(1) = 0$, en cuyo caso,

$$\lim_{\substack{(t,h) \rightarrow (s,0) \\ (t,h) \in \mathcal{U}}} \tau(t, h) = \frac{1}{\sigma(1)} \left(\sum_{k=1}^r k\alpha_k \right) x'(s) - \frac{1}{\sigma(1)} \left(\sum_{k=0}^r \beta_k \right) x'(s) = \left(\frac{\varrho'(1)}{\sigma(1)} - 1 \right) x'(s)$$

(téngase en cuenta que $\varrho'(1) = \sum_{k=1}^r k\alpha_k$ y $\sigma(1) = \sum_{k=0}^r \beta_k$). $\square$

Veamos ahora bajo qué condiciones se tiene la continuidad de $\bar{\tau}(h)$ en $h = 0$.

Lema 3.12 Sea $f \in \mathcal{C}([t_0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y $x(t)$ una solución arbitraria y no idénticamente nula de la ecuación diferencial (3.2). Una condición necesaria y suficiente para que $\bar{\tau} \in \mathcal{C}([0, \frac{T-t_0}{r}])$ es que $\varrho(1) = 0$. Además, en tal caso, se verifica que

$$\bar{\tau}(0) = \left| \frac{\varrho'(1)}{\sigma(1)} - 1 \right| \max_{t \in [t_0, T]} \|x'(t)\|.$$

DEMOSTRACIÓN.

$\Leftarrow$ Supongamos que $\varrho(1) = 0$. Por el Lema 3.11 se tiene que $\tau(\cdot, \cdot) \in \mathcal{C}(\overline{\mathcal{U}})$. Para demostrar que $\bar{\tau}(\cdot)$ es continua, basta observar que para $h \in [0, \frac{T-t_0}{r}]$ arbitrario se tiene que

$$\lim_{\substack{\hat{h} \rightarrow h \\ \hat{h} \in (0, \frac{T-t_0}{r})}} \bar{\tau}(\hat{h}) = \lim_{\substack{\hat{h} \rightarrow h \\ \hat{h} \in (0, \frac{T-t_0}{r})}} \left(\max_{t \in [t_0, T-r\hat{h}]} \|\tau(t, \hat{h})\| \right) = \max_{t \in [t_0, T-rh]} \|\tau(t, h)\| = \bar{\tau}(h).$$

$\Rightarrow$ Puesto que $\bar{\tau} \in \mathcal{C}([0, \frac{T-t_0}{r}])$, en particular, $\bar{\tau}(\cdot)$ es continua en $h = 0$ y, por tanto,

$$\bar{\tau}(0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in (0, \frac{T-t_0}{r})}} \bar{\tau}(h) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in (0, \frac{T-t_0}{r})}} \left(\max_{t \in [t_0, T-rh]} \|\tau(t, h)\| \right) < +\infty. \quad (3.37)$$

Ahora bien, según se ha visto en (3.36), se tiene que

$$\tau(t, h) = \frac{\varrho(1)}{h\sigma(1)} x(t) + \frac{1}{\sigma(1)} \sum_{k=0}^r k\alpha_k \begin{pmatrix} (x^1)'(\zeta_k^1) \\ (x^2)'(\zeta_k^2) \\ \vdots \\ (x^n)'(\zeta_k^n) \end{pmatrix} - \frac{1}{\sigma(1)} \sum_{k=0}^r \beta_k x'(t + kh). \quad (3.38)$$

Puesto que $x \not\equiv 0$, existe $t \in [t_0, T]$ tal que $x(t) \neq 0$. Por tanto, de (3.38) se deduce que $\varrho(1) = 0$ ya que, en caso contrario

$$\|\tau(t, h)\| \rightarrow +\infty \text{ cuando } h \rightarrow 0,$$

lo que contradice (3.37).

Por último, si $\varrho(1) = 0$, de las relaciones (3.37) y (3.38) se deduce que

$$\bar{\tau}(0) = \max_{t \in [t_0, T]} \left\| \frac{1}{\sigma(1)} \sum_{k=0}^r k\alpha_k x'(t) - \frac{1}{\sigma(1)} \sum_{k=0}^r \beta_k x'(t) \right\| = \left| \frac{\varrho'(1)}{\sigma(1)} - 1 \right| \max_{t \in [t_0, T]} \|x'(t)\|. \quad \square$$

El siguiente resultado caracteriza cuándo un (ϱ, σ) -Método es consistente, en términos de los polinomios $\varrho(z)$ y $\sigma(z)$.

Teorema 3.13 El (ϱ, σ) -Método (3.23) es consistente si, y sólo si,

$$\varrho(1) = 0 \text{ y } \varrho'(1) = \sigma(1), \quad (3.39)$$

es decir, si se verifica que

$$\sum_{k=0}^r \alpha_k = 0 \text{ y } \sum_{k=0}^r (k\alpha_k - \beta_k) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. La consistencia del (ϱ, σ) -Método (3.23) equivale a demostrar que para toda $f \in \mathcal{C}([t_0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y toda solución x de la ecuación diferencial (3.2) se verifica que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \bar{\tau}(h) = 0.$$

Utilizando el Lema 3.12, esto es equivalente a:

$$\begin{cases} \varrho(1) = 0 \text{ (para que exista el límite)} \\ \bar{\tau}(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varrho(1) = 0 \\ \left| \frac{\varrho'(1)}{\sigma(1)} - 1 \right| \max_{t \in [t_0, T]} \|x'(t)\| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varrho(1) = 0 \\ \varrho'(1) = \sigma(1). \end{cases} \quad \square$$

Veamos, a continuación, una caracterización de los (ϱ, σ) -Métodos de orden p :

Teorema 3.14 El (ϱ, σ) -Método (3.23) es de orden de precisión $p \in \mathbb{N}$ si, y sólo si, se verifica que

$$c_0 = c_1 = \dots = c_p = 0, \quad (3.40)$$

donde

$$\begin{cases} c_0 = \varrho(1) = \sum_{k=0}^r \alpha_k \\ c_1 = \varrho'(1) - \sigma(1) = \sum_{k=0}^r (k\alpha_k - \beta_k) \\ c_j = \frac{1}{j!} \sum_{k=1}^r (k\alpha_k - j\beta_k) k^{j-1}, \quad j = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.41)$$

Además, si el (ϱ, σ) -Método (3.23) tiene orden de precisión $p \in \mathbb{N}$ y $f \in \mathcal{C}^{p+1}([t_0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, el error local de truncamiento asociado a una solución $x(t)$ de la ecuación diferencial (3.2) a partir del instante $t \in [t_0, T]$ viene dado por

$$\tau(t, h) = \frac{c_{p+1}}{\sigma(1)} h^p x^{(p+1)}(t) + O(h^{p+1}). \quad (3.42)$$

DEMOSTRACIÓN. Con vistas a simplificar la demostración (y también para justificar la Definición 3.15 que se dará posteriormente), supondremos que $f \in \mathcal{C}^{p+1}([t_0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ (el caso $f \in \mathcal{C}^p([t_0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ se puede hacer de manera análoga tal y como se indica en la Observación 3.17). Sea $x \in \mathcal{C}^{p+2}([t_0, T]; \mathbb{R}^n)$ una solución arbitraria de la ecuación diferencial (3.2) y $t \in [t_0, T]$ arbitrario. Por definición,

$$\tau(t, h) = \frac{1}{h\sigma(1)} \sum_{k=0}^r (\alpha_k x(t + kh) - h\beta_k x'(t + kh))$$

para todo $h \in (0, \frac{T-t}{r}]$. Desarrollando por Taylor, para todo $k = 0, 1, \dots, r$ se tiene que

$$\begin{cases} x(t + kh) = x(t) + khx'(t) + \dots + \frac{(kh)^p}{p!} x^{(p)}(t) + \frac{(kh)^{p+1}}{(p+1)!} x^{(p+1)}(t) + O(h^{p+2}) \\ x'(t + kh) = x'(t) + khx''(t) + \dots + \frac{(kh)^{p-1}}{(p-1)!} x^{(p)}(t) + \frac{(kh)^p}{p!} x^{(p+1)}(t) + O(h^{p+1}), \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} x(t + kh) = \sum_{j=0}^{p+1} \frac{(kh)^j}{j!} x^{(j)}(t) + O(h^{p+2}) \\ x'(t + kh) = \sum_{j=1}^{p+1} \frac{(kh)^{j-1}}{(j-1)!} x^{(j)}(t) + O(h^{p+1}). \end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \tau(t, h) &= \frac{1}{h\sigma(1)} \sum_{k=0}^r \left[\alpha_k x(t) + \sum_{j=1}^{p+1} \left(\alpha_k \frac{(kh)^j}{j!} - h\beta_k \frac{(kh)^{j-1}}{(j-1)!} \right) x^{(j)}(t) \right] + O(h^{p+1}) \\ &= \frac{1}{h\sigma(1)} \left[\sum_{k=0}^r \alpha_k x(t) + \sum_{k=0}^r \sum_{j=1}^{p+1} \frac{1}{j!} (k\alpha_k - j\beta_k) k^{j-1} h^j x^{(j)}(t) \right] + O(h^{p+1}) \\ &= \frac{1}{h\sigma(1)} \left[\left(\sum_{k=0}^r \alpha_k \right) x(t) + \sum_{j=1}^{p+1} \left(\frac{1}{j!} \sum_{k=0}^r (k\alpha_k - j\beta_k) k^{j-1} \right) h^j x^{(j)}(t) \right] + O(h^{p+1}) \\ &= \frac{1}{h\sigma(1)} \left[c_0 x(t) + \sum_{j=1}^{p+1} c_j h^j x^{(j)}(t) \right] + O(h^{p+1}) = \frac{1}{h\sigma(1)} \sum_{j=0}^{p+1} c_j h^j x^{(j)}(t) + O(h^{p+1}) \\ &= \frac{1}{\sigma(1)} \left(\frac{c_0}{h} x(t) + c_1 x'(t) + \dots + c_p h^{p-1} x^{(p)}(t) + c_{p+1} h^p x^{(p+1)}(t) \right) + O(h^{p+1}). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Si el (ϱ, σ) -Método es de orden p , se tiene que $\bar{\tau}(h) = O(h^p)$ y, por tanto,

