Apuntes de Complementos Matemáticos de la Ingeniería Industrial

Superficies

Ejercicios

Versión 1.0

Departamento de Matemática Aplicada I. UNED

1. Ejercicio 190 de la página 83 del documento "Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones" de Antonio Valdés, enero 2014.

   Demuéstrese que la superficie anterior coincide efectivamente con el hiperboloide $z = xy$.

   Solución. Teníamos la superficie de ecuaciones paramétricas

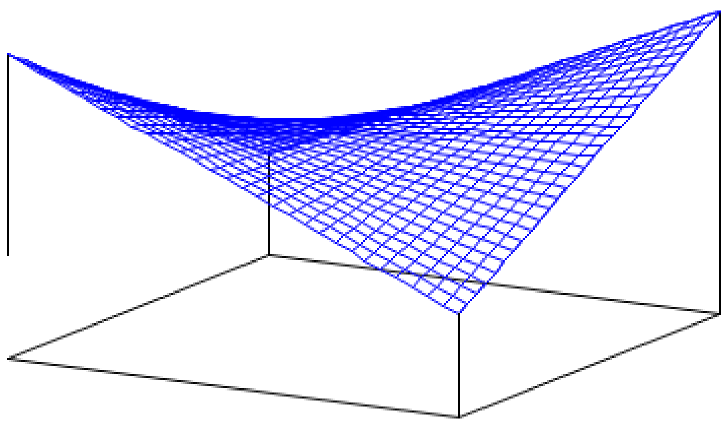
   $$\mathbf{x}(u, v) = (1 - v)(u, 0, 0) + v(u, 1, u) = (u, v, uv).$$

   Hay que comprobar que si

   $$x = u, y = v, z = uv$$

   se cumple $z = xy$. Pero eso es obvio.

   La gráfica de esta superficie es

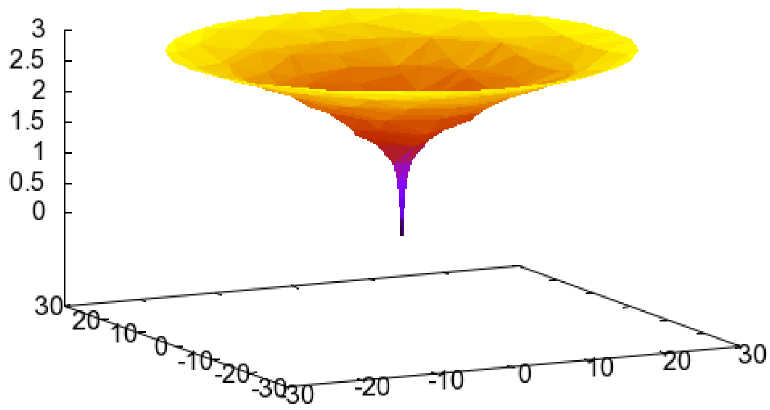
2. Determínense las ecuaciones paramétricas de la superficie de revolución generada por la curva $x = u^3 + 1$, $y = 0$, $z = u$, $0 < u < 3$, al girar alrededor del eje $0z$.

   Solución. Las ecuaciones paramétricas de la curva son: $\mathbf{x}_1(u) = (u^3 + 1, 0, u)$.Llamamos (x, y, z) a las coordenadas de un punto de la superficie. Entonces existe u tal que

   $$(u^3 + 1, 0, u) = (x, y, z).$$

Pero además, los puntos que están en la superficie y que tienen la misma coordenada z deben estar a la misma distancia del eje z, lo que significa que debe ser
$$x^2 + y^2 = \left(u^3 + 1\right)^2 = \left(z^3 + 1\right)^2.$$
Por eso, la ecuación implícita de la superficie es
$$x^2 + y^2 = (z^3 + 1)^2.$$

Las ecuaciones paramétricas se deducen considerando a z como parámetro y multiplicando por $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, al estar generada al girar una recta alrededor de uno de los coordenados. Así, tenemos:
$$\begin{array}{r} x = (u^3 + 1)\cos\theta \\ y = (u^3 + 1)\operatorname{sen}\theta \\ z = u \end{array} \quad 0 < u < 3,\ 0 < \theta < 2\pi$$



3. Determine la ecuación de la superficie de traslación que se obtiene al trasladar la recta $x = 0, y = z$ a lo largo de la curva dada por $\mathbf{x}_2(t) = (t^2, t, -t)$.

Solución. La generatriz es la recta y la directriz es la curva. Comprobamos que está en el plano normal a la recta. Como $(0,1,1)$ es un vector director de la curva, entonces la ecuación del plano normal es

$$y+z=0.$$

Los puntos de la curva lo cumplen, porque

$$0\cdot t^2+t-t=0.$$

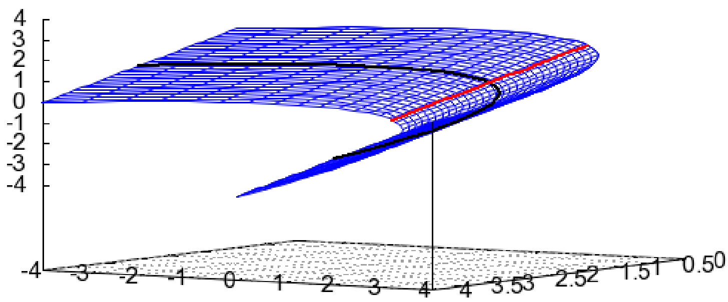
Nos falta una parametrización de la recta, que es

$$\alpha(u)=(0,u,u),$$

y un punto común, que es $(0,0,0)=\mathbf{x}_1(0)=\mathbf{x}_2(0)$. La ecuación de la superfice de traslación es

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u,\theta)&=\mathbf{x}_2(u)+\mathbf{x}_1(u)-\mathbf{x}_1(0)\\&=\left(t^2,t,-t\right)+(0,u,u)-(0,0,0)\\&=\left(t^2,t+u,-t+u\right).\end{aligned}$$

Es un cilindro parabólico:



4. Determine la ecuación del paraboloide hiperbólico que se obtiene al trasladar la parábola $x=0, z=y^2$ a lo largo de la parábola $y=0, z=-2x^2$.

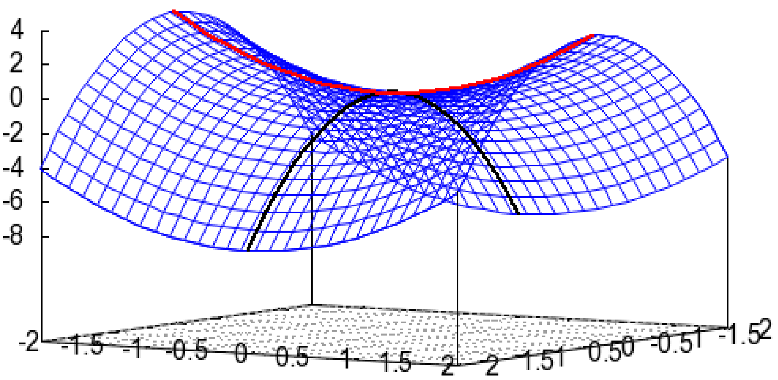
Solución. La generatriz es la primera parábola y la directriz es la segunda. Una parametrización de cada una de ellas es

$$\mathbf{x}_1(u) = \left(0, u, u^2\right), \mathbf{x}_2(t) = \left(t, 0, -2t^2\right).$$

Un punto común es $(0,0,0) = \mathbf{x}_1(0,0,0) = \mathbf{x}_2(0,0,0)$. La ecuación del paraboloide hiperbólico es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u,\theta) &= \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{x}_1(u) - \mathbf{x}_1(0) \\ &= \left(0, u, u^2\right) + \left(t, 0, -2t^2\right) - (0,0,0) \\ &= \left(t, u, u^2 - 2t^2\right). \end{aligned}$$

Su gráfica es:



5. Estudie si la parametrización

$$x = u + v, \qquad y = u - v, \qquad z = u^2 + v^2$$

con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ es regular.

