

5 Estabilidad absoluta y problemas rígidos

5.1 Introducción

Hasta ahora se han tratado propiedades de estabilidad y precisión para métodos numéricos (ya sean monopaso o multipaso) cuando se consideraban problemas de valor inicial en los que la ecuación diferencial estaba planteada en un intervalo de longitud finita $[t_0, T]$ y se hacía tender $h \rightarrow 0$ (o, equivalentemente, $N \rightarrow +\infty$) pero manteniéndose constante el producto $Nh = T - t_0$. En este capítulo vamos a estudiar el comportamiento de los errores de un método cuando, fijado un paso de tiempo $h > 0$, se considera la red de puntos $t_i = t_0 + ih$ para $i = 0, 1, 2, \dots$ y se hace tender $i \rightarrow +\infty$ (sin pérdida de generalidad, tomaremos el caso $t_0 = 0$, por comodidad). La cuestión que se plantea es ver si estos errores crecen o se amortiguan (*damping*, en inglés), lo que da lugar al concepto de *estabilidad absoluta*. En la segunda parte del capítulo se presentan los denominados *problemas rígidos* (*stiff problems*, en inglés) en los cuales se debe reducir considerablemente el tamaño del paso $h > 0$ en algunos de los métodos numéricos que se consideren para su resolución en aras de la estabilidad absoluta.

5.2 Introducción a la estabilidad absoluta

Supongamos que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \geq 0 \\ x(0) = \xi_0, \end{cases} \quad (5.1)$$

donde $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, tiene una única solución. Fijado $h > 0$, consideramos una red de puntos $t_i = ih$ para $i = 0, 1, 2, \dots$ y aproximamos la solución $x(t)$ del problema (5.1) mediante un (ϱ, σ) -Método de r pasos convergente de la forma

$$\begin{cases} x_0, x_1, \dots, x_{r-1} \text{ dados} \\ \sum_{k=0}^r \alpha_k x_{i+k} = h \sum_{k=0}^r \beta_k f(t_{i+k}, x_{i+k}), & i = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.2)$$

Puesto que el error local de truncamiento τ asociado a la solución x verifica la relación

$$\sum_{k=0}^r \alpha_k x(t_{i+k}) = h \sum_{k=0}^r \beta_k f(t_{i+k}, x(t_{i+k})) + h\sigma(1)\tau(t_i, h)$$

para $i = 0, 1, 2, \dots$ (véase la Definición 3.7), se tiene que

$$\sum_{k=0}^r \alpha_k \varepsilon_{i+k}(h) = h \sum_{k=0}^r \beta_k (f(t_{i+k}, x(t_{i+k})) - f(t_{i+k}, x_{i+k})) + h\sigma(1)\tau(t_i, h),$$

siendo $\varepsilon_i(h) = x(t_i) - x_i$ el error global de discretización en el nodo t_i para $i = 0, 1, 2, \dots$. Suponiendo que el problema (5.1) es unidimensional ($n = 1$) y que la función f es derivable en su segunda componente, por el *teorema del Valor Medio* se obtiene que

$$\sum_{k=0}^r \alpha_k \varepsilon_{i+k}(h) = h \sum_{k=0}^r \beta_k \frac{\partial f}{\partial \xi}(t_{i+k}, \zeta_{i+k}) \varepsilon_{i+k}(h) + h\sigma(1)\tau(t_i, h), \quad (5.3)$$

donde ζ_{i+k} es un punto intermedio entre $x(t_{i+k})$ y x_{i+k} . Si, además, la función f es lineal en su segunda variable (lo que nos generará el estudio de la estabilidad absoluta lineal), es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(t, \xi) = \lambda,$$

entonces el sistema (5.3) se reduce a la ecuación en diferencias lineal no homogénea

$$\sum_{k=0}^r (\alpha_k - \lambda h \beta_k) \varepsilon_{i+k}(h) = h\sigma(1)\tau(t_i, h),$$

cuyas soluciones vienen determinadas por los r primeros términos $\{\varepsilon_0(h), \varepsilon_1(h), \dots, \varepsilon_{r-1}(h)\}$ y se pueden escribir (compruébese) como

$$\varepsilon_i(h) = x_i^{(I)}(h) + x_i^{(II)}(h),$$

siendo $x_i^{(I)}(h)$ la solución de la ecuación en diferencias no homogénea

$$\begin{cases} x_0^{(I)}(h) = x_1^{(I)}(h) = \dots = x_{r-1}^{(I)}(h) = 0 \\ \sum_{k=0}^r (\alpha_k - \lambda h \beta_k) x_{i+k}^{(I)}(h) = h\sigma(1)\tau(t_i, h), \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

y $x_i^{(II)}(h)$ la solución de la ecuación en diferencias homogénea

$$\begin{cases} x_0^{(II)}(h) = \varepsilon_0(h), \quad x_1^{(II)}(h) = \varepsilon_1(h), \dots, x_{r-1}^{(II)}(h) = \varepsilon_{r-1}(h) \\ \sum_{k=0}^r (\alpha_k - \lambda h \beta_k) x_{i+k}^{(II)}(h) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Claramente, la solución $\{x_i^{(II)}(h)\}_{i=0}^{\infty}$ determina, para h fijo, la amplificación (o amortiguamiento) de los r primeros errores $\{\varepsilon_0(h), \varepsilon_1(h), \dots, \varepsilon_{r-1}(h)\}$ y aproxima, por ejemplo, la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t), \quad t \geq 0 \\ x(0) = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} \varepsilon_i(h), \end{cases} \quad (5.4)$$

cuyo dato inicial es un promedio de los r errores iniciales. La solución

$$x(t) = x(0)e^{\lambda t}, \quad t \geq 0$$

del problema (5.4) nos indica lo que se puede esperar del comportamiento asintótico del error cuando $i \rightarrow +\infty$. En el caso de que $\lambda < 0$, los posibles errores iniciales se deberían ir amortiguando a medida que pasa el tiempo, es decir, cuando $i \rightarrow +\infty$. Nuestro objetivo es estudiar si, fijado un paso $h > 0$, este comportamiento es verificado por la solución discreta $x_i^{(II)}(h)$ cuando $i \rightarrow +\infty$. Como veremos en las siguientes secciones, esto dependerá del método utilizado y del tamaño del paso h elegido.

5.3 Estabilidad absoluta lineal

Para poder explicar mejor los conceptos que vamos a introducir en este capítulo, consideramos el siguiente problema de valor inicial escalar del tipo

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t), \quad t \geq 0 \\ x(0) = \xi_0, \end{cases} \quad (5.5)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\xi_0 \neq 0$. Es claro que la solución del problema (5.5) es $x(t) = \xi_0 e^{\lambda t}$ y, por tanto, en el caso de que $\lambda < 0$, se verifica que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0. \quad (5.6)$$

Vamos a aproximar numéricamente la solución del problema (5.5) mediante los métodos numéricos considerados en los capítulos anteriores (ya sean monopaso o multipaso) y analizar si la solución aproximada también verifica la propiedad (5.6) (nótese que ahora no se tiene un intervalo $[t_0, T]$ acotado de antemano). Así, por ejemplo, al aplicar el Método de Euler, se verifica que

$$x_{i+1} = (1 + \lambda h)x_i = R(\tilde{h})x_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

donde $\tilde{h} = \lambda h$ y

$$R(z) = 1 + z$$

es la *función de estabilidad* (o *amplificación*) descrita en la Observación 2.22. Luego

$$x_i = \left(R(\tilde{h})\right)^i x_0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

y, por tanto,

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} x_i = 0 \Leftrightarrow |R(\tilde{h})| < 1 \Leftrightarrow |1 + \tilde{h}| < 1 \Leftrightarrow \tilde{h} \in (-2, 0). \quad (5.8)$$

Los comentarios anteriores motivan la siguiente noción:

Definición 5.1

- a) Un método numérico es *absolutamente estable* para un valor $\tilde{h} \in \mathbb{R}$, si dados $\lambda \in \mathbb{R}$ y $h > 0$ tales que $\tilde{h} = \lambda h$, la sucesión $\{x_i(\tilde{h})\}_{i=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ que se obtiene al aproximar el problema (5.5) con paso h verifica

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} x_i(\tilde{h}) = 0 \quad (5.9)$$

para cualquier dato inicial arbitrario.¹ En caso contrario se dice que el método numérico es *absolutamente inestable* para $\tilde{h}$.