$$\|\tau(t, h)\| = O(h^p),$$

por lo que, al ser f una función arbitraria, debe verificarse (3.40).

$\Leftarrow$ Si se verifica (3.40) entonces se da la relación (3.42), de donde se deduce que $\bar{\tau}(h) = O(h^p)$ y, por tanto, el (ϱ, σ) -Método es de orden p . $\square$

Definición 3.15 Si c_{p+1} es el primer coeficiente no nulo de los definidos en (3.41), se denomina *constante de error* del (ϱ, σ) -Método (3.23) a la cantidad

$$c_{\text{error}} = \frac{c_{p+1}}{\sigma(1)}. \quad \square$$

Observación 3.16 Por el Teorema 3.14, si el (ϱ, σ) -Método (3.23) es de orden $p \in \mathbb{N}$ entonces, para toda $x \in \mathcal{C}^{p+2}([t_0, T])$ solución de la ecuación diferencial (3.2), se verifica que

$$\sum_{k=0}^r \alpha_k x(t + kh) = h \sum_{k=0}^r \beta_k x'(t + kh) + c_{p+1} h^{p+1} x^{(p+1)}(t) + O(h^{p+2})$$

para todo $t \in [t_0, T]$ con $h > 0$ suficientemente pequeño (en concreto, fijado $t \in [t_0, T]$ debe tomarse $0 < h < \frac{T-t}{r}$). $\square$

Observación 3.17 La demostración del Teorema 3.14 se puede realizar, de forma análoga, cuando f tan sólo tiene la regularidad $f \in \mathcal{C}^p([t_0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. En efecto, basta observar que, en tal caso, se obtiene

$$\begin{aligned} \tau(t, h) &= \frac{1}{\sigma(1)} \left(\frac{c_0}{h} x(t) + c_1 x'(t) + \cdots + c_p h^{p-1} x^{(p)}(t) \right) \\ &+ \frac{1}{\sigma(1)} \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k=0}^r \left[k \alpha_k \begin{pmatrix} (x^1)^{(p+1)}(\zeta_k^1) \\ (x^2)^{(p+1)}(\zeta_k^2) \\ \vdots \\ (x^n)^{(p+1)}(\zeta_k^n) \end{pmatrix} - (p+1) \beta_k \begin{pmatrix} (x^1)^{(p+1)}(\vartheta_k^1) \\ (x^2)^{(p+1)}(\vartheta_k^2) \\ \vdots \\ (x^n)^{(p+1)}(\vartheta_k^n) \end{pmatrix} \right] k^p h^p \end{aligned}$$

donde $\zeta_k^j, \vartheta_k^j \in (t, t + kh)$ para $k = 0, 1, \dots, r$ y $j = 1, 2, \dots, n$ (compruébese). $\square$

Observación 3.18 Una consecuencia inmediata de los Teoremas 3.13 y 3.14 es:

El (ϱ, σ) -Método (3.23) es consistente $\Leftrightarrow c_0 = c_1 = 0 \Leftrightarrow$ El (ϱ, σ) -Método (3.23) es de orden 1.

Es decir, en el (ϱ, σ) -Método (3.23) se da la siguiente equivalencia:

$$\begin{aligned} &\text{Para toda } f \in \mathcal{C}([t_0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \text{ se verifica que } \lim_{h \rightarrow 0} \bar{\tau}(h) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Para toda } f \in \mathcal{C}^1([t_0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \text{ se verifica que } \bar{\tau}(h) = O(h). \quad \square \end{aligned}$$

Ejemplo 3.19 Determinemos los órdenes de algunos de los métodos de 2 pasos considerados en la Sección 3.3. Recordemos que, por (3.41), se tiene que

$$\begin{cases} c_0 = \varrho(1) \\ c_1 = \varrho'(1) - \sigma(1) \\ c_j = \frac{1}{j!} (\alpha_1 - j\beta_1 + (2\alpha_2 - j\beta_2)2^{j-1}), \quad j \geq 2. \end{cases}$$

a) **Método de Adams–Moulton** de 2 pasos: Puesto que

$$\begin{cases} \alpha_2 = 1, \alpha_1 = -1, \alpha_0 = 0 & \Rightarrow \varrho(z) = \sum_{k=0}^2 \alpha_k z^k = z^2 - z = z(z-1) \\ \beta_2 = \frac{5}{12}, \beta_1 = \frac{2}{3}, \beta_0 = -\frac{1}{12} & \Rightarrow \sigma(z) = \sum_{k=0}^2 \beta_k z^k = \frac{1}{12} (5z^2 + 8z - 1), \end{cases}$$

se verifica que (compruébese)

$$c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0 \text{ y } c_4 = -\frac{1}{24},$$

por lo que el Teorema 3.14 determina que el Método de Adams–Moulton de 2 pasos tiene orden 3. Además, como $\sigma(1) = 1$, la constante de error del Método de Adams–Moulton de 2 pasos es

$$c_{\text{error}} = \frac{c_4}{\sigma(1)} = -\frac{1}{24}.$$

b) **Método de Simpson**: Puesto que

$$\begin{cases} \alpha_2 = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_0 = -1 & \Rightarrow \varrho(z) = \sum_{k=0}^2 \alpha_k z^k = z^2 - 1 \\ \beta_2 = \frac{1}{3}, \beta_1 = \frac{4}{3}, \beta_0 = \frac{1}{3} & \Rightarrow \sigma(z) = \sum_{k=0}^2 \beta_k z^k = \frac{1}{3} (z^2 + 4z + 1), \end{cases}$$

se verifica que (compruébese)

$$c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0 \text{ y } c_5 = -\frac{1}{90}$$

por lo que el Teorema 3.14 determina que el Método de Simpson tiene orden 4 (recuérdese que este resultado ya se había obtenido en la Subsección 3.2.2). Además, como $\sigma(1) = 2$, la constante de error del Método de Simpson es

$$c_{\text{error}} = \frac{c_5}{\sigma(1)} = -\frac{1}{180}. \quad \square$$

3.4.3 Convergencia de los métodos

Supongamos que el problema (3.1) admite una única solución (para ello bastaría, tal y como se vio en el Capítulo 1, que la función f fuese continua y lipschitziana en la segunda variable). En la sección anterior se han obtenido condiciones sobre los coeficientes de los polinomios $\varrho(z)$ y $\sigma(z)$ para que un (ϱ, σ) -Método aproxime localmente la ecuación diferencial (3.2) pero al aplicar el (ϱ, σ) -Método, ¿se aproximará globalmente la (única) solución del problema de valor inicial (3.1)? Con vistas a responder a esta cuestión, introducimos la noción de convergencia en un método multipaso.

Definición 3.20

- a) Dada una función $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, el (ϱ, σ) -Método (3.23) es *convergente para el problema de valor inicial* (2.1) (supuesto que admite solución única) si el error de discretización global absoluto tiene la propiedad de que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0,$$

supuesto que

$$\max_{i \in \{0, 1, \dots, r-1\}} \|\varepsilon_i(h)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0. \quad (3.43)$$

- b) El (ϱ, σ) -Método (3.23) es *convergente* si para toda función $f \in \mathcal{C}([a, b] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y lipschitziana en la segunda variable se verifica que el (ϱ, σ) -Método (3.23) es convergente para el problema de valor inicial (2.1). $\square$

Introducimos, a continuación, un resultado técnico que utilizaremos en la demostración del Teorema 3.23:

Lema 3.21 Las sucesiones $\{x_i\}_{i=0}^\infty \subset \mathbb{C}$ solución de la ecuación en diferencias lineal homogénea

$$\sum_{k=0}^r \alpha_k x_{i+k} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.44)$$

forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Además,

- a) Si $\mu \in \mathbb{C}$ es raíz del polinomio $\varrho(z)$ (es decir, $\varrho(\mu) = 0$), se verifica que $\{\mu^i\}_{i=0}^\infty$ es solución de (3.44).
b) Si $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\nu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ son raíces distintas de $\varrho(z)$, se verifica que $\{\mu^i\}_{i=0}^\infty$ y $\{\nu^i\}_{i=0}^\infty$ son dos soluciones linealmente independientes de (3.44).
c) Si $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es raíz doble del polinomio $\varrho(z)$ (es decir, $\varrho(\mu) = \varrho'(\mu) = 0$), se verifica que $\{\mu^i\}_{i=0}^\infty$ e $\{i\mu^i\}_{i=0}^\infty$ son dos soluciones linealmente independientes de (3.44).