Solución. Si $\mathbf{x}(u,v) = (u+v, u-v, u^2+v^2)$, entonces

$$rg\begin{pmatrix} D_1r_1(u,v) & D_1r_2(u,v) & D_1r_3(u,v) \\ D_2r_1(u,v) & D_2r_2(u,v) & D_2r_3(u,v) \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2u \\ 1 & -1 & 2v \end{pmatrix} = 2$$

para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Y, por tanto, la parametrización es regular.

6. Sea la superficie $x = uv + 1, y = uv^2 - 2, z = u^2 + uv^3$ y M el conjunto de sus puntos singulares. Determínese M.

   Solución. Tenemos:

   $$\mathbf{x}(u, v) = \left(uv + 1, v^2u - 2, u^2 + uv^3\right).$$

   Entonces

   $$\mathbf{x}_u = \left(v, v^2, 2u + v^3\right), \ \mathbf{x}_v = (u, 2uv, 3uv^2).$$

   Si hacemos

   $$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v & v^2 & 2u + v^3 \\ u & 2uv & 3uv^2 \end{vmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (uv(v^3 - 4u), 2uv(u - v), uv^2),$$

   tenemos que $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ sólo se anula si $u = 0$ o $v = 0$. Por eso, M es la imagen de las rectas $u = 0, v = 0$. Este conjunto es:

   $$\mathbf{x}(0, v) = (1, -2, 0), \quad \mathbf{x}(u, 0) = (1, -2, 0).$$

   Por tanto, M es un único punto.

7. Calcule la ecuación del plano tangente a la superficie M dada por la ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ para $z > 0$, en el punto donde $x = 4, y = 3$.

   Solución. Primero determinamos la ecuación paramétrica de la superficie. La superficie M es un cono con $z > 0$, o son los puntos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ donde $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por tanto, una parametrización es

   $$\mathbf{x}(u, v) = \left(u, v, \sqrt{u^2 + v^2}\right)$$

   El punto donde tenemos que determinar el plano tangente es donde $u = 4, v = 3$, es decir,

   $$z = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

   En este punto, tenemos

   $$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u, v) &= \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right), \quad \mathbf{x}_u(4, 3) = \left(1, 0, \frac{4}{5}\right), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right), \quad \mathbf{x}_v(4, 3) = \left(0, 1, \frac{3}{5}\right). \end{aligned}$$

Un vector perpendicular a ambos es

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(4,3)\times\mathbf{x}_v(4,3) &= \left(1,0,\frac{4}{5}\right)\times\left(0,1,\frac{3}{5}\right)\\ &= \left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5},1\right).\end{aligned}$$

Si tomamos un punto genérico de $\mathbb{R}^3$, (x,y,z), el vector $(x-4,y-3,z-5)$ está en el plano tangente si y sólo si:

$$\begin{aligned}&(x-4,y-3,z-5)\cdot\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5},1\right)=0\\ \Longleftrightarrow\quad & -4(x-4)-3(y-3)+5(z-5)=0\\ \Longleftrightarrow\quad & -4x-3y+5z=0.\end{aligned}$$

Esta es la ecuación del plano tangente que buscábamos.

8. Ejercicio 193 de la página 86 del documento "Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones" de Antonio Valdés, enero 2014.

   Calcúlense las ecuaciones paramétricas e implícitas del plano tangente a la superficie

   $$\mathbf{x}(u,v)=(u,v,uv)$$

   en el punto $(1,-1,-1)$.

   Solución. Tenemos que $\mathbf{x}(1,-1)=(1,-1,-1)$. Además:

   $$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u,v)&=(1,0,v), & \mathbf{x}_u(1,-1)&=(1,0,-1),\\ \mathbf{x}_v(u,v)&=(0,1,u), & \mathbf{x}_v(1,-1)&=(0,1,1).\end{aligned}$$

   El plano tangente pasa por $\mathbf{x}(1,1)=(1,-1,-1)$ y contiene a los vectores $\mathbf{x}_u(1,1)$ y $\mathbf{x}_v(1,1)$, es decir, su ecuación implícita es:

   $$0=\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z+1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=x-y+z-1,$$

   o $x-y+z=1$. La ecuación paramétrica es

   $$\mathbf{p}(\lambda,\mu)=(1,-1,-1)+\lambda(1,0,-1)+\mu(0,1,1).$$

9. Ejercicio 194 de la página 86 del documento "Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones" de Antonio Valdés, enero 2014.

Encuéntrese los puntos de la superficie

$$\mathbf{x}(u,v) = (u - v, u + v, u^2 + v^2)$$

en los que el plano tangente es paralelo al plano $x - y + z = 0$.

Solución. Como

$$\mathbf{x}_u\left(u,v\right) = \left(1,1,2u\right), \ \mathbf{x}_v\left(u,v\right) = \left(-1,1,2v\right),$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{x}_u\left(u,v\right) \times \mathbf{x}_v\left(u,v\right) = \left(1,1,2u\right) \times \left(-1,1,2v\right) \\ &= \left(2v - 2u, -2u - 2v, 2\right), \end{aligned}$$

que es paralelo al vector $(v - u, -u - v, 1)$. Y ambos son perpendiculares al plano tangente.

Por otro lado, un vector perpendicular al plano $x - y + z = 0$ es $(1, -1, 1)$. Para que los dos planos sean paralelos debe cumplirse

$$\begin{aligned} &(v - u, -u - v, 1) = k\left(1, -1, 1\right) \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow k = 1, v - u = 1, u + v = 1. \end{aligned}$$

Esto se cumple cuando $v = 1, u = 0$, es decir en el punto

$$\mathbf{x}\left(0,1\right) = \left(-1,1,1\right).$$

10. Determinar el vector tangente al paralelo $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta, \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1 es

$$\mathbf{x}\left(\theta,\phi\right) = \left(\cos\theta\operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \cos\phi\right),$$

para $\theta \in \left(0, 2\pi\right), \phi \in \left(0, \pi\right)$.

Solución. La parametrización es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\left(\theta,\phi\right) &= \left(\cos\theta\operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \cos\phi\right), \\ \mathbf{x}\left(t\right) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t, \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

Entonces podemos hacerlo directamente

$$\mathbf{x}'\left(t\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, 0\right).$$

Lo comprobamos con la igualdad

$$\mathbf{x}'(t) = u'(t)\mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + v'(t)\mathbf{x}_v(u(t), v(t).$$

En este caso, es

$$\begin{aligned} u(t) = t, \quad v(t) &= \frac{\pi}{4}, \\ \mathbf{x}_y(\theta, \phi) &= (-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\theta \operatorname{sen}\phi, 0). \end{aligned}$$

Entonces

$$u'(t) = 1, \quad v'(t) = 0.$$

Y tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{x}_u(u(t), v(t)) \\ &= \mathbf{x}_u\left(t, \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(-\operatorname{sen} t \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}, \cos t \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}, 0\right) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, 0\right). \end{aligned}$$

11. Determínense los coeficientes de la primera forma fundamental de la superficie dada por

$$x = u\cos v; y = u \operatorname{sen} v; z = u^2$$

en el punto $(1, 0, 1)$.

