

4 Métodos de predicción–corrección

4.1 Introducción

En los capítulos anteriores se han estudiado varios tipos de métodos numéricos para la aproximación numérica de problemas de valor inicial. De acuerdo con la clasificación vista en la Sección 1.6, algunos de estos métodos eran explícitos y otros implícitos. La implementación de los métodos implícitos tiene la dificultad añadida, con respecto a los explícitos, de tener que resolver sistemas de ecuaciones no lineales en cada uno de los pasos. Aunque en ejemplos concretos estas ecuaciones implícitas se pueden resolver de manera sencilla (con lo que la dificultad añadida mencionada anteriormente no existe como tal), en la mayoría de los casos la resolución exacta de estos sistemas no es posible y, por tanto, debe hacerse, de nuevo, otra aproximación. Obviamente, esta aproximación aportará un error suplementario a la aproximación global, que tendrá que ser estudiado. Una primera forma de abordar este problema es utilizar las herramientas numéricas disponibles para la resolución de sistemas no lineales. Dentro de éstas, una de las más conocidas y utilizadas es el *método de Newton–Raphson* (véase [Infante–Rey]). Estos métodos tienen a su favor que su convergencia hacia la solución es bastante aceptable, pero tienen el inconveniente de ser bastante “costosos” desde un punto de vista computacional. Los *métodos de predicción–corrección* que vamos a presentar en este capítulo utilizan un argumento de punto fijo con convergencia más lenta que en el Método de Newton–Raphson, pero de una implementación más sencilla.

4.2 Deducción de los métodos de predicción–corrección

Consideremos un método multipaso lineal implícito de r pasos de la forma

$$\alpha_r x_{i+r} + \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k x_{i+k} = h\beta_r f(t_{i+r}, x_{i+r}) + h \sum_{k=0}^{r-1} \beta_k f_{i+k}, \quad (4.1)$$

con $\alpha_r \neq 0$ y $\beta_r \neq 0$, que genera en cada paso la resolución de una ecuación en la que la incógnita es x_{i+r} . Sobre estos métodos desarrollaremos la teoría de los métodos de predicción–corrección. En general el sistema (4.1) es una ecuación no lineal en la incógnita x_{i+r} , y un modo de resolverlo, tal y como se ha visto en la Sección 3.4.1, consiste en buscar un punto fijo de la función $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por

$$\psi(\eta) = \frac{1}{\alpha_r} \left(h\beta_r f(t_{i+r}, \eta) + \sum_{k=0}^{r-1} (-\alpha_k x_{i+k} + h\beta_k f_{i+k}) \right)$$

(véase (3.25)). Dicho método de punto fijo consiste en considerar la sucesión

$$\begin{cases} x_{i+r}^{[0]} \text{ arbitrario} \\ x_{i+r}^{[m+1]} = \psi(x_{i+r}^{[m]}) = \frac{1}{\alpha_r} \left(h\beta_r f(t_{i+r}, x_{i+r}^{[m]}) + \sum_{k=0}^{r-1} (-\alpha_k x_{i+k} + h\beta_k f_{i+k}) \right), \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Si la función f es lipschitziana en la segunda variable con constante de Lipschitz $L > 0$, aplicando el *Teorema del Punto Fijo de Banach* (véase el Teorema 2.2), se tiene que una condición suficiente para que el método de punto fijo sea convergente, es decir, para que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} x_{i+r}^{[m]} = x_{i+r},$$

es tomar el paso h suficientemente pequeño, en concreto

$$0 < h < \frac{|\alpha_r|}{|\beta_r|L},$$

pues, de esta forma, la función ψ es contractiva con constante de contractividad

$$\Lambda = \frac{h|\beta_r|L}{|\alpha_r|} < 1.$$

Para iniciar el proceso basta tomar un elemento inicial $x_{i+r}^{[0]}$ arbitrario. No obstante, para acelerar el proceso, suele utilizarse algún método explícito para obtener una buena estimación inicial o *predicción* de x_{i+r} . Supongamos que dicho método es el (ϱ^*, σ^*) –método multipaso lineal dado por

$$\alpha_r^* x_{i+r} + \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k^* x_{i+k} = h \sum_{k=0}^{r-1} \beta_k^* f_{i+k}, \quad (4.2)$$

con $\alpha_r^* \neq 0$, donde

$$\varrho^*(z) = \sum_{k=0}^r \alpha_k^* z^k \quad \text{y} \quad \sigma^*(z) = \sum_{k=0}^{r-1} \beta_k^* z^k.$$