DEMOSTRACIÓN. Si $\{x_i\}_{i=0}^\infty \subset \mathbb{C}$ e $\{y_i\}_{i=0}^\infty \subset \mathbb{C}$ son soluciones de la ecuación en diferencias (3.44) y consideramos

$$z_i = Ax_i + By_i \text{ para todo } i \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

con $A, B \in \mathbb{C}$ arbitrarios, se verifica que

$$\sum_{k=0}^r \alpha_k z_{i+k} = A \sum_{k=0}^r \alpha_k x_{i+k} + B \sum_{k=0}^r \alpha_k y_{i+k} = 0,$$

lo que prueba que $\{z_i\}_{i=0}^\infty$ es solución de (3.44). Por tanto, el conjunto de soluciones de la ecuación en diferencias (3.44) es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

- a) Si $\varrho(\mu) = 0$, tomando $x_i = \mu^i$ en (3.44), se verifica que

$$\sum_{k=0}^r \alpha_k x_{i+k} = \sum_{k=0}^r \alpha_k \mu^{i+k} = \mu^i \sum_{k=0}^r \alpha_k \mu^k = \mu^i \varrho(\mu) = 0,$$

por lo que $x_i = \mu^i$ es solución de (3.44).

- b) Si $A, B \in \mathbb{C}$ son tales que

$$A\mu^i + B\nu^i = 0 \text{ para todo } i \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

los dos primeros índices $i = 0$ e $i = 1$ conducen al sistema lineal

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A\mu + B\nu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -A \\ A(\mu - \nu) = 0, \end{cases}$$

de donde se deduce que $A = 0$ (ya que $\mu \neq \nu$) y $B = -A = 0$.

c) Si $\varrho(\mu) = \varrho'(\mu) = 0$, tomando ahora $x_i = i\mu^i$ en (3.44), se verifica que

$$\sum_{k=0}^r \alpha_k x_{i+k} = \sum_{k=0}^r \alpha_k (i+k) \mu^{i+k} = \mu^i \left(i \sum_{k=0}^r \alpha_k \mu^k + \mu \sum_{k=0}^r k \alpha_k \mu^{k-1} \right) = \mu^i (i\varrho(\mu) + \mu\varrho'(\mu)) = 0,$$

por lo que $x_i = i\mu^i$ es también solución de (3.44). Además, las soluciones $\{\mu^i\}_{i=0}^\infty$ e $\{i\mu^i\}_{i=0}^\infty$ con $\mu \neq 0$ son linealmente independientes, ya que si $A, B \in \mathbb{C}$ son tales que

$$A\mu^i + Bi\mu^i = 0 \text{ para todo } i \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

se verifica que

$$(A + Bi)\mu^i = 0 \text{ para todo } i \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

de donde se deduce (basta considerar los casos $i = 0$ e $i = 1$) que $A = B = 0$. $\square$

Observación 3.22 La dimensión del espacio vectorial V que forman las soluciones de la ecuación en diferencias lineal homogénea (3.44) es

$$\dim(V) = r - s,$$

siendo s la multiplicidad de $\mu = 0$ como raíz de $\varrho(z)$ (de esta forma, en los casos en los que $\mu = 0$ no sea raíz de $\varrho(z)$, se verifica que $\dim(V) = r$). $\square$

Se tiene el siguiente resultado, que relaciona la convergencia de un (ϱ, σ) -Método con su consistencia y orden:

Teorema 3.23 Si el (ϱ, σ) -Método (3.23) es convergente entonces es consistente y de orden de precisión 1. Además, se verifica que $\sigma(1) \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN. A la vista de los Teoremas 3.13 y 3.14, todo se reduce a probar que $\varrho(1) = 0$ y $\varrho'(1) = \sigma(1) \neq 0$. Dividimos la prueba de estas afirmaciones en tres etapas:

1) $\varrho(1) = 0$. Consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = 0, & t \in [0, 1] \\ x(0) = 1, \end{cases} \quad (3.45)$$

cuya solución es $x(t) \equiv 1$. El (ϱ, σ) -Método (3.23) aplicado al problema anterior conduce a la ecuación en diferencias (3.44). Tomando como datos iniciales los valores

$$x_i = 1, \quad i = 0, 1, \dots, r-1,$$

por ser el (ϱ, σ) -Método convergente, se verifica que

$$\varepsilon(h) = \max_{i \in \{0, 1, \dots, N\}} |x(t_i) - x_i| = \max_{i \in \{r, r+1, \dots, N\}} |1 - x_i| \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0,$$

lo que obliga a que

$$x_i \rightarrow 1 \text{ cuando } h \rightarrow 0$$

para $i = r, r+1, \dots, N$. De esta forma, la relación (3.44) determina, haciendo tender $h \rightarrow 0$, que

$$\varrho(1) = \sum_{k=0}^r \alpha_k = 0. \quad (3.46)$$

2) $\varrho'(1) \neq 0$. Supongamos que $\varrho'(1) = 0$ y derivemos una contradicción. Para ello, consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = 0, & t \in [0, 1] \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (3.47)$$

cuya solución es $x(t) \equiv 0$. El (ϱ, σ) -Método (3.23) aplicado al problema anterior conduce de nuevo a (3.44). Como estamos suponiendo que

$$\sum_{k=0}^r k \alpha_k = \varrho'(1) = 0, \quad (3.48)$$

por el apartado 1) se verifica que $z = 1$ es raíz de $\varrho(z)$ con multiplicidad mayor o igual que 2. De este modo

$$y_i = 1 \text{ y } z_i = i$$

son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación en diferencias lineal y homogénea (3.44) (véase el Lema 3.21 y la Observación 3.24). Por tanto, como las soluciones de (3.44) forman un espacio vectorial, se tiene que

$$x_i = ih$$

también es solución de dicha ecuación. Puesto que los datos iniciales

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, r-1$$

verifican que

$$\max_{i \in \{0, 1, \dots, r-1\}} |x(t_i) - x_i| = \max_{i \in \{0, 1, \dots, r-1\}} ih = (r-1)h \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0,$$

se debe cumplir que

$$\varepsilon(h) = \max_{i \in \{0, 1, \dots, N\}} |x(t_i) - x_i| \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0,$$

por ser el (ϱ, σ) -Método convergente. Sin embargo, lo anterior no se cumple, ya que

$$\varepsilon(h) = \max_{i \in \{0, 1, \dots, N\}} ih = Nh = 1 \not\rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0.$$

3) $\varrho'(1) = \sigma(1)$. Para ver que la cantidad

$$\varrho'(1) - \sigma(1) = \sum_{k=0}^r (k\alpha_k - \beta_k)$$

es nula, consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = 1, & t \in [0, 1] \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (3.49)$$

cuya solución es $x(t) = t$. El (ϱ, σ) -Método (3.23) aplicado al problema anterior conduce a la siguiente ecuación en diferencias lineal no homogénea (véase, de nuevo, la Observación 3.24)

$$\begin{cases} x_0, x_1, \dots, x_{r-1} \text{ dados} \\ \sum_{k=0}^r \alpha_k x_{i+k} = h \sum_{k=0}^r \beta_k, \quad i = 0, 1, \dots, N-r. \end{cases} \quad (3.50)$$

Veamos cómo hay que elegir $\gamma \in \mathbb{R}$ para que

$$x_i = \gamma ih$$

sea una solución de la ecuación en diferencias no homogénea (3.50). Puesto que

$$\sum_{k=0}^r \alpha_k x_{i+k} = h\gamma \sum_{k=0}^r \alpha_k (i+k) = h\gamma \left(i \sum_{k=0}^r \alpha_k + \sum_{k=0}^r k\alpha_k \right) = h\gamma (i\varrho(1) + \varrho'(1)) = h\gamma \varrho'(1)$$

(véase (3.46)), se tiene que

$$\sum_{k=0}^r \alpha_k x_{i+k} = h \sum_{k=0}^r \beta_k \Leftrightarrow h\gamma \varrho'(1) = h\sigma(1) \Leftrightarrow \gamma = \frac{\sigma(1)}{\varrho'(1)}$$

(nótese que, por el apartado 2), la constante γ está bien definida). Por tanto, tomando como valores iniciales

$$x_i = \frac{\sigma(1)}{\varrho'(1)} ih, \quad i = 0, 1, \dots, r-1,$$

puesto que $t_i = ih$, se verifica que

$$\max_{i \in \{0, 1, \dots, r-1\}} |x(t_i) - x_i| = \max_{i \in \{0, 1, \dots, r-1\}} \left| 1 - \frac{\sigma(1)}{\varrho'(1)} \right| ih = \left| 1 - \frac{\sigma(1)}{\varrho'(1)} \right| (r-1)h \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0$$

y

$$\varepsilon(h) = \max_{i \in \{0,1,\dots,N\}} |x(t_i) - x_i| = \max_{i \in \{0,1,\dots,N\}} \left| 1 - \frac{\sigma(1)}{\varrho'(1)} \right| ih = \left| 1 - \frac{\sigma(1)}{\varrho'(1)} \right| Nh = \left| 1 - \frac{\sigma(1)}{\varrho'(1)} \right|.$$

Ahora bien, dado que el (ϱ, σ) -Método convergente, debe cumplirse que

$$\varepsilon(h) \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0,$$

lo que obliga a que $\frac{\sigma(1)}{\varrho'(1)} = 1$ y, por tanto, $\varrho'(1) = \sigma(1)$.