- b) El *intervalo de estabilidad absoluta* de un método numérico es el mayor intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ en el que el método es absolutamente estable para todo $\tilde{h} \in (a, b)$.
- c) Si al aplicar un método monopaso particular al problema (5.5) se tiene la expresión (5.7), se dice que $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es su *función de estabilidad o amplificación*. $\square$

Observación 5.2 Nótese que si $\lambda < 0$ y $\tilde{h} = \lambda h$ está en el intervalo de estabilidad absoluta, la solución numérica tiene el mismo comportamiento asintótico que la solución exacta del problema (5.5), es decir, verifica (5.9). Como veremos más adelante, hay casos (como el Método de Euler implícito) con valores $\tilde{h} > 0$ que no están en el intervalo de estabilidad absoluta y, por tanto, su solución no tiene el mismo comportamiento asintótico que la solución exacta $x(t)$ del problema (5.5), ya que $|x(t)| \rightarrow +\infty$ cuando $t \rightarrow +\infty$; no obstante, en el Método de Euler Implícito, si fijado $\lambda > 0$ se reduce suficientemente el valor de h , también se tiene el comportamiento asintótico que la solución exacta del correspondiente problema (5.5). $\square$

Ejemplo 5.3 A la vista de (5.8), el intervalo de estabilidad absoluta del Método de Euler (explícito) es $(-2, 0)$. Nótese que:

$$\tilde{h} \in (-2, 0) \Leftrightarrow 0 < h < -\frac{2}{\lambda}$$

(véase la Figura 5.1). $\square$

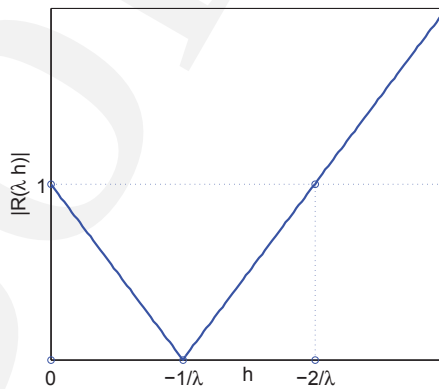


Figura 5.1: Función $h \mapsto |R(\lambda h)| = |1 + \lambda h|$ en el Método de Euler.

Consideremos a continuación el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), & t \geq 0 \\ x(0) = \xi_0, \end{cases} \quad (5.10)$$

¹Nótese que se está denotando $x_i = x_i(\tilde{h})$ para explicitar la dependencia de x_i del valor $\tilde{h}$.

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y $\xi_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, cuya solución exacta es

$$x(t) = e^{At} \xi_0$$

para $t \geq 0$. Puesto que el polinomio característico de la matriz A es

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

el espectro de A está formado por los autovalores $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$. Además, A puede factorizarse en la forma $P^{-1}AP = D$, siendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(compruébese). De esta forma,

$$e^{At} = e^{PDP^{-1}t} = Pe^{Dt}P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1},$$

lo que determina que la solución de (5.10) tome la forma

$$x(t) = e^{At} \xi_0 = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1} \xi_0 = e^{\lambda_1 t} u_1 + e^{\lambda_2 t} u_2$$

para ciertos vectores $u_1 = u_1(\xi_0)$ y $u_2 = u_2(\xi_0)$. Mediante el cambio de variable $y = P^{-1}x$, se obtiene el sistema

$$y'(t) = Dy(t), \quad t \geq 0$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t). \end{cases} \quad (5.11)$$

De forma más general, si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

se tiene que los autovalores de A son $\lambda_1 = a + bi \in \mathbb{C}$ y $\lambda_2 = a - bi \in \mathbb{C}$ y el problema también se puede reducir a un sistema del tipo (5.11). Estamos pues, ante problemas de valor inicial escalares del tipo (5.5). No obstante, debemos resaltar una notable diferencia: mientras que en el ejemplo (5.5) el escalar λ era un número real ahora los escalares λ_j del problema (5.10) son los autovalores de la matriz A , pudiendo ser, como en este caso, números complejos. De esta forma, ahora el parámetro $\tilde{h} = \lambda h$ puede ser, cuando $\lambda \in \text{sp}(A)$, un número complejo. Esto nos lleva a considerar, en lo sucesivo, el siguiente problema de valor inicial escalar

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t), \quad t \geq 0 \\ x(0) = \xi_0, \end{cases} \quad (5.12)$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\xi_0 \neq 0$. Es claro que la solución del problema (5.12) es

$$x(t) = e^{\lambda t} \xi_0 = e^{(\text{Re}(\lambda) + i\text{Im}(\lambda))t} \xi_0 = e^{\text{Re}(\lambda)t} e^{i\text{Im}(\lambda)t} \xi_0$$

y, puesto que $|e^{i\text{Im}(\lambda)t}| = 1$, en el caso de que $\text{Re}(\lambda) < 0$, se verifica que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = |\xi_0| \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\text{Re}(\lambda)t} = 0,$$

por lo que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0. \quad (5.13)$$

De esta forma, generalizamos la Definición 5.1 de la siguiente forma:

Definición 5.4

- a) Un método numérico es *absolutamente estable* para un valor $\tilde{h} \in \mathbb{C}$, si dados $\lambda \in \mathbb{C}$ y $h > 0$ tales que $\tilde{h} = \lambda h$, la sucesión $\{x_i(\tilde{h})\}_{i=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ que se obtiene al aproximar el problema (5.12) con paso h verifica

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} x_i(\tilde{h}) = 0 \quad (5.14)$$

para cualquier dato inicial arbitrario. En caso contrario se dice que el método numérico es *absolutamente inestable* para $\tilde{h}$.

- b) La *región de estabilidad absoluta* de un método numérico es la mayor región $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$ en la que el método es absolutamente estable para todo $\tilde{h} \in \mathcal{R}$.
- c) Si al aplicar un método monopaso particular al problema (5.12) se tiene la expresión (5.7), se dice que $R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es su *función de estabilidad o amplificación*. $\square$

Observación 5.5

- a) Nótese que el conjunto de números de la región de estabilidad absoluta cuya parte real es negativa es el conjunto de los valores $\tilde{h} = \lambda h \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}(\lambda) < 0$ para los cuales la solución numérica tiene el mismo comportamiento asintótico que la solución exacta.
- b) Obviamente, el intervalo de estabilidad absoluta (a, b) de un método numérico es un subconjunto de la región de estabilidad absoluta $\mathcal{R}$ de dicho método. Concretamente, $(a, b) = \mathcal{R} \cap \mathbb{R}$.
- c) Existen métodos, como el Método del Punto Medio, cuya región de estabilidad absoluta es $\mathcal{R} = \emptyset$ (véase la Hoja 5 de problemas). $\square$

Ejemplo 5.6 (Método de Euler explícito) Consideremos el problema (5.12) con $\lambda \in \mathbb{C}$. Al aplicar el Método de Euler, se tiene que

$$x_{i+1} = (1 + \lambda h)x_i = R(\tilde{h})x_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

donde $\tilde{h} = \lambda h$ y

$$R(z) = 1 + z$$

es la *función de estabilidad* (o *amplificación*) descrita en la Observación 2.22. Luego

$$x_i = \left(R(\tilde{h})\right)^i x_0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

y, por tanto,

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} x_i = 0 \Leftrightarrow |1 + \tilde{h}| < 1 \Leftrightarrow |\tilde{h} - (-1)| < 1 \Leftrightarrow \tilde{h} \in \mathcal{R} = \mathbf{B}_1(-1, 0) \quad (5.15)$$

donde, en general, $\mathbf{B}_r(x_0, y_0)$ denota la bola en $\mathbb{R}^2$ de centro $(x_0, y_0)^T \in \mathbb{R}^2$ y radio $r > 0$ (véase la Figura 5.2). $\square$

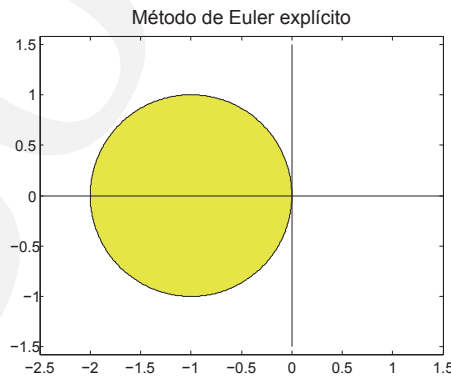


Figura 5.2: Región de estabilidad absoluta en el Método de Euler explícito.

