

6 Problemas de contorno

6.1 Introducción

Hasta ahora se han considerado ecuaciones diferenciales cuyas soluciones (y/o sus derivadas) debían verificar ciertas condiciones en un extremo del intervalo temporal, típicamente en el instante inicial (estos problemas son los denominados problemas de valor inicial). Un *problema de contorno* para una ecuación diferencial ordinaria es aquél en el que la solución debe verificar condiciones específicas en ambos extremos del intervalo temporal (condiciones de contorno). Puesto que, en general, la solución general de una ecuación diferencial ordinaria de orden p depende de p parámetros arbitrarios, el número de condiciones de contorno es, en general, p . No obstante, es posible que exista más de una solución o que no exista ninguna. Obviamente, cuando se impone un número de condiciones de contorno superior a p lo más probable es que el problema de contorno no tenga solución. En las secciones siguientes consideraremos problemas de contorno para ecuaciones de segundo orden del tipo

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), & t \in [t_0, T] \\ \mu_{11}x(t_0) - \mu_{12}x'(t_0) = \alpha \\ \mu_{21}x(T) + \mu_{22}x'(T) = \beta, \end{cases} \quad (6.1)$$

donde $\mu_{ij} \in \mathbb{R}$ para $i, j \in \{1, 2\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(D)$ con $D \subset [t_0, T] \times \mathbb{R}^2$ y $x \in \mathcal{C}^2([t_0, T])$. Como ya se ha comentado, la terminología “de contorno” viene del hecho de imponer que las soluciones ó sus primeras derivadas satisfagan condiciones prefijadas sobre los puntos t_0 y T , que constituyen la *frontera* (ó *contorno*) del intervalo $[t_0, T]$.

Observación 6.1 A diferencia de lo que ocurría con los problemas de valor inicial, la existencia y unicidad de solución de un problema de contorno no depende sólo de la regularidad de la función f . Así, por ejemplo, para $k \in \mathbb{Z}$ se verifica que el problema de contorno

$$\begin{cases} x''(t) + k^2x(t) = 0, & t \in [0, \pi] \\ x(0) = x(\pi) = 0 \end{cases}$$

tiene infinitas soluciones de la forma

$$x_c(t) = c \sin(kt), \quad t \in [0, \pi]$$

para cualquier valor $c \in \mathbb{R}$. Nótese que, en este caso, la función $f(t, \xi, \eta) = -k^2\xi$ y, por tanto, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ y es globalmente lipschitziana en las tres variables. $\square$

Como es sabido, el problema

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), & t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = \alpha \\ x'(t_0) = \beta \end{cases}$$

puede reducirse al problema de valor inicial

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)), & t \in [t_0, T] \\ X(t_0) = \xi_0, \end{cases}$$

donde

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \xi_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F(t, \zeta) = \begin{pmatrix} \zeta_2 \\ f(t, \zeta_1, \zeta_2) \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

En cambio, esto no se puede hacer con los problemas de contorno del tipo (6.1), por lo que éstos deben estudiarse separadamente. Consideraremos dos tipos de métodos para aproximar numéricamente la solución de un problema de contorno:

- a) Método de tiro (o disparo).
 b) Métodos de Diferencias Finitas.

Con vistas a simplificar la exposición, en las siguientes secciones comenzaremos con el estudio del siguiente *problema de contorno lineal* para ecuaciones de segundo orden con condiciones de *tipo Dirichlet*

$$\begin{cases} -x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = r(t), & t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = \alpha \\ x(T) = \beta, \end{cases} \quad (6.3)$$

donde las funciones $p, q, r \in C([t_0, T])$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se trata de un caso particular de problema de contorno del tipo (6.1) en el que la función f que aparece en la ecuación del problema (6.1) es lineal en su segunda y tercera variables, es decir, de la forma

$$f(t, \xi, \eta) = p(t)\eta + q(t)\xi - r(t). \quad (6.4)$$

6.2 Método de tiro

Una forma de obtener la solución del problema (6.3) es conjeturar el valor inicial $x'(t_0) = s$ con vistas a obtener un problema de valor inicial (cuya solución se puede aproximar numéricamente aplicando los métodos estudiados en los capítulos anteriores) de forma que, eligiendo s de forma adecuada, la solución del mismo verifique que $x(T) = \beta$. Este procedimiento se denomina de *tiro* o de *disparo* (*Shooting Method*, en inglés). Concretamente, consideremos el problema de valor inicial auxiliar

$$\begin{cases} -y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = r(t), & t \in [t_0, T] \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = s, \end{cases} \quad (6.5)$$

donde $s \in \mathbb{R}$ es un parámetro a elegir. Como las funciones $p, q, r \in C([t_0, T])$, se verifica que la función $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $D \subset [t_0, T] \times \mathbb{R}^2$, definida en (6.2), con f dada en (6.4), es continua y lipschitziana en su segunda variable, por lo que, aplicando el Teorema 1.14, se tiene que el problema de valor inicial (6.5) tiene una única solución $y(t; s)$, la cual pertenece a $C^2([t_0, T])$ (véase el Teorema 1.18). La idea es determinar si se puede elegir el parámetro s (denominado *parámetro de tiro*) de forma que se verifique

$$y(T; s) = \beta, \quad (6.6)$$

en cuyo caso la solución (o soluciones) del problema (6.3) viene dada por

$$x(t) = y(t; s) \quad (6.7)$$

para $t \in [t_0, T]$ (véase la Figura 6.1).