Finalmente, los apartados 2) y 3) determinan que $\sigma(1) = \varrho'(1) \neq 0$. $\square$

Observación 3.24 Las ecuaciones consideradas en (3.44) y (3.50) son casos particulares de las denominadas *ecuaciones en diferencias*. El lector interesado en un estudio detallado sobre este tipo de ecuaciones puede consultar, por ejemplo, [Fernández-Vázquez-Vegas]). $\square$

Observación 3.25

- a) A la vista de la demostración del Teorema 3.23, basta pedir que el (ϱ, σ) -Método (3.23) sea convergente para los problemas de valor inicial (3.45), (3.47) y (3.49) para obtener que el (ϱ, σ) -Método anterior sea consistente y de orden de precisión 1.
- b) Si el (ϱ, σ) -Método (3.23) es convergente, como se ha visto en el Teorema 3.23, se verifica que $\sigma(1) \neq 0$. Consecuentemente, como comentamos al comienzo de este capítulo, $\sigma(1) \neq 0$ es una condición necesaria para la convergencia del (ϱ, σ) -Método. $\square$

3.4.4 0-estabilidad de los métodos

A partir del Teorema 3.23 se tiene que la consistencia es una condición necesaria para la convergencia. Cabe preguntarse si será, también, una condición suficiente para la misma. La respuesta es negativa, como lo pone de manifiesto el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.26 Consideremos el método de 2 pasos

<u>Paso 1</u>	$x_0 \simeq \xi_0$
<u>Paso 2</u>	x_1 calculado mediante otro método
<u>Paso 3</u>	Para $i = 0, 1, \dots, N-2$ $x_{i+2} = 4x_{i+1} - 3x_i - 2hf(t_i, x_i)$

(3.51)

Puesto que

$$\begin{cases} \alpha_2 = 1, \alpha_1 = -4, \alpha_0 = 3 & \Rightarrow \varrho(z) = z^2 - 4z + 3 = (z-1)(z-3) \\ \beta_2 = 0, \beta_1 = 0, \beta_0 = -2 & \Rightarrow \sigma(z) = -2, \end{cases}$$

se tiene que

$$\begin{cases} c_0 = \varrho(1) = 0 \\ c_1 = \varrho'(1) - \sigma(1) = 2 - 4 - (-2) = 0 \\ c_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 - 2\beta_1 + 4\alpha_2 - 4\beta_2) = \frac{1}{2}(-4 + 4) = 0 \\ c_3 = \frac{1}{6}(\alpha_1 - 3\beta_1 + 8\alpha_2 - 12\beta_2) = \frac{1}{6}(-4 + 8) = \frac{2}{3}, \end{cases}$$

por lo que los Teoremas 3.13 y 3.14 determinan que el método (3.51) es consistente con la ecuación diferencial (3.2) y tiene orden de precisión 2. No obstante, como veremos a continuación, el método (3.51) no es convergente. En efecto, consideremos el problema de valor inicial escalar

$$\begin{cases} x'(t) = 0, \quad t \in [0, 1] \\ x(0) = \xi_0 \end{cases} \quad (3.52)$$

que tiene por única solución la función

$$x(t) = \xi_0, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.53)$$

Puesto que $f \equiv 0$, la ecuación en diferencias que determina el método considerado en (3.51) es

$$\begin{cases} x_0, x_1 \text{ dados} \\ x_{i+2} = 4x_{i+1} - 3x_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-2. \end{cases} \quad (3.54)$$

Teniendo en cuenta que las raíces del polinomio característico

$$\varrho(z) = z^2 - 4z + 3$$

son $z_1 = 1$ y $z_2 = 3$, de acuerdo con el Lema 3.21, se verifica que $\zeta_i = 1$ y $\eta_i = 3^i$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación en diferencias (3.54), por lo que podemos expresar su solución general como

$$x_i = \alpha + \beta 3^i$$

para $i = 0, 1, \dots, N$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Determinemos los parámetros α y β para que se satisfagan los valores iniciales x_0 y x_1 . Dado que

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x_0 \\ \alpha + 3\beta = x_1 \end{cases}$$

se obtiene que

$$\alpha = \frac{3x_0 - x_1}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{x_1 - x_0}{2}.$$

Consecuentemente, la solución de (3.54) es

$$x_i = \frac{3x_0 - x_1}{2} + \frac{x_1 - x_0}{2} 3^i \quad (3.55)$$

para $i = 0, 1, \dots, N$.

a) Desde el punto de vista teórico, si en la expresión (3.55) se toman como datos iniciales los valores

$$x_0 = x_1 = \xi_0,$$

se obtiene que

$$x_i = \xi_0$$

para $i = 0, 1, \dots, N$, en concordancia con la solución exacta (3.53).

b) Sin embargo, si se toman como datos iniciales

$$x_0 = \xi_0 + h \quad \text{y} \quad x_1 = \xi_0 + 3h,$$

se verifica que

$$\max_{i \in \{0,1\}} |\varepsilon_i(h)| = \max\{|\xi_0 - x_0|, |\xi_0 - x_1|\} = 3h \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad h \rightarrow 0,$$

y la expresión (3.55) toma la forma

$$x_i = \xi_0 + 3^i h \quad (3.56)$$

para $i = 0, 1, \dots, N$. Por tanto, se verifica que

$$\varepsilon(h) = \max_{i \in \{0,1,\dots,N\}} |\varepsilon_i(h)| = \max_{i \in \{0,1,\dots,N\}} |\xi_0 - x_i| = \max_{i \in \{0,1,\dots,N\}} 3^i h = \frac{3^N}{N} \rightarrow +\infty \quad \text{cuando} \quad N \rightarrow +\infty$$

o, equivalentemente, cuando $h \rightarrow 0$, por lo que el método (3.51) no es convergente. $\square$

Nótese como, en el ejemplo anterior, las pequeñas perturbaciones introducidos en los datos iniciales se amplifican en las siguientes iteraciones. Tenemos, por tanto, que asegurarnos que esto no ocurra, de forma que pequeñas perturbaciones en los datos conlleven pequeñas perturbaciones en toda la solución (dependencia continua con respecto a los datos). Esto motiva la siguiente definición:

Definición 3.27 El (ϱ, σ) -Método (3.23) es 0-estable si para toda $f \in \mathcal{C}([t_0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y lipschitziana en la segunda variable existen dos constantes positivas C_1 y C_2 , independientes de h , tales que si las secuencias $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ e $\{y_0, y_1, \dots, y_N\}$ verifican

$$\begin{cases} x_0, x_1, \dots, x_{r-1} \text{ dados} \\ \sum_{k=0}^r \alpha_k x_{i+k} = h \sum_{k=0}^r \beta_k f(t_{i+k}, x_{i+k}), \quad i = 0, 1, \dots, N-r \\ y_0, y_1, \dots, y_{r-1} \text{ dados} \\ \sum_{k=0}^r \alpha_k y_{i+k} = h \left(\sum_{k=0}^r \beta_k f(t_{i+k}, y_{i+k}) + \gamma_i \right), \quad i = 0, 1, \dots, N-r \end{cases}$$

entonces

$$\max_{i \in \{0, 1, \dots, N\}} \|y_i - x_i\| \leq C_1 \max_{i \in \{0, 1, \dots, r-1\}} \|y_i - x_i\| + C_2 \max_{i \in \{0, 1, \dots, N-r\}} \|\gamma_i\|. \quad \square \quad (3.57)$$

Observación 3.28

- Nótese que el (ϱ, σ) -Método (3.23) es 0-estable cuando pequeñas perturbaciones en los datos suponen pequeñas perturbaciones en las soluciones (se trata de la versión discreta de la dependencia continua considerada en la Sección 1.4).
- El calificativo “0-estabilidad” se debe a que la estabilidad de un (ϱ, σ) -Método puede determinarse a partir de su comportamiento cuando se considera exclusivamente la función $f \equiv 0$ (véase, más adelante, la Observación 3.37). $\square$