Al aplicar el (ϱ, σ) -Método de r pasos (5.2) a la resolución del problema (5.12) se obtiene la ecuación en diferencias

$$\sum_{k=0}^r (\alpha_k - \lambda h \beta_k) x_{i+k} = 0 \quad (5.16)$$

para $i = 0, 1, 2, \dots$. Puesto que (5.16) es una ecuación en diferencias lineal, homogénea y de coeficientes constantes, la solución general de la misma se obtiene a partir de las raíces de su polinomio característico

$$\pi(z, \tilde{h}) = \sum_{k=0}^r (\alpha_k - \tilde{h}\beta_k) z^k = \varrho(z) - \tilde{h}\sigma(z). \quad (5.17)$$

Definición 5.7 El polinomio (5.17) se denomina *polinomio de estabilidad* del (ϱ, σ) -Método (5.2). $\square$

El Lema 3.21 puede generalizarse de la siguiente forma:

Proposición 5.8 Consideremos la ecuación en diferencias lineal homogénea (3.44).

- a) Si $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es raíz del polinomio $\varrho(z)$ con multiplicidad $m \in \mathbb{N}$ (es decir, $\varrho(\mu) = \varrho'(\mu) = \dots = \varrho^{(m-1)}(\mu) = 0$), se verifica que $\{\mu^i\}_{i=0}^\infty, \{i\mu^i\}_{i=0}^\infty, \dots, \{i^{m-1}\mu^i\}_{i=0}^\infty$ son m soluciones linealmente independientes de (3.44).
- b) Además, si $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, con $q \in \mathbb{N}$, son las q raíces no nulas y distintas de $\varrho(z)$, siendo m_j la multiplicidad de μ_j , se verifica que

$$\begin{aligned} & \{\mu_1^i\}_{i=0}^\infty, \{i\mu_1^i\}_{i=0}^\infty, \dots, \{i^{m_1-1}\mu_1^i\}_{i=0}^\infty \\ & \{\mu_2^i\}_{i=0}^\infty, \{i\mu_2^i\}_{i=0}^\infty, \dots, \{i^{m_2-1}\mu_2^i\}_{i=0}^\infty \\ & \dots \\ & \{\mu_q^i\}_{i=0}^\infty, \{i\mu_q^i\}_{i=0}^\infty, \dots, \{i^{m_q-1}\mu_q^i\}_{i=0}^\infty \end{aligned}$$

son $m = m_1 + m_2 + \dots + m_q$ soluciones linealmente independientes de (3.44) y constituyen una base del espacio vectorial de sus soluciones. De esta forma, la solución general de (3.44) es

$$x_i = \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{m_j-1} c_{jk} i^k \mu_j^i,$$

para $i = 0, 1, 2, \dots$ con $c_{jk} \in \mathbb{C}$ arbitrarios.

DEMOSTRACIÓN. Véase la Sección 11.4 de [Quarteroni–Sacco–Saleri]. $\square$

La Proposición 5.8 permite establecer la siguiente caracterización:

Teorema 5.9 El (ϱ, σ) -Método (3.23) es absolutamente estable para $\tilde{h} \in \mathbb{C}$ si, y sólo si, las r raíces $\{s_1(\tilde{h}), s_2(\tilde{h}), \dots, s_r(\tilde{h})\}$ del polinomio de estabilidad $\pi(z, \tilde{h})$ dado en (5.17) tienen módulo estrictamente menor que 1. $\square$

Corolario 5.10 La región de estabilidad absoluta del (ϱ, σ) -Método (3.23) viene dada por

$$\mathcal{R} = \{\tilde{h} \in \mathbb{C} : |s_j(\tilde{h})| < 1 \text{ para } j = 1, 2, \dots, r\}. \quad \square$$

Ejemplo 5.11 (Método de Adams–Bashforth de 2 pasos) Puesto que $\varrho(z) = z^2 - z$ y $\sigma(z) = \frac{1}{2}(3z - 1)$, su polinomio de estabilidad viene dado por

$$\pi(z, \tilde{h}) = \varrho(z) - \tilde{h}\sigma(z) = z^2 - z - \frac{\tilde{h}}{2}(3z - 1) = \frac{1}{2}(2z^2 - (2 + 3\tilde{h})z + \tilde{h}),$$

que tiene por raíces

$$s_1(\tilde{h}) = \frac{2 + 3\tilde{h} - \sqrt{(2 + 3\tilde{h})^2 - 8\tilde{h}}}{4} \quad \text{y} \quad s_2(\tilde{h}) = \frac{2 + 3\tilde{h} + \sqrt{(2 + 3\tilde{h})^2 - 8\tilde{h}}}{4}.$$

Por el Corolario 5.10, la región de estabilidad del Método de Adams–Bashforth de 2 pasos viene dada por el conjunto

$$\mathcal{R} = \{\tilde{h} \in \mathbb{C} : |s_j(\tilde{h})| < 1 \text{ para } j = 1, 2\}.$$

La determinación precisa del conjunto anterior no es una tarea inmediata. En la Figura 5.3 se muestra la forma que tiene esta región de estabilidad. $\square$

La región de estabilidad absoluta $\mathcal{R}$ es el conjunto de los valores $\tilde{h} = \lambda h$ para los cuales la solución numérica tiende a cero. Puesto que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{C} \text{ con } \operatorname{Re}(\lambda) < 0,$$

cuanto mayor sea la parte de $\mathbb{C}^-$ contenida en $\mathcal{R}$, menores restricciones habrá que hacer sobre el paso h con el fin de evitar posibles inestabilidades. Esto motiva la siguiente noción:

Definición 5.12 (Dahlquist) El (ϱ, σ) -Método (3.23) es A -estable si su región de estabilidad absoluta $\mathcal{R}$ contiene el semiplano complejo

$$\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}. \quad \square$$

Ejercicio 5.13 Demostrar que el Método de Euler implícito es A -estable. $\square$

Los siguientes resultados muestran que la Definición 5.12 es bastante restrictiva.

Teorema 5.14 La región de estabilidad de un método multipaso lineal explícito está acotada.

DEMOSTRACIÓN. Ver hoja de problemas. $\square$

Corolario 5.15 No existen métodos multipaso lineales explícitos que sean A -estables. $\square$

Teorema 5.16 (Segunda barrera de Dahlquist) El orden de precisión de un método multipaso lineal (implícito) A -estable es menor o igual que 2.

Además, se verifica el siguiente resultado:

Teorema 5.17 (Dahlquist) El Método del Trapecio es el método multipaso lineal implícito de orden de precisión 2 que es A -estable y tiene la constante de error más pequeña. $\square$

En la Figura 5.3 se muestran los dominios de estabilidad de los primeros Métodos de Adams–Bashforth y Adams–Moulton. Como se aprecia, cuando el número de pasos es mayor ó igual que 2, las regiones de estabilidad absoluta en los métodos de Adams son relativamente pequeñas. Además, para el mismo número de pasos, son bastante más grandes las correspondientes a los métodos implícitos (Adams–Moulton) que las de los métodos explícitos (Adams–Bashforth).

