

Apuntes de Complementos Matemáticos de la Ingeniería Industrial

Tema 4. Curvas regulares en el espacio. Estudio local y resultados globales.

26 de julio de 2020



Este material ha sido elaborado por Esther Gil Cid y se difunde bajo la licencia Creative Commons Reconocimiento- CompartirIgual 3.0. Puede leer las condiciones de la licencia en <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.es>

Departamento de Matemática Aplicada I. UNED

Índice general

1.	Curvas en el espacio. Visualización en el ordenador.	4
2.	Definiciones y primeros resultados	11
2.1.	Curvatura de una curva espacial no parametrizada por la longitud de arco	17
3.	Vector binormal. Fórmulas de Frenet.	26
4.	Forma canónica local de una curva	33

1. Curvas en el espacio. Visualización en el ordenador.

Ya conocemos las curvas en el plano. Vamos a generalizar lo anterior al espacio, donde además aparecerán nuevas características de las curvas. Vimos que podemos interpretar intuitivamente una curva como la trayectoria que describe una partícula o un móvil. Suponíamos que depende del tiempo t y que la posición de la partícula está dada por la función $\mathbf{x}(t)$, donde para curvas en el espacio, es $\mathbf{x}(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Igual que para curvas en el plano, la velocidad de la partícula está dada por la función (vamos a suponer que las componentes tienen tantas derivadas como necesitemos)

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}.$$

Además, conociendo la posición, \mathbf{x}_0 , en el instante t_0 de la partícula y su velocidad $\mathbf{v}(t)$, la trayectoria de la curva es:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(s) ds.$$

La aceleración de una curva es la derivada de la velocidad, es decir es $\mathbf{a}(t)$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{x}''(t) = \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} = (x''(t), y''(t), z''(t)).$$

Comenzamos con ejemplos de curvas en el espacio.

Ejemplo 1. Todas las curvas del plano son curvas en el espacio. Una forma sencilla de verlo es considerando que su tercera componente, $z(t)$ vale 0. ☺

Ejemplo 2. Por analogía con los ejemplos de curvas planas, vemos que un punto es una curva espacial, de ecuación

$$\mathbf{x}(t) = (a, b, c).$$

Su velocidad es nula, $\mathbf{v}(t) = (0, 0, 0)$. Una recta también es una curva espacial. Siguiendo con la analogía de las curvas planas, si consideramos que el movimiento que describe una partícula moviéndose con velocidad uniforme

$$\mathbf{v}(t) = (v_1, v_2, v_3),$$

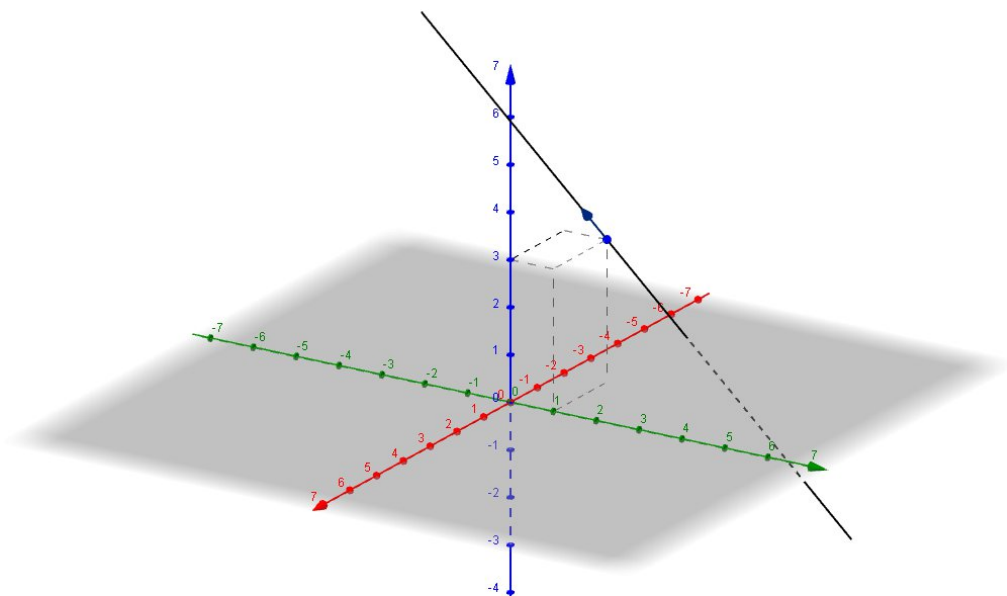
y que en un instante $t = t_0$ pasa por el punto (a, b, c) , la ecuación de la recta es:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(s) ds = (a, b, c) + \left(\int_{t_0}^t v_1 ds, \int_{t_0}^t v_2 ds, \int_{t_0}^t v_3 ds \right) \\ &= (a + v_1 t - v_1 t_0, b + v_2 t - v_2 t_0, c + v_3 t - v_3 t_0). \end{aligned}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\begin{aligned} x &= a + v_1 (t - t_0), \\ y &= b + v_2 (t - t_0), \\ z &= c + v_3 (t - t_0). \end{aligned}$$

La gráfica del punto $(-2, 1, 3)$ y la recta que en $t = 0$ está en ese punto y tiene velocidad constante $(1, 0, 1)$ se representa en la siguiente figura:



Señalamos, sin detenernos en ello, que una recta en el espacio, puede ser recorrida a velocidad no constante. ☹

Ejemplo 3. Un ejemplo de recta no recorrida a velocidad constante es la curva cuya gráfica está dada por

$$\mathbf{x}(t) = (t^3 - 1, t^3, t^3 + 1).$$

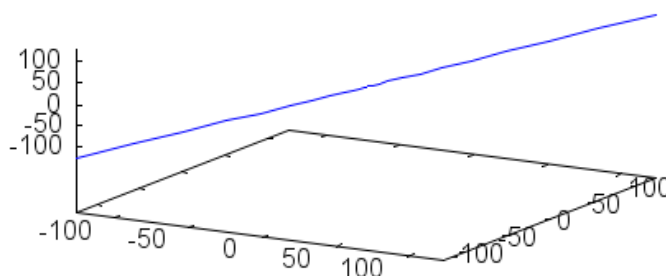
En efecto:

$$\mathbf{x}'(t) = (3t^2, 3t^2, 3t^2).$$

Además, la aceleración es constante, porque

$$\mathbf{x}''(t) = (6t, 6t, 6t).$$

La gráfica de esta curva es



y para representarla con **Maxima** hemos utilizado las sentencias:

```
-> load(draw)$
draw3d(parametric(t^3-1,t^3,t^3+1,t,-5,5));
```

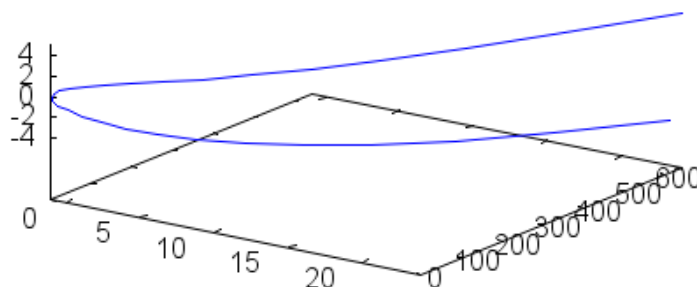
Recordamos que si se utiliza **wxdraw** la gráfica se representa en el mismo documento de **Maxima** y que si se escribe **draw**, la representación es en una nueva ventana que se puede girar con el ratón. Esto ayuda a visualizar con más facilidad la curva. ☺

Ejemplo 4. Las componentes de la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = (t^2 - 1, t^4 + 3t + 2, t)$$

son polinomios. Su representación gráfica es, hecha con **Maxima** a partir de

```
-> load(draw)$
wxdraw3d(parametric(t^2-1,t^4+3*t+2,t,t,-5,5),view=[50,35]);
es
```



Las curvas cuyas componentes son polinomios se llaman curvas polinómicas.



Al estudiar las curvas polinómicas, vimos las curvas de Bézier, donde estas curvas están determinadas a partir de coeficientes ordenados del polígono de control, $\{\mathbf{b}_i\}_{i=0,\dots,n}$, y expresadas en la base dada por los polinomios de Bernstein de grado n , $B_i^n(t)$:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i},$$

para $t \in [0, 1]$. Vimos propiedades de estas curvas, como que son invariantes por transformaciones afines, que la curva está contenida en la clausura convexa del polígono de control o que se cumple:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}_0, \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{b}_n.$$

Ahora señalamos que todo el desarrollo hecho para las curvas de Bézier es válido si el polígono de control no está en el plano, sino en el espacio, es decir, si $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$.

Ejemplo 5. Vamos a determinar la curva de Bézier cuyo polígono de control es $\{(-1, 2, 0), (0, 1, 0), (1, 1, -1)\}$.