Observación 3.29 El (ϱ, σ) -Método mostrado en el Ejemplo 3.26 no es 0-estable. En efecto, como para el error local de truncamiento asociado a la solución del problema (3.52) y particularizado en un nodo t_i se da la igualdad

$$x(t_{i+2}) - 4x(t_{i+1}) + 3x(t_i) = h\sigma(1)\tau(t_i, h),$$

si elegimos $y_i = x(t_i)$ y $\gamma_i = \sigma(1)\tau(t_i, h) = -2\tau(t_i, h)$, se verifica (como se ha visto en el Ejemplo 3.26) que

$$\max_{i \in \{0, 1, \dots, N\}} \|y_i - x_i\| \rightarrow +\infty \text{ cuando } h \rightarrow 0,$$

mientras que $\max_{i \in \{0, 1\}} \|y_i - x_i\|$ y $\max_{i \in \{0, 1, \dots, N-2\}} \|\tau(t_i, h)\|$ convergen a cero cuando $h \rightarrow 0$ y, por tanto, están acotados. Esto hace que no se pueda cumplir una desigualdad del tipo (3.57). $\square$

3.4.5 Relaciones entre convergencia, consistencia y 0-estabilidad

La consistencia y 0-estabilidad de un (ϱ, σ) -Método garantizan la convergencia de éste. Concretamente,

Teorema 3.30 Sea $f \in \mathcal{C}([t_0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y lipschitziana en la segunda variable. Si el (ϱ, σ) -Método (3.23) es 0-estable entonces el correspondiente error de discretización global absoluto verifica

$$\varepsilon(h) \leq C_1 \max_{i \in \{0, 1, \dots, r-1\}} \|\varepsilon_i(h)\| + C_2 \bar{\tau}(h),$$

donde C_1 y C_2 son constantes positivas e independientes de h y $\bar{\tau}(h)$ es el error local de truncamiento dado en (3.31). Si, además, el (ϱ, σ) -Método (3.23) es:

a) consistente, entonces es convergente.

b) de orden de precisión $p \in \mathbb{N}$ y

$$\max_{i \in \{0, 1, \dots, r-1\}} \|\varepsilon_i(h)\| = O(h^p),$$

entonces

$$\varepsilon(h) = O(h^p).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in \mathcal{C}^1([t_0, T]; \mathbb{R}^n)$ la única solución del problema de valor inicial (3.1). Por definición de error local de truncamiento, se verifica que

$$\sum_{k=0}^r \alpha_k x(t_{i+k}) = h \sum_{k=0}^r \beta_k f(t_{i+k}, x(t_{i+k})) + h\sigma(1)\tau(t_i, h). \quad (3.58)$$

para $i = 0, 1, \dots, N - r$. Por ser el (ϱ, σ) -Método 0-estable, la relación (3.58) nos permite aplicar la Definición 3.27 con $y_i = x(t_i)$ y $\gamma_i = \sigma(1)\tau(t_i, h)$, obteniendo así que existen números positivos C_1 y C_2 , independientes de h , tales que

$$\begin{aligned} \varepsilon(h) &= \max_{i \in \{0, 1, \dots, N\}} \|\varepsilon_i(h)\| \leq C_1 \max_{i \in \{0, 1, \dots, r-1\}} \|\varepsilon_i(h)\| + C_2 \max_{i \in \{0, 1, \dots, N-r\}} \|\tau(t_i, h)\| \\ &\leq C_1 \max_{i \in \{0, 1, \dots, r-1\}} \|\varepsilon_i(h)\| + C_2 \bar{\tau}(h). \end{aligned} \quad (3.59)$$

a) Si, además, el (ϱ, σ) -Método es consistente y se verifica que

$$\max_{i \in \{0, 1, \dots, r-1\}} \|\varepsilon_i(h)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0,$$

la desigualdad (3.59) hace que

$$\varepsilon(h) \leq C_1 \max_{i \in \{0, 1, \dots, r-1\}} \|\varepsilon_i(h)\| + C_2 \bar{\tau}(h) \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0,$$

lo que indica que el (ϱ, σ) -Método (3.23) es convergente.

b) Si, además, el (ϱ, σ) -Método (3.23) es de orden de precisión $p \in \mathbb{N}$ y

$$\max_{i \in \{0, 1, \dots, r-1\}} \|\varepsilon_i(h)\| = O(h^p),$$

la relación (3.59) determina que

$$\varepsilon(h) = O(h^p). \quad \square$$

Observación 3.31

- a) El Teorema 3.30 nos lleva a examinar separadamente la consistencia y estabilidad de los métodos multipaso pues, si tienen ambas propiedades, la convergencia la tendrán automáticamente.
- b) En realidad, como se verá en el Teorema 3.42, de hecho se verifica que el (ϱ, σ) -Método (3.42) es convergente si, y sólo si, es consistente y 0-estable. $\square$

Observación 3.32 Tal y como se ha visto, el Método del Punto Medio tiene orden de precisión 2. Si $f \in \mathcal{C}^2([t_0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ es lipschitziana en la segunda variable, para inicializar este método se suele tomar $x_0 = x_0(h) = \xi_0 + O(h^2)$ y, como x_1 , un valor de forma que

$$\varepsilon_1(h) = O(h^2).$$

Para ello se puede considerar, por ejemplo, el Método de Euler explícito, es decir,

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0) = \xi_0 + hf(t_0, \xi_0) + h(f(t_0, x_0) - f(t_0, \xi_0)) + O(h^2) = \xi_0 + hf(t_0, \xi_0) + O(h^2),$$

donde se ha utilizado que la función f es lipschitziana en la segunda variable. Veamos que este valor x_1 aproxima el valor exacto $x(t_1)$ con un error del orden de $O(h^2)$. En efecto, puesto que $f \in \mathcal{C}^1([t_0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, a partir del desarrollo de Taylor de segundo orden

$$x(t_1) = x(t_0 + h) = x(t_0) + hx'(t_0) + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} (x^1)''(\zeta^1) \\ (x^2)''(\zeta^2) \\ \vdots \\ (x^n)''(\zeta^n) \end{pmatrix} = \xi_0 + hf(t_0, \xi_0) + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} (x^1)''(\zeta^1) \\ (x^2)''(\zeta^2) \\ \vdots \\ (x^n)''(\zeta^n) \end{pmatrix}$$

con $\zeta^j \in (t_0, t_0 + h)$, se tiene que la cantidad

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0)$$

aproxima el valor exacto $x(t_1)$ con un error

$$\varepsilon_1(h) = x(t_1) - x_1 = O(h^2).$$

Nótese que, puesto que el Método del Punto Medio tiene orden de precisión 2 y, tal como se verá en el Ejemplo 3.41, es 0-estable (por ser un caso particular de Método de Nyström), utilizando esta elección de x_1 , por el Teorema 3.30 se tiene que $\varepsilon(h) = O(h^2)$. Nótese también que, aunque el orden de precisión del Método de Euler es uno, se tiene que $\varepsilon_1(h) = O(h^2)$. $\square$

El hecho comentado anteriormente de que en la primera iteración del método de Euler se gana una unidad en el orden de convergencia del primer término $\varepsilon_1(h)$ puede ser generalizado: si en lugar de estimar el máximo entre los N valores del (ϱ, σ) -Método y los valores exactos (con N pudiendo tender eventualmente a $+\infty$ cuando h tiende a 0), lo hacemos con una cantidad finita $\hat{N} < N$, con $\hat{N}$ independiente de h , se gana un orden de aproximación en el error de discretización global absoluto. Concretamente,

Corolario 3.33 Sean $\hat{N} \in \mathbb{N}$ fijo independiente de h tal que $\hat{N} < N$ y $f \in \mathcal{C}^p([t_0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ con $p \in \mathbb{N}$ y lipschitziana en la segunda variable. Si el (ϱ, σ) -Método (3.23) es de orden p y

$$\max_{i \in \{0, 1, \dots, r-1\}} \|\varepsilon_i(h)\| = O(h^{p+1}) \quad (3.60)$$

entonces

$$\max_{i \in \{0, 1, \dots, \hat{N}\}} \|\varepsilon_i(h)\| = O(h^{p+1}). \quad (3.61)$$