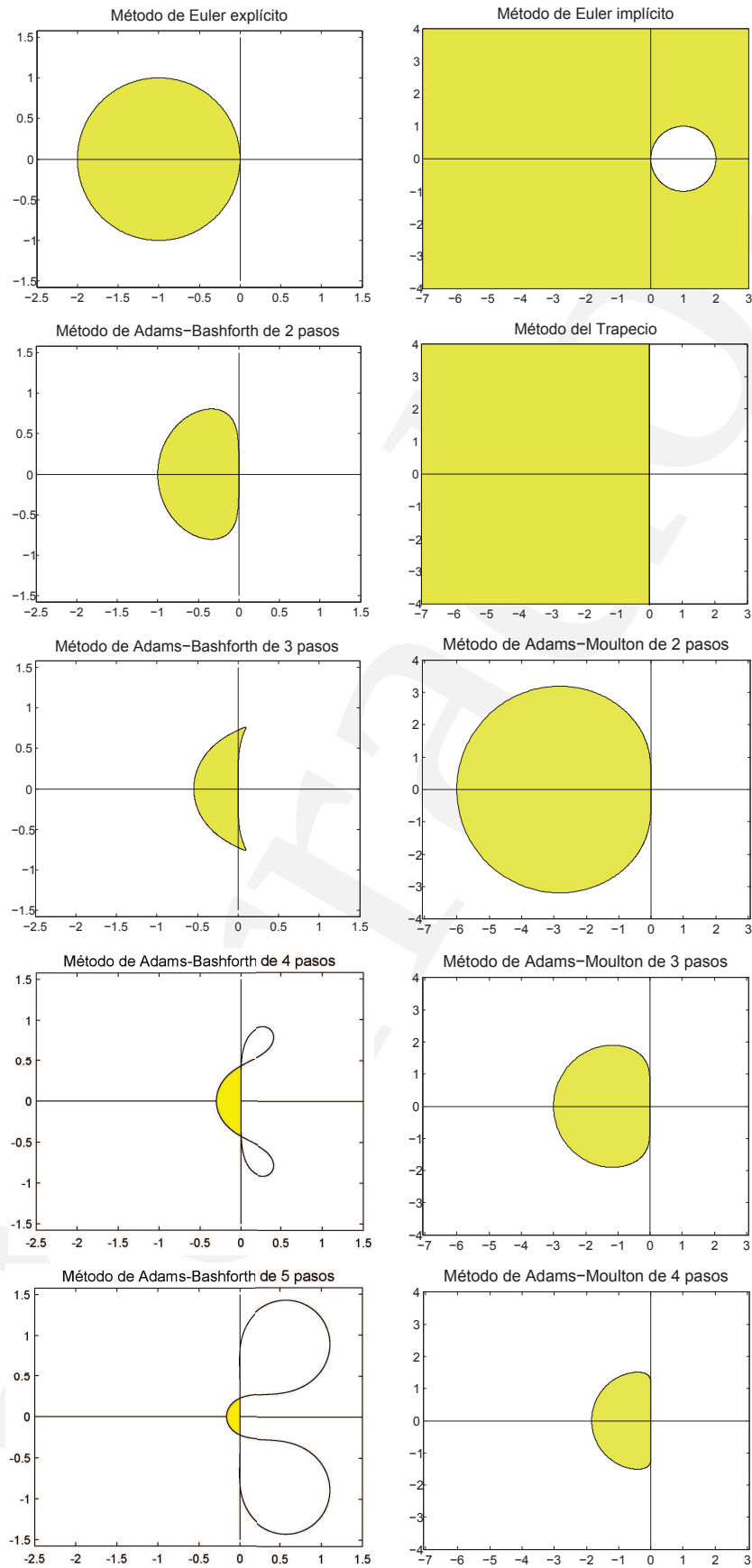


Figura 5.3: Regiones de estabilidad absoluta de los Métodos de Adams-Bashforth (izquierda) y Adams-Moulton (derecha).

5.4 Problemas rígidos

De una manera poco precisa, y como primera idea de este concepto (más adelante, en la Definición 5.23, se precisará algo más este concepto) un *problema rígido* (*stiff problem*, en inglés) es aquel que tiene, al menos, dos escalas de tiempo muy distintas de forma que en un pequeño periodo de tiempo hay una variación de la solución muy brusca con respecto al resto, donde la variación es más suave. Además, el efecto de la escala rápida sobre la solución global, fuera del pequeño periodo mencionado es despreciable, por lo que no es indispensable su aproximación numérica de una manera precisa. Este tipo de problemas aparecen en fenómenos de combustión, cinética química, modelos biológicos,...

Ilustremos la idea anterior a través de un ejemplo en dimensión 1.

Ejemplo 5.18 Consideremos el problema escalar de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = -\mu(x(t) - 1), & t \geq 0 \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (5.18)$$

con $\mu > 0$, cuya solución exacta es

$$x(t) = 1 - e^{-\mu t}$$

(compruébese). Transcurrido un periodo de tiempo $\hat{t} > 0$, para μ suficientemente grande se verifica que

$$x(t) \simeq 1$$

para $t \geq \hat{t}$. Por ejemplo, si $\mu = 40$, se verifica la propiedad anterior con $\hat{t} \simeq 0.15$ (véase la Figura 5.4).

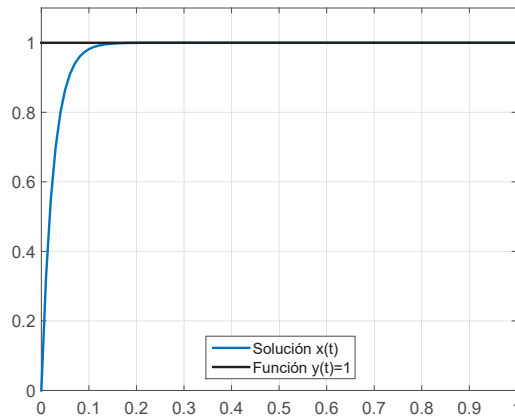


Figura 5.4: Solución $x(t)$ del problema de valor inicial (5.18) con $\mu = 40$ en el intervalo $[0, 1]$.

Veamos qué ocurre si aplicamos el Método de Euler (explícito) al problema (5.18). Tomando como paso $h > 0$, consideramos los nodos $t_i = ih$ para $i = 0, 1, 2, \dots$. El Método de Euler determina la secuencia

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{i+1} = x_i - \mu h(x_i - 1) = (1 - \mu h)x_i + \mu h, & i = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

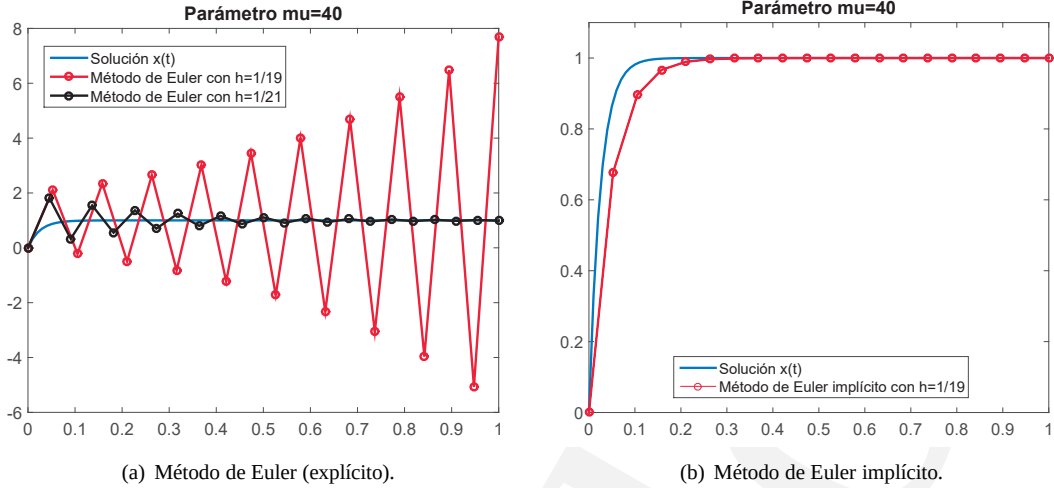
Como se ha visto en (5.15), la región de estabilidad del Método de Euler explícito es $\mathcal{R} = \mathbf{B}_1(-1, 0)$. De esta forma, puesto que $\frac{\partial f}{\partial \xi} = -\mu$, siguiendo los comentarios de la Sección 5.2, para que los errores no crezcan debe verificarse que

$$-\mu h \in \mathcal{R} \Leftrightarrow |1 - \mu h| < 1 \Leftrightarrow -2 < -\mu h < 0 \Leftrightarrow 0 < h < \frac{2}{\mu}.$$

Por ejemplo, si $\mu = 40$, se necesita tomar $h < \frac{1}{20}$. En la Figura 5.5(a) se muestra el resultado de aplicar el Método de Euler (explícito) a la resolución del problema (5.18) cuando se toman pasos $h = \frac{1}{19}$ y $h = \frac{1}{21}$.