El polígono de control es

$$\mathbf{b}_0 = (-1, 2, 0), \quad \mathbf{b}_1 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{b}_2 = (1, 1, -1).$$

Entonces la curva de Bézier cumple

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^2 \mathbf{b}_i B_i^2(t),$$

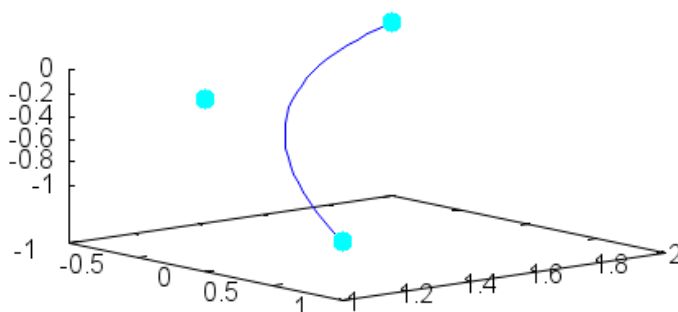
para los polinomios de Bernstein

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad B_i^2(t) = \binom{2}{i} t^i (1-t)^{2-i}.$$

Entonces la curva de Bézier es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (-1, 2, 0) B_0^2(t) + (0, 1, 0) B_1^2(t) + (1, 1, -1) B_2^2(t) \\ &= (-1, 2, 0) \binom{2}{0} t^0 (1-t)^2 + (0, 1, 0) \binom{2}{1} t^1 (1-t)^1 + (1, 1, -1) \binom{2}{2} t^2 (1-t)^0 \\ &= (-1, 2, 0) t^0 (1-t)^2 + (0, 1, 0) 2t^1 (1-t)^1 \\ &\quad + (1, 1, -1) t^2 (1-t)^0 \\ &= (t^2 - (1-t)^2, t^2 + 2t(1-t) + 2(1-t)^2, -t^2) \\ &= (2t - 1, t^2 - 2t + 2, -t^2). \end{aligned}$$

La representación gráfica, con Maxima, de esta curva es



Podemos determinar, de la misma forma que se hace para curvas en el plano, el polígono de control para expresar una curva como curva de Bézier.

Ejemplo 6. Escribamos la curva $\mathbf{x}(t) = (t^3 - 2t + 1, 4t - 1, t^2)$ con $t \in [0, 1]$ como una curva de Bézier.

El grado máximo de los polinomios que forman las componentes es 3, entonces se puede escribir como una curva de Bézier a partir de los polinomios

de Bernstein de grado 3.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i B_i^3(t) \\
 &= \mathbf{b}_0 B_0^3(t) + \mathbf{b}_1 B_1^3(t) + \mathbf{b}_2 B_2^3(t) + \mathbf{b}_3 B_3^3(t) \\
 &= \mathbf{b}_0 \binom{3}{0} t^0 (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 \binom{3}{1} t^1 (1-t)^2 \\
 &\quad + \mathbf{b}_2 \binom{3}{2} t^2 (1-t)^1 + \mathbf{b}_3 \binom{3}{3} t^3 (1-t)^0 \\
 &= \mathbf{b}_0 (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 3t^1 (1-t)^2 + \mathbf{b}_2 3t^2 (1-t)^1 + \mathbf{b}_3 t^3.
 \end{aligned}$$

Si llamamos $\mathbf{b}_i = (x_i, y_i, z_i)$, entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= (x_0, y_0, z_0) (1-t)^3 + (x_1, y_1, z_1) 3t^1 (1-t)^2 + (x_2, y_2, z_2) 3t^2 (1-t)^1 + (x_3, y_3, z_3) t^3 \\
 &= \begin{pmatrix} x_0 - 3x_0t + 3x_0t^2 - x_0t^3 + 3tx_1 - 6t^2x_1 + 3t^3x_1 + 3t^2x_2 - 3t^3x_2 + t^3x_3 \\ y_0 - 3y_0t + 3y_0t^2 - y_0t^3 + 3ty_1 - 6t^2y_1 + 3t^3y_1 + 3t^2y_2 - 3t^3y_2 + t^3y_3 \\ z_0 - 3tz_0 + 3tz_1 + 3t^2z_0 - 6t^2z_1 - t^3z_0 + 3t^2z_2 + 3t^3z_1 - 3t^3z_2 + t^3z_3 \end{pmatrix}^t \\
 &= \begin{pmatrix} x_0 + 3(-x_0 + x_1)t + 3(x_0 - 2x_1 + x_2)t^2 + (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3)t^3 \\ y_0 + 3(-y_0 + y_1)t + 3(y_0 - 2y_1 + y_2)t^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3)t^3 \\ z_0 + 3(-z_0 + z_1)t + 3(z_0 - 2z_1 + z_2)t^2 + (-z_0 + 3z_1 - 3z_2 + z_3)t^3 \end{pmatrix}^t \\
 &= (t^3 - 2t + 1, 4t - 1, t^2).
 \end{aligned}$$

Igualando la tercera componente, obtenemos:

$$z_0 + 3(-z_0 + z_1)t + 3(z_0 - 2z_1 + z_2)t^2 + (-z_0 + 3z_1 - 3z_2 + z_3)t^3 = t^2,$$

lo que implica

$$\begin{aligned}
 z_0 &= 0, \\
 -z_0 + z_1 &= 0 \implies z_1 = z_0 = 0, \\
 3(z_0 - 2z_1 + z_2) &= 3z_2 = 1 \implies z_2 = \frac{1}{3}, \\
 -z_0 + 3z_1 - 3z_2 + z_3 &= -1 + z_3 = 0 \implies z_3 = 1.
 \end{aligned}$$

De la misma forma, tenemos

$$y_0 + 3(-y_0 + y_1)t + 3(y_0 - 2y_1 + y_2)t^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3)t^3 = 4t - 1$$

significando

$$\begin{aligned}
 y_0 &= -1, \\
 3(-y_0 + y_1) &= 3(1 + y_1) = 4 \implies y_1 = \frac{1}{3}, \\
 3(y_0 - 2y_1 + y_2) &= 3\left(-1 - \frac{2}{3} + y_2\right) = 0 \implies y_2 = \frac{5}{3}, \\
 (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3) &= (1 + 1 - 5 + y_3) = 0 \implies y_3 = 3.
 \end{aligned}$$

Con la primera componente de los vértices del polígono de control, hacemos $x_0 + 3(-x_0 + x_1)t + 3(x_0 - 2x_1 + x_2)t^2 + (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3)t^3 = t^3 - 2t + 1$.

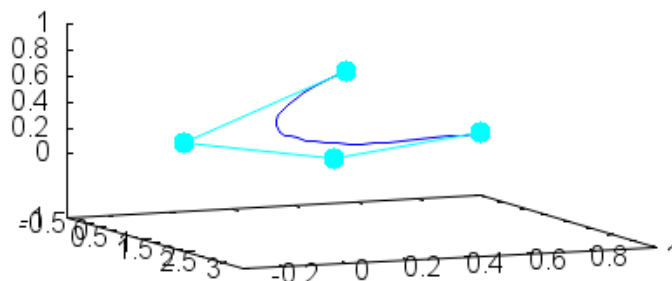
Resolvemos y obtenemos:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 1, \\
 3(-x_0 + x_1) &= 3(-1 + x_1) = -2 \implies x_1 = \frac{1}{3}, \\
 3(x_0 - 2x_1 + x_2) &= 3\left(1 - \frac{2}{3} + x_2\right) = 0 \implies x_2 = -\frac{1}{3}, \\
 -x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 + 1 + 1 + x_3 = 1 \implies x_3 = 0.
 \end{aligned}$$

Entonces, se puede escribir:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= (t^3 - 2t + 1, 4t - 1, t^2) = \mathbf{b}_0 B_0^3(t) + \mathbf{b}_1 B_1^3(t) + \mathbf{b}_2 B_2^3(t) + \mathbf{b}_3 B_3^3(t) \\
 &= (1, -1, 0) B_0^3(t) + \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) B_1^3(t) + \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right) B_2^3(t) + (0, 3, 1) B_3^3(t).
 \end{aligned}$$

La gráfica es:



2. Definiciones y primeros resultados

Nota importante: El estudio de este apartado se debe complementar con el apartado 4.4. del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, enero 2014.

Siguiendo con el desarrollo realizado para curvas en el plano, resumimos las principales definiciones y resultados ya hechos para estas curvas, y que son totalmente válidos para curvas en el espacio, es decir, para curvas en \mathbb{R}^3 .

Partimos de curvas dadas por $\mathbf{x} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde la función \mathbf{x} es al menos diferenciable una vez (aunque a veces vamos a pedir que sea diferenciable más de una vez). Aunque lo que sigue ya lo estudiamos en general, vamos a repasar los conceptos de punto regular y singular, curva regular, punto múltiple y longitud de arcos con algunos ejemplos.

Comenzamos con curvas que no están necesariamente parametrizadas por la longitud de arco. La variable es t y la curva es:

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

la parametrización no influye para determinar puntos singulares y regulares o puntos múltiples.

Ejemplo 7. Sea C la curva definida por $\mathbf{x}(t) = (t, t^3 - 3t, t^2 + e^t)$, para $\mathbf{x} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Vamos a estudiar si tiene puntos singulares y si es una curva regular. Además, estudiaremos si el vector $\mathbf{x}'(t_0)$, que es tangente a C en un punto $\mathbf{x}(t_0)$ no singular puede ser perpendicular al plano xy .

Primero determinamos el vector $\mathbf{x}'(t)$:

$$\mathbf{x}'(t) = (1, 3t^2 - 3, 2t + e^t) \neq (0, 0, 0)$$

para cualquier t , porque la primera componente siempre es distinta de 0. Por tanto, la curva no tiene puntos singulares y como la función que la define es diferenciable (las componente son derivables) es una curva regular.