Solución: Tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) &= \left(u\cos v, u \operatorname{sen} v, u^2\right), \\ \mathbf{x}_u(u, v) &= (\cos v, \operatorname{sen} v, 2u), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= (-u \operatorname{sen} v, u\cos v, 0). \end{aligned}$$

A partir de estos valores, hacemos:

$$\begin{aligned}
E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u \\
&= (\cos v,\ \operatorname{sen} v, 2u) \cdot (\cos v,\ \operatorname{sen} v, 2u) \\
&= \cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v + (2u)^2 = 1 + 4u^2, \\
F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\
&= (\cos v,\ \operatorname{sen} v, 2u) \cdot (-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 0) \\
&= -u \cos v \operatorname{sen} v + u \cos v \operatorname{sen} v \\
&= 0, \\
G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \\
&= (-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 0) \cdot (-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 0) \\
&= (-u \operatorname{sen} v)^2 + (u \cos v)^2 \\
&= u^2.
\end{aligned}$$

El punto $(1,0,1)$ se corresponde con los valores de $u = 1; v = 0$; con lo que

$$E = 5,\ F = 0,\ G = 1.$$

12. Tenemos un cilindro dado por la ecuación:

$$\mathbf{x}(u,v) = (\cos u,\ \operatorname{sen} u, av),$$

para $u \in [-\pi, \pi], v \in \mathbb{R}$.

Determínense los coeficientes de la primera forma fundamental

Solución: En un punto $\mathbf{x}(u,v)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u &= (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0), \\
\mathbf{x}_v &= (0,0,a).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u \\
&= (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \cdot (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \\
&= \operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\
&= (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \cdot (0,0,a) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \\
&= (0,0,a) \cdot (0,0,a) = a^2.
\end{aligned}$$

13. Tenemos un cono dado por la ecuación:

$$\mathbf{x}(u,v) = (v\cos u, v\,\mathrm{sen}\,u, av),$$

para $u \in [-\pi,\pi], v \in \mathbb{R}$.

Determínenese los coeficientes de la primera forma fundamental

Solución: Determinamos los coeficientes de la primera forma fundamental. En un punto $\mathbf{x}(u,v)$ se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (-v\,\mathrm{sen}\,u, v\cos u, 0),\\ \mathbf{x}_v &= (\cos u,\ \mathrm{sen}\,u, a).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u\\ &= (-v\,\mathrm{sen}\,u, v\cos u, 0)\cdot(-v\,\mathrm{sen}\,u, v\cos u, 0)\\ &= v^2\cos^2 u + v^2\,\mathrm{sen}\,^2 u = v^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v\\ &= (-v\,\mathrm{sen}\,u, v\cos u, 0)\cdot(\cos u,\ \mathrm{sen}\,u, a) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v\\ &= (\cos u,\ \mathrm{sen}\,u, a)\cdot(\cos u,\ \mathrm{sen}\,u, a)\\ &= a^2 + \cos^2 u +\ \mathrm{sen}\,^2 u = a^2 + 1.\end{aligned}$$

14. Tenemos la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio R, dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(\theta,\phi) = (R\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, R\cos\phi),$$

para $\theta \in [0,2\pi], \phi \in [0,\pi]$. θ representa la latitud y ϕ la longitud de un punto de la esfera.

Estudíese si en el punto $(0,R,0)$, las curvas contenidas en la esfera y que pasan por este punto, dadas por

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_1(t) &= (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\,t, 0),\\ \mathbf{c}_2(t) &= (0, R\cos t, R\,\mathrm{sen}\,t)\end{aligned}$$

son geodésicas.

Solución: Si lo son, deben verificar la ecuación de las geodésicas.

Sabemos que los coeficientes de la primera forma fundamental en un punto $\mathbf{x}(\theta, \phi)$ son

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = R^2 \operatorname{sen}^2\phi, \\ F &= \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\phi = 0 \\ G &= \mathbf{x}_\phi \cdot \mathbf{x}_\phi = R^2. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\theta &= \left(-R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, R\cos\theta \operatorname{sen}\phi, 0\right), \\ \mathbf{x}_\phi &= \left(R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi\right), \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\theta\theta} &= \left(-R\cos\theta \operatorname{sen}\phi, -R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, 0\right), \\ \mathbf{x}_{\theta\phi} &= \left(-R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, R\cos\theta\cos\phi, 0\right), \\ \mathbf{x}_{\phi\phi} &= \left(-R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -R\cos\phi\right). \end{aligned}$$

Entonces, tenemos A y B:

$$\begin{aligned} A &= (\theta')^2 \mathbf{x}_{\theta\theta} \cdot \mathbf{x}_\theta + 2\theta'\phi'\mathbf{x}_{\theta\phi} \cdot \mathbf{x}_\theta + (\phi')^2 \mathbf{x}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{x}_\theta \\ &= (\theta')^2 \left(-R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, 0\right) \cdot \left(-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 0\right) \\ &+ 2\theta'\phi' \left(-R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, R\cos\theta\cos\phi, 0\right) \cdot \left(-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 0\right) \\ &+ (\phi')^2 \left(-R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -R\cos\phi\right) \cdot \left(-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 0\right) \\ &= R^2\theta'\phi' \operatorname{sen} 2\phi, \\ B &= (\theta')^2 \mathbf{x}_{\theta\theta} \cdot \mathbf{x}_\phi + 2\theta'\phi'\mathbf{x}_{\theta\phi} \cdot \mathbf{x}_\phi + (\phi')^2 \mathbf{x}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{x}_\phi \\ &= (\theta')^2 \left(-R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, 0\right) \cdot \left(R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi\right) \\ &+ 2\theta'\phi' \left(-R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, R\cos\theta\cos\phi, 0\right) \cdot \left(R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi\right) \\ &+ (\phi')^2 \left(-R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -R\cos\phi\right) \cdot \left(R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi\right) \\ &= -\frac{1}{2}R^2(\theta')^2 \operatorname{sen} 2\phi. \end{aligned}$$

Con esta notación, la condición que cumplen las geodésicas es

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2\operatorname{sen}^2\phi & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta'' \\ \phi'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R^2\theta'\phi'\operatorname{sen}2\phi \\ -\frac{1}{2}R^2(\theta')^2\operatorname{sen}2\phi \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = \theta''\operatorname{sen}^2\phi + \theta'\phi'\operatorname{sen}2\phi, \\ 0 = \phi'' - \frac{1}{2}(\theta')^2\operatorname{sen}2\phi. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Para el punto $(0, R, 0) = \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, podemos escribir la curva $\mathbf{c}_1(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\,t, 0)$ como

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_1(t) &= (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\,t, 0)\\ &= \mathbf{x}(\theta(t), \phi(t)) = \mathbf{x}\left(t, \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Es decir:

$$\theta(t) = t,\ \phi(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= 0, \quad \phi''(t) = 0,\\ \theta'(t) &= 1, \quad \theta''(t) = 0.\end{aligned}$$

La ecuación de las geodésicas es

$$\begin{cases} 0 = 0 + 1 \cdot 0 \cdot\ \mathrm{sen}\,2\phi(t),\\ 0 = 0 - \frac{1}{2}(1)^2\,\mathrm{sen}\,2\phi(t) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\pi. \end{cases}$$

Como estas igualdades son ciertas, entonces esta línea (corresponde al ecuador) es una geodésica.