Por motivos de simplicidad en el estudio de estos métodos, en el método explícito (4.2) estamos tomando r como el número de pasos del método implícito (4.1). Sin embargo, para incluir los casos en los que el método (4.2) tenga un número menor de pasos, permitimos que $\alpha_0^* = 0$ y/o $\beta_0^* = 0$ (pues, en estos casos, lo que se hace es un corrimiento de los índices con el fin de expresar el método de predicción como si fuera uno de r pasos). Veamos un ejemplo:

Ejemplo 4.1 En el método de predicción–corrección consistente en tomar como *método predictor* el Método de Euler (explícito)

$$x_{i+1} = x_i + hf_i \quad (4.3)$$

y como *método corrector* el Método de Adams–Moulton de 3 pasos

$$x_{i+3} = x_{i+2} + \frac{h}{24}(9f_{i+3} + 19f_{i+2} - 5f_{i+1} + f_i),$$

en lugar de expresar el método de predicción en la forma (4.3), lo expresamos como un “falso método de 3 pasos” en la forma

$$x_{i+3} = x_{i+2} + hf_{i+2}. \quad (4.4)$$

Nótese que, expresando el Método de Euler (explícito) como (4.4), se verifica que $\alpha_0^* = \beta_0^* = 0$. $\square$

A continuación se suele proceder de dos formas:

a) La primera consiste en iterar (o *corregir*) las veces necesarias hasta que, para una prefijada *tolerancia* $\varepsilon > 0$, se cumpla

$$\left\| x_{i+r}^{[m+1]} - x_{i+r}^{[m]} \right\| < \varepsilon$$

(o alguna variante de esta condición) y entonces tomar $x_{i+r} = x_{i+r}^{[m+1]}$. Esta forma de proceder se denomina *corrección hasta la convergencia* y, básicamente, consiste en aplicar el método implícito considerado.

b) La otra forma de proceder, que es la que habitualmente se conoce como *predicción–corrección*, consiste en iterar (o *corregir*) un número prefijado m de veces y entonces ir al siguiente paso sin preocuparse de si las iteraciones han convergido. Esta forma de proceder, aunque tiene el inconveniente de no tener asegurada la convergencia a la solución x_{i+r} , tiene la ventaja de conocer de antemano el coste computacional que se va a necesitar, que será en general menor que en la corrección hasta la convergencia. En este caso, el método final resultante no se puede considerar que sea el método implícito empleado.

i) El método explícito utilizado se denomina *predictor*.

ii) El método implícito considerado se llama *corrector*.

El método explícito “predice” una aproximación y el método implícito la “corrige”.

Observación 4.2 Como el método implícito considerado es de r pasos, se precisan r valores iniciales $\{x_0, x_1, \dots, x_{r-1}\}$ para inicializarlo. Como el problema de valor inicial sólo proporciona $x_0 \simeq x(t_0) = \xi_0$, los $r - 1$ valores restantes suelen obtenerse, en la práctica, mediante un método de orden inferior. $\square$

Para poder expresar de una manera sencilla los métodos de *predicción–corrección*, vamos a denotar por P a la etapa de predicción, por C a cada una de las etapas de corrección y por E a cada evaluación de la función f sobre datos conocidos. De esta manera, se puede denotar simbólicamente el cálculo de $x_{i+r}^{[1]}$ como PEC (primero se hace una etapa de predicción, P , para conseguir $x_{i+r}^{[0]}$, después se hace una etapa de evaluación, E , en la que se obtiene $f(t_{i+r}, x_{i+r}^{[0]})$ y, después, una etapa de corrección, C , en la que se obtiene $x_{i+r}^{[1]}$), el cálculo de $x_{i+r}^{[2]}$ como $P(EC)^2$ y, en general, el cálculo de $x_{i+r}^{[m]}$ como $P(EC)^m$. En el *método de predicción–corrección clásico* se hace una última etapa de evaluación E de $f(t_{i+r}, x_{i+r}^{[m]})$, que será usada como f_{i+r} en el siguiente paso de predicción. Este método se denota $P(EC)^m E$.