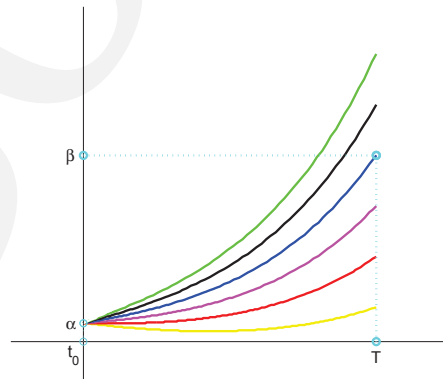


Figura 6.1: Ejemplo de soluciones del problema (6.5) para diversos valores del parámetro s .

Por tratarse de un problema lineal, es claro que la solución $y(t; s)$ de (6.5) puede escribirse en la forma

$$y(t; s) = y_1(t) + sy_2(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (6.8)$$

siendo $y_1(t)$ e $y_2(t)$ las soluciones respectivas de los problemas de valor inicial

$$\begin{cases} -y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t) = r(t), & t \in [t_0, T] \\ y_1(t_0) = \alpha \\ y_1'(t_0) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t) = 0, & t \in [t_0, T] \\ y_2(t_0) = 0 \\ y_2'(t_0) = 1. \end{cases} \quad (6.9)$$

Observación 6.2 Nótese que la solución $y_2(t)$ es independiente de los datos α , β y $r(t)$ del problema (6.3) (sólo depende de las funciones $p(t)$ y $q(t)$ del mismo). $\square$

Como hemos comentado anteriormente, el parámetro s debe elegirse de forma que $y(T; s) = \beta$. A la vista de (6.8), la propiedad anterior se expresa como

$$\beta = y(T; s) = y_1(T) + sy_2(T), \quad (6.10)$$

por lo que pueden presentarse dos casos:

a) $y_2(T) \neq 0$. En esta situación, la ecuación (6.6) tiene una única solución

$$\hat{s} = \frac{\beta - y_1(T)}{y_2(T)}. \quad (6.11)$$

Por tanto, el problema (6.3) tiene una única solución que viene dada por

$$x(t) = y(t; \hat{s}) = y_1(t) + \frac{\beta - y_1(T)}{y_2(T)} y_2(t) \quad (6.12)$$

para $t \in [t_0, T]$.

b) $y_2(T) = 0$. A su vez, pueden presentarse dos casos:

i) $y_1(T) = \beta$. En esta situación, la ecuación (6.6) tiene infinitas soluciones (es válido cualquier valor $s \in \mathbb{R}$), por lo que el problema (6.3) tiene infinitas soluciones de la forma

$$x(t) = y(t; s) = y_1(t) + sy_2(t) \quad (6.13)$$

para todo $t \in [t_0, T]$ con $s \in \mathbb{R}$ arbitrario.

ii) $y_1(T) \neq \beta$. En esta situación, la ecuación (6.6) no tiene solución (no se verifica para ningún valor $s \in \mathbb{R}$), por lo que el problema (6.3) no tiene solución.

Se ha probado, por tanto, el siguiente resultado:

Teorema 6.3 Sean $p, q \in \mathcal{C}([t_0, T])$. Se tiene la siguiente alternativa:

- a) O $y_2(T) \neq 0$, lo cual es equivalente a que el problema de contorno (6.3) tenga una única solución para toda $r \in \mathcal{C}([t_0, T])$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- b) O $y_2(T) = 0$, lo cual es equivalente a que el problema de contorno (6.3) tenga infinitas soluciones, cuando la solución $y_1(t)$ verifica que $y_1(T) = \beta$, o no tenga solución, en caso contrario. $\square$

Observación 6.4 (Interpretación geométrica) Con el Método de tiro hemos sustituido el problema de contorno (6.3) por los dos problemas de valor inicial dados en (6.9) cuyas soluciones respectivas son $y_1(t)$ e $y_2(t)$. Suponiendo que el problema de contorno (6.3) tiene una única solución x (por ejemplo, bajo las hipótesis del Corolario 6.8 que se verá más adelante), ésta viene dada como combinación lineal de $y_1(t)$ e $y_2(t)$; concretamente,

$$x(t) = y_1(t) + \frac{\beta - y_1(T)}{y_2(T)} y_2(t)$$

para $t \in [t_0, T]$ (véase la Figura 6.2). $\square$

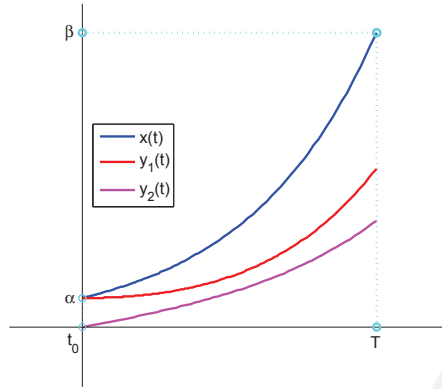


Figura 6.2: Interpretación geométrica del Método de tiro.

Nótese que el número de soluciones del problema de contorno (6.3) depende de que $y_2(T)$ sea cero o no. Veamos que esto, a su vez, depende del número de soluciones del problema homogéneo asociado

$$\begin{cases} -x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0, & t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = 0 \\ x(T) = 0. \end{cases} \quad (6.14)$$

Lema 6.5 Sean $p, q \in \mathcal{C}([t_0, T])$. La condición necesaria y suficiente para que $y_2(T) \neq 0$ es que el problema homogéneo (6.14) tenga como única solución la trivial.

DEMOSTRACIÓN.