DEMOSTRACIÓN. Obviamente, sólo hay que probar el resultado en el supuesto de que $\hat{N} \geq r$. Por definición, para todo $i = 0, 1, \dots, \hat{N} - r$ se verifica que

$$\begin{cases} \alpha_r x(t_{i+r}) = h\beta_r f(t_{i+r}, x(t_{i+r})) + \sum_{k=0}^{r-1} (-\alpha_k x(t_{i+k}) + h\beta_k f(t_{i+k}, x(t_{i+k}))) + h\sigma(1)\tau(t_i, h) \\ \alpha_r x_{i+r} = h\beta_r f(t_{i+r}, x_{i+r}) + \sum_{k=0}^{r-1} (-\alpha_k x_{i+k} + h\beta_k f(t_{i+k}, x_{i+k})), \end{cases}$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} |\alpha_r| \|\varepsilon_{i+r}(h)\| &= |\alpha_r| \|x(t_{i+r}) - x_{i+r}\| \leq h|\beta_r| \|f(t_{i+r}, x(t_{i+r})) - f(t_{i+r}, x_{i+r})\| \\ &\quad + \sum_{k=0}^{r-1} (|\alpha_k| \|x(t_{i+k}) - x_{i+k}\| + h|\beta_k| \|f(t_{i+k}, x(t_{i+k})) - f(t_{i+k}, x_{i+k})\|) + h|\sigma(1)| \|\tau(t_i, h)\| \\ &\leq h|\beta_r| L \|\varepsilon_{i+r}(h)\| + \sum_{k=0}^{r-1} (|\alpha_k| + h|\beta_k| L) \|\varepsilon_{i+k}(h)\| + h|\sigma(1)| \overline{\tau}(h), \end{aligned}$$

donde $L > 0$ es la constante de Lipschitz de la función f con respecto a su segunda variable. De esta forma, tomando

a) $h > 0$ arbitrario, si el (ϱ, σ) -Método es explícito.

b) $0 < h < \frac{|\alpha_r|}{|\beta_r|L}$, si el (ϱ, σ) -Método es implícito (como se vio en (3.27), esta restricción sobre el paso h garantizaba la existencia de x_{i+r}).

se tiene que

$$\|\varepsilon_{i+r}(h)\| \leq \frac{1}{|\alpha_r| - h|\beta_r|L} \left(\sum_{k=0}^{r-1} (|\alpha_k| + h|\beta_k|L) \|\varepsilon_{i+k}(h)\| + h|\sigma(1)| \overline{\tau}(h) \right), \quad (3.62)$$

donde, por ser el (ϱ, σ) -Método de orden p , se tiene que $\overline{\tau}(h) = O(h^p)$. Mostremos que

$$\|\varepsilon_{i+r}(h)\| = O(h^{p+1}) \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, \hat{N} - r \quad (3.63)$$

por inducción completa en i :

a) Para $i = 0$: la hipótesis (3.60) determina que

$$\|\varepsilon_k(h)\| = O(h^{p+1})$$

para $k = 0, 1, \dots, r-1$. Por tanto, como $\overline{\tau}(h) = O(h^p)$, a partir de (3.62) se tiene que

$$\|\varepsilon_r(h)\| = O(h^{p+1}).$$

b) Supuesto cierto el resultado para $0, 1, \dots, i-1$, lo probamos para $i \leq \hat{N} - r$. La hipótesis de inducción determina que

$$\|\varepsilon_{i+k}(h)\| = O(h^{p+1})$$

para $k = 0, 1, \dots, r-1$. Puesto que $\tau(h) = O(h^p)$, la relación (3.62) determina que

$$\|\varepsilon_{i+r}(h)\| = O(h^{p+1}).$$

La relación (3.61) se sigue directamente de (3.63), teniendo en cuenta que el máximo de una cantidad finita de funciones $O(h^{p+1})$ es una $O(h^{p+1})$. $\square$

La definición de 0-estabilidad de un método multipaso tiene el inconveniente de que no es fácil de verificar en la mayoría de los casos. Sería conveniente, por tanto, poder disponer de un procedimiento sencillo para comprobar dicha propiedad. Para ello introducimos la siguiente definición:

Definición 3.34 El polinomio

$$\varrho(z) = \sum_{k=0}^r \alpha_k z^k$$

verifica la *condición de Dahlquist* (o *condición de la raíz*) si sus r raíces $\{z_1, z_2, \dots, z_r\} \subset \mathbb{C}$ verifican:

- a) $|z_i| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, r$ (las r raíces de ϱ se encuentran en el disco unidad).
- b) Si $|z_i| = 1$ entonces z_i es raíz simple de ϱ (las raíces que están en la circunferencia unidad tienen multiplicidad 1). $\square$

Observación 3.35 Si el (ϱ, σ) -Método (3.23) es consistente entonces $\varrho(1) = 0$ y $\varrho'(1) = \sigma(1)$ (véase el Teorema 3.13), por lo que $z = 1$ es raíz de ϱ . Además, como en la Definición 3.7 de error local de truncamiento se ha supuesto que el (ϱ, σ) -Método (3.23) verifica $\sigma(1) \neq 0$, se tiene que $z = 1$ es raíz simple de ϱ . $\square$

La 0-estabilidad de un (ϱ, σ) -Método queda caracterizada a partir de la condición de Dahlquist:

Teorema 3.36 El (ϱ, σ) -Método (3.23) es 0-estable si, y sólo si, el polinomio $\varrho(z)$ verifica la condición de Dahlquist.

DEMOSTRACIÓN.

$\Leftarrow$ Véase [Henrici].

$\Rightarrow$ Argumentamos por reducción al absurdo: supongamos que $\varrho(z)$ no verifica la condición de Dahlquist y derivemos una contradicción. En efecto, consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = 0, & t \in [0, 1] \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (3.64)$$

cuya solución es $x(t) = 0$. El (ϱ, σ) -Método (3.23) aplicado al problema anterior conduce a

$$\begin{cases} x_0, x_1, \dots, x_{r-1} \text{ dados} \\ \sum_{k=0}^r \alpha_k x_{i+k} = 0, & i = 0, 1, \dots, N-r. \end{cases} \quad (3.65)$$

Claramente $\varrho(z)$ es el polinomio característico de la ecuación en diferencias lineal homogénea (3.65) y la secuencia

$$x_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

es una solución (la trivial) de dicha ecuación. Para que, tal y como estamos suponiendo, no se cumpla la condición de Dahlquist, hay dos posibilidades, que pasamos a considerar de forma independiente en los dos siguientes apartados:

- 1) Si existe $\eta \in \mathbb{C}$ tal que $\varrho(\eta) = 0$ y $|\eta| > 1$, tal y como se vio en el Lema 3.21, otra solución de (3.65) es la secuencia definida por

$$y_i = h\eta^i, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Por ser el (ϱ, σ) -Método (3.23) 0-estable se verifica que existe una constante positiva C (independiente de h) tal que

$$\begin{aligned} \max_{i \in \{0,1,\dots,N\}} |y_i - x_i| &\leq C \max_{i \in \{0,1,\dots,r-1\}} |y_i - x_i| \\ &= Ch \max_{i \in \{0,1,\dots,r-1\}} |\eta|^i = Ch|\eta|^{r-1} \\ &= \frac{C}{N} |\eta|^{r-1} \rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Por otra parte, puesto que $|\eta| > 1$, se tiene que

$$\max_{i \in \{0,1,\dots,N\}} |y_i - x_i| \geq |y_N - x_N| = h|\eta|^N = \frac{1}{N} |\eta|^N \rightarrow +\infty \text{ cuando } N \rightarrow +\infty,$$

lo que contradice (3.66).

- 2) Si existe $\eta \in \mathbb{C}$ tal que $\varrho(\eta) = \varrho'(\eta) = 0$ y $|\eta| = 1$, se tiene que η es raíz de ϱ con multiplicidad al menos 2. Por tanto, por el el Lema 3.21, otra solución de (3.65) es la secuencia definida por

$$z_i = i\sqrt{h}\eta^i, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Por ser el (ϱ, σ) -Método (3.23) estable se verifica que existe una constante positiva C (independiente de h) tal que

$$\begin{aligned} \max_{i \in \{0,1,\dots,N\}} |z_i - x_i| &\leq C \max_{i \in \{0,1,\dots,r-1\}} |z_i - x_i| \\ &= C\sqrt{h} \max_{i \in \{0,1,\dots,r-1\}} i|\eta|^i = C(r-1)\sqrt{h} \\ &= \frac{C(r-1)}{\sqrt{N}} \rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.67)$$

En cambio, por otra parte, se tiene que

$$\max_{i \in \{0,1,\dots,N\}} |z_i - x_i| \geq |z_N - x_N| = \sqrt{h}N|\eta|^N = \sqrt{N} \rightarrow +\infty \text{ cuando } N \rightarrow +\infty,$$

lo que contradice (3.67). $\square$

Observación 3.37 De acuerdo con el Teorema 3.36 y la Definición 3.34, la propiedad de 0-estabilidad de un método no depende de la función f que aparece en la ecuación diferencial del problema de valor inicial considerado (ya que la condición de Dahlquist no depende de ésta). De hecho, de acuerdo con lo visto en la demostración del anterior teorema, en la Definición 3.27 de 0-estabilidad basta considerar sólo el caso $f \equiv 0$. $\square$

El Teorema 3.36 motiva la siguiente definición:

Definición 3.38 El (ϱ, σ) -Método (3.23) es:

- Fuertemente estable* si el polinomio $\varrho(z)$ verifica la condición de Dahlquist y tiene a $z = 1$ como única raíz de módulo 1.
- Débilmente estable* si el polinomio $\varrho(z)$ verifica la condición de Dahlquist y tiene más de una raíz de módulo 1.
- Inestable* si el polinomio $\varrho(z)$ no verifica la condición de Dahlquist. $\square$

Observación 3.39 Si un (ϱ, σ) -Método es débilmente estable puede proporcionar *soluciones numéricas espurias*, en el sentido de que tengan comportamiento anómalo con respecto a la solución exacta. Por ejemplo, soluciones numéricas con bruscas oscilaciones cuando la solución real no las tiene (que pueden desaparecer al disminuir el paso de discretización temporal h). Así ocurre con el *Método de Milne explícito de 4 pasos*

$$\begin{cases} x_0, x_1, x_2, x_3 \text{ dados} \\ x_{i+4} = x_i + \frac{4h}{3}(2f_{i+3} - f_{i+2} + 2f_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, N-4. \end{cases} \quad (3.68)$$

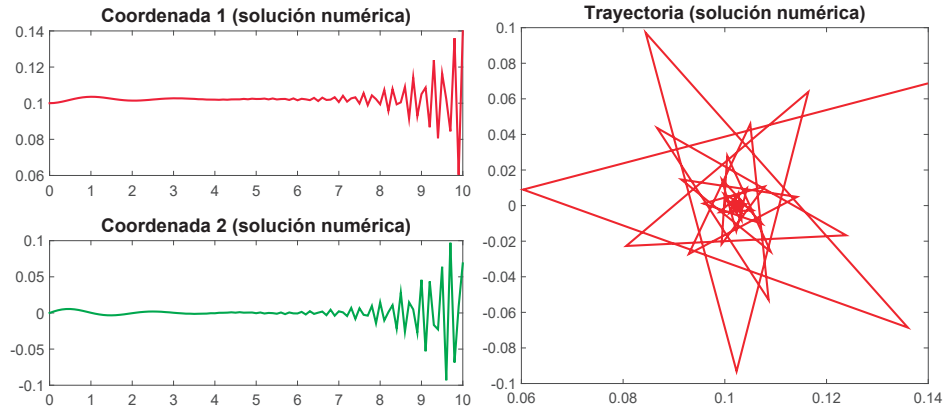
Se trata de un método que tiene orden 4 y, como todas las raíces del polinomio

$$\varrho(z) = z^4 - 1 = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$$

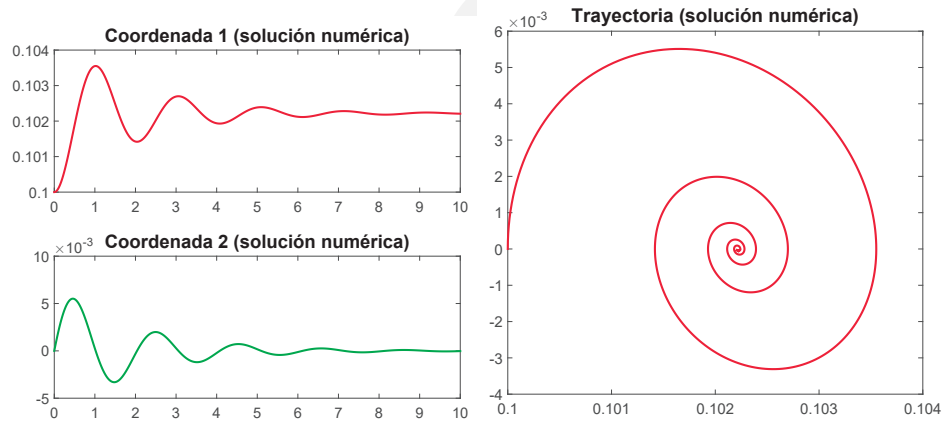
se encuentran en la circunferencia unidad, el (ϱ, σ) -Método (3.68) es débilmente estable. Cuando se aplica este método al problema del péndulo

$$\begin{cases} \theta''(t) + \theta'(t) + 9'8 \sin(\theta(t)) = 1, & t \in [0, 10] \\ \theta(0) = 0'1 \\ \theta'(0) = 0, \end{cases} \quad (3.69)$$

se obtienen las gráficas que se muestran en la Figura 3.2. $\square$



(a) Método de Milne con $N = 100$



(b) Método de Milne con $N = 1000$

Figura 3.2: Método de Milne (3.68) aplicado al problema (3.69).

Ejemplo 3.40 Puesto que el polinomio $\varrho(z)$ del (ϱ, σ) -Método

Paso 1	$x_0 \simeq \xi_0$
Paso 2	x_1 calculado mediante otro método
Paso 3	Para $i = 0, 1, \dots, N-2$ $x_{i+2} = (1 + \lambda)x_{i+1} - \lambda x_i + (1 - \lambda)hf(t_i, x_i)$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ es

$$\varrho(z) = z^2 - (1 + \lambda)z + \lambda = (z - 1)(z - \lambda),$$

se verifica que el (ϱ, σ) -Método anterior es:

- a) Fuertemente estable si $|\lambda| < 1$.
- b) Débilmente estable si $\lambda = -1$.
- c) Inestable si $|\lambda| > 1$ ó $\lambda = 1$. $\square$

Ejemplo 3.41 Estudiemos la 0-estabilidad de los métodos considerados en la Sección 3.3:

a) En los Métodos de Adams–Bashforth y Adams–Moulton de r pasos se tiene que

$$\varrho(z) = z^r - z^{r-1} = z^{r-1}(z - 1).$$

Puesto que las raíces del polinomio $\varrho(z)$ son

$$\begin{cases} z_1 = 1 \text{ (simple)} & \text{si } r = 1 \\ z_1 = 1 \text{ (simple) y } z_2 = 0 \text{ (con multiplicidad } r - 1) & \text{si } r \geq 2, \end{cases}$$

se verifica que el polinomio $\varrho(z)$ verifica la condición de Dahlquist y tiene a $z_1 = 1$ como única raíz de módulo 1. Por tanto, por el Teorema 3.36 se tiene que estos métodos son 0–estables y, de acuerdo con la Definición 3.38, fuertemente estables.

b) En los Métodos de Nyström y Milne de r pasos se tiene que

$$\varrho(z) = z^r - z^{r-2} = z^{r-2}(z^2 - 1) = z^{r-2}(z - 1)(z + 1).$$

Puesto que las raíces del polinomio $\varrho(z)$ son

$$\begin{cases} z_1 = 1 \text{ (simple) y } z_2 = -1 \text{ (simple)} & \text{si } r = 2 \\ z_1 = 1 \text{ (simple), } z_2 = -1 \text{ (simple) y } z_3 = 0 \text{ (con multiplicidad } r - 2) & \text{si } r \geq 3, \end{cases}$$

se verifica que el polinomio $\varrho(z)$ verifica la condición de Dahlquist y tiene dos raíces de módulo 1. Por tanto, por el Teorema 3.36 se tiene que estos métodos son 0–estables y, de acuerdo con la Definición 3.38, débilmente estables. $\square$

En cuanto a la caracterización de la convergencia, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.42 El (ϱ, σ) –Método (3.23) es convergente si, y sólo si, es consistente y 0–estable.

DEMOSTRACIÓN.

$\Leftarrow$ Basta aplicar el Teorema 3.30.

$\Rightarrow$ Por el Teorema 3.23 se tiene que el (ϱ, σ) –Método (3.23) es consistente. Para ver que es 0–estable, a la vista del Teorema 3.36, basta ver que el polinomio $\varrho(z)$ verifica la condición de Dahlquist. Argumentamos por reducción al absurdo: supongamos que $\varrho(z)$ no verifica la condición de Dahlquist y derivemos una contradicción. En efecto, consideramos nuevamente el problema de valor inicial (3.64) cuya solución es $x(t) = 0$, de forma que el (ϱ, σ) –Método (3.23) aplicado al problema anterior conduce a (3.65). Para que, tal y como estamos suponiendo, no se cumpla la condición de Dahlquist, hay dos posibilidades, que pasamos a considerar de forma independiente en los dos siguientes apartados:

1) Si existe $\eta \in \mathbb{C}$ tal que $\varrho(\eta) = 0$ y $|\eta| > 1$, tal y como se vio en el Lema 3.21, se tiene que la secuencia

$$y_i = h\eta^i, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

es solución de (3.65). Claramente, se verifica que

$$\max_{i \in \{0, 1, \dots, r-1\}} |\varepsilon_i(h)| = h \max_{i \in \{0, 1, \dots, r-1\}} |\eta|^i = h|\eta|^{r-1} = \frac{1}{N} |\eta|^{r-1} \rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow +\infty$$

pero, en cambio

$$\varepsilon(h) = \max_{i \in \{0, 1, \dots, N\}} |\varepsilon_i(h)| = h|\eta|^N = \frac{1}{N} |\eta|^N \rightarrow +\infty \text{ cuando } N \rightarrow +\infty,$$

lo que contradice que el (ϱ, σ) –Método (3.23) sea convergente.