El método $P(EC)^m E$ determina el elemento genérico $x_{i+r} = x_{i+r}^{[m]} \simeq x(t_{i+r})$, $i = 0, 1, \dots, N - r$, mediante el siguiente esquema:

Método $P(EC)^m E$	
Paso 1	$\begin{cases} x_0^{[m]} \simeq \xi_0 \\ f_0^{[m]} = f(t_0, x_0^{[m]}) \end{cases}$
Paso 2	Para $j = 1, 2, \dots, r - 1$ $\begin{cases} x_j^{[m]} \text{ calculado mediante otro método} \\ f_j^{[m]} = f(t_j, x_j^{[m]}) \end{cases}$
Paso 3	Para $i = 0, 1, \dots, N - r - 1$ $x_{i+r}^{[0]} = \frac{1}{\alpha_r^*} \sum_{k=0}^{r-1} \left(-\alpha_k^* x_{i+k}^{[m]} + h\beta_k^* f_{i+k}^{[m]} \right) \quad (\text{Predicción})$ Para $s = 0, 1, \dots, m - 1$ $\begin{cases} f_{i+r}^{[s]} = f(t_{i+r}, x_{i+r}^{[s]}) \\ x_{i+r}^{[s+1]} = \frac{1}{\alpha_r} \left(h\beta_r f_{i+r}^{[s]} + \sum_{k=0}^{r-1} \left(-\alpha_k x_{i+k}^{[m]} + h\beta_k f_{i+k}^{[m]} \right) \right) \end{cases} \quad \begin{matrix} (\text{Evaluación}) \\ (\text{Corrección}) \end{matrix}$ $f_{i+r}^{[m]} = f(t_{i+r}, x_{i+r}^{[m]}) \quad (\text{Evaluación})$
Paso 4	Último nodo $x_N^{[0]} = \frac{1}{\alpha_r^*} \sum_{k=0}^{r-1} \left(-\alpha_k^* x_{N-r+k}^{[m]} + h\beta_k^* f_{N-r+k}^{[m]} \right) \quad (\text{Predicción})$ Para $s = 0, 1, \dots, m - 1$ $\begin{cases} f_N^{[s]} = f(t_N, x_N^{[s]}) \\ x_N^{[s+1]} = \frac{1}{\alpha_r} \left(h\beta_r f_N^{[s]} + \sum_{k=0}^{r-1} \left(-\alpha_k x_{N-r+k}^{[m]} + h\beta_k f_{N-r+k}^{[m]} \right) \right) \end{cases} \quad \begin{matrix} (\text{Evaluación}) \\ (\text{Corrección}) \end{matrix}$

Observación 4.3

- Nótese que los métodos de predicción–corrección expuestos anteriormente son, en general, métodos multipaso no lineales.
- En la práctica, como se verá más adelante, suelen tomarse valores pequeños de m (usualmente, $m = 1$). $\square$

4.3 Estudio del error local de truncamiento

Veamos el error local de truncamiento que se genera al considerar $m = 1$ (una iteración) en el esquema $P(EC)E$ sobre una solución $x(t)$ de la ecuación diferencial

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [t_0, T]. \quad (4.5)$$

En este caso, el elemento genérico $x_{i+r} = x_{i+r}^{[1]}$, $i = 0, 1, \dots, N - r$, viene dado por

Método $P(EC)E$		
Paso 3.1	$x_{i+r}^{[0]} = \frac{1}{\alpha_r^*} \sum_{k=0}^{r-1} (-\alpha_k^* x_{i+k} + h\beta_k^* f_{i+k})$	(Predicción)
Paso 3.2	$\begin{cases} f_{i+r}^{[0]} = f(t_{i+r}, x_{i+r}^{[0]}) \\ x_{i+r} = \frac{1}{\alpha_r} \left(h\beta_r f_{i+r}^{[0]} + \sum_{k=0}^{r-1} (-\alpha_k x_{i+k} + h\beta_k f_{i+k}) \right) \end{cases}$	(Evaluación) (Corrección)
Paso 3.3	$f_{i+r} = f(t_{i+r}, x_{i+r})$	(Evaluación)

(4.6)

De manera análoga a lo hecho al inicio de la Sección 3.4.2, el esquema (4.6) se puede ver como una aproximación de la ecuación diferencial

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

mediante el esquema

$$x'(t) \simeq \frac{1}{h\sigma(1)} \sum_{k=0}^r \alpha_k x(t + kh)$$

y

$$f(t, x(t)) \simeq \frac{1}{\sigma(1)} \left(\beta_r f(t + rh, x^*(t + rh)) + \sum_{k=0}^{r-1} \beta_k f(t + kh, x(t + kh)) \right),$$

donde

$$x^*(t + rh) = \frac{1}{\alpha_r^*} \sum_{k=0}^{r-1} (-\alpha_k^* x(t + kh) + h\beta_k^* f(t + kh, x(t + kh))). \quad (4.7)$$