Veamos qué ocurre ahora si aplicamos el Método de Euler implícito al problema (5.18).

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{i+1} = x_i - \mu h(x_{i+1} - 1), & i = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

Figura 5.5: Problema de valor inicial (5.18) con $\mu = 40$.

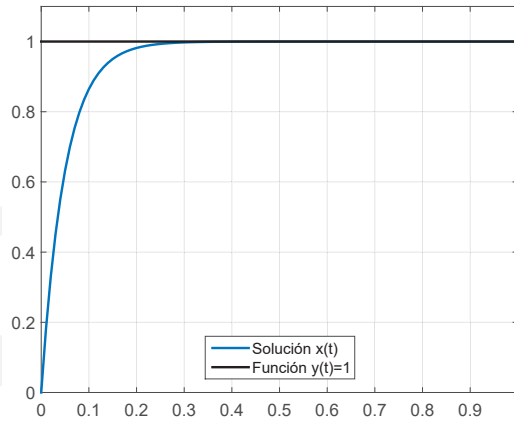
es decir,

$$x_{i+1} = \frac{x_i + \mu h}{1 + \mu h}$$

para $i = 0, 1, 2, \dots$. Como la región de estabilidad del Método de Euler implícito es $\mathcal{R} = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbf{B}}_1(1, 0)$. De esta forma, puesto que $\frac{\partial f}{\partial \xi} = -\mu$, siguiendo los comentarios de la Sección 5.2, para que los errores no crezcan debe verificarse que

$$-\mu h \in \mathcal{R} \Leftrightarrow |1 + \mu h| > 1,$$

propiedad que verifican todos los pasos $h > 0$. Por tanto, en este caso, no hay restricciones sobre $h > 0$. En la Figura 5.5(b), se muestra el resultado de aplicar el Método de Euler implícito a la resolución del problema (5.18) cuando se toman $\mu = 40$ y $h = \frac{1}{19}$.

Figura 5.6: Solución $x(t)$ del problema de valor inicial (5.18) con $\mu = 20$ en el intervalo $[0, 1]$.

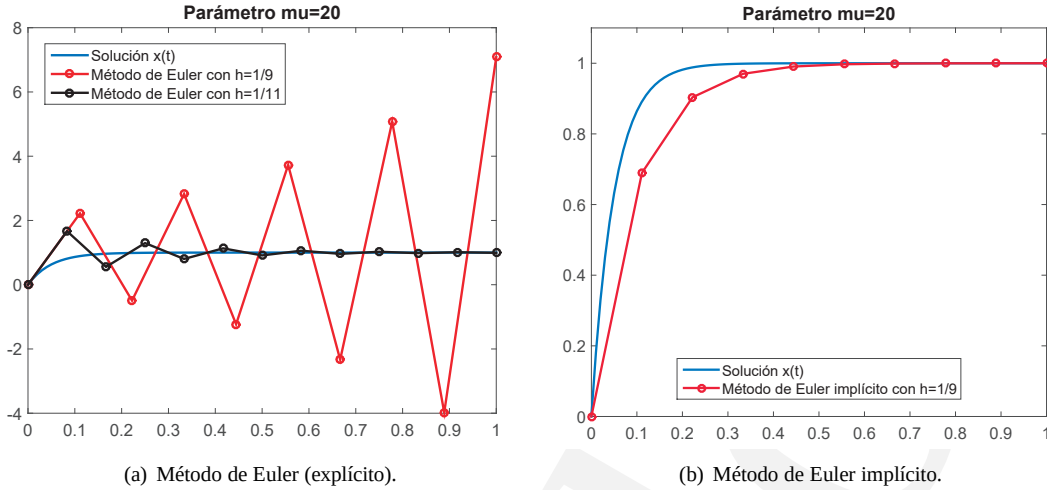
Para el caso en que $\mu = 20$, como se aprecia en la Figura 5.6, transcurrido un periodo de tiempo $\hat{t} \simeq 0.3$ se verifica que

$$x(t) \simeq 1$$

para $t \geq \hat{t}$. De esta forma, al aplicar el Método de Euler (explícito) se verifica que

$$-20h \in \mathcal{R} \Leftrightarrow 0 < h < \frac{1}{10},$$

por lo que se necesita tomar $h < \frac{1}{10}$. En la Figura 5.7(a) se muestra el resultado de aplicar el Método de Euler (explícito) a la resolución del problema (5.18) con $\mu = 20$, cuando se toman pasos $h = \frac{1}{9}$ y $h = \frac{1}{11}$. Por otra parte, tal y como se ha probado anteriormente, al aplicar el Método de Euler implícito no hay restricciones sobre el paso $h > 0$ a tomar (en la Figura 5.7(b) se muestra el resultado de aplicar este método cuando $h = \frac{1}{9}$).

Figura 5.7: Problema de valor inicial (5.18) con $\mu = 20$.

Como se puede observar, las soluciones exactas de los problemas anteriores son, transcurrida una fase inicial relativamente corta, muy parecidas a la función constante 1, que es “muy suave”, por lo que su aproximación numérica no debería requerir un elevado número de nodos temporales. Sin embargo, dependiendo del método elegido, puede ocurrir (por ejemplo, con el Método de Euler (explícito)) que cuanto más grande sea $-\frac{\partial f}{\partial \xi}$, más pequeño se deba escoger $h > 0$ para aproximar una solución que, tras un corto periodo de tiempo, se comporta como 1. $\square$

En el caso de un sistema lineal

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + b(t), & t \geq 0 \\ x(0) = \xi_0, \end{cases} \quad (5.19)$$

donde $A \in \mathcal{M}_n$ (es decir, A es una matriz cuadrada de orden n), $b(t) \in \mathbb{R}^n$ y $\xi_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, se denomina *coeficiente de rigidez* al número

$$c_{\text{rigidez}} = \frac{\max_{i=1,2,\dots,n} |\operatorname{Re}(\lambda_i(A))|}{\min_{i=1,2,\dots,n} |\operatorname{Re}(\lambda_i(A))|}$$

siendo $\operatorname{sp}(A) = \{\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots, \lambda_n(A)\}$. Obviamente, se verifica que $c_{\text{rigidez}} \geq 1$. De manera informal, se dice que el sistema (5.19) es *rígido* cuando su coeficiente de rigidez es “grande”.

Veamos un ejemplo cuando $A \in \mathcal{M}_2$ y $b \equiv 0$.