2) Si existe $\eta \in \mathbb{C}$ tal que $\varrho(\eta) = \varrho'(\eta) = 0$ y $|\eta| = 1$, por el Lema 3.21 se tiene que la secuencia

$$z_i = i\sqrt{h}\eta^i, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

es solución de (3.65). Claramente, se verifica que

$$\max_{i \in \{0, 1, \dots, r-1\}} |\varepsilon_i(h)| = \sqrt{h} \max_{i \in \{0, 1, \dots, r-1\}} i|\eta|^i = (r-1)\sqrt{h} = \frac{r-1}{\sqrt{N}} \rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow +\infty$$

pero, en cambio

$$\varepsilon(h) = \max_{i \in \{0,1,\dots,N\}} |\varepsilon_i(h)| = \sqrt{h}N|\eta|^N = \sqrt{N} \rightarrow +\infty \text{ cuando } N \rightarrow +\infty,$$

lo que contradice que el hecho de que el (ϱ, σ) -Método (3.23) sea convergente. $\square$

Observación 3.43 Si el (ϱ, σ) -Método (3.23) es convergente, por el Teorema 3.42 se verifica que es consistente y 0-estable.

a) Por ser consistente, se tiene que (véase el Teorema 3.13)

$$\varrho(1) = 0 \text{ y } \sigma(1) = \varrho'(1).$$

b) Por ser estable, verifica la condición de Dahlquist (véase el Teorema 3.36). Puesto que $\varrho(1) = 0$, se tiene que $z = 1$ es una raíz de ϱ y, como ésta es una raíz simple, se cumple que

$$\sigma(1) = \varrho'(1) \neq 0.$$

Esta condición ya había sido obtenida en el Teorema 3.23 (véase también la Observación 3.25). $\square$

Observación 3.44 Podemos cuestionarnos cuál es el orden de precisión máximo que puede obtenerse a partir de un (ϱ, σ) -Método de r pasos. Claramente, el (ϱ, σ) -Método (3.23) está determinado a partir de los $2r + 2$ coeficientes $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ y $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_r\}$. Puesto que $\alpha_r \neq 0$ podemos tomar, sin pérdida de generalidad, $\alpha_r = 1$, por lo que quedan libres:

a) $2r + 1$ parámetros, si el (ϱ, σ) -Método es implícito.

b) $2r$ parámetros, si el (ϱ, σ) -Método es explícito (pues $\beta_r = 0$).

Recordemos que, por el Teorema 3.14, la condición necesaria y suficiente para que el (ϱ, σ) -Método (3.23) sea de orden $p \in \mathbb{N}$ es que se verifiquen las $p + 1$ condiciones $c_0 = c_1 = \dots = c_p = 0$, que forman un sistema lineal de ecuaciones algebraicas cuyas incógnitas son $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ y $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_r\}$ (véase (3.41)). Consecuentemente,

a) En un método implícito en el que hay $2r + 1$ incógnitas $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}\}$ y $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_r\}$, se consideran $p + 1$ ecuaciones independientes $c_0 = c_1 = \dots = c_p = 0$, obteniendo un sistema lineal (que es no homogéneo, pues se ha fijado $\alpha_r = 1$) cuyas soluciones forman un espacio afín de dimensión $2r + 1 - (p + 1) = 2r - p$. Por tanto, el máximo orden que puede alcanzar el (ϱ, σ) -Método es $p = 2r$. Dahlquist demostró en 1959 que cuando $p = 2r$ el sistema anterior tiene una única solución.

b) En un método explícito en el que hay $2r$ incógnitas $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}\}$ y $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}\}$, se consideran $p + 1$ ecuaciones independientes $c_0 = c_1 = \dots = c_p = 0$, obteniendo un sistema lineal no homogéneo cuyas soluciones forman un espacio afín de dimensión $2r - (p + 1) = 2r - p - 1$. Por tanto, el máximo orden que puede alcanzar el (ϱ, σ) -Método es $p = 2r - 1$.

En base a lo anterior, a los (ϱ, σ) -Métodos de r pasos implícitos de orden $2r$ o explícitos de orden $2r - 1$, se les llama *maximales*. $\square$

Desafortunadamente, no se tiene garantizado que los métodos maximales sean 0-estables. De hecho, Dahlquist demostró en 1956 que no existe ningún (ϱ, σ) -Método de r pasos consistente y 0-estable con un orden de precisión mayor que $r + 2$. Concretamente,

Teorema 3.45 (Primera barrera de Dahlquist) Si el (ϱ, σ) -Método (3.23) es 0-estable y de orden de precisión $p \in \mathbb{N}$, se verifica que

$$p \leq \begin{cases} r + 2 & \text{si } r \text{ es par} \\ r + 1 & \text{si } r \text{ es impar} \\ r & \text{si } \frac{\beta_r}{\alpha_r} \leq 0. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Véase [Hairer–Norsett–Wanner]. $\square$

Observación 3.46 Del Teorema 3.45 se deduce que el orden de un (ϱ, σ) -Método explícito de r pasos y 0-estable es, a lo sumo, r (puesto que $\beta_r = 0$). $\square$

Definición 3.47 Un (ϱ, σ) -Método de r pasos que sea 0-estable y de orden $r + 2$ se denomina *optimal*. $\square$

Observación 3.48 Puede demostrarse (véase [Suli]) que los (ϱ, σ) -Métodos optimales son débilmente estables y todas las raíces del polinomio $\varrho(z)$ tienen módulo 1 (con multiplicidad 1, por ser el método 0-estable), lo que supone ciertas desventajas en términos de sus propiedades de estabilidad (véase la Observación 3.39). Es por esto por lo que apenas se utilizan en la práctica. Por esta razón, el mejor orden de un (ϱ, σ) -Método “útil” de r pasos es $r + 1$. $\square$

Ejemplo 3.49 Obtengamos los métodos optimales de 2 pasos. Un (ϱ, σ) -Método de 2 pasos es de la forma

$$\begin{cases} x_0, x_1 \text{ dados} \\ x_{i+2} + \alpha_1 x_{i+1} + \alpha_0 x_i = h(\beta_2 f_{i+2} + \beta_1 f_{i+1} + \beta_0 f_i), \quad i = 0, 1, \dots, N-2 \end{cases} \quad (3.70)$$

donde hemos supuesto, sin pérdida de generalidad, que $\alpha_2 = 1$. Los polinomios que definen el (ϱ, σ) -Método (3.70) son

$$\varrho(z) = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 \quad \text{y} \quad \sigma(z) = \beta_2 z^2 + \beta_1 z + \beta_0.$$

Para que el (ϱ, σ) -Método (3.70) sea optimal, debe ser de orden $r + 2 = 4$ y, por tanto, debe verificarse que

$$c_j = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4$$

siendo

$$\begin{cases} c_0 = \varrho(1) = 1 + \alpha_1 + \alpha_0 \\ c_1 = \varrho'(1) - \sigma(1) = 2 + \alpha_1 - \beta_2 - \beta_1 - \beta_0 \\ c_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 - 2\beta_1 + 4 - 4\beta_2) \\ c_3 = \frac{1}{6}(\alpha_1 - 3\beta_1 + 8 - 12\beta_2) \\ c_4 = \frac{1}{24}(\alpha_1 - 4\beta_1 + 16 - 32\beta_2). \end{cases}$$

Puesto que la única solución del sistema lineal de 5 ecuaciones con 5 incógnitas

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 = -1 \\ \alpha_1 - \beta_0 - \beta_1 - \beta_2 = -2 \\ \alpha_1 - 2\beta_1 - 4\beta_2 = -4 \\ \alpha_1 - 3\beta_1 - 12\beta_2 = -8 \\ \alpha_1 - 4\beta_1 - 32\beta_2 = -16 \end{cases}$$

es

$$\alpha_0 = -1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_0 = \frac{1}{3}, \quad \beta_1 = \frac{4}{3} \quad \text{y} \quad \beta_2 = \frac{1}{3}$$

(compruébese), se tiene que el método buscado es

$$\begin{cases} x_0, x_1 \text{ dados} \\ x_{i+2} - x_i = \frac{h}{3}(f_{i+2} + 4f_{i+1} + f_i), \quad i = 0, 1, \dots, N-2. \end{cases}$$

que es, precisamente, el Método de Simpson. Finalmente, dado que

$$\varrho(z) = z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1)$$

se tiene que el polinomio $\varrho(z)$ verifica la condición de Dahlquist y, por tanto, el Método de Simpson es 0-estable (de hecho, débilmente estable). Consecuentemente, el Método de Simpson es el único método optimal de 2 pasos. Además, puesto que

$$2r = r + 2 \Leftrightarrow r = 2,$$

de acuerdo con la Observación 3.44, se tiene que el Método de Simpson es, también, de orden máximo (pues $2r = 4$). $\square$