Procedemos igual para $\mathbf{c}_2(t) = (0, R\cos t, R\,\mathrm{sen}\,t)$. En esta curva, es

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_2(t) &= (0, R\,\mathrm{sen}\,t, R\cos t)\\ &= \mathbf{x}(\theta(t), \phi(t)) = \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, t\right)\\ &\Longrightarrow \theta(t) = \frac{\pi}{2},\ \phi(t) = t.\end{aligned}$$

Para estas funciones, tenemos:

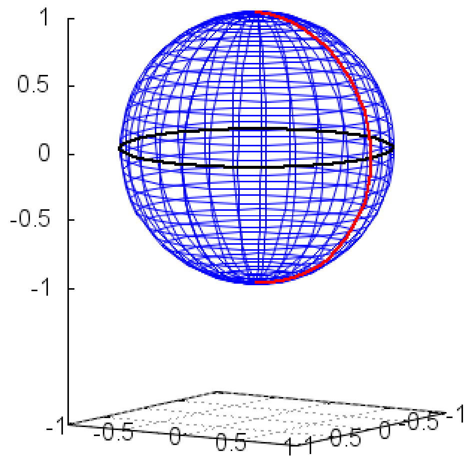
$$\begin{aligned}\phi'(t) &= 1, \quad \phi''(t) = 0,\\ \theta'(t) &= 0, \quad \theta''(t) = 0,\end{aligned}$$

y la ecuación de las geodésicas queda reducida a

$$\begin{cases} 0 = \theta''\,\mathrm{sen}^2\phi + \theta'\phi'\,\mathrm{sen}\,2\phi,\\ 0 = \phi'' - \frac{1}{2}(\theta')^2\,\mathrm{sen}\,2\phi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 + 0 \cdot 1 \cdot\ \mathrm{sen}\,2\phi(t),\\ 0 = 0 - \frac{1}{2}(0)^2\,\mathrm{sen}\,2\phi(t). \end{cases}$$

También la verifica, luego es una geodésica. Esta curva es un meridiano. Se representan en la siguiente figura:



15. Tenemos la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio R, dada por la parametrización
$$\mathbf{x}(\theta,\phi)=(R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\phi),$$
para $\theta\in[0,2\pi]$, $\phi\in[0,\pi]$. θ representa la latitud y ϕ la longitud de un punto de la esfera.

Estudíese si en el punto $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}R,\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)$, la curvas contenida en la esfera dadas por
$$\begin{aligned}\mathbf{c}(t)&=\left(R\cos t\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}, R\operatorname{sen}t\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}, R\cos\frac{\pi}{4}\right)\\&=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\cos t,\frac{\sqrt{2}}{2}R\operatorname{sen}t,\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)\end{aligned}$$
y que pasa por este punto es una geodésica.

Solución: Tenemos que comprobar que verifica la ecuación de las geodésicas, que es para esta superficie:
$$\begin{cases}0=\theta''\operatorname{sen}^2\phi+\theta'\phi'\operatorname{sen}2\phi,\\0=\phi''-\frac{1}{2}(\theta')^2\operatorname{sen}2\phi.\end{cases}$$
Para esta curva, es
$$\theta(t)=t,\ \phi(t)=\frac{\pi}{4}.$$

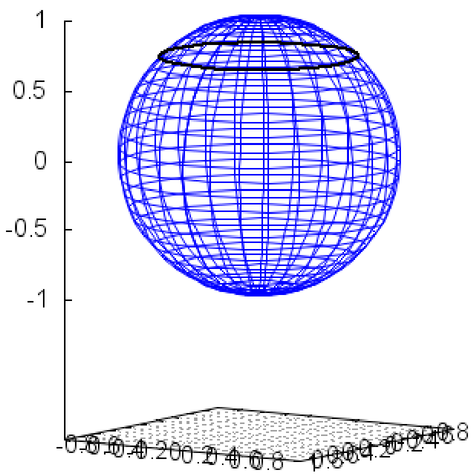
Por eso:

$$\begin{array}{ll} \phi'(t) = 0, & \phi''(t) = 0, \\ \theta'(t) = 1, & \theta''(t) = 0. \end{array}$$

Deben ser 0 las dos expresiones siguientes:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \cdot \operatorname{sen}^2\phi + 1 \cdot 0 \cdot \operatorname{sen} 2\phi = 0, \\ a_2 = 0 - \frac{1}{2}1^2 \operatorname{sen} 2\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} \neq 0. \end{cases}$$

por tanto, esta curva no es una geodésica. Esta curva es un paralelo, que se representa a continuación:



16. Tenemos un cilindro dado por la ecuación:

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, av),$$

para $u \in [-\pi, \pi], v \in \mathbb{R}$.

Estudíense cuáles son las geodésicas en el punto $\mathbf{x}(0,0) = (1,0,0)$, si el vector tangente a la geodésica es el vector (u_1, v_1).

Solución: Sabemos que

$$\begin{aligned} E &= 1, \\ F &= 0, \\ G &= a^2. \end{aligned}$$

Además, como

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0)\,, \\ \mathbf{x}_v &= (0, 0, a)\,,\end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} &= (-\cos u, -\operatorname{sen} u, 0)\,, \\ \mathbf{x}_{uv} &= (0, 0, 0)\,, \\ \mathbf{x}_{vv} &= (0, 0, 0)\,.\end{aligned}$$

Entonces, tenemos A y B:

$$\begin{aligned}A &= (u')^2 (-\cos u, -\operatorname{sen} u, 0) \cdot (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \\ &\quad + 2u'v' (0,0,0) \cdot (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) + (v')^2 (0,0,0) \cdot (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \\ &\quad = 0, \\ B &= (u')^2 (-\cos u - \operatorname{sen} u, 0) \cdot (0,0,1) \\ &\quad + 2u'v' (0,0,0) \cdot (0,0,1) + (v')^2 (0,0,0) \cdot (0,0,1) \\ &\quad = 0.\end{aligned}$$

Con esta notación, la condición que cumplen las geodésicas es

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 0 = u'', \\ 0 = a^2 v''. \end{cases}$$

Las condiciones iniciales son las del punto $\mathbf{x}(0,0) = (1,0,0) = \mathbf{x}(u(0), v(0))$. Entonces, por el enunciado, es

$$\begin{aligned}u(0) &= 0, & v(0) &= 0, \\ u'(0) &= u_1, & v'(0) &= v_1.\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales, tenemos

$$\begin{aligned}u(t) &= k_1 t + c_1, \\ v(t) &= k_2 a^2 t + c_2.\end{aligned}$$

Con las condiciones iniciales, determinamos el valor de estos coeficientes:

$$\begin{aligned}u'(0) &= k_1 = u_1, & u(0) &= c_1 = 0, \\ v'(0) &= k_2 a^2 = v_1, & v(0) &= c_2 = 0.\end{aligned}$$

Por eso, es:

$$(u(t), v(t)) = (k_1 t, v_1 t).$$

Las geodésicas son las curvas

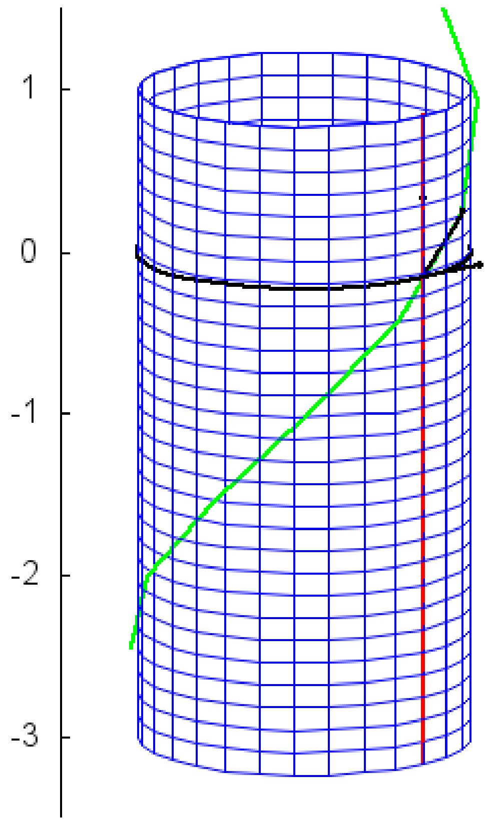
$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t)) = (\cos k_1 t, \operatorname{sen} k_1 t, a v_1 t).$$

Si el vector tangente a la geodésica es de la forma $(0, v_1)$, entonces la geodésica es la recta paralela al eje z que pasa por $(1,0,0)$dada por $(1, 0, a v_1 t)$.