Ejemplo 5.19 Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), & t \geq 0 \\ x(0) = \xi_0 \end{cases} \quad (5.20)$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0'1 \end{pmatrix}.$$

Claramente, la solución del problema (5.20) es

$$x(t) = e^{At} \xi_0 \quad (5.21)$$

para $t \geq 0$. Como el espectro de A está formado por los autovalores $\lambda_1 = -100$ y $\lambda_2 = -0'1$, se tiene que

$$c_{\text{rigidez}} = \frac{100}{0'1} = 1000.$$

Además, la matriz A es diagonalizable, es decir, existe una matriz de paso $P \in \mathcal{M}_2$ no singular tal que $P^{-1}AP = D$, siendo

$$D = \begin{pmatrix} -100 & 0 \\ 0 & -0'1 \end{pmatrix}$$

la forma canónica de Jordan de la matriz A . Calculemos los autovectores asociados a los autovalores $\lambda_1 = -100$ y $\lambda_2 = -0'1$, que constituyen las columnas de la matriz P .

a) $(A - \lambda_1 I)v_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 99'9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = 0$. Luego $v_1 = (1, 0)^T$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = -100$.

b) $(A - \lambda_2 I)v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -99'9 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -99'9x + y = 0$. Luego $v_2 = (1, 99'9)^T$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda_2 = -0'1$.

Por tanto, las matrices P y P^{-1} vienen dadas por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 99'9 \end{pmatrix} \text{ y } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{10}{999} \\ 0 & \frac{10}{999} \end{pmatrix}$$

y, consecuentemente,

$$e^{At} = e^{PDP^{-1}t} = Pe^{Dt}P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{-100t} & 0 \\ 0 & e^{-0'1t} \end{pmatrix} P^{-1},$$

lo que determina que la solución (5.21) tome la forma

$$x(t) = e^{At}\xi_0 = P \begin{pmatrix} e^{-100t} & 0 \\ 0 & e^{-0'1t} \end{pmatrix} P^{-1}\xi_0$$

para $t \geq 0$. Consecuentemente, existen vectores $u_1 = u_1(\xi_0)$ y $u_2 = u_2(\xi_0)$ tales que

$$x(t) = e^{-100t}u_1 + e^{-0'1t}u_2$$

para $t \geq 0$. En concreto, como puede comprobarse fácilmente, si $\xi_0 = (\xi_0^1, \xi_0^2)^T$ se tiene que

$$u_1 = \begin{pmatrix} \xi_0^1 - \frac{10}{999}\xi_0^2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } u_2 = \begin{pmatrix} \frac{10}{999}\xi_0^2 \\ \xi_0^2 \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Claramente,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \quad (5.23)$$

y, puesto que la función e^{-100t} decae a cero mucho más rápidamente que $e^{-0'1t}$, en la expresión de $x(t)$ podemos despreciar el término $e^{-100t}u_1$, por lo que

$$x(t) \simeq e^{-0'1t}u_2$$

para valores $t > 0$ no muy próximos a 0.

El problema es equivalente, por tanto, a dos problemas desacoplados del tipo $x'(t) = \lambda x(t)$ estudiados en la Sección 5.3, con lo que, al aplicar un método numérico con un paso $h > 0$, es preciso que λh esté en su región de estabilidad para todo autovalor λ . Veamos, por ejemplo, qué ocurre si aplicamos el Método de Euler (explícito) al problema de valor inicial (5.20). Tomando $h > 0$ fijo, consideramos los nodos $t_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Puesto que

$$\begin{cases} x_0 \simeq \xi_0 \\ x_{i+1} = x_i + hAx_i = (I + hA)x_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

se verifica que

$$x_i = (I + hA)^i x_0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Es decir,

$$\begin{cases} x_1 = (I + hA)x_0 = (I + hPDP^{-1})x_0 = (PP^{-1} + hPDP^{-1})x_0 = P(I + hD)P^{-1}x_0, \\ x_2 = (I + hA)x_1 = (I + hPDP^{-1})P(I + hD)P^{-1}x_0 = P(I + hD)P^{-1}P(I + hD)P^{-1}x_0 = P(I + hD)^2P^{-1}x_0 \end{cases}$$

y, en general,

$$x_i = P(I + hD)^i P^{-1}x_0 = P \begin{pmatrix} (1 - 100h)^i & 0 \\ 0 & (1 - 0'1h)^i \end{pmatrix} P^{-1}x_0$$

para $i = 0, 1, 2, \dots$. Por tanto, se tiene que

$$x_i = (1 - 100h)^i \tilde{u}_1 + (1 - 0'1h)^i \tilde{u}_2$$

para $i = 0, 1, 2, \dots$. Nótese que $\tilde{u}_j \simeq u_j$ para $j = 1, 2$ si $x_0 \simeq \xi_0$ puesto que, al igual que en (5.22), se tiene que

$$\tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} x_0^1 - \frac{10}{999} x_0^2 \\ 0 \end{pmatrix} \simeq u_1 \text{ y } \tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{10}{999} x_0^2 \\ x_0^2 \end{pmatrix} \simeq u_2.$$

Como el paso $h > 0$ estaba fijo, en el supuesto de que $h > \frac{2}{100} = 0'02$ se verifica que $|1 - 100h| > 1$ y, por tanto,

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} x_i = +\infty,$$

lo que contrasta con el comportamiento de la solución exacta (véase (5.23)). Por tanto, la componente $e^{-100t}u_1$, que apenas tiene influencia sobre la solución, es la que determina la restricción sobre el paso $0 < h < 0'02$.

Nótese que la solución exacta se comporta como si $\tilde{u}_1 = 0$. Además, en el caso de que $\tilde{u}_1$ fuera 0, se tendría que

$$x_i = (1 - 0'1h)^i \tilde{u}_2 \rightarrow 0 \text{ cuando } i \rightarrow +\infty$$

para pasos de tamaño mucho mayor que en el caso anterior (concretamente, siempre que $0 < h < \frac{2}{0'1} = 20$) aún siendo soluciones muy parecidas. Además, como ya se ha comentado, en los ordenadores siempre se producen errores de redondeo, lo que se traduce en que la componente $(1 - 100h)^i \tilde{u}_1$ suele hacer siempre su aparición y, salvo que se hayan tomado pasos $0 < h < 0'02$, se verifica que x_i crece como $(1 - 100h)^i$ y, por tanto, tiende a infinito cuando $i \rightarrow +\infty$.

En la Figura 5.8 se muestran los resultados de aplicar el Método de Euler al problema (5.20) con dato inicial $\xi_0 = (0, 100)^T$ cuando se toman pasos $h = 0'1$ y $h = 0'01$. $\square$

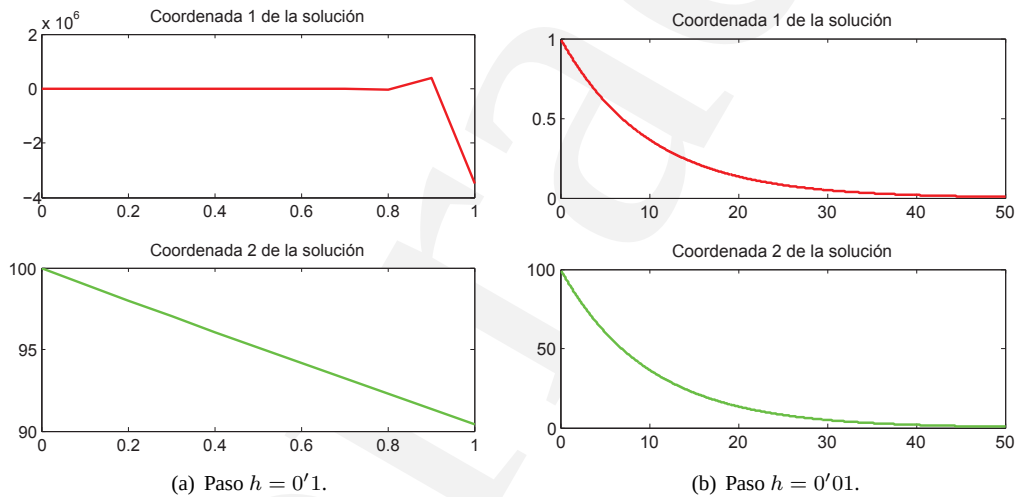


Figura 5.8: Método de Euler aplicado al problema (5.20) con dato inicial $\xi_0 = (0, 100)^T$.