Definición 4.4

a) Para todo $t \in [t_0, T)$ se tiene que

$$\frac{1}{h\sigma(1)} \sum_{k=0}^r \alpha_k x(t + kh) = \frac{1}{\sigma(1)} \left(\beta_r f(t + rh, x^*(t + rh)) + \sum_{k=0}^{r-1} \beta_k f(t + kh, x(t + kh)) \right) + \tau^{P(EC)E}(t, h), \quad (4.8)$$

siendo $\tau^{P(EC)E}(t, h)$ el error local de truncamiento del método de predicción–corrección $P(EC)E$, con paso h , asociado a la solución $x(t)$ de la ecuación (4.5) a partir del instante t , para todo $h \in (0, \frac{T-t}{r}]$.

b) El error local de truncamiento del método de predicción–corrección $P(EC)E$ asociado a una solución $x(t)$ de la ecuación diferencial (4.5) es

$$\bar{\tau}^{P(EC)E}(h) = \max_{t \in [t_0, T-rh]} \left| \tau^{P(EC)E}(t, h) \right|.$$

c) Las definiciones de consistencia y orden de precisión de un método de predicción–corrección $P(EC)E$ se hacen de forma análoga a las de la Definición 3.8. $\square$

Observación 4.5 La función $\tau^{P(EC)E}(t, h)$ está definida para todo $(t, h) \in \mathcal{U}$ (es decir, $\tau^{P(EC)E} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$), siendo $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto definido en (3.32) (véase la Figura 3.1), y la función $\bar{\tau}^{P(EC)E}(h)$ está definida para todo $h \in (0, \frac{T-t_0}{r}]$ (es decir, $\bar{\tau}^{P(EC)E} : (0, \frac{T-t_0}{r}] \rightarrow \mathbb{R}$). $\square$

El orden del método de predicción–corrección $P(EC)E$ puede determinarse a partir de los órdenes de los métodos explícito e implícito que lo determinan. Concretamente,

Teorema 4.6 Sean $p, p^* \in \mathbb{N}$, $q = \max\{p, p^*\}$ y $f \in C^q([t_0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y lipschitziana en la segunda variable. Si el método predictor es un (ϱ^*, σ^*) –Método explícito con $\sigma^*(1) \neq 0$ y con orden de precisión p^* y el método corrector es un (ϱ, σ) –Método implícito con $\sigma(1) \neq 0$ y con orden de precisión p , entonces el orden de precisión del método de predicción–corrección $P(EC)E$ dado en (4.6) es

$$\hat{p} = \min\{p, p^* + 1\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $x(t)$ una solución arbitraria de la ecuación diferencial (4.5) y $t \in [t_0, T]$. Como hemos comentado anteriormente podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que tanto el método predictor como el corrector son métodos multipaso del mismo número de pasos r . De esta forma, los errores locales de truncamiento de los métodos de predicción y corrección son, respectivamente,

$$\begin{aligned}\tau^*(t, h) &= \frac{1}{h\sigma^*(1)} \sum_{k=0}^r (\alpha_k^* x(t+kh) - h\beta_k^* f(t+kh, x(t+kh))) \\ &= \frac{1}{h\sigma^*(1)} \left(\alpha_r^* x(t+rh) + \sum_{k=0}^{r-1} (\alpha_k^* x(t+kh) - h\beta_k^* f(t+kh, x(t+kh))) \right)\end{aligned}$$

(pues $\beta_r^* = 0$) y

$$\tau(t, h) = \frac{1}{h\sigma(1)} \sum_{k=0}^r (\alpha_k x(t+kh) - h\beta_k f(t+kh, x(t+kh))),$$