Si el vector tangente a la geodésica es de la forma $(u_1, 0)$, entonces la geodésica es la circunferencia de radio 1 contenida en un plano paralelo al plano xy que pasa por $(1,0,0)$. Está ada por $(\cos k_1 t, \operatorname{sen} k_1 t, 0)$.

Si el vector tangente a la geodésica es de la forma (u_1, v_1), entonces la geodésica una hélice contenida en el cilindro de ecuación$(\cos k_1 t, \operatorname{sen} k_1 t, a v_1 t)$.

Se representan en la siguiente figura, junto con los vectores tangente a la curva:



Hemos elegido el punto $(1,0,0)$, pero este resultado se puede extrapolar a cualquier punto, es decir, las únicas geodésicas del cilindro son rectas paralelas a su eje, circunferencias perpendiculares a él y hélices.

17. Consideramos la imagen de la curva

$$\mathbf{x}(t) = (\theta(t), \phi(t)) = \left(\ln \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right), \frac{\pi}{2} - t\right), \ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

sobre la esfera de radio uno dada por

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi),$$

para $\theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi]$. Determínese su longitud.

Solución. Conocemos los coeficientes de la primera forma fundamental de la esfera, que son:

$$\begin{aligned} E &= \operatorname{sen}^2\phi, \\ F &= 0, \\ G &= 1. \end{aligned}$$

Además, para esta curva, tenemos:

$$\begin{aligned} \theta'(t) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)}\left(\left(1 + \cot^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}, \\ \phi'(t) &= -1. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} I &= E(\theta')^2 + 2F\theta'\phi' + G(\phi')^2 \\ &= \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}\right)^2 + 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}(-1) + 1 \cdot (-1)^2 \\ &= 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

La longitud de la curva es

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(E\left(\theta'\right)^2 + 2F\theta'\phi' + G\left(\phi'\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^{\frac{1}{2}} dt = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \sqrt{2}\, t|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.
\end{aligned}
$$

18. Sea S la parte del cono $x^2 + y^2 = z^2$ parametrizada por

$$
\mathbf{x}\left(u, v\right) = \left(v \cos u, v \operatorname{sen} u, v\right)
$$

para $v > 0, 0 < u < \pi$. Sea $P = (0, 0, 1) = \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. ¿Cuál es el ángulo que forman las curvas parámetro en este punto?

Solución: Las curvas parámetro que pasan por $P = (0, 0, 1) = \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ son:

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{x}_1(u) & = \mathbf{x}(u, 1) = (\cos u,\ \operatorname{sen} u, 1), & 0 < u < \pi, \\
\mathbf{x}_2(v) & = \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, v\right)) = (v \cos\frac{\pi}{2}, v \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}, v) = (0, v, v), & v > 0.
\end{array}
$$

Entonces, los vectores

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{x}_1'\left(\frac{\pi}{2}, v\right)) = \left(-1, 0, 0\right), \ \|\mathbf{u}_1\| = 1, \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{x}_2'(1) = \left(0, 1, 1\right), \ \|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

son tangentes a las curvas parámetro por el punto $(0, 0, 1) = \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Por eso, el ángulo que forman las curvas (es el ángulo que forman los vectores tangentes) en el punto dado es:

$$
\cos\alpha = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = (-1, 0, 1) \cdot (0, 1, 1) = (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0.
$$

Esto significa que las curvas parámetro son ortogonales.

Podíamos haber utilizado la ecuación para el ángulo que forman las curvas parámetro en un punto. Además, sabemos que

$$
E = v^2, F = 0, G = 2.
$$

y en nuestro punto es:

$$
E = 1, F = 0, G = 2
$$

Entonces:

$$
\cos\alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{0}{\sqrt{1 \cdot 1}} = 0.
$$

19. Sea S la parte de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1 parametrizada por
$$\mathbf{x}(\theta,\phi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi),$$
para $\theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi]$. Vamos a determinar el área de la región delimitada por las curvas coordenadas $\phi_0 = \frac{\pi}{4}, \phi_1 = \frac{\pi}{2}$ y $\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \theta_1 = \pi$. ¿Cuál es el área de la esfera?

Solución. Sabemos que los coeficientes de la primera forma fundamental de la esfera, que son:
$$E = \operatorname{sen}^2\phi,\ F = 0,\ G = 1.$$
Entonces es:
$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\operatorname{sen}^2\phi} = \operatorname{sen}\phi,$$
para la región considerada. Entonces, el área es:
$$\begin{aligned}
A &= \int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{\phi_0}^{\phi_1} \sqrt{EG - F^2}\, d\phi d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\phi d\phi d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos\phi|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\, d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{4}\right) d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\theta|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.
\end{aligned}$$
Si queremos calcular el área de la esfera, hacemos
$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} -\cos\phi|_0^{\pi}\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (-\cos\pi + \cos 0)\, d\theta = 2\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 2\,\theta|_0^{2\pi} = 4\pi.
\end{aligned}$$

20. Sea S la superficie dada por la parametrización
$$\mathbf{x}(u,v) = \left(u^2 - v^2, u^2 + v^2, u\right)$$

en $D = (0,2) \times (0,2)$. Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental.

Solución. La aplicación $\mathbf{x}(u,v) = (u^2 - v^2, u^2 + v^2, u)$ es una parametrización de la superficie en un entorno de cada uno de sus puntos en $D \subset \mathbb{R}^2$. Comenzamos determinando las derivadas parciales de $\mathbf{x}(u,v)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u,v) &= (2u, 2u, 1), \\ \mathbf{x}_v(u,v) &= (-2v, 2v, 0). \end{aligned}$$

Los coeficientes e, f y g de la segunda forma fundamental se determinan a partir del vector normal unitario $\mathbf{N}$ y las derivadas segundas de $\mathbf{x}$. Empezamos con el vector normal normal unitario $\mathbf{N}$. Sabemos que el vector

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2u & 2u & 1 \\ -2v & 2v & 0 \end{vmatrix} = (-2v, -2v, 8uv) = -2v(1, 1, -4u)$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal. Entonces: .

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| &= \sqrt{(-2v)^2\left(1^2 + 1^2 + (-4u)^2\right)} = 2v\sqrt{2 + 16u^2}, \\ \mathbf{N} &= \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{-2v(1,1,-4u)}{2v\sqrt{2+16u^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2+16u^2}}(-1,-1,4u) \\ &= \left(\frac{-1}{\sqrt{2+16u^2}}, \frac{-1}{\sqrt{2+16u^2}}, 4\frac{u}{\sqrt{2+16u^2}}\right). \end{aligned}$$

Calculamos ahora las derivadas segundas:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= (2, 2, 0), \\ \mathbf{x}_{vv} &= (-2, 2, 0), \\ \mathbf{x}_{uv} &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Entonces los coeficientes son:

$$\begin{aligned}
e &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{u\,u} = \frac{1}{\sqrt{2+16u^2}}\left(-1,-1,4u\right)\cdot\left(2,2,0\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2+16u^2}}\left(-2-2\right) = -\frac{4}{\sqrt{2+16u^2}},\\
f &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{u\,v} = \frac{1}{\sqrt{2+16u^2}}\left(-1,-1,4u\right)\cdot\left(0,0,0\right) = 0,\\
g &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{v\,v} = \frac{1}{\sqrt{2+16u^2}}\left(-1,-1,4u\right)\cdot\left(-2,2,0\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2+16u^2}}\left(2-2\right) = 0.
\end{aligned}$$

21. Sea T el toro de ecuaciones

$$\begin{aligned}
x &= (4+\operatorname{sen} u)\cos v,\\
y &= (4+\operatorname{sen} u)\operatorname{sen} v,\\
z &= \cos u.
\end{aligned}$$

a) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental.

b) Clasifique sus puntos.

Solución. La aplicación $\mathbf{x}\,(u,v) = ((4+\operatorname{sen} u)\cos v, (4+\operatorname{sen} u)\operatorname{sen} v, \cos u)$ es una parametrización del toro en un entorno de cada uno de sus puntos seleccionando un abierto D adecuado para cada $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.

Calculamos los coeficientes de la segunda forma fundamental en un punto genérico $\mathbf{x}\,(u,v)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u\,(u,v) &= \left(\cos u\cos v, \cos u \operatorname{sen} v, -\operatorname{sen} u\right),\\
\mathbf{x}_v\,(u,v) &= \left(-\left(4+\operatorname{sen} u\right)\operatorname{sen} v, \left(4+\operatorname{sen} u\right)\cos v, 0\right).
\end{aligned}$$

Para clasificar el punto, tenemos que calcular los coeficientes L, M y N de la segunda forma fundamental a partir del vector normal unitario $\mathbf{n}$

y las derivadas de $\mathbf{x}$. Empezamos con el vector normal unitario $\mathbf{n}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos u \cos v & \cos u \operatorname{sen} v & -\operatorname{sen} u \\ -(4+\operatorname{sen} u)\operatorname{sen} v & (4+\operatorname{sen} u)\cos v & 0 \end{vmatrix} \\
&= (4+\operatorname{sen} u)\left(\cos v \operatorname{sen} u,\ \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \cos u \cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v \cos u\right) \\
&= (4+\operatorname{sen} u)\left(\cos v \operatorname{sen} u,\ \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \cos u\right), \\
\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| &= \sqrt{(4+\operatorname{sen} u)^2\left((\cos v \operatorname{sen} u)^2 + (-\operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)^2 + \cos^2 u\right)} \\
&= (4+\operatorname{sen} u)\sqrt{\cos^2 v \operatorname{sen}^2 u + \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u} \\
&= (4+\operatorname{sen} u), \\
\mathbf{N} &= \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \left(\cos v \operatorname{sen} u,\ \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \cos u\right).
\end{aligned}
$$

Además, como

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{uu} &= \left(-\operatorname{sen} u \cos v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, -\cos u\right), \\
\mathbf{x}_{vv} &= \left(-(4+\operatorname{sen} u)\cos v, -(4+\operatorname{sen} u)\operatorname{sen} v, 0\right), \\
\mathbf{x}_{uv} &= \left(-\cos u \operatorname{sen} v, \cos u \cos v, 0\right),
\end{aligned}
$$

entonces los coeficientes son:

$$
\begin{aligned}
e &= \mathbf{N}\cdot \mathbf{x}_{u\,u} \\
&= \left(\cos v \operatorname{sen} u,\ \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \cos u\right)\cdot\left(-\operatorname{sen} u \cos v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, -\cos u\right) \\
&= -\operatorname{sen}^2 u \cos^2 v - \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen}^2 u - \cos^2 u = -1, \\
f &= \mathbf{N}\cdot \mathbf{x}_{u\,v} \\
&= \left(\cos v \operatorname{sen} u,\ \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \cos u\right)\cdot\left(-\cos u \operatorname{sen} v, \cos u \cos v, 0\right) \\
&= -\operatorname{sen} u \cos v \cos u \operatorname{sen} v + \operatorname{sen} u \cos v \cos u \operatorname{sen} v = 0, \\
g &= \mathbf{N}\cdot \mathbf{x}_{v\,v} \\
&= \left(\cos v \operatorname{sen} u,\ \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \cos u\right)\cdot\left(-(4+\operatorname{sen} u)\cos v, -(4+\operatorname{sen} u)\operatorname{sen} v, 0\right) \\
&= -\left(\operatorname{sen} u \cos^2 v\right)(4+\operatorname{sen} u) - \left(\operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen} u\right)(4+\operatorname{sen} u) \\
&= -\operatorname{sen} u\,(4+\operatorname{sen} u).
\end{aligned}
$$

Por eso

$$eg - f^2 = -1\left(-\operatorname{sen} u\,(4+\operatorname{sen} u)\right) - 0 = \operatorname{sen} u\,(4+\operatorname{sen} u).$$

Como $\operatorname{sen} u\,(4+\operatorname{sen} u)$ es una función continua, además se cumple que

$$eg - f^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{sen} u = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u = \pi, 0,$$

y en $\frac{\pi}{2}$ tenemos que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\left(4+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) > 0$, entonces:

- Si $0 < u < \pi$, entonces $\mathbf{x}(u, v)$ es elíptico,
- Si $\pi < u < 2\pi$, entonces $\mathbf{x}(u, v)$ es hiperbólico,
- Si $u = 0$ o $u = \pi$, entonces $e \neq 0$ pero $eg - f^2 = 0$, por lo que es parabólico.

22. Sea el cilindro dado por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v).$$

Determínense los vectores curvatura geodésica y curvatura normal en el punto $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 0)$ de la hélice dada por $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$.

Solución: Determinamos los vectores tangentes y normal al cilindro. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u, v) &= (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= (0, 0, 1).\end{aligned}$$

En $(1, 0, 1) = \mathbf{x}(1, 0)$ es

$$\mathbf{x}_u(1, 0) = (0, 1, 0), \ \mathbf{x}_v(1, 0) = (0, 0, 1).$$

El vector normal a la superficie es

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(1, 0) &= \frac{\mathbf{x}_u(1, 0) \times \mathbf{x}_v(1, 0)}{\|\mathbf{x}_u(1, 0) \times \mathbf{x}_v(1, 0)\|} \\ &= \frac{(0, 1, 0) \times (0, 0, 1)}{\|(0, 1, 0) \times (0, 0, 1)\|} \\ &= (1, 0, 0).\end{aligned}$$

Ahora parametrizamos la hélice por la longitud de arco. Como $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, entonces

$$\mathbf{x}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1), \quad \|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

y

$$s(t) = \int_0^t \|\mathbf{x}'(t)\| \, dt = \int_0^t \sqrt{2} dt = \sqrt{2} t.$$

Entonces, la hélice parametrizada por la longitud de arco es

$$\mathbf{x}(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right).$$

Por eso:

$$\mathbf{x}'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\operatorname{sen}\tfrac{s}{\sqrt{2}}, \cos\tfrac{s}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \mathbf{x}'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0, 1, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right),$$
$$\mathbf{x}''(s) = \frac{1}{2}\left(-\cos\tfrac{s}{\sqrt{2}}, -\operatorname{sen}\tfrac{s}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \mathbf{x}''(0) = \frac{1}{2}(-1, 0, 0).$$

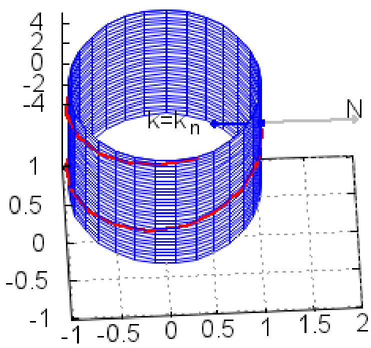
Entonces

$$\mathbf{k}(0) = \mathbf{x}''(0) = \frac{1}{2}(-1, 0, 0).$$

Lo escribimos a partir de los vectores curvatura geodésica y curvatura normal. Como una base del espacio tangente es $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ y una base de la recta normal es $(1, 0, 0)$, tenemos que

$$\frac{1}{2}(-1, 0, 0) = (0, 0, 0) + \frac{1}{2}(-1, 0, 0)$$
$$\Longrightarrow \mathbf{k}_g(s) = (0, 0, 0), \ \mathbf{k}_n(s) = \frac{1}{2}(-1, 0, 0) = -\frac{1}{2}(1, 0, 0).$$

En la siguiente figura se representan el cilindro, la hélice, los vectores



23. Determine la curvatura geodésica del paralelo y del meridiano que pasan por un punto de la parte de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio R, dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(\theta,\phi) = (R\cos\theta \operatorname{sen}\phi, R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\phi),$$

para $\theta \in (0, 2\pi)$, $\phi \in (0,\pi)$.

Solución: Comenzamos determinando una base del espacio tangente y de la recta normal a la esfera. Como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_\theta &= (-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 0),\\
\mathbf{x}_\phi &= (R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi),
\end{aligned}$$

Una base unitaria del espacio tangente es:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \frac{\mathbf{x}_\theta}{\|\mathbf{x}_\theta\|} = \frac{(-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 0)}{\|(-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 0)\|}\\
&= \frac{1}{R\operatorname{sen}\phi}(-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 0)\\
&= (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0),\\
\mathbf{v} &= \frac{\mathbf{x}_\phi}{\|\mathbf{x}_\phi\|} = \frac{(R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi)}{\|(R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi)\|}\\
&= \frac{1}{R}(R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi)\\
&= (\cos\theta\cos\phi, \operatorname{sen}\theta\cos\phi, -\operatorname{sen}\phi).
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi &= (-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 0) \times (R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi)\\
&= \left(-R^2\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi, -R^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi, -R^2(\cos\phi\operatorname{sen}\phi)\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right)\right)\\
&= \left(-R^2\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi, -R^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi, -R^2\cos\phi\operatorname{sen}\phi\right)
\end{aligned}$$

Entonces tenemos que una base de la recta normal es:

$$\begin{aligned}
\mathbf{N} &= \frac{\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi}{\|\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi\|}\\
&= \frac{(-R^2\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi, -R^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi, -R^2\cos\phi\operatorname{sen}\phi)}{\sqrt{(-R^2\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi)^2 + (-R^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi)^2 + (-R^2\cos\phi\operatorname{sen}\phi)^2}}\\
&= \frac{(-\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi, -\cos\phi\operatorname{sen}\phi)}{\sqrt{\cos^2\theta\operatorname{sen}^4\phi + \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^4\phi + \cos^2\phi\operatorname{sen}^2\phi}}\\
&= \frac{(-\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi, -\cos\phi\operatorname{sen}\phi)}{|\operatorname{sen}\phi|}.\\
&= (-\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -\cos\phi),
\end{aligned}$$

ya que $\phi \in (0, \pi)$.

La ecuación del meridiano es $\theta = c$ constante, es decir, es

$$\alpha(\phi) = (R' \operatorname{sen} \phi, R'' \operatorname{sen} \phi, R \cos \phi),$$

donde $R' = R \cos \theta$ y $R'' = R \operatorname{sen} \theta$ son constantes. Como

$$\begin{aligned} \alpha'(\phi) &= (R' \cos \phi, R'' \cos \phi, -R \operatorname{sen} \phi) \\ \alpha''(\phi) &= (-R' \operatorname{sen} \phi, -R'' \operatorname{sen} \phi, -R \cos \phi), \end{aligned}$$

entonces el vector tangente al meridiano es:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{R} (R' \cos \phi, R'' \cos \phi, -R \operatorname{sen} \phi),$$

Un vector en la dirección de la normal principal a la curva está dado por

$$\begin{aligned} (\alpha' \times \alpha'') \times \alpha' &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ R' \cos \phi & R'' \cos \phi & -R \operatorname{sen} \phi \\ -R' \operatorname{sen} \phi & -R'' \operatorname{sen} \phi & -R \cos \phi \end{vmatrix} \times \alpha' \\ &= (-RR'', RR', 0) \times (R' \cos \phi, R'' \cos \phi, -R \operatorname{sen} \phi) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -RR'' & RR' & 0 \\ R' \cos \phi & R'' \cos \phi & -R \operatorname{sen} \phi \end{vmatrix} \\ &= \left(-R^2 R' \operatorname{sen} \phi, -R^2 R'' \operatorname{sen} \phi, -R \cos \phi \left((R')^2 + (R'')^2\right)\right) \\ &= \left(-R^2 R' \operatorname{sen} \phi, -R^2 R'' \operatorname{sen} \phi, -R^3 \cos \phi\right). \end{aligned}$$

Su módulo es

$$\sqrt{R^4 (R')^2 \operatorname{sen}^2 \phi + R^4 (R'')^2 \operatorname{sen}^2 \phi + R^6 \cos^2 \phi} = R^3.$$

Por tanto el vector normal es:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \left(-\frac{R'}{R} \operatorname{sen} \phi, -\frac{R''}{R} \operatorname{sen} \phi, -\cos \phi\right) \\ &= (-\cos \theta \operatorname{sen} \phi, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, -\cos \phi). \end{aligned}$$

Como la función curvatura es

$$
\begin{aligned}
k(\phi) &= \frac{\|\alpha'(\phi) \times \alpha''(\phi)\|}{\|\alpha'(\phi)\|^3} = \frac{\|(-RR'', RR', 0)\|}{\|(R'\cos\phi, R''\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi)\|^3} \\
&= \frac{\sqrt{(-RR'')^2 + (RR')^2}}{\left((R'\cos\phi)^2 + (R''\cos\phi)^2 + (-R\operatorname{sen}\phi)^2\right)^{3/2}} \\
&= \frac{\sqrt{(-RR\operatorname{sen}\theta)^2 + (RR\cos\theta)^2}}{\left((R\cos\theta\cos\phi)^2 + (R\operatorname{sen}\theta\cos\phi)^2 + (-R\operatorname{sen}\phi)^2\right)^{3/2}} \\
&= \frac{\sqrt{R^4\operatorname{sen}^2\theta + R^4\cos^2\theta}}{(R^2\cos^2\theta\cos^2\phi + R^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi + R^2\operatorname{sen}^2\phi)^{3/2}} \\
&= \frac{R^2}{(R^2)^{3/2}} = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R},
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbf{k} = k\mathbf{n} &= k\,(-\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -\cos\phi) \\
&= \left(-\frac{1}{R}\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -\frac{1}{R}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -\frac{1}{R}\cos\phi\right).
\end{aligned}
$$

Además sabemos que

$$\mathbf{k} = \frac{1}{R}\mathbf{N} = \frac{1}{R}\mathbf{k}_n = \kappa_n\mathbf{k}_n, \quad \mathbf{k}_g = \mathbf{0}$$

y podemos concluir que la curvatura geodésica es 0.

Vamos a determinar el vector curvatura geodésica en el paralelo. La ecuación del paralelo es $\phi = c$ constante, es decir, es

$$\beta(\theta) = (R''\cos\theta, R''\operatorname{sen}\theta, R'),$$

donde $R' = R\cos\phi$ y $R'' = R\operatorname{sen}\phi$ son constantes. Como

$$\beta'(\theta) = (-R''\operatorname{sen}\theta, R''\cos\theta, 0), \ \beta''(\theta) = (-R''\cos\theta, -R''\operatorname{sen}\theta, 0),$$

entonces el vector tangente al paralelo es:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{t} &= \frac{1}{R''}(-R''\operatorname{sen}\theta, R''\cos\theta, 0) \\
&= (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0).
\end{aligned}
$$

Un vector en la dirección de la normal principal a la curva está dado por

$$
\begin{aligned}
(\beta' \times \beta'') \times \beta' &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R'' \operatorname{sen}\theta & R''\cos\theta & 0 \\ -R''\cos\theta & -R''\operatorname{sen}\theta & 0 \end{vmatrix} \times \beta' \\
&= \left(0, 0, (R'')^2\right) \times (R'\cos\phi, R''\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi) \\
&= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & (R'')^2 \\ -R''\operatorname{sen}\theta & R''\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\
&= \left(-(R'')^3\cos\theta, -(R'')^3 (\operatorname{sen}\theta), 0\right) \\
&= \left(-(R\operatorname{sen}\theta)^3\cos\theta, -(R\operatorname{sen}\theta)^3 (\operatorname{sen}\theta), 0\right) \\
&= \left(-R^3\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta, -R^3\operatorname{sen}^4\theta, 0\right)
\end{aligned}
$$

Su módulo es

$$\sqrt{R^6\operatorname{sen}^6\theta\cos^2\theta + R^6\operatorname{sen}^8\theta} = R^3\operatorname{sen}^3\theta.$$

Por tanto el vector normal es:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \frac{1}{R^3\operatorname{sen}^3\theta.}\left(-R^3\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta, -R^3\operatorname{sen}^4\theta, 0\right) \\
&= (-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta, 0).
\end{aligned}
$$

En este caso, la función curvatura es

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{\|\beta' \times \beta''\|}{\|\beta'\|^3} = \frac{\|(0,0,(R'')^2)\|}{\|(-R''\operatorname{sen}\theta, R''\cos\theta, 0)\|^3} \\
&= \frac{\sqrt{(R'')^4}}{\left((R''\operatorname{sen}\theta)^2 + (R''\cos\theta)^2\right)^{3/2}} \\
&= \frac{(R'')^2}{(R'')^3} = \frac{1}{R''}.
\end{aligned}
$$

Y entonces

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n} = \frac{1}{R''}(-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta, 0) = \frac{1}{R\operatorname{sen}\phi}(-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta, 0).$$

Tenemos $\mathbf{k}(s) = \mathbf{k}_g(s) + \mathbf{k}_n(s)$, que están en los planos tangente a la superficie y en la recta normal, respectivamente. Una base del espacio tangente es

$$\mathbf{u} = (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0), \quad \mathbf{v} = (\cos\theta\cos\phi, \operatorname{sen}\theta\cos\phi, -\operatorname{sen}\phi)$$

y una base de la recta normal es

$$\mathbf{N} = (-\cos\theta \operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, -\cos\phi)\,.$$

Además, sabemos que

$$\begin{aligned}
\kappa_n &= \mathbf{k}\cdot\mathbf{N}\\
&= \frac{1}{R\operatorname{sen}\phi}(-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta, 0)\cdot(-\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -\cos\phi)\\
&= \frac{1}{R\operatorname{sen}\phi}\left(\cos^2\theta\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\phi\right) = \frac{1}{R}.
\end{aligned}$$

Resulta, pues:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_g = \mathbf{k} - \mathbf{k}_n &= \frac{1}{R\operatorname{sen}\phi}(-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta, 0) - \kappa_n\mathbf{N}\\
&= \frac{1}{R\operatorname{sen}\phi}(-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta, 0) - \frac{1}{R}(-\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -\cos\phi)\\
&= \frac{1}{R}\left(\cos\theta\operatorname{sen}\phi - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\phi}, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\phi}, \cos\phi\right).
\end{aligned}$$

Su módulo es la curvatura geodésica, que es

$$\begin{aligned}
\kappa_g &= \frac{1}{R}\sqrt{\left(\cos\theta\operatorname{sen}\phi - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\phi}\right)^2 + \left(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\phi}\right)^2 + \cos^2\phi}\\
&= \frac{1}{R}\sqrt{\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\phi + \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\phi} - 2\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\phi - 2\operatorname{sen}^2\theta + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\phi} + \cos^2\phi}\\
&= \frac{1}{R}\sqrt{\operatorname{sen}^2\phi - 2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\phi} + \cos^2\phi}\\
&= \frac{1}{R}\sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2\phi} - 2 + 1}\\
&= \frac{1}{R\operatorname{sen}\phi}\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\phi} = \frac{\cos\phi}{R\operatorname{sen}\phi}.
\end{aligned}$$

24. Sea la superficie $\mathbf{x}(u,v) = (u, v, u^2 + u^4 + v^6)$ donde $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Determínenese los vectores curvatura geodésica y curvatura normal en $\mathbf{x}(0,0) = (0,0,0)$ para la curva $\mathbf{x}(t) = (t, 0, t^2 + t^4)$.

Solución. Comenzamos determinando $\mathbf{N}$. Las derivadas parciales de $\mathbf{x}(u,v)$ son

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u,v) &= (1, 0, 2u + 4u^3), & \mathbf{x}_u(0,0) &= (1,0,0), \\ \mathbf{x}_v(u,v) &= (0, 1, 6v^5), & \mathbf{x}_v(0,0) &= (0,1,0). \end{aligned}$$

El vector normal unitario $\mathbf{N}$ es

$$(1,0,0) \times (0,1,0) = (0,0,1).$$

Determinamos el vector $\mathbf{v} = (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0)$, que tiene la misma dirección y sentido que el vector normal (y, por tanto, que el vector curvatura) y que el módulo del vector curvatura es

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

Como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= (1, 0, 2t + 4t^3), & \mathbf{x}'(0) &= (1,0,0), \\ \mathbf{x}''(t) &= (0, 0, 2 + 12t^2), & \mathbf{x}''(0) &= (0,0,2). \end{aligned}$$

Entonces, el vector $\mathbf{v}$ es

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) \\ &= ((1,0,0) \times (0,0,2)) \times (1,0,0) \\ &= (0,-2,0) \times (1,0,0) \\ &= (0,0,2). \end{aligned}$$

El vector normal a la curva es

$$\mathbf{n}(0) = \frac{(0,0,2)}{\|(0,0,2)\|} = (0,0,1).$$

Por otro lado, la curvatura es

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{\|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\|}{\|\mathbf{x}'(0)\|^3}. \\ &= \frac{\|(1,0,0) \times (0,0,2)\|}{\|(1,0,0)\|^3} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{k}(0) &= 2(0,0,1)\\ &= (0,0,2).\end{aligned}$$

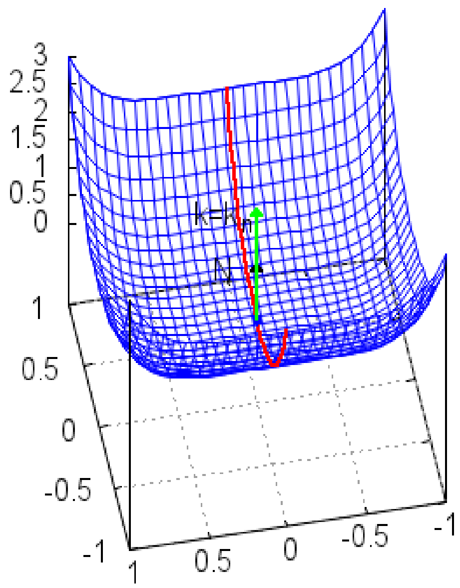
Lo podemos escribir a partir de los vectores curvatura geodésica y curvatura normal, $\mathbf{k}(s) = \mathbf{k}_g(s) + \mathbf{k}_n(s)$, que están en los planos tangente a la superficie y en la recta normal. Como una base del espacio tangente es $(1,0,0), (0,1,0)$ y una base de la recta normal es $(0,0,1)$, tenemos que

$$(0,0,2) = 2(0,0,1),$$

donde

$$\mathbf{k}_g(0) = (0,0,0), \quad \mathbf{k}_n(0) = 2(0,0,1).$$

En la siguiente figura se representan la superficie y la curva y los vectores normal a la superficie, en negro y curvatura y curvatura normal, que coinciden, en verde.



25. Calcule la curvatura normal de un punto de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio R, dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(\theta,\phi