Observación 5.20 Hay que resaltar que la necesidad de reducir el tamaño del paso en el Método de Euler en los Ejemplos 5.18 y 5.19 es debida a razones de inestabilidad absoluta numérica y no tienen que ver con la precisión del método. $\square$

Veamos otro ejemplo de lo que ocurre cuando tenemos un problema lineal en el que hay una gran diferencia entre las magnitudes de los autovalores de la matriz asociada.

Ejemplo 5.21 Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x''(t) + (1 + \mu)x'(t) + \mu x(t) = 0, & t \geq 0 \\ x(0) = 1, & x'(0) = \mu - 2 \end{cases}$$

para valores grandes del parámetro μ . Mediante el cambio de variable $X(t) = (x(t), x'(t))^T$ podemos escribir el problema anterior en la forma

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t), & t \geq 0 \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (5.24)$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu & -1 - \mu \end{pmatrix} \text{ y } X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu - 2 \end{pmatrix}.$$

Puesto que el polinomio característico de la matriz A es

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + (1 + \mu)\lambda + \mu = (\lambda + 1)(\lambda + \mu)$$

se verifica que $\text{sp}(A) = \{-1, -\mu\}$. De esta forma, para que el Método de Euler (explícito) sea absolutamente estable, se necesita tomar un tamaño de paso $h > 0$ que verifique

$$|1 - h| < 1 \text{ y } |1 - \mu h| < 1,$$

luego debe tomarse

$$0 < h < \min\left\{2, \frac{2}{\mu}\right\}. \quad (5.25)$$

La solución del problema de valor inicial (5.24) es $X(t) = (X^1(t), X^2(t))^T$ donde

$$X^1(t) = 2e^{-t} - e^{-\mu t} \text{ y } X^2(t) = -2e^{-t} + \mu e^{-\mu t}$$

(compruébese).

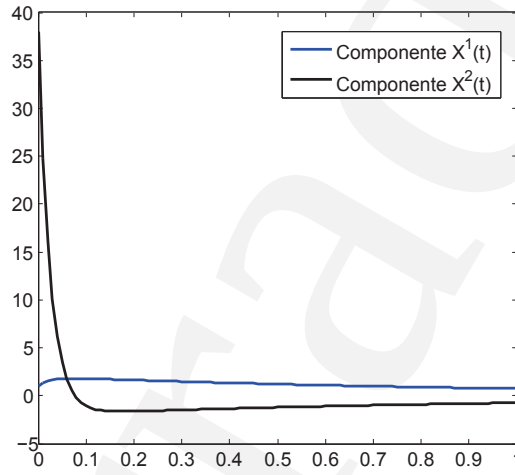


Figura 5.9: Solución del problema de valor inicial (5.24) cuando $\mu = 40$.

Como se aprecia en la Figura 5.9, cuando $\mu = 40$, la componente $X^2(t)$ de la solución muestra dos escalas de tiempo muy distintas: la escala rápida (que ocurre entre $t = 0$ y $t \approx 0.1$) y la escala lenta (a partir de $t \approx 0.1$). Nótese que, en cambio, la componente $X^1(t)$ varía suavemente en todo el intervalo $[0, 1]$.

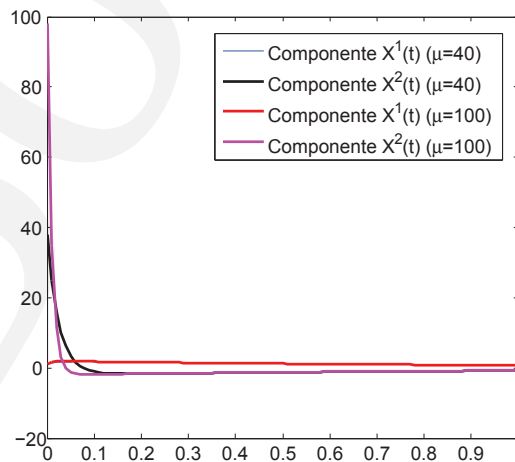


Figura 5.10: Solución del problema de valor inicial (5.24) cuando $\mu = 40$ y $\mu = 100$.

No obstante, hay que resaltar que, puesto que la escala rápida de tiempo de la componente $X^2(t)$ tiene un efecto prácticamente nulo en la solución (véase la Figura 5.10 en la que se muestra que apenas hay diferencias para los valores

de $\mu = 40$ y $\mu = 100$), parece que la precisión en su resolución no es un hecho importante con vistas a obtener una aproximación global de la solución en todo el intervalo $[0, +\infty)$. En cambio, para garantizar la estabilidad del Método de Euler (explícito) el paso h debe verificar (5.25), lo que obliga a tomar pasos mucho más pequeños de los que se necesitarían al resolver en el intervalo $[0, 1, +\infty)$. $\square$

Observación 5.22 Obviamente, cuanto mayor sea la región de $\mathbb{C}^-$ que esté contenida en la región de estabilidad $\mathcal{R}$ de un (ϱ, σ) -Método, menores serán las restricciones sobre el paso $h > 0$ debidas a la inestabilidad. Por tanto, en el caso de que el (ϱ, σ) -Método sea A -estable, para sistemas lineales se puede elegir el tamaño de paso $h > 0$ sólo por motivos de precisión (sin tener que hacer ninguna restricción adicional por motivos de inestabilidad). Por esta razón los métodos A -estables son buenos para aplicarlos a problemas rígidos. No obstante, tal y como se ha visto en el Corolario 5.15 y el Teorema 5.16, la noción de A -estabilidad es muy restrictiva. $\square$

Tal y como hemos visto en esta sección, el concepto de problema rígido no es fácil de definir de forma rigurosa. Presentamos, no obstante, una definición que puede servir:

Definición 5.23 Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es *rígido* si, al aproximar las soluciones correspondientes a condiciones iniciales arbitrarias por un esquema numérico caracterizado por una región de estabilidad absoluta de tamaño finito, se necesita emplear un tamaño de paso de discretización excesivamente pequeño con respecto a la suavidad de las soluciones exactas. $\square$

5.5 Métodos BDF (Backward Differentiation Formulae Methods)

Si el (ϱ, σ) -Método de r pasos dado en (3.23) es A -estable, se verifica que las r raíces $\{s_1(\tilde{h}), s_2(\tilde{h}), \dots, s_r(\tilde{h})\}$ (algunas de las cuales pueden estar repetidas) del polinomio de estabilidad

$$\pi(z, \tilde{h}) = \varrho(z) - \tilde{h}\sigma(z)$$

(véase (5.17)) verifican que

$$|s_j(\tilde{h})| < 1, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

para todo $\tilde{h} \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}(\tilde{h}) < 0$. En particular, cuando $\tilde{h} \in \mathbb{R}$ y $\tilde{h} \rightarrow -\infty$, se tiene que $\varrho(s_j(\tilde{h}))$ permanece acotado y, por tanto,

$$0 = \lim_{\tilde{h} \rightarrow -\infty} \frac{\varrho(s_j(\tilde{h}))}{\tilde{h}} = \lim_{\tilde{h} \rightarrow -\infty} \sigma(s_j(\tilde{h})) = \sigma\left(\lim_{\tilde{h} \rightarrow -\infty} s_j(\tilde{h})\right)$$

para $j = 1, 2, \dots, r$. Por tanto, puesto que las raíces de $\pi(\cdot, \tilde{h})$ dependen continuamente de $\tilde{h}$, se tiene que dichas raíces aproximan, cuando $\tilde{h} \rightarrow -\infty$, las raíces del polinomio $\sigma(\cdot)$. Consecuentemente, parece natural elegir $\sigma(z)$ con la propiedad de que tenga sus r raíces en el disco unidad $\mathbf{B}_1(0, 0)$. Una elección sencilla es tomar el polinomio

$$\sigma(z) = \beta_r z^r,$$

con $\beta_r \neq 0$, que tiene como única raíz $z = 0$ con multiplicidad r . Se obtienen así los denominados *Métodos BDF* (de sus siglas en inglés “Backward Differentiation Formulae Methods” o, traducido, *Métodos de fórmulas de diferenciación regresiva*) de r pasos, que son (ϱ, σ) -Métodos implícitos de la forma

$$\begin{cases} x_0, x_1, \dots, x_{r-1} \text{ dados} \\ \sum_{k=0}^r \alpha_k x_{i+k} = h\beta_r f(t_{i+r}, x_{i+r}), \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.26)$$

Sin pérdida de generalidad, se suele tomar $\alpha_r = 1$ y los restantes coeficientes $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \beta_r\}$ se eligen de forma que el orden de precisión del método (5.26) sea máximo (más adelante se estudia la 0-estabilidad de los métodos obtenidos, que determinan la convergencia de los mismos). Así, por ejemplo:

a) Para $r = 1$ se obtiene el método $x_{i+1} + \alpha_0 x_i = h\beta_1 f(t_{i+1}, x_{i+1})$. Puesto que $\varrho(z) = z + \alpha_0$ y $\sigma(z) = \beta_1 z$, se verifica que

$$\begin{cases} c_0 = 0 \Leftrightarrow \varrho(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = -1 \\ c_1 = 0 \Leftrightarrow \varrho'(1) - \sigma(1) = 0 \Leftrightarrow \beta_1 = 1. \end{cases}$$

Se obtiene así el Método de Euler Implícito

$$x_{i+1} - x_i = hf(t_{i+1}, x_{i+1}).$$

- b) Para $r = 2$ se obtiene el método $x_{i+2} + \alpha_1 x_{i+1} + \alpha_0 x_i = h\beta_2 f(t_{i+2}, x_{i+2})$. Puesto que $\varrho(z) = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$ y $\sigma(z) = \beta_2 z^2$, se verifica que

$$\begin{cases} c_0 = 0 \Leftrightarrow \varrho(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 + \alpha_1 = -1 \\ c_1 = 0 \Leftrightarrow \varrho'(1) - \sigma(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 - \beta_2 = -2 \\ c_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\alpha_1 + 4 - 4\beta_2) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 - 4\beta_2 = -4, \end{cases}$$

de donde se obtienen los valores $\alpha_0 = \frac{1}{3}$, $\alpha_1 = -\frac{4}{3}$ y $\beta_2 = \frac{2}{3}$. Se obtiene así el método implícito

$$x_{i+2} - \frac{4}{3}x_{i+1} + \frac{1}{3}x_i = \frac{2h}{3}f(t_{i+2}, x_{i+2}).$$

En la Tabla 5.1 se muestran los primeros métodos BDF.

r	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	β_r	p	c_{p+1}	$c_{\text{error}} = \frac{c_{p+1}}{\beta_r}$
1	-1	1						1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1					$\frac{2}{3}$	2	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{3}$
3	$-\frac{2}{11}$	$\frac{9}{11}$	$-\frac{18}{11}$	1				$\frac{6}{11}$	3	$-\frac{3}{22}$	$-\frac{1}{4}$
4	$\frac{3}{25}$	$-\frac{16}{25}$	$\frac{36}{25}$	$-\frac{48}{25}$	1			$\frac{12}{25}$	4	$-\frac{12}{125}$	$-\frac{1}{5}$
5	$-\frac{12}{137}$	$\frac{75}{137}$	$-\frac{200}{137}$	$\frac{300}{137}$	$-\frac{300}{137}$	1		$\frac{60}{137}$	5	$-\frac{12}{137}$	$-\frac{1}{6}$
6	$\frac{10}{147}$	$-\frac{72}{147}$	$\frac{225}{147}$	$-\frac{400}{147}$	$\frac{450}{147}$	$-\frac{360}{147}$	1	$\frac{60}{147}$	6	$-\frac{20}{343}$	$-\frac{1}{7}$

Tabla 5.1: Métodos BDF de r pasos y orden de precisión p .

Como se aprecia en la Figura 5.11, el intervalo de estabilidad absoluta de los Métodos BDF es $(-\infty, 0)$, lo que les hace muy apropiados para resolver problemas rígidos. El único inconveniente que tienen es que los Métodos BDF sólo son 0-estables si $r \leq 6$ y no lo son para valores $r \geq 7$. Por tanto, los únicos Métodos BDF útiles desde el punto de vista de las aplicaciones (los convergentes) son aquellos en los que $r \leq 6$. Nótese que la región de estabilidad absoluta de todos ellos contiene el exterior de una bola.

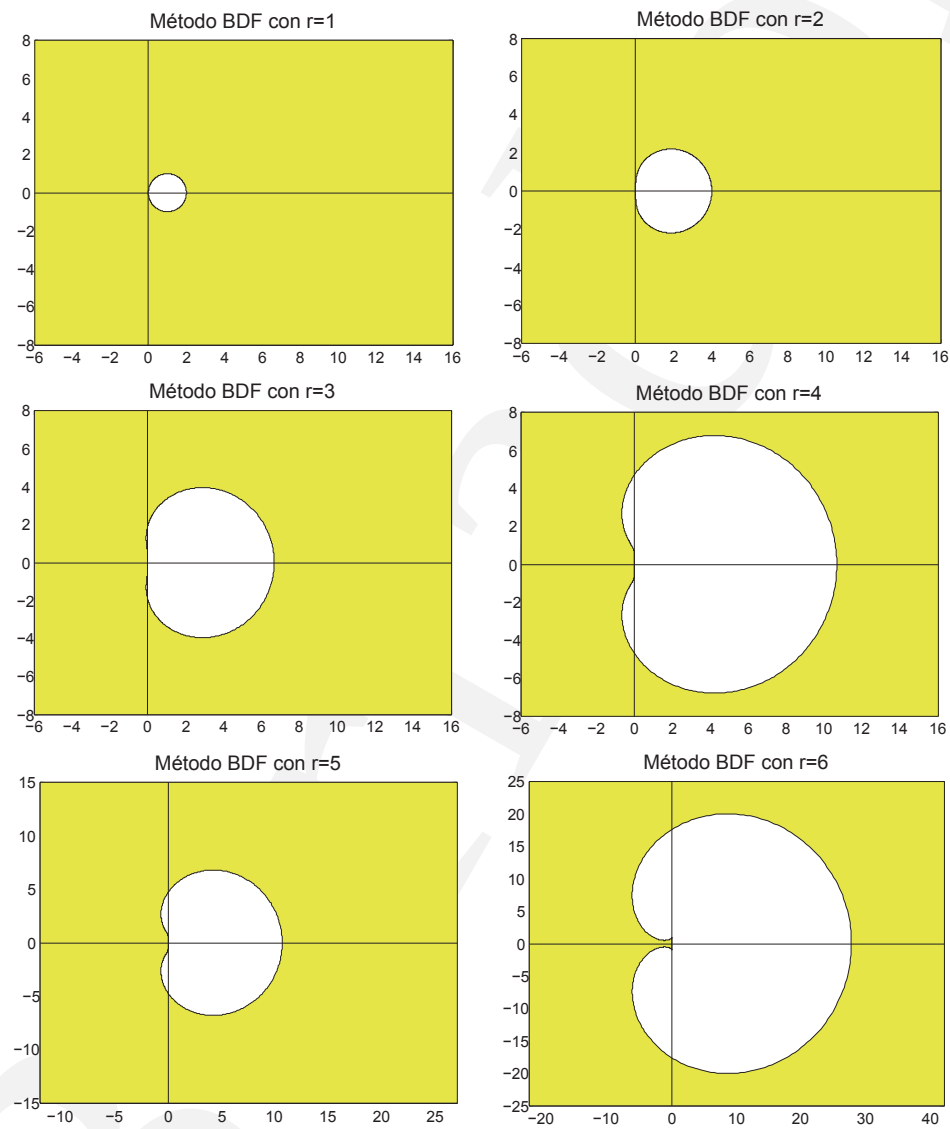


Figura 5.11: Regiones de estabilidad absoluta de los Métodos BDF.