$\Rightarrow$ Sea $x(t)$ una solución arbitraria de (6.14) y veamos que $x(t) = 0$ para todo $t \in [t_0, T]$. En efecto, por ser $x(t)$ solución del problema de contorno (6.14), si $\gamma = x'(t_0)$, también será la única solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} -x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0, & t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = 0 \\ x'(t_0) = \gamma. \end{cases}$$

De esta forma, por tratarse de problemas lineales y ser la solución $y_2(t)$ única, se verifica que

$$x(t) = \gamma y_2(t)$$

para todo $t \in [t_0, T]$. En particular, para $t = T$, se tiene que

$$0 = x(T) = \gamma y_2(T)$$

de donde, al ser $y_2(T) \neq 0$, se verifica que $\gamma = 0$ y, por tanto, $x(t) = 0$ para todo $t \in [t_0, T]$.

$\Leftarrow$ Supongamos que $y_2(T) = 0$ y derivemos una contradicción. En efecto, si $y_2(T) = 0$ se tiene que $y_2(t)$ es solución de (6.14). Luego, por hipótesis, se tiene que $y_2(t) = 0$ para todo $t \in [t_0, T]$, lo que contradice que $y_2'(t_0) = 1$. $\square$

Podemos establecer así el siguiente resultado:

Teorema 6.6 (Alternativa de Fredholm) Sean $p, q \in \mathcal{C}([t_0, T])$. Se tiene la siguiente alternativa:

- O el problema homogéneo (6.14) tiene como única solución la trivial, lo cual es equivalente a que el problema no homogéneo (6.3) tenga una única solución para toda $r \in \mathcal{C}([t_0, T])$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- O el problema homogéneo (6.14) tiene solución no trivial, lo cual es equivalente a que el problema no homogéneo (6.3) tenga infinitas soluciones, cuando la solución $y_1(t)$ verifica que $y_1(T) = \beta$, o no tenga solución, en caso contrario.

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar el Teorema 6.3 y el Lema 6.5. $\square$

Observación 6.7

- a) El Teorema 6.6 establece que la unicidad de solución del problema lineal no homogéneo (6.3) se reduce a la unicidad de solución del problema lineal homogéneo asociado (6.14).
- b) El teorema de la Alternativa aparece también en otros contextos. Así, por ejemplo, en dimensión finita no es otro que el *Teorema de Rouché–Fröbenius* para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales de la forma $Ax = b$ donde $A \in \mathcal{M}_n$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Se tiene la siguiente alternativa:
- i) O el sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene como única solución la trivial (cuando $\det(A) \neq 0$), en cuyo caso el sistema no homogéneo $Ax = b$ tiene una única solución para todo $b \in \mathbb{R}^n$, pues $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = n$.
 - ii) O el sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene solución no trivial (cuando $\det(A) = 0$), en cuyo caso el sistema no homogéneo $Ax = b$ tiene infinitas soluciones (si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) < n$) o no tiene solución (si $\text{rg}(A) < \text{rg}(A|b)$).
- c) En el caso de que el problema de contorno (6.3) tenga una única solución $x(t)$, ésta viene dada por (6.12). Por tanto, podemos obtener una aproximación de $x(t)$ utilizando cualesquiera de los métodos de aproximación (ya sean monopaso o multipaso) de problemas de valor inicial para aproximar las soluciones $y_1(t)$ e $y_2(t)$ de los problemas de valor inicial correspondientes. $\square$

Veamos un resultado que nos garantiza la existencia y unicidad de soluciones del problema (6.3).

Corolario 6.8 Si las funciones $p, q, r \in \mathcal{C}^m([t_0, T])$, con $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y

$$q(t) \geq 0, \quad t \in [t_0, T]$$

se verifica que el problema (6.3) tiene una única solución $x \in \mathcal{C}^{m+2}([t_0, T])$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 1.18, si el problema (6.3) tiene una única solución entonces $x \in \mathcal{C}^{m+2}([t_0, T])$. Por otro lado, para probar la existencia y unicidad de solución, a la vista del Teorema 6.3 basta demostrar que $y_2(T) \neq 0$. Puesto que $y_2(t_0) = 0$ e $y_2'(t_0) = 1$, se verifica que existe $\delta \in (0, T - t_0]$ tal que

$$y_2'(t) > 0, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

y, por tanto,

$$y_2(t) > y_2(t_0) = 0, \quad \forall t \in (t_0, t_0 + \delta].$$

Veamos que, de hecho, $y_2'(t) > 0$ para todo $t \in [t_0, T]$. De no ser así, sea $t^* \in (t_0, T]$ el primer instante en que se anula la función y_2' , es decir,

$$\begin{cases} y_2'(t) > 0, & t \in (t_0, t^*) \\ y_2'(t^*) = 0, \end{cases} \quad (6.15)$$

y veamos que ésto conduce a una contradicción. En efecto, puesto que

$$y_2(t) > y_2(t_0) = 0, \quad \forall t \in (t_0, t^*), \quad (6.16)$$

al ser $q(t) \geq 0$, la propiedades (6.15) y (6.16) determinan que

$$y_2''(t) = p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t) \geq p(t)y_2'(t) \geq -My_2'(t) \quad (6.17)$$

para todo $t \in (t_0, t^*)$, siendo

$$M = \max_{t \in [t_0, T]} |p(t)| \geq 0.$$

De esta forma, de (6.15) y (6.17) se verifica que

$$\frac{y_2''(t)}{y_2'(t)} \geq -M \quad (6.18)$$

para todo $t \in (t_0, t^*)$. Integrando la inecuación (6.18) entre t_0 y t se obtiene que

$$y_2'(t) \geq y_2'(t_0)e^{-M(t-t_0)} = e^{-M(t-t_0)} \geq e^{-M(T-t_0)} \quad (6.19)$$

para todo $t \in (t_0, t^*)$ y, por continuidad,

$$y_2'(t^*) = \lim_{t \rightarrow t^*} y_2'(t) \geq e^{-M(T-t_0)} > 0,$$

lo que contradice (6.15). Por tanto, se verifica que

$$y_2'(t) > 0, \forall t \in [t_0, T], \quad (6.20)$$

de donde se deduce que

$$y_2(t_0) = 0 \text{ e } y_2(t) > 0, \forall t \in (t_0, T]. \quad (6.21)$$

En particular, $y_2(T) > 0$. $\square$

Observación 6.9 Las propiedades (6.20) y (6.21) determinan que la desigualdad (6.17) sea válida para todo $t \in [t_0, T]$, con lo cual, a partir de (6.19), se verifica que

$$y_2'(t) \geq e^{-M(t-t_0)}, \forall t \in [t_0, T]$$

y, si integramos la inecuación anterior entre t_0 y t , se obtiene que

$$y_2(t) \geq y_2(t_0) + \frac{1 - e^{-M(t-t_0)}}{M} = \frac{1 - e^{-M(t-t_0)}}{M}, \forall t \in [t_0, T].$$

De esta forma, en particular, se tiene que

$$y_2(T) \geq \frac{1 - e^{-M(T-t_0)}}{M} > 0. \quad \square$$

Observación 6.10 El resultado del Corolario 6.8 no es cierto, en general, si la función $q(t)$ es negativa en algún punto del intervalo $[t_0, T]$. Basta considerar, por ejemplo, el problema de contorno

$$\begin{cases} -x''(t) - x(t) = 0, & t \in [0, \pi] \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = \beta. \end{cases} \quad (6.22)$$

En efecto, puesto que la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea que gobierna el problema (6.22) es

$$x(t) = A \cos(t) + B \sin(t), \quad t \in [0, \pi]$$

con $A, B \in \mathbb{R}$ arbitrarios (véase, por ejemplo, [Fernández-Vázquez-Vegas, Sección 3.3]), se verifica que el problema de contorno (6.22):

- i) Tiene infinitas soluciones de la forma $x_B(t) = B \sin(t)$ para todo $B \in \mathbb{R}$ si $\beta = 0$.
- ii) No tiene solución si $\beta \neq 0$. $\square$

Observación 6.11 Pueden considerarse otras condiciones de contorno distintas a las del problema (6.3) sin necesidad de hacer muchos cambios en la argumentación anterior. Por ejemplo, para el problema de contorno

$$\begin{cases} -x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = r(t), & t \in [t_0, T] \\ x'(t_0) = \alpha \\ x(T) = \beta, \end{cases} \quad (6.23)$$

donde $p, q, r \in \mathcal{C}([t_0, T])$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, consideramos el problema de valor inicial auxiliar

$$\begin{cases} -y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = r(t), & t \in [t_0, T] \\ y(t_0) = s \\ y'(t_0) = \alpha, \end{cases} \quad (6.24)$$

donde $s \in \mathbb{R}$ es un parámetro a elegir de forma que se verifique (6.6), en cuyo caso la solución (o soluciones) del problema (6.23) viene dada por (6.7) (véase la Figura 6.3).

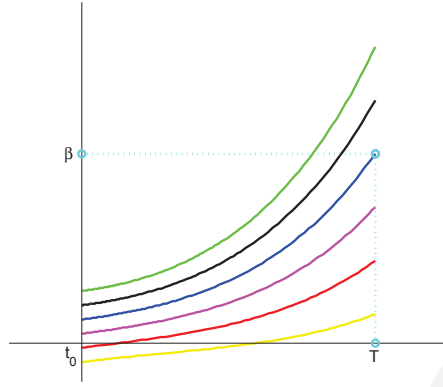


Figura 6.3: Ejemplo de soluciones del problema (6.24) para diversos valores del parámetro s .

Por tratarse de un problema lineal, la solución $y(t; s)$ de (6.24) puede escribirse en la forma (6.8) siendo $y_1(t)$ e $y_2(t)$ las soluciones respectivas de los problemas de valor inicial

$$\begin{cases} -y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t) = r(t), & t \in [t_0, T] \\ y_1(t_0) = 0 \\ y_1'(t_0) = \alpha \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t) = 0, & t \in [t_0, T] \\ y_2(t_0) = 1 \\ y_2'(t_0) = 0. \end{cases} \quad (6.25)$$

Puesto que el parámetro s debe elegirse de forma que $y(T; s) = \beta$, a la vista de (6.8), pueden presentarse dos casos:

- i) $y_2(T) \neq 0$. En esta situación, la ecuación (6.6) tiene una única solución que viene dada por (6.11). Por tanto, el problema (6.23) tiene una única solución que viene dada por (6.12).
- ii) $y_2(T) = 0$. A su vez, pueden presentarse dos casos:
 - 1) $y_1(T) = \beta$. En esta situación, la ecuación (6.6) tiene infinitas soluciones (es válido cualquier valor $s \in \mathbb{R}$), por lo que el problema (6.23) tiene infinitas soluciones de la forma (6.13) con $s \in \mathbb{R}$ arbitrario.
 - 2) $y_1(T) \neq \beta$. En esta situación, la ecuación (6.6) no tiene solución (no se verifica para ningún valor $s \in \mathbb{R}$), por lo que el problema (6.23) no tiene solución. $\square$

Observación 6.12 Puede hacerse un estudio análogo para otros problemas de contorno como, por ejemplo,

$$\begin{cases} -x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = r(t), & t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = \alpha \\ \mu x(T) + x'(T) = \beta, \end{cases}$$

con $\mu \in \mathbb{R}$ (véase la hoja de problemas). $\square$

6.3 Método de las Diferencias Finitas

En esta sección se presenta una introducción a los métodos de *Diferencias Finitas*, que sirven para aproximar la solución de un problema de contorno sin tener que resolver problemas de valor inicial auxiliares. Para ello se sustituyen las derivadas por cocientes incrementales.

Dado $N \in \mathbb{N}$, tomando como paso $h = \frac{T-t_0}{N+1}$, consideramos la red de puntos equiespaciados $t_i = t_0 + ih$ para $i = 0, 1, \dots, N+1$.¹ Los métodos de Diferencias Finitas son un medio de obtener una aproximación de la solución x en los nodos del mallado, es decir, buscamos un vector

$$X_h = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T \in \mathbb{R}^N$$

de forma que, para $h > 0$ suficientemente pequeño,

$$x_i \simeq x(t_i)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$ (nótese que ya se conocen los valores $x(t_0) = \alpha$ y $x(t_{N+1}) = x(T) = \beta$).

¹Nótese que en la malla se han considerado $N+2$ nodos en lugar de $N+1$ como habíamos venido haciendo hasta ahora. La razón de este cambio, como se verá más adelante, es para que por simplicidad de notación, el sistema lineal algebraico que resulte al aplicar el método sea de orden N .

6.3.1 Deducción de los métodos

Sea x una solución de la ecuación diferencial que aparece en el problema de contorno (6.3)

$$-x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = r(t), \quad t \in [t_0, T] \quad (6.26)$$

con la regularidad $x \in C^4([t_0, T])$ (supuesto que existe). Desarrollando por Taylor, para cada $t \in (t_0, T)$ y $h > 0$ suficientemente pequeño, se verifica que

$$x(t \pm h) = x(t) \pm hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(t) \pm \frac{h^3}{6}x'''(t) + \frac{h^4}{24}x^{(4)}(\vartheta^\pm),$$

con $t - h < \vartheta^- < t < \vartheta^+ < t + h$, por lo que

$$x(t + h) + x(t - h) = 2x(t) + h^2x''(t) + \frac{h^4}{24}(x^{(4)}(\vartheta^+) + x^{(4)}(\vartheta^-)). \quad (6.27)$$

Puesto que, por el *Teorema de los Valores Intermedios*, se verifica que

$$\frac{x^{(4)}(\vartheta^+) + x^{(4)}(\vartheta^-)}{2} = x^{(4)}(\vartheta)$$

con $\vartheta \in (\vartheta^-, \vartheta^+)$, podemos expresar (6.27) en la forma

$$x''(t) = \frac{x(t + h) - 2x(t) + x(t - h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}x^{(4)}(\vartheta). \quad (6.28)$$

Análogamente, para aproximar la derivada primera, se tiene que

$$x'(t) = \frac{x(t + h) - x(t - h)}{2h} - \frac{h^2}{12}(x^{(3)}(\nu^+) + x^{(3)}(\nu^-)) = \frac{x(t + h) - x(t - h)}{2h} - \frac{h^2}{6}x^{(3)}(\nu), \quad (6.29)$$

donde se ha vuelto a utilizar el *Teorema de los Valores Intermedios*, $t - h < \nu^- < t < \nu^+ < t + h$ y $\nu \in (\nu^-, \nu^+)$. De esta manera, podemos expresar la ecuación diferencial (6.26) en la forma

$$-\frac{x(t + h) - 2x(t) + x(t - h)}{h^2} + \frac{h^2}{12}x^{(4)}(\vartheta) + p(t)\left(\frac{x(t + h) - x(t - h)}{2h} - \frac{h^2}{6}x^{(3)}(\nu)\right) + q(t)x(t) = r(t)$$

para $t \in (t_0, T)$ y $h > 0$ suficientemente pequeño o, equivalentemente, como

$$-\frac{x(t + h) - 2x(t) + x(t - h)}{h^2} + p(t)\left(\frac{x(t + h) - x(t - h)}{2h}\right) + q(t)x(t) = r(t) + \tau(t, h),$$

es decir,

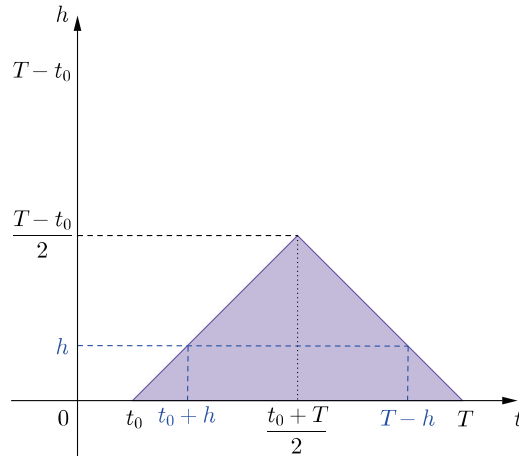
$$\tau(t, h) = \left(x''(t) - \frac{x(t + h) - 2x(t) + x(t - h)}{h^2}\right) - p(t)\left(x'(t) - \frac{x(t + h) - x(t - h)}{2h}\right), \quad (6.30)$$

donde la función $\tau : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ verifica

$$\tau(t, h) = \frac{h^2}{12}(2x^{(3)}(\nu)p(t) - x^{(4)}(\vartheta)), \quad (6.31)$$

siendo $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto (véase la Figura 6.4)

$$\mathcal{U} = \{(t, h) \in \mathbb{R}^2 : h > 0, t - h, t, t + h \in [t_0, T]\} = \bigcup_{h \in (0, \frac{T-t_0}{2}]} [t_0 + h, T - h] \times \{h\}. \quad (6.32)$$

Figura 6.4: Conjunto $\mathcal{U}$.

Dado $N \in \mathbb{N}$, tomando como paso $h = \frac{T-t_0}{N+1}$, consideramos la red de puntos equiespaciados $t_i = t_0 + ih$ para $i = 0, 1, \dots, N+1$. Particularizando la expresión (6.30) en los nodos t_i de la malla y, para simplificar la escritura, denotando

$$p_i = p(t_i), \quad q_i = q(t_i) \quad \text{y} \quad r_i = r(t_i) \quad (6.33)$$

para $i = 0, 1, \dots, N+1$, se verifica que

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{x(t_2) - 2x(t_1) + \alpha}{h^2} + p_1 \frac{x(t_2) - \alpha}{2h} + q_1 x(t_1) = r_1 + \tau(t_1, h) \\ -\frac{x(t_{i+1}) - 2x(t_i) + x(t_{i-1}))}{h^2} + p_i \frac{x(t_{i+1}) - x(t_{i-1}))}{2h} + q_i x(t_i) = r_i + \tau(t_i, h), \quad i = 2, 3, \dots, N-1 \\ -\frac{\beta - 2x(t_N) + x(t_{N-1}))}{h^2} + p_N \frac{\beta - x(t_{N-1}))}{2h} + q_N x(t_N) = r_N + \tau(t_N, h), \end{array} \right. \quad (6.34)$$

donde se ha tenido en cuenta que $x(t_0) = \alpha$ y $x(t_{N+1}) = \beta$. Es decir,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2 + q_1 h^2}{h^2} x(t_1) - \frac{1 - \frac{p_1}{2} h}{h^2} x(t_2) = r_1 + \alpha \frac{1 + \frac{p_1}{2} h}{h^2} + \tau(t_1, h) \\ -\frac{1 + \frac{p_i}{2} h}{h^2} x(t_{i-1}) + \frac{2 + q_i h^2}{h^2} x(t_i) - \frac{1 - \frac{p_i}{2} h}{h^2} x(t_{i+1}) = r_i + \tau(t_i, h), \quad i = 2, 3, \dots, N-1 \\ -\frac{1 + \frac{p_N}{2} h}{h^2} x(t_{N-1}) + \frac{2 + q_N h^2}{h^2} x(t_N) = r_N + \beta \frac{1 - \frac{p_N}{2} h}{h^2} + \tau(t_N, h). \end{array} \right.$$

Denotando

$$a_i = 2 + q_i h^2, \quad b_i = 1 + \frac{p_i}{2} h \quad \text{y} \quad c_i = 1 - \frac{p_i}{2} h \quad (6.35)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$, podemos escribir el sistema anterior como

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1}{h^2} x(t_1) - \frac{c_1}{h^2} x(t_2) = r_1 + \alpha \frac{b_1}{h^2} + \tau(t_1, h) \\ -\frac{b_i}{h^2} x(t_{i-1}) + \frac{a_i}{h^2} x(t_i) - \frac{c_i}{h^2} x(t_{i+1}) = r_i + \tau(t_i, h), \quad i = 2, 3, \dots, N-1 \\ -\frac{b_N}{h^2} x(t_{N-1}) + \frac{a_N}{h^2} x(t_N) = r_N + \beta \frac{c_N}{h^2} + \tau(t_N, h) \end{array} \right. \quad (6.36)$$

y, en forma matricial, como

$$A_h X = b_h + \tau(h), \quad (6.37)$$

siendo

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} a_1 & -c_1 & & & \\ -b_2 & a_2 & -c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -b_{N-1} & a_{N-1} & -c_{N-1} \\ & & & -b_N & a_N \end{pmatrix}, \quad (6.38)$$

$$b_h = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{N-1} \\ r_N \end{pmatrix} + \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} \alpha b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta c_N \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ \vdots \\ x(t_{N-1}) \\ x(t_N) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tau(h) = \begin{pmatrix} \tau(t_1, h) \\ \tau(t_2, h) \\ \vdots \\ \tau(t_{N-1}, h) \\ \tau(t_N, h) \end{pmatrix}. \quad (6.39)$$

Observación 6.13 Las expresiones (6.28) y (6.29) son sólo una de las muchas formas de expresar $x''(t)$ y $x'(t)$ en función de los valores que tome x en “puntos cercanos” a t . Utilizando otras posibilidades se obtienen otros métodos de Diferencias Finitas que también pueden resultar útiles. $\square$

El *Método de las Diferencias Finitas* se basa en “despreciar” el vector $\tau(h)$ en el sistema (6.37) y considerar el problema discreto asociado: hallar $X_h \in \mathbb{R}^N$ solución del sistema

$$A_h X_h = b_h. \quad (6.40)$$

Observación 6.14 Desde el punto de vista práctico, se suele resolver el sistema $h^2 A_h X_h = h^2 b_h$. $\square$

Llegados a este punto, surgen dos cuestiones:

- ¿Cuándo la matriz A_h es invertible? En caso afirmativo, el problema discreto (6.40) admite una única solución.
- ¿Es convergente el *Método de las Diferencias Finitas*?

Como veremos a continuación, bajo adecuadas hipótesis, la primera cuestión es siempre afirmativa. Para ello recordamos la siguiente noción.

Definición 6.15 Una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ es:

- De *diagonal dominante* si para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ se verifica que

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|.$$

- De *diagonal estrictamente dominante* si para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ se verifica que

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|.$$

- De *diagonal fuertemente dominante* si A es de diagonal dominante y se verifica que existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que

$$|a_{i_0 i_0}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0 j}|. \quad \square$$

Lema 6.16 Toda matriz de diagonal estrictamente dominante es invertible.

DEMOSTRACIÓN. Véase [Infante-Rey, Teorema 2.2]. $\square$

Lema 6.17 Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n$ una matriz de diagonal fuertemente dominante verificando:

- 1) A es tridiagonal (es decir, $a_{ij} = 0$ si $|i - j| \geq 2$).
- 2) Los elementos de la sub y superdiagonal de A son no nulos (es decir, $a_{ij} \neq 0$ si $|i - j| = 1$).

Entonces, la matriz A es invertible.

DEMOSTRACIÓN. Véase [Infante-Rey, Problemas 4.19 y 5.24]. $\square$

Veamos a continuación que, bajo ciertas condiciones sobre p, q y r , y para valores del parámetro $h > 0$ suficientemente pequeño, la matriz A_h es inversible y, por tanto, el sistema (6.40) va a tener una única solución.

Proposición 6.18 Sean $p, q, r \in \mathcal{C}([t_0, T])$ de forma que $q(t)$ verifica

$$q_{\min} = \min_{t \in [t_0, T]} q(t) \geq 0. \quad (6.41)$$

Denotando

$$p_{\max} = \max_{t \in [t_0, T]} |p(t)|, \quad (6.42)$$

si el paso h verifica que

$$0 < h < \frac{2}{p_{\max}}, \quad (6.43)$$

se tiene que la matriz A_h es inversible.

DEMOSTRACIÓN. La hipótesis (6.43) determina que

$$-1 < -\frac{p_{\max}}{2} h \leq \frac{p_i}{2} h \leq \frac{p_{\max}}{2} h < 1$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, por lo que se verifica que

$$b_i = 1 + \frac{p_i}{2} h > 0 \text{ y } c_i = 1 - \frac{p_i}{2} h > 0$$

y, por tanto,

$$\begin{cases} |c_1| = c_1 = 1 - \frac{p_1}{2} h < 2 \\ |b_i| + |c_i| = b_i + c_i = 2, \quad i = 2, 3, \dots, N-1 \\ |b_N| = b_N = 1 + \frac{p_N}{2} h < 2. \end{cases} \quad (6.44)$$

Como, por otra parte, la hipótesis (6.41) determina que para todo $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ se verifique que

$$|a_i| = a_i = 2 + q_i h^2 \geq 2 + q_{\min} h^2 \geq 2, \quad (6.45)$$

se tiene que la matriz tridiagonal A_h es de diagonal fuertemente dominante. Además, como los elementos de la sub y superdiagonal de A_h son no nulos (de hecho, por ser $b_i > 0$ y $c_i > 0$, son negativos), aplicando el Lema 6.17 se concluye que la matriz A_h es inversible. $\square$

Observación 6.19

- Nótese que, de acuerdo con el Corolario 6.8, las hipótesis exigidas en la Proposición 6.18 determinan la existencia y unicidad de solución del problema de contorno (6.3), pero no que esta solución vaya a tener la regularidad $x \in \mathcal{C}^4([t_0, T])$ (para ello se necesitaría que $p, q, r \in \mathcal{C}^2([t_0, T])$).
- En el caso de que la función $p(t) \equiv 0$ para todo $t \in [t_0, T]$, la condición (6.43) no supone ninguna restricción sobre el paso h .
- En el caso de que $q_{\min} > 0$, se verifica que la matriz A_h es, de hecho, de diagonal estrictamente dominante. $\square$

6.3.2 Análisis del error cometido

Definición 6.20

- El *error local de truncamiento* del método de Diferencias Finitas anterior asociado a una solución x de la ecuación diferencial (6.26) alrededor del instante $t \in (t_0, T)$, viene dado por la función $\tau : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ definida en (6.30), es decir,

$$\tau(t, h) = \left(x''(t) - \frac{x(t+h) - 2x(t) + x(t-h)}{h^2} \right) - p(t) \left(x'(t) - \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h} \right).$$

- b) El *error local de truncamiento* del método de Diferencias Finitas anterior asociado a la solución x es la función $\bar{\tau} : (0, \frac{T-t_0}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{\tau}(h) = \max_{t \in [t_0+h, T-h]} |\tau(t, h)|. \quad (6.46)$$

- c) Los conceptos definidos en los apartados a) y b) se generalizan a cualquier otro método de Diferencias Finitas. $\square$

Vamos a introducir, a continuación, las nociones de consistencia y orden de precisión del Método de las Diferencias Finitas dado por (6.40).

Definición 6.21

- a) Dadas las funciones $p, q, r : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, un método de Diferencias Finitas es *consistente con la ecuación diferencial* (6.26) si el correspondiente error local de truncamiento $\bar{\tau}$ asociado a cualquier solución x de dicha ecuación tiene la propiedad de que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \bar{\tau}(h) = 0.$$

Además, se dice que el método de Diferencias Finitas es de *orden de precisión* $m \in \mathbb{N}$ para la ecuación diferencial (6.26) si para cualquier solución x de dicha ecuación se verifica que

$$\bar{\tau}(h) = O(h^m).$$

- b) Un método de Diferencias Finitas es *consistente* si, para todas $p, q, r \in \mathcal{C}([t_0, T])$, se verifica que el método es consistente con la ecuación diferencial (6.26). Además, el método de Diferencias Finitas es de *orden de precisión* $m \in \mathbb{N}$ si, para todas $p, q, r \in \mathcal{C}^m([t_0, T])$, se verifica que el método es de orden de precisión m para la ecuación diferencial (6.26). $\square$

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 6.22 El Método de las Diferencias Finitas dado por (6.40) tiene orden de precisión 2. Concretamente, el error local de truncamiento verifica

$$\bar{\tau}(h) \leq \frac{2M_3 p_{\max} + M_4}{12} h^2, \quad (6.47)$$

donde $p_{\max}$ está definido en (6.42) y

$$M_k = \max_{t \in [t_0, T]} |x^{(k)}(t)|, \quad (6.48)$$

para $k = 3, 4$.

DEMOSTRACIÓN. Si $p, q, r \in \mathcal{C}^2([t_0, T])$, cualquier solución x de la ecuación diferencial (6.26) tiene la regularidad $x \in \mathcal{C}^4([t_0, T])$ (véase el Teorema 1.18). Por tanto, a partir de (6.31), para todo $(t, h) \in \mathcal{U}$ podemos expresar el error local de truncamiento asociado a x como

$$\tau(t, h) = \frac{h^2}{12} \left(2x^{(3)}(\nu)p(t) - x^{(4)}(\vartheta) \right),$$

con $\nu, \vartheta \in (t-h, t+h)$. Consecuentemente, para todo $(t, h) \in \mathcal{U}$ se verifica que

$$|\tau(t, h)| \leq \frac{2M_3 p_{\max} + M_4}{12} h^2, \quad (6.49)$$

de donde se concluye que

$$\bar{\tau}(h) \leq \frac{2M_3 p_{\max} + M_4}{12} h^2. \quad \square$$

Respecto a la segunda cuestión planteada anteriormente vamos a establecer a continuación la convergencia del Método de las Diferencias Finitas. Para ello, denotaremos el *error de discretización global absoluto* como

$$\|\varepsilon(h)\|_{\infty} = \max_{i=1,2,\dots,N} |\varepsilon_i(h)|,$$

siendo

$$\varepsilon_i(h) = x(t_i) - x_i$$

para $i = 1, 2, \dots, N$ y $\varepsilon(h) = (\varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h), \dots, \varepsilon_N(h))^T$. Nótese que $\varepsilon(h) = X - X_h$.

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 6.23 Si $p, q, r \in \mathcal{C}([t_0, T])$, h verifica (6.43) y

$$q_{\min} = \min_{t \in [t_0, T]} q(t) > 0, \quad (6.50)$$

se tiene que el Método de las Diferencias Finitas definido anteriormente para el problema de contorno (6.3) es convergente. Concretamente, el error global de discretización absoluto verifica

$$\|\varepsilon(h)\|_{\infty} \leq \frac{\bar{\tau}(h)}{q_{\min}}. \quad (6.51)$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, por el Corolario 6.8, se verifica que el problema de contorno (6.3) tiene una única solución $x \in \mathcal{C}^2([t_0, T])$. Por otra parte, al restar la ecuación (6.40) a la ecuación (6.37), se obtiene que

$$A_h(X - X_h) = \tau(h) \Leftrightarrow A_h \varepsilon(h) = \tau(h)$$

o, equivalentemente,

$$h^2 A_h \varepsilon(h) = h^2 \tau(h),$$

es decir,

$$\begin{cases} a_1 \varepsilon_1(h) = c_1 \varepsilon_2(h) + h^2 \tau(t_1, h) \\ a_i \varepsilon_i(h) = b_i \varepsilon_{i-1}(h) + c_i \varepsilon_{i+1}(h) + h^2 \tau(t_i, h), \quad i = 2, 3, \dots, N-1 \\ a_N \varepsilon_N(h) = b_N \varepsilon_{N-1}(h) + h^2 \tau(t_N, h). \end{cases} \quad (6.52)$$

Tomando valores absolutos en (6.52), las relaciones (6.44) y (6.45) determinan que

$$\begin{aligned} (2 + q_{\min} h^2) |\varepsilon_i(h)| &\leq |a_i| |\varepsilon_i(h)| \leq |b_i| |\varepsilon_{i-1}(h)| + |c_i| |\varepsilon_{i+1}(h)| + h^2 |\tau(t_i, h)| \\ &\leq (|b_i| + |c_i|) \|\varepsilon(h)\|_{\infty} + h^2 \bar{\tau}(h) \\ &= 2 \|\varepsilon(h)\|_{\infty} + h^2 \bar{\tau}(h), \end{aligned} \quad (6.53)$$

para $i = 2, 3, \dots, N-1$. Como para $i = 1$ e $i = N$ se verifica que

$$\begin{cases} (2 + q_{\min} h^2) |\varepsilon_1(h)| \leq |a_1| |\varepsilon_1(h)| \leq |c_1| |\varepsilon_2(h)| + h^2 |\tau(t_1, h)| \leq 2 \|\varepsilon(h)\|_{\infty} + h^2 \bar{\tau}(h) \\ (2 + q_{\min} h^2) |\varepsilon_N(h)| \leq |a_N| |\varepsilon_N(h)| \leq |b_N| |\varepsilon_{N-1}(h)| + h^2 |\tau(t_N, h)| \leq 2 \|\varepsilon(h)\|_{\infty} + h^2 \bar{\tau}(h), \end{cases}$$

se tiene que la relación (6.53) es válida para $i = 1, 2, \dots, N$. Consecuentemente,

$$(2 + q_{\min} h^2) \|\varepsilon(h)\|_{\infty} \leq 2 \|\varepsilon(h)\|_{\infty} + h^2 \bar{\tau}(h),$$

de donde se sigue la relación (6.51). $\square$

Observación 6.24 Cuando $p, q, r \in \mathcal{C}^2([t_0, T])$, las Proposiciones 6.22 y 6.23 determinan que

$$\|\varepsilon(h)\|_{\infty} \leq \frac{2M_3 p_{\max} + M_4}{12q_{\min}} h^2,$$

luego

$$\|\varepsilon(h)\|_{\infty} = O(h^2). \quad \square$$