Además, el vector derivada es

$$\mathbf{x}'(t) = (1, 3t^2 - 3, 2t + e^t),$$

y tiene la misma dirección y sentido que el vector tangente. Para que sea perpendicular al plano xy debe tener la forma

$$(1, 3t^2 - 3, 2t + e^t) = (0, 0, k).$$

Lo que no ocurre para ningún valor de t .



Ejemplo 8. Determinemos si la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = (1, t^2 - 2t, 2t^2)$$

tiene puntos múltiples.

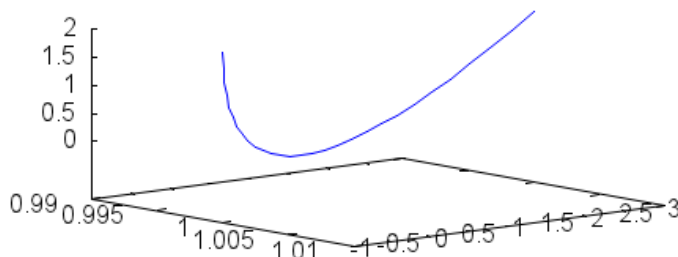
Tiene puntos múltiples y si y sólo si

$$(1, t^2 - 2t, 2t^2) = (1, t_1^2 - 2t_1, 2t_1^2).$$

La primera coordenada coincide siempre. La tercera coordenada es igual si y sólo si $t = \pm t_1$. Nos interesa sólo cuando $t = -t_1$. En ese caso, debe cumplirse, en la segunda coordenada:

$$\begin{aligned} t^2 - 2t &= (-t_1)^2 - 2(-t_1) = t_1^2 + 2t_1 = t^2 + 2t_1 \\ \implies t &= t_1 \iff t = 0. \end{aligned}$$

Por eso, la curva no tiene puntos múltiples. Su gráfica es



Sabemos que un vector tangente a la curva en el punto correspondiente a $t = t_0$ es el vector derivada $\mathbf{x}'(t_0)$. El **vector tangente** es un vector con su misma dirección y sentido, pero unitario, es decir, es el vector

$$\frac{\mathbf{x}'(t_0)}{\|\mathbf{x}'(t_0)\|}.$$

Ejemplo 9. Encontramos el vector tangente y la recta tangente, en $t = 0$, a la curva de ecuaciones paramétricas

$$x(t) = t^2 \cos t, \quad y(t) = \text{sen } t, \quad z(t) = 3t.$$

Tenemos:

$$\mathbf{x}'(t) = (2t \cos t - t^2 \sin t, \cos t, 3), \quad \mathbf{x}'(0) = (0, 1, 3).$$

Por eso, el vector tangente a la curva en $t = 0$ es

$$\mathbf{v} = \frac{(0, 1, 3)}{\|(0, 1, 3)\|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

Además, $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$. Por tanto, la recta tangente es

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(0, 1, 3).$$



Ejemplo 10. Calculemos la longitud de un paso de hélice circular de ecuaciones $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$.

Tenemos que

$$\mathbf{x}'(t) = (-\sin t, \cos t, 3).$$

Un paso de hélice es la porción de curva comprendida entre los valores t_1 y $t_1 + 2\pi$. Por eso, en este caso, tenemos:

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 3^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{10} dt = 2\sqrt{10}\pi.$$



La expresión de una curva parametrizada por la longitud de arco es

$$\mathbf{x}(s) = (x(s), y(s), z(s)),$$

donde s es el parámetro longitud de arco. Si la variable es s nos vamos a referir a curvas parametrizadas por la longitud de arco, aunque no lo indiquemos entonces. Y si la variable es t a curvas no parametrizadas por la longitud de arco.

El vector tangente para una curva parametrizada por el arco, que llamaremos $\mathbf{t}(s)$, verifica:

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$$

$\mathbf{t}(s)$ es un vector unitario.

Tal como ocurre para curvas planas, la velocidad con la que varía este vector nos indica cuánto se está curvando la curva y, por eso, definimos el **vector curvatura** como

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{x}''(s) = (x''(s), y''(s), z''(s)).$$

La función curvatura o **curvatura** es su módulo, es decir, es

$$k(s) = \|\mathbf{x}''(s)\|.$$

Observamos que la curvatura siempre es positiva.

Ejemplo 11. El vector curvatura y la curvatura de una recta en el espacio es 0, tal como ocurría con rectas en el plano. ☹

Ejemplo 12. Vimos que una parametrización por la longitud de arco de la hélice dada por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = (4 \cos t, 4 \operatorname{sen} t, -t),$$

para $t \in (-10, 10)$, considerando $t_0 = 0$, era

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(t) = \left(4 \cos \frac{s}{\sqrt{17}}, 4 \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{17}}, -\frac{s}{\sqrt{17}} \right).$$

Vamos a determinar el vector curvatura y la función curvatura de esta parametrización.

Tenemos que el vector tangente es:

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s) = \left(-\frac{4}{\sqrt{17}} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}} \cos \frac{s}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{\sqrt{17}} \right).$$

El vector curvatura es

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{x}''(s) = \left(-\frac{4}{17} \cos \frac{s}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{17} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{17}}, 0 \right).$$

La función curvatura es


$$\begin{aligned} k(s) = \|\mathbf{x}''(s)\| &= \sqrt{\left(-\frac{4}{17} \cos \frac{s}{\sqrt{17}} \right)^2 + \left(-\frac{4}{17} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{17}} \right)^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{4}{17} \right)^2 \left(\cos^2 \frac{s}{\sqrt{17}} + \operatorname{sen}^2 \frac{s}{\sqrt{17}} \right)} \\ &= \frac{4}{17}. \end{aligned}$$

Observamos que esta hélice tiene función curvatura constante, aunque el vector curvatura no es el mismo en todos los puntos. ☹

Un punto de inflexión es, de nuevo, un punto donde la función curvatura es 0.

Ejemplo 13. La hélice del ejemplo anterior no tiene puntos de inflexión, porque

$$k(s) = \frac{4}{17} \neq 0$$

para todo s . 

Recordamos que para curvas planas, la curvatura determina de forma única la curva, salvo movimientos en el plano, por el teorema fundamental de la teoría de curvas planas. Esto no ocurre con las curvas en el espacio. Un ejemplo está en la hélice del ejemplo anterior, con curvatura constante $\frac{4}{17}$ y en la circunferencia de radio $\frac{17}{4}$, dada por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = \left(\frac{17}{4} \cos t, \frac{17}{4} \sin t, 1 \right),$$

que tiene esta misma curvatura. Obviamente, ambas curvas no son la misma. Necesitamos algo más, como veremos más adelante.

Tal como pasaba con las curvas planas, para curvas espaciales parametrizadas por la longitud de arco, los vectores tangente $\mathbf{t}(s)$ y curvatura $\mathbf{k}(s)$ son perpendiculares, porque: $\|\mathbf{x}'(s)\|^2 = 1$, tenemos:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} = 1.$$

Derivamos esta expresión y tenemos en cuenta las propiedades del producto escalar, para llegar a:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} + \frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = 2 \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} = 0.$$

Esto significa que el vector derivada segunda (que es el vector curvatura $\mathbf{k}(s)$) es perpendicular al vector tangente $\mathbf{t}(s)$, o que la aceleración de una curva parametrizada por el arco es tangente a la velocidad.

Ejemplo 14. Comprobamos que los vectores tangente y curvatura de la hélice circular de los ejemplos anteriores son ortogonales. Sabemos que

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s) = \left(-\frac{4}{\sqrt{17}} \sin \frac{s}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}} \cos \frac{s}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{\sqrt{17}} \right),$$

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{x}''(s) = \left(-\frac{4}{17} \cos \frac{s}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{17} \sin \frac{s}{\sqrt{17}}, 0 \right).$$

Entonces

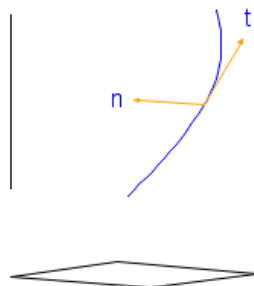
$$\begin{aligned} \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{k}(s) &= -\frac{4}{\sqrt{17}} \left(-\frac{4}{17}\right) \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{17}} \cos \frac{s}{\sqrt{17}} \\ &\quad + \frac{4}{\sqrt{17}} \left(-\frac{4}{17}\right) \cos \frac{s}{\sqrt{17}} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}} 0 \\ &= \frac{16}{17\sqrt{17}} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{17}} \cos \frac{s}{\sqrt{17}} - \frac{16}{17\sqrt{17}} \cos \frac{s}{\sqrt{17}} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{17}} \\ &= 0. \end{aligned}$$



Para curvas en el espacio, el vector tangente no tiene un único vector normal. Sin embargo, cuando $\mathbf{x}''(s) \neq (0, 0, 0)$ (es decir, cuando un punto no es punto de inflexión) hay un vector normal privilegiado, y es el vector

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{x}''(s)}{\|\mathbf{x}''(s)\|}.$$

Se llama **vector normal** (a veces, se llama también vector normal principal). Observe que hemos elegido el vector normal de forma que para curvas parametrizadas por el arco, tiene la misma dirección y sentido que el vector curvatura. En la siguiente figura se representan los vectores tangente y normal:



En general, trabajaremos más con el vector normal que con el vector curvatura, pero sabiendo que se verifica para curvas espaciales la primera ecuación de Frenet

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k(s) \mathbf{n}(s).$$

Ejemplo 15. Determinamos el vector normal de la hélice circular de los ejemplos anteriores. Sabemos que

$$\mathbf{x}''(s) = \left(-\frac{4}{17} \cos \frac{s}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{17} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{17}}, 0 \right),$$

$$k(s) = \frac{4}{17}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(s) &= \frac{\mathbf{x}''(s)}{\|\mathbf{x}''(s)\|} \\ &= \frac{17}{4} \left(-\frac{4}{17} \cos \frac{s}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{17} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{17}}, 0 \right) \\ &= \left(\cos \frac{s}{\sqrt{17}}, \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{17}}, 0 \right). \end{aligned}$$

☺

2.1. Curvatura de una curva espacial no parametrizada por la longitud de arco

Tal como hicimos con curvas planas, podemos determinar la curvatura de una curva espacial sin necesidad de parametrizarla por el arco. Podemos seguir el mismo desarrollo realizado para las curvas planas, llegando a:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(s(t)) &= \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \\ &= \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{d^2t}{ds^2}. \end{aligned}$$

No repetimos este desarrollo, pues es igual al realizado al estudiar curvas planas, ya que no se tuvo en cuenta que trabajábamos en \mathbb{R}^2 para llegar a él.

No obstante, el vector normal $\mathbf{n}(t)$ a la curva en un punto tiene la misma dirección y sentido que el vector curvatura. Por eso, conociendo la curvatura y el vector normal, también podemos determinar $\mathbf{k}(t)$.

Para el cálculo de la función curvatura, podemos utilizar las propiedades del producto vectorial y el hecho de que los vectores tangente $\mathbf{x}'(s)$ y curvatura $\mathbf{x}''(s)$ son perpendiculares en el caso de que la curva esté parametrizada

por el arco, y así saber que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}''(s) \times \mathbf{x}'(s)\| &= \left\| \frac{d^2\mathbf{x}(s)}{ds^2} \times \frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} \right\| \\ &= \left\| \frac{d^2\mathbf{x}(s)}{ds^2} \right\| \left\| \frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} \right\| \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \\ &= \left\| \frac{d^2\mathbf{x}(s)}{ds^2} \right\|. \end{aligned}$$

Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned} k(t) = \|\mathbf{x}''(s)\| &= \left\| \frac{d^2\mathbf{x}(s)}{ds^2} \right\| \\ &= \|\mathbf{x}''(s) \times \mathbf{x}'(s)\| \\ &= \left\| \left(\left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{d^2t}{ds^2} \right) \times \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{ds} \right\| \\ &= \left\| \left(\left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{d^2t}{ds^2} \right) \times \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{ds} \right\| \\ &= \left\| \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \times \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{ds} \right\| + \left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{d^2t}{ds^2} \times \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{ds} \right\| \\ &= \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \frac{dt}{ds} \left\| \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \times \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\| \\ &= \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \frac{dt}{ds} \left\| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} \right\| \\ &= \frac{\left\| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} \right\|}{\left\| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right\|^3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 16. Determinemos la función curvatura de la curva dada por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = \left(\frac{t^2 - 1}{1 + t^2}, t \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, t \right).$$

Vamos a encontrar también si tiene puntos de inflexión.

Sabemos que

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

Para esta curva, tenemos:

$$\mathbf{x}'(t) = \left(4 \frac{t}{(1+t^2)^2}, \frac{-t^4+1-4t^2}{(1+t^2)^2}, 1 \right),$$

$$\mathbf{x}''(t) = \left(4 \frac{1-3t^2}{(1+t^2)^3}, 4t \frac{t^2-3}{(1+t^2)^3}, 0 \right),$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{\left(4 \frac{t}{(1+t^2)^2} \right)^2 + \left(\frac{-t^4+1-4t^2}{(1+t^2)^2} \right)^2 + 1} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{1+t^2} \sqrt{1+4t^2+t^4}, \\ \mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 \frac{t}{(1+t^2)^2} & \frac{-t^4+1-4t^2}{(1+t^2)^2} & 1 \\ 4 \frac{1-3t^2}{(1+t^2)^3} & 4t \frac{t^2-3}{(1+t^2)^3} & 0 \end{vmatrix} \\ &= 4 \frac{1}{(t^2+1)^3} (t(3-t^2), 1-3t^2, -(3t^2+1)). \end{aligned}$$

Su módulo es

$$\begin{aligned} m &= \frac{4}{(1+t^2)^3} \sqrt{(t(3-t^2))^2 + (1-3t^2)^2 + (-(3t^2+1))^2} \\ &= \frac{4}{(1+t^2)^3} \sqrt{t^6 + 12t^4 + 9t^2 + 2}. \end{aligned}$$

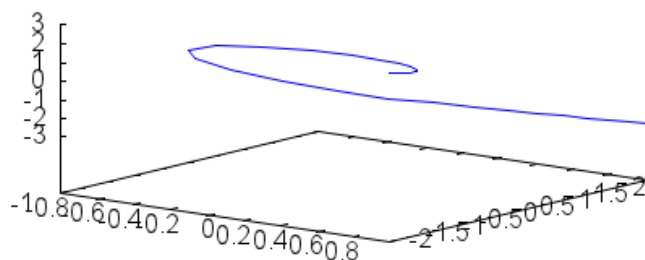
Por tanto, la función curvatura es

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{\frac{4}{(1+t^2)^3} \sqrt{t^6 + 12t^4 + 9t^2 + 2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{1+t^2} \sqrt{1+4t^2+t^4} \right)^3} = \frac{4\sqrt{t^6 + 12t^4 + 9t^2 + 2} (1+t^2)^3}{(1+t^2)^3 \sqrt{2}^3 \sqrt{1+4t^2+t^4}^3} \\ &= \frac{\sqrt{2} \sqrt{t^6 + 12t^4 + 9t^2 + 2}}{\sqrt{1+4t^2+t^4}^3}. \end{aligned}$$

Los puntos de inflexión son aquellos donde la curvatura $k(t)$ vale 0. Esto ocurre cuando

$$t^6 + 12t^4 + 9t^2 + 2 = 0,$$

lo que no ocurre nunca, porque todos los valores de t aparecen como potencias par y los coeficientes son positivos, por lo que siempre va a ser mayor que 0. Una representación gráfica de esta curva es la siguiente:



No vamos a demostrarlo, pero es interesante señalar, que el vector

$$(\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \times \mathbf{x}'(t)$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal. Para comprobarlo, lo multiplicamos escalarmente por $\mathbf{x}'(t)$:

$$\begin{aligned} & ((\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \times \mathbf{x}'(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) \\ &= (-\mathbf{x}'(t) (\mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}''(t)) + \mathbf{x}''(t) (\mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}'(t))) \cdot \mathbf{x}'(t) \\ &= -(\mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}'(t)) (\mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}''(t)) + (\mathbf{x}''(t) \cdot \mathbf{x}'(t)) (\mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}'(t)) = 0. \end{aligned}$$

Son ortogonales, porque su producto escalar es 0. Hemos utilizado las propiedades del producto vectorial ($\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ y $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$). Aquí no vamos a demostrar que tiene el mismo sentido.

Pero siguiendo con estos cálculos, demostramos que podemos obtener el vector normal restando a $\mathbf{x}''(t)$ la proyección de este vector sobre la recta tangente, porque

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \times \mathbf{x}'(t) &= -\mathbf{x}'(t) \times (\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \\ &= -\mathbf{x}'(t) (\mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}''(t)) + \mathbf{x}''(t) (\mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}'(t)) \\ &= \|\mathbf{x}'(t)\|^2 \mathbf{x}''(t) - \mathbf{x}'(t) \|\mathbf{x}'(t)\| \|\mathbf{x}''(t)\| \cos \alpha \\ &= \|\mathbf{x}'(t)\|^2 \mathbf{x}''(t) - \|\mathbf{x}'(t)\|^2 \frac{\|\mathbf{x}''(t)\| \cos \alpha}{\|\mathbf{x}'(t)\|} \mathbf{x}'(t) \\ &= \|\mathbf{x}'(t)\|^2 \left(\mathbf{x}''(t) - \frac{\|\mathbf{x}''(t)\| \cos \alpha}{\|\mathbf{x}'(t)\|} \mathbf{x}'(t) \right), \end{aligned}$$

donde α es el ángulo entre $\mathbf{x}'(t)$ y $\mathbf{x}''(t)$. Como

$$\frac{\|\mathbf{x}''(t)\| \cos \alpha}{\|\mathbf{x}'(t)\|} \mathbf{x}'(t)$$

es la proyección de $\mathbf{x}''(t)$ sobre la recta con la dirección de $\mathbf{x}'(t)$, entonces tenemos que $(\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \times \mathbf{x}'(t)$ es proporcional al vector que resulta de restar a $\mathbf{x}''(t)$ la proyección de este vector sobre la recta tangente. Esta idea geométrica tan clara también es válida para curvas planas. Pero además, el desarrollo anterior nos dice que la orientación como base del plano de \mathbf{t} y \mathbf{n} para la curva parametrizada por la longitud de arco, es la misma que la de la base $\mathbf{x}'(t)$ y $\mathbf{x}''(t)$ cuando la curva no está parametrizada por la longitud de arco.

La expresión

$$(\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \times \mathbf{x}'(t),$$

que nos da un vector en la misma dirección y sentido que el vector normal, es muy útil para determinar del vector normal de curvas no parametrizadas por la longitud de arco.

Ejemplo 17. Vamos a determinar el vector normal en $(-1, 0, 0)$ a la curva dada por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = \left(\frac{t^2 - 1}{1 + t^2}, t \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, t \right).$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \left(4 \frac{t}{(1 + t^2)^2}, \frac{-t^4 + 1 - 4t^2}{(1 + t^2)^2}, 1 \right), \\ \mathbf{x}''(t) &= \left(4 \frac{1 - 3t^2}{(1 + t^2)^3}, 4t \frac{t^2 - 3}{(1 + t^2)^3}, 0 \right). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= (-1, 0, 0), \\ \mathbf{x}'(0) &= (0, 1, 1), \\ \mathbf{x}''(0) &= (4, 0, 0), \end{aligned}$$

tenemos que determinar

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) \\
 &= ((0, 1, 1) \times (4, 0, 0)) \times (0, 1, 1) \\
 &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times (0, 1, 1) = (0, 4, -4) \times (0, 1, 1) \\
 &= (8, 0, 0).
 \end{aligned}$$

Este vector tiene la misma dirección y sentido que el vector normal, que va a ser

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}(t) &= \frac{(8, 0, 0)}{\|(8, 0, 0)\|} \\
 &= (1, 0, 0).
 \end{aligned}$$

☺

Para curvas planas, cerca de un punto aproximamos a la curva por la recta tangente y por la circunferencia osculadora. En el espacio podemos considerar además el plano en el que localmente se puede considerar a la curva contenida en él. Partimos de una curva parametrizada por el arco y de un punto $\mathbf{x}(s_0)$ en ella. Además, pedimos que este punto sea regular y que el vector normal no sea nulo, es decir, pedimos $\mathbf{t}(s_0) = \mathbf{x}'(s_0) \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{n}(s_0) = \mathbf{x}''(s_0) \neq \mathbf{0}$.

Para determinar el plano que mejor se ajusta a la curva en este punto hacemos lo mismo que para determinar la circunferencia osculadora: consideramos tres puntos de la curva (el punto $\mathbf{x}(s_0)$ en cuestión y otros dos puntos) de tal forma que estén no alineados con él y determinamos el plano que los contiene. Si calculamos el límite de los planos que resultan cuando dos puntos tienden a $\mathbf{x}(s_0)$, tenemos un plano, que es el **plano osculador**.

El plano osculador a veces desempeña el mismo papel que la recta tangente en curvas planas. Así, de la misma forma que para que exista recta tangente en un punto no debe anularse el vector tangente, para que exista plano osculador no deben anularse los vectores tangente y normal y deben ser linealmente independientes. Se tiene que los vectores tangente $\mathbf{t}(s_0)$ y normal $\mathbf{n}(s_0)$ son perpendiculares a cualquier vector director de este plano (la demostración está en el documento “Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones” de Antonio Valdés, versión de enero 2014, página 77). Esto significa que el vector $\mathbf{t}(s_0) \times \mathbf{n}(s_0)$, que es perpendicular a los vectores tangente y normal a la curva en $\mathbf{x}(s_0)$, es perpendicular a su vez cualquier vector

incluido en el plano. Pero cualquier vector incluido en el plano toma la forma $\mathbf{x} - \mathbf{x}(s_0)$, si $\mathbf{x} = (x, y, z)$ es un punto del plano cualquiera. Por eso, la ecuación del plano osculador es:

$$(\mathbf{t}(s_0) \times \mathbf{n}(s_0)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}(s_0)) = 0.$$

Esta condición es equivalente a decir que

$$\det(\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}(s_0)) = 0.$$

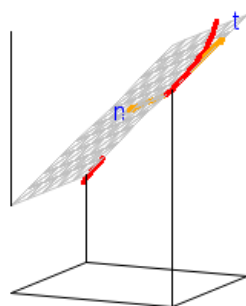
Podemos llegar a otra expresión de esta ecuación, si tenemos en cuenta que $\mathbf{t}(s_0)$ y $\mathbf{n}(s_0)$ sean perpendiculares a cualquier vector director del plano significa que el espacio lineal generado por estos vectores, que denotamos como

$$L(\mathbf{t}, \mathbf{n}) = L\left(\frac{d\mathbf{x}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\right),$$

coincide con el plano vectorial asociado al plano osculador. En ese caso, podemos escribir la ecuación del plano osculador como

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s_0) + L\left(\frac{d\mathbf{x}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\right).$$

En la siguiente figura, se representa el plano osculador:



Señalamos que el plano vectorial asociado al plano osculador es un plano paralelo al plano osculador y que pasa por el origen de coordenadas y que no coincide, en general, con el plano osculador, que no pasa necesariamente por el origen de coordenadas. Ambos planos están generados por los vectores \mathbf{t} y \mathbf{n} . Abusando de la notación, llamaremos a ambos plano osculador y por el contexto se distinguirá a cuál nos referimos.

Si la curva no está parametrizada por la longitud de arco, sabemos que los vectores $\mathbf{x}'(s)$ y $\mathbf{x}'(t)$ tienen la misma dirección. Pero además, el espacio lineal (plano, en este caso) generado por $\frac{d\mathbf{x}}{ds}$ y $\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}$ es el mismo que el generado por $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ y $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$, porque

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \alpha \frac{d\mathbf{x}}{ds} + \beta \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \\ &= \alpha \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{ds} + \beta \left(\left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{d^2t}{ds^2} \right) \\ &= \left(\alpha \frac{dt}{ds} + \beta \frac{d^2t}{ds^2} \right) \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \beta \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \\ &= \alpha' \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \beta' \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}, \end{aligned}$$

y el recíproco se demuestra igual. por eso, si la curva no está parametrizada por el arco el plano osculador es el plano dado por

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t_0) + L \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right)$$

o por

$$\det \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t), \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}(t), \mathbf{x} - \mathbf{x}(t) \right) = 0.$$

Ejemplo 18. Sea C la curva dada por la ecuación

$$\mathbf{x}(t) = \left(\frac{t^2 - 1}{1 + t^2}, t \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, t \right).$$

Vamos a determinar su plano osculador en el punto $\mathbf{x}(0) = (-1, 0, 0)$.

Sabemos, por ejemplos anteriores, que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \left(4 \frac{t}{(1+t^2)^2}, \frac{-t^4 + 1 - 4t^2}{(1+t^2)^2}, 1 \right), \\ \mathbf{x}''(t) &= \left(4 \frac{1 - 3t^2}{(1+t^2)^3}, 4t \frac{t^2 - 3}{(1+t^2)^3}, 0 \right). \end{aligned}$$

Entonces, para $t = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= (-1, 0, 0), \\ \mathbf{x}'(0) &= (0, 1, 1), \\ \mathbf{x}''(0) &= (4, 0, 0). \end{aligned}$$

Un punto (x, y, z) del plano osculador va a verificar:

$$0 = \det(\mathbf{x}'(0), \mathbf{x}''(0), (x, y, z) - (-1, 0, 0))$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ x+1 & y & z \end{vmatrix} = -4z + 4y.$$

Por eso, la ecuación del plano osculador en $(-1, 0, 0)$ es:

$$y = z.$$



Como propiedad, señalamos que si la curva está contenida en un plano, entonces el plano osculador en cualquier punto es el plano que contiene a la curva. Por otro lado, si la torsión no se anula en $\mathbf{x}(t_0)$, entonces la curva atraviesa al plano osculador.

Ejemplo 19. Sea C la curva dada por la intersección de las superficies $z = x^2 + y$, $x - z = -2$. Vamos a determinar la ecuación de su plano osculador en el punto $(1, 2, 3)$.

Es una curva plana (está contenida en el plano $x - z = -2$), y por eso, su plano osculador es este mismo plano: $x - z = -2$.



Para curvas en el espacio también se puede definir la circunferencia osculadora como aquella que más se ajusta a la curva cerca de un punto. Esta circunferencia está contenida en el plano osculador y su centro, el **centro de curvatura**, se encuentra en la dirección del vector normal, y en su mismo sentido. Está a una distancia R del punto $\mathbf{x}(t_0)$ y este valor es su radio, el **radio de curvatura**. Es la cantidad inversa de la curvatura en el punto:

$$R(t_0) = \frac{1}{k(t_0)}.$$

Ejemplo 20. Sea C la curva definida por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = (t^2, t, t^3).$$

Vamos a determinar el radio de curvatura y el centro de curvatura en $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$.

El radio de curvatura R es el inverso de la curvatura k . Sabemos que

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

Para esta curva, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= (2t, 1, 3t^2), & \mathbf{x}''(t) &= (2, 0, 6t), \\ \mathbf{x}'(0) &= (0, 1, 0), & \mathbf{x}''(0) &= (2, 0, 0), & \|\mathbf{x}'(0)\| &= 1, \\ \mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2k, & \|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\| &= 2.\end{aligned}$$

Entonces la curvatura es:

$$k(0) = \frac{2}{1^3} = 2,$$

y el radio de curvatura es

$$R(0) = \frac{1}{2}.$$

Vamos a determinar ahora el vector normal, que sabemos que tiene la misma dirección y sentido que:

$$(\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \times \mathbf{x}'(t).$$

En este caso, es

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) &= ((0, 1, 0) \times (2, 0, 0)) \times (0, 1, 0) = (0, 0, -2) \times (0, 1, 0) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2, 0, 0).\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbf{n}(0) = \frac{(2, 0, 0)}{\|(2, 0, 0)\|} = (1, 0, 0).$$

El centro de curvatura está a una distancia $\frac{1}{2}$ del punto $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$ en la dirección y sentido de $(1, 0, 0)$. Por eso, el centro de curvatura de la circunferencia osculadora es el punto

$$\mathbf{c} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right).$$



3. Vector binormal. Fórmulas de Frenet.

Nota importante: El estudio de este apartado se debe complementar con el apartado 4.5. del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, enero 2014.

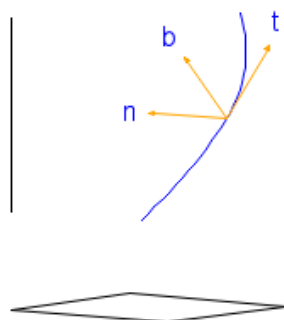
Vimos que una ecuación del plano osculador es

$$(\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}(s)) = 0.$$

Por tanto, la variación del plano osculador también está dada por la variación del vector $\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$. Este vector se llama vector binormal y se denota:

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s).$$

En la siguiente figura se representan estos tres vectores:



Este vector es perpendicular al plano osculador, generado por $\frac{d\mathbf{x}}{ds}$ y $\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}$. Este plano, como vimos, es el mismo que el generado por $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ y $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$, entonces si la curva no está parametrizada por la longitud de arco, el vector binormal tiene la misma dirección que el vector

$$\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t).$$

Pero además, el sentido coincide, e intuitivamente es claro si tenemos en cuenta que el vector normal se tiene restando a $\mathbf{x}''(t)$ la proyección de este vector sobre la recta tangente.

Ejemplo 21. Sea la curva de ecuaciones

$$x = e^t, y = t^2 - t, z = \text{sen } t, t \in \mathbb{R}.$$

Vamos a determinar el vector binormal en el punto $(1, 0, 0)$.

Solución: Sabemos que

$$(1, 0, 0) = \mathbf{x}(0) -$$

Por eso, calculamos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= (e^t, 2t - 1, \cos t), & \mathbf{x}''(t) &= (e^t, 2, -\operatorname{sen} t), \\ \mathbf{x}'(0) &= (1, -1, 1), & \mathbf{x}''(0) &= (1, 2, 0). \end{aligned}$$

Un vector con la misma dirección y sentido que el vector binormal es:

$$\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 1, 3).$$

El vector binormal es unitario, por lo que es

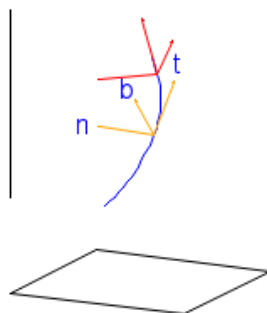
$$\mathbf{b}(0) = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2}} (-2, 1, 3) = \frac{1}{\sqrt{14}} (-2, 1, 3).$$



Hasta ahora, en cada punto \mathbf{x} de la curva, tenemos tres vectores unitarios, \mathbf{t} , \mathbf{n} y \mathbf{b} , que además, son ortogonales dos a dos y por eso, linealmente independientes. Estos tres vectores son una base local para cada punto de la curva, y van variando con ella. Se llaman triedro de Frenet

$$F = \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}.$$

En la siguiente figura se han representado los triedros de Frenet para dos puntos distintos de la curva:



Ejemplo 22. Sea la curva de ecuaciones

$$x = t^2, y = t^2 + t, z = t - 1, t \in \mathbb{R}.$$

Vamos a determinar el triedro de Frenet en el punto $(1, 2, 0)$.

Solución: El punto $(1, 2, 0)$ es la imagen de $t = 1$. La parametrización

$$\mathbf{x}(t) = (t^2, t^2 + t, t - 1)$$

es regular y

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= (2t, 2t + 1, 1), & \mathbf{x}''(t) &= (2, 2, 0), \\ \mathbf{x}'(1) &= (2, 3, 1), & \mathbf{x}''(1) &= (2, 2, 0). \end{aligned}$$

Con estos valores, sabemos que el vector

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1)) \times \mathbf{x}'(1) = ((2, 3, 1) \times (2, 2, 0)) \times (2, 3, 1) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \times (2, 3, 1) = (-2, 2, -2) \times (2, 3, 1) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (8, -2, -10). \end{aligned}$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal principal \mathbf{n} y que, por lo tanto,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{(8, -2, -10)}{\sqrt{8^2 + (-2)^2 + (-10)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{42}} (8, -2, -10) = \frac{1}{\sqrt{42}} (4, -1, -5).$$

El vector tangente unitario a la curva en $(1, 2, 0)$ es

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}'(1)}{\|\mathbf{x}'(1)\|} = \frac{(2, 3, 1)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}} (2, 3, 1).$$

Por tanto, el vector binormal es

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{14}} (2, 3, 1) \times \frac{1}{\sqrt{42}} (4, -1, -5) = \frac{1}{\sqrt{14}} \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{42} (-14, 14, -14) = \frac{\sqrt{3}}{3} (-1, 1, -1). \end{aligned}$$

Entonces el triedro de Frenet es

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{14}} (2, 3, 1), \frac{1}{\sqrt{42}} (4, -1, -5), \frac{\sqrt{3}}{3} (-1, 1, -1) \right\}.$$



Para estudiar cómo varían el vector binormal, es mejor estudiar la variación del **triedro de Frenet**. Conocemos la primera de las fórmulas de Frenet para curvas parametrizadas por la longitud de arco, que relaciona los vectores tangentes y normal

$$\mathbf{t}'(s) = k(s) \mathbf{n}(s).$$

Vamos a extender esta relación a las curvas espaciales. Si escribimos el triedro de Frenet en forma matricial, y derivamos esta matriz, tenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{t}}{ds} & \frac{d\mathbf{n}}{ds} & \frac{d\mathbf{b}}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) & \mathbf{n}(s) & \mathbf{b}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \iff F' = FA$$

para una matriz A , que es antisimétrica, es decir,

$$A^t = -A;$$

La demostración está en el documento “Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones” de Antonio Valdés, versión de enero 2014. Entonces, teniendo en cuenta esta hecho y la primera fórmula de Frenet, tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & a_{23} \\ 0 & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Por la definición de la matriz A , sabemos que debe cumplirse

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = a_{23} \mathbf{n}(s).$$

Entonces, a_{23} es justamente la variación del vector normal. Llamamos **torsión** a esta variación, lo denotamos como $\tau(s)$ y se cumple

$$\tau(s) = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{n}(s).$$

La idea intuitiva de la torsión es la siguiente: indica cuánto cambia el vector binormal, lo que significa que muestra cuánto cambia el vector perpendicular a los vectores tangente y normal. Por eso, nos dice cuánto se “retuerce”, en el espacio, la curva.

A partir de esta expresión, tenemos A y podemos escribir un sistema de ecuaciones diferenciales, que son las fórmulas de Frenet

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = k(s) \mathbf{n}(s) \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k(s) \mathbf{t}(s) - \tau(s) \mathbf{b}(s) \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \tau(s) \mathbf{n}(s) \end{cases}$$

Para $k(s) > 0$ y $\kappa(s)$ arbitrarias, existe una única curva diferenciable, salvo movimientos en el plano, para la $k(s)$ y $\kappa(s)$ son la curvatura y la torsión.

Ejemplo 23. La curva C está dada por $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, tiene curvatura y torsión dadas por $k(t)$, $\tau(t)$ en cada punto $\mathbf{x}(t)$. Vamos a ver qué ocurre con $k(t)$ y $\tau(t)$ si recorremos la curva en sentido contrario.

Vamos a suponer, sin pérdida de generalidad, que están recorridas por el arco. Recorrer la curva en sentido contrario es lo mismo que dar la curva por la aplicación

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(f(s))$$

donde $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ está dada por $f(s) = -s + b + a$. Si llamamos $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{t}_1(s)$ a los vectores tangentes a la curva C , $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{n}_1(s)$ a los vectores normales y $\mathbf{b}(s)$ y $\mathbf{b}_1(s)$ a los vectores binormales, y $k(s)$, $k_1(s)$ y $\tau(s)$, $\tau_1(s)$ a las curvaturas y torsiones respectivas pero recorrida según \mathbf{x} e \mathbf{y} respectivamente, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1(s) &= \mathbf{y}'(s) = \mathbf{x}'(f(s)) f'(s) = -\mathbf{t}(s), \\ \mathbf{y}''(s) &= \mathbf{x}''(f(s)) (f'(s))^2 + \mathbf{x}'(f(s)) f''(s) = \mathbf{x}''(f(s)), \\ \mathbf{n}_1(s) &= \frac{\mathbf{y}''(s)}{\|\mathbf{y}''(s)\|} = \frac{\mathbf{x}''(f(s))}{\|\mathbf{x}''(f(s))\|} = \mathbf{n}(s). \end{aligned}$$

De aquí se deduce:

$$k(s) = \|\mathbf{x}''(f(s))\| = \|\mathbf{y}''(s)\| = k_1(s),$$

es decir, la curvatura no cambia.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{t} \times \mathbf{n} = (-\mathbf{t}_1) \times \mathbf{n}_1 = -\mathbf{t}_1 \times \mathbf{n}_1 = -\mathbf{b}_1, \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= -\frac{d\mathbf{b}_1}{ds} = -\tau_1(s) \mathbf{n}_1(s) = -\tau_1(s) \mathbf{n}(s) = \tau(s) \mathbf{n}(s). \end{aligned}$$

De aquí se deduce que las torsiones de ambas curvas son opuestas. ☹

La torsión en un punto $\mathbf{x}(s)$ de una curva parametrizada por la longitud de arco, donde \mathbf{x} es tres veces derivable, está dada por

$$\tau(s) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s), \mathbf{x}'''(s))}{k(s)^2}.$$

La demostración no es complicada:

$$\begin{aligned}
 \tau(s) &= \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{n} = \frac{d}{ds} \left(\mathbf{x}' \times \frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|} \right) \cdot \frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|} \\
 &= \left(\frac{d}{ds} \mathbf{x}' \times \frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|} + \mathbf{x}' \times \frac{d}{ds} \frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|} \right) \cdot \frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|} \\
 &= \left(\mathbf{x}'' \times \frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|} \right) \cdot \frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|} + \left(\mathbf{x}' \times \frac{d}{ds} \frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|} \right) \cdot \frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|} \\
 &= 0 + \left(\mathbf{x}' \times \left(\frac{\mathbf{x}'''}{\|\mathbf{x}''\|} - \frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|^2} \frac{d}{ds} (\|\mathbf{x}''\|) \right) \right) \cdot \frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|} \\
 &= \left(\mathbf{x}' \times \frac{\mathbf{x}'''}{\|\mathbf{x}''\|} \right) \cdot \frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|} \\
 &= \frac{1}{\|\mathbf{x}''\|^2} (\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''') \cdot \mathbf{x}'' = \frac{1}{\|\mathbf{x}''\|^2} \mathbf{x}'' \cdot (\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''') \\
 &= \frac{1}{\|\mathbf{x}''\|^2} \det(\mathbf{x}'', \mathbf{x}', \mathbf{x}''') = -\frac{\det(\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s), \mathbf{x}'''(s))}{k(s)^2}.
 \end{aligned}$$

Hemos utilizado las propiedades del producto vectorial, que el producto vectorial de dos vectores con la misma dirección es 0 y que el producto escalar de dos vectores ortogonales es 0.

Si C es una curva con una parametrización arbitraria $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, y \mathbf{x} es tres veces derivable, la torsión en un punto $\mathbf{x}(t)$ está dada por

$$\tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

Ejemplo 24. Vamos a encontrar la torsión de la curva dada por las ecuaciones

$$x = \cos t, y = t^3 + 1, z = t - 1, t \in \mathbb{R},$$

para un punto genérico y para $t = 0$.

Sabemos que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}'(t) &= (-\sin t, 3t^2, 1), & \mathbf{x}'(0) &= (0, 0, 1), \\
 \mathbf{x}''(t) &= (-\cos t, 6t, 0), & \mathbf{x}''(0) &= (-1, 0, 0), \\
 \mathbf{x}'''(t) &= (\sin t, 6, 0), & \mathbf{x}'''(0) &= (0, 6, 0).
 \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) &= (-\sin t, 3t^2, 1) \times (-\cos t, 6t, 0) \\
 &= (-6t, -\cos t, 3t^2 \cos t - 6t \sin t).
 \end{aligned}$$

Entonces, la torsión es:

$$\begin{aligned}\tau(t) &= -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2} \\ &= -\frac{\begin{vmatrix} \operatorname{sen} t & 3t^2 & 1 \\ \cos t & 6t & 0 \\ -\operatorname{sen} t & 6 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{(-6t)^2 + (-\cos t)^2 + (3t^2 \cos t - 6t \operatorname{sen} t)^2}} \\ &= -\frac{6 \cos t + 6t \operatorname{sen} t}{\sqrt{(6t)^2 + (\cos t)^2 + (3t^2 \cos t - 6t \operatorname{sen} t)^2}}.\end{aligned}$$

Para $t = 0$, tenemos:

$$\tau(0) = -\frac{6 \cos 0 + 0 \operatorname{sen} 0}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = -6.$$

☹

A partir de la expresión de τ , observamos que si la curva es plana, podemos hacer un giro que la transforme en una curva donde su componente z sea 0. en ese caso, la tercera componente de $\mathbf{x}'(t)$, $\mathbf{x}''(t)$, $\mathbf{x}'''(t)$ va a ser también 0 y:

$$\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t)) = 0.$$

Entonces, la torsión es 0. El recíproco también es cierto.

4. Forma canónica local de una curva

Nota importante: El estudio de este apartado se debe complementar con el apartado 4.6. del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, enero 2014.

Partimos de una curva espacial parametrizada por la longitud de arco, dada por $\mathbf{x}(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, de tal forma que esta función es al menos 4 veces diferenciable. Si quisiéramos aproximar a la curva por el desarrollo de Taylor cerca de un punto $\mathbf{x}(s_0)$, esta aproximación sería de la forma

$$\mathbf{x}(s) \sim \mathbf{x}(s_0) + \mathbf{x}'(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2!}\mathbf{x}''(s_0)(s - s_0)^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{x}'''(s_0)(s - s_0)^3. \quad (1)$$

Si llamamos $\mathbf{R}(s)$ a la diferencia, cerca de $\mathbf{x}(s_0)$, entre el valor real de la curva y el valor aproximado dado por la expresión anterior, se cumple que

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\mathbf{R}(s)}{(s - s_0)^3} = 0.$$

Es decir, como ya sabemos, el desarrollo de Taylor nos da la expresión polinomial de grado 3 que más se ajusta a la curva cerca de $\mathbf{x}(s_0)$. Observamos que en esta expresión aparecen las derivadas $\mathbf{x}^{(j)}(s)$ hasta orden 3 de $\mathbf{x}(s)$. Como son vectores, se pueden a partir del triedro de Frenet

$$\{\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)\}.$$

Sabemos que

$$\mathbf{x}'(s_0) = \mathbf{t}(s_0).$$

A partir de esta expresión, utilizando las fórmulas de Frenet, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}''(s_0) &= \frac{d}{ds}(\mathbf{t}(s_0)) = k(s_0) \mathbf{n}(s_0), \\ \mathbf{x}'''(s_0) &= \frac{d}{ds}(k(s_0) \mathbf{n}(s_0)) = \frac{d}{ds}(k(s_0)) \mathbf{n}(s_0) + k(s_0) \frac{d}{ds}(\mathbf{n}(s_0)) \\ &= k'(s_0) \mathbf{n}(s_0) + k(s_0) (-k(s_0) \mathbf{t}(s_0) - \tau(s_0) \mathbf{b}(s_0)) \\ &= -k^2(s_0) \mathbf{t}(s_0) + k'(s_0) \mathbf{n}(s_0) - k(s_0) \tau(s_0) \mathbf{b}(s_0). \end{aligned}$$

Si la base tiene el origen en $\mathbf{x}(s_0)$ y los vectores son el triedro de Frenet, sustituyendo estas igualdades en la aproximación por el desarrollo de Taylor 1, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(s_0) &= \mathbf{x}'(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2!} \mathbf{x}''(s_0)(s - s_0)^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{x}'''(s_0)(s - s_0)^3 \\ &\quad + \mathbf{R}(s) \\ &= \mathbf{t}(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2!} k(s_0) \mathbf{n}(s_0)(s - s_0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} (-k(s_0)^2 \mathbf{t}(s_0) + k'(s_0) \mathbf{n}(s_0) - k(s_0) \tau(s_0) \mathbf{b}(s_0))(s - s_0)^3 \\ &\quad + \mathbf{R}(s). \end{aligned}$$

Considerando las tres componentes en base al triedro de Frenet, tenemos

$$\begin{aligned} x(s) &= (s - s_0) - \frac{k(s_0)^2}{6} (s - s_0)^3 + R_1, \\ y(s) &= \frac{k(s_0)}{2} (s - s_0)^2 + \frac{k'(s_0)}{6} (s - s_0)^3 + R_2, \\ z(s) &= -\frac{k(s_0) \tau(s_0)}{6} (s - s_0)^3 + R_3. \end{aligned}$$

Es habitual simplificar y suponer $s_0 = 0$, siendo estas ecuaciones

$$\begin{aligned}x(s) &= s - \frac{k(0)^2}{6}s^3 + R_1, \\y(s) &= \frac{k(0)}{2}s^2 + \frac{k'(0)}{6}s^3 + R_2, \\z(s) &= -\frac{k(0)\tau(0)}{6}s^3 + R_3.\end{aligned}$$

Estas ecuaciones se llaman forma canónica local de la **curva**. Y observamos, a semejanza de lo que ocurría para curvas planas, que esta aproximación de la curva está dada por la curvatura y la torsión, salvo movimientos en el plano.

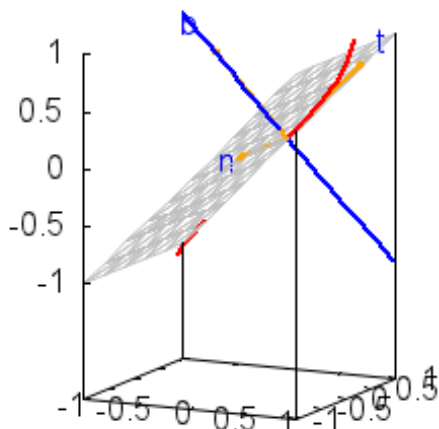
Si la curva es infinitamente diferenciable y se puede determinar por el desarrollo de Taylor, podemos añadir más términos, que dependen de la curvatura, la torsión y sus derivadas.

Con esta referencia, si $\mathbf{t}(t_0)$ juega el papel del vector $(1, 0, 0)$, $\mathbf{n}(t_0)$ es el equivalente a $(0, 1, 0)$ y $\mathbf{b}(t_0)$ es $(0, 0, 1)$, entonces plano xy , determinado por los vectores tangente y normal se llama plano osculador. Como ya vimos, es perpendicular al vector \mathbf{b} y pasa por $\mathbf{x}(s_0)$ y su ecuación es:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t_0)) \cdot \mathbf{b}(t_0) = 0.$$

Se representa en la siguiente gráfica, junto con la **recta binormal**, con la dirección del vector binormal y que pasa por $\mathbf{x}(s_0)$, por lo que su ecuación es

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + t\mathbf{b}(t_0).$$



Ejemplo 25. Vamos a determinar las ecuaciones de la recta binormal y del plano osculador a la curva de ecuación $\mathbf{x} : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ en el punto $(0, -1, 1)$, para $\mathbf{x}(t) = (\sin \pi t, \cos \pi t, t)$.

Sabemos que

$$\mathbf{x}(1) = (0, -1, 1).$$

Tenemos, pues, que considerar $t_0 = 1$. La ecuación del plano osculador es

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t_0)) \cdot \mathbf{b}(t_0) = 0.$$

Necesitamos el vector binormal. Vamos a comprobar que es $(1, 0, \pi)$. Tenemos que un vector con la misma dirección y sentido que el vector tangente es:

$$\mathbf{x}'(t) = (\pi \cos \pi t, -\pi \sin \pi t, 1), \quad \mathbf{x}'(1) = (-\pi, 0, 1).$$

Además:

$$\mathbf{x}''(t) = (-\pi^2 \sin \pi t, -\pi^2 \cos \pi t, 0), \quad \mathbf{x}''(1) = (0, \pi^2, 0).$$

Por eso, la dirección del vector binormal es la del vector

$$\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\pi & 0 & 1 \\ 0 & \pi^2 & 0 \end{vmatrix} = -\pi^2 \mathbf{i} - \pi^3 \mathbf{k},$$

o lo que es equivalente la del vector $(-\pi^2, 0, -\pi^3)$, luego es la dirección de $(1, 0, \pi)$. Entonces la ecuación de la recta binormal es

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}(s_0) + t\mathbf{b}(s_0) \\ &= (0, -1, 1) + t(1, 0, \pi). \end{aligned}$$

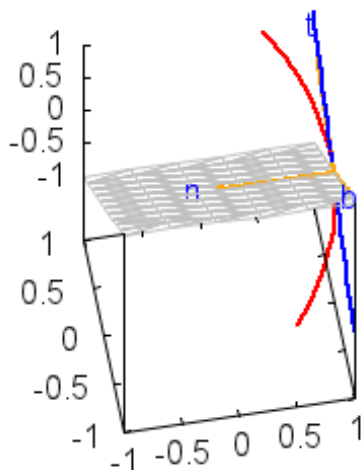
Y la ecuación del plano osculador es

$$(\mathbf{x} - (0, -1, 1)) \cdot (1, 0, \pi) = 0, \text{ o}$$

$$x + \pi z - \pi = 0.$$



El plano yz , dado por los vectores normal y binormal, se llama **plano normal**. La recta perpendicular a él, con la dirección del vector tangente y por $\mathbf{x}(t_0)$, se llama **recta tangente**. Se representan en la siguiente gráfica



La curva atraviesa al plano normal siempre, porque la tangente, que marca en qué dirección se “mueve” la curva, es perpendicular a él. La ecuación del plano normal es

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t_0)) \cdot \mathbf{t}(t_0) = 0,$$

porque es perpendicular al vector tangente. La ecuación de la recta tangente es

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + t\mathbf{t}(t_0).$$

Ejemplo 26. Vamos a determinar el plano normal a la hélice circular $x = \cos \pi t, y = \sin \pi t, z = t$ en el punto correspondiente a $z = 1$ y la recta tangente en este mismo punto.

Sabemos que el vector tangente a $(-1, 0, 1)$ es $(-\pi \sin \pi \lambda, \pi \cos \pi \lambda, 1)$. Como su módulo es

$$\|(0, -\pi, 1)\| = \sqrt{0^2 + (-\pi)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + \pi^2},$$

el vector tangente unitario es

$$\left(0, -\frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}\right).$$

La ecuación del plano normal es

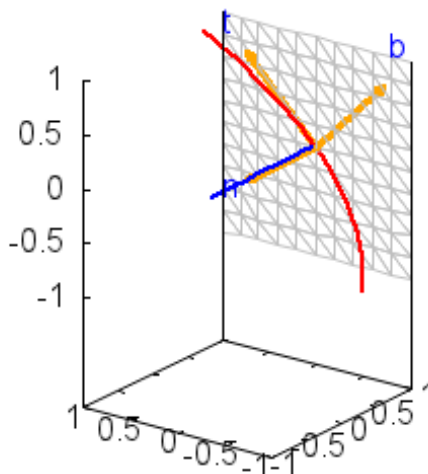
$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - (-1, 0, 1)) \cdot (0, -\pi, 1) = 0 &\iff (x + 1, y, z - 1) \cdot (0, -\pi, 1) = 0 \\ &\iff -\pi y + z - 1 = 0 \iff z - \pi y = 1. \end{aligned}$$

La ecuación de la recta tangente es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(1) + t\mathbf{t}(1) &= (-1, 0, 1) + t(-\pi \operatorname{sen} \pi \cdot 1, \pi \operatorname{cos} \pi \cdot 1, 1) \\ &= (-1, 0, 1) + t(0, -\pi, 1). \end{aligned}$$



El plano xz , determinado por los vectores tangente y binormal, es el **plano rectificante**, y la recta perpendicular a él es la **recta normal**, cuya dirección es la del vector normal. Se representa en la siguiente gráfica:



La curvatura de la curva queda concentrada en la dirección del vector normal que es perpendicular al plano rectificante. Así, si proyectamos la curva sobre este plano, obtenemos una curva cuya curvatura en este punto es cero, lo que significa que localmente se aproxima por una recta, o que la veremos en este punto casi como una recta.

La ecuación del plano rectificante es

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t_0)) \cdot \mathbf{n}(t_0) = 0,$$

porque es perpendicular al vector \mathbf{n} y contiene a $\mathbf{x}(t_0)$. La ecuación de la recta normal es

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + t\mathbf{n}(t_0).$$

Ejemplo 27. Vamos a determinar las ecuaciones de la recta normal y del plano rectificante a la curva de ecuación $\mathbf{x} : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ en el punto $(0, -1, 1)$, si $\mathbf{x}(t) = (\sin \pi t, \cos \pi t, t)$.

Por los ejemplos anteriores, sabemos que $t_0 = 1$, que el vector

$$\mathbf{x}'(1) = (-\pi, 0, 1),$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector tangente, y que el vector binormal es: $(1, 0, \pi)$. Por otro lado, el vector normal tiene la misma dirección que el vector

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(1) \times \mathbf{b}(1) &= (-\pi, 0, 1) \times (1, 0, \pi) \\ &= (0, 1 + \pi^2, 0). \end{aligned}$$

Por eso, una ecuación de la recta normal es

$$(x, y, z) = (0, -1, 1) + t(0, 1 + \pi^2, 0)$$

y el plano rectificante está dado por

$$((x, y, z) - (0, -1, 1)) \cdot (0, 1 + \pi^2, 0) = 0 \iff y + 1 = 0.$$



Bibliografía

- [1] Costa, A. F. ; Gamboa, J. M. ; 1997. Notas de Geometría diferencial de curvas y superficies. Ed. Sanz y Torres.
- [2] Do Carmo, M.P., 1995. Geometría Diferencial de Curvas y Superficies, Alianza Editorial, Madrid.
- [3] Farin, G., 2002. Curves and Surfaces for CAGD. 5a ed. Academic Press, San Diego.
- [4] Rodríguez Marín, L. 2008. Ampliación de Cálculo, primera parte. 3^o Edición. Ed. UNED.
- [5] Struik, D. J. ; 1973. Geometría diferencial clásica, Aguilar, Madrid.
- [6] Valdés, A.; 2014. Notas de Geometría diferencial con aplicaciones. Consultado el 29 de junio de 2014 en <http://www.mat.ucm.es/aval-des/GDA.pdf>, difundido bajo una licencia Creative Commons.