(véase la Definición 3.7). Además, por hipótesis, $\overline{\tau^*}(h) = O(h^{p^*})$ y $\overline{\tau}(h) = O(h^p)$. Sumando y restando la cantidad

$$\frac{\beta_r}{\sigma(1)} f(t+rh, x(t+rh))$$

en (4.8), podemos expresar $\tau^{P(EC)E}(t, h)$ como

$$\begin{aligned}\tau^{P(EC)E}(t, h) &= \frac{1}{h\sigma(1)} \left(\alpha_r x(t+rh) - h\beta_r f(t+rh, x(t+rh)) + \sum_{k=0}^{r-1} (\alpha_k x(t+kh) - h\beta_k f(t+kh, x(t+kh))) \right) \\ &\quad + \frac{\beta_r}{\sigma(1)} (f(t+rh, x(t+rh)) - f(t+rh, x^*(t+rh))) \\ &= \frac{1}{h\sigma(1)} \sum_{k=0}^r (\alpha_k x(t+kh) - h\beta_k f(t+kh, x(t+kh))) \\ &\quad + \frac{\beta_r}{\sigma(1)} (f(t+rh, x(t+rh)) - f(t+rh, x^*(t+rh))) \\ &= \tau(t, h) + \frac{\beta_r}{\sigma(1)} (f(t+rh, x(t+rh)) - f(t+rh, x^*(t+rh))).\end{aligned}$$

Luego si $L > 0$ es una constante de Lipschitz de la función f con respecto a su segunda variable, se tiene que

$$\left\| \tau^{P(EC)E}(t, h) \right\| \leq \left\| \tau(t, h) \right\| + \frac{|\beta_r|L}{|\sigma(1)|} \|x(t+rh) - x^*(t+rh)\|. \quad (4.9)$$

De esta forma, puesto que a partir de (4.7) se tiene que

$$\begin{aligned}x(t+rh) - x^*(t+rh) &= x(t+rh) + \frac{1}{\alpha_r^*} \sum_{k=0}^{r-1} (\alpha_k^* x(t+kh) - h\beta_k^* f(t+kh, x(t+kh))) \\ &= \frac{\sigma^*(1)}{\alpha_r^*} h\tau^*(t, h),\end{aligned} \quad (4.10)$$

sustituyendo (4.10) en (4.9), se concluye que

$$\left\| \tau^{P(EC)E}(t, h) \right\| \leq \left\| \tau(t, h) \right\| + \frac{|\beta_r|}{|\alpha_r^*|} \frac{|\sigma^*(1)|}{|\sigma(1)|} Lh \left\| \tau^*(t, h) \right\|. \quad (4.11)$$

De esta forma, puesto que por hipótesis $\overline{\tau^*}(h) = O(h^{p^*})$ y $\overline{\tau}(h) = O(h^p)$, a partir de (4.11) se verifica que

$$\overline{\tau}^{P(EC)E}(h) \leq \overline{\tau}(h) + \frac{|\beta_r|}{|\alpha_r^*|} \frac{|\sigma^*(1)|}{|\sigma(1)|} Lh \overline{\tau^*}(h) = O(h^p) + O(h^{p^*+1}) = O\left(h^{\min\{p, p^*+1\}}\right). \quad \square$$

Observación 4.7

a) Nótese que $\beta_r \neq 0$ (por ser el método corrector implícito), $\alpha_r^* \neq 0$, $\sigma(1) \neq 0$ y $\sigma^*(1) \neq 0$, por lo que el segundo sumando de la expresión (4.11) es siempre no nulo.

- b) Como se ha visto en el Teorema 4.6, el orden del método de predicción–corrección $P(EC)E$ dado en (4.6) es $\hat{p} = \min\{p, p^* + 1\}$. Por ello, en la práctica, suelen tomarse métodos predictores de orden $p^* = p - 1$ para que el método de predicción–corrección tenga el mismo orden de precisión p que el método corrector. Además, el método de predicción–corrección tiene la ventaja, sobre el método corrector, de no ser un método implícito.
- c) En general, puede demostrarse que el orden de precisión del método de predicción–corrección $P(EC)^m E$ es

$$\hat{p} = \min\{p, p^* + m\}.$$

De ahí que, en la práctica, no se consideren valores de $m > 1$. $\square$

Ejemplo 4.8 Si consideramos como método predictor el Método de Adams–Bashforth de 3 pasos (el cual verifica que $\sigma^*(1) = 1$ y tiene, como se vio en el Problema 3.1, orden de precisión $p^* = 3$) y como método corrector el Método de Adams–Moulton de 3 pasos (el cual verifica que $\sigma(1) = 1$ y tiene, como también se vio en el Problema 3.1, orden de precisión $p = 4$), por el Teorema 4.6 se tiene que el orden del método de predicción–corrección resultante es $\hat{p} = 4$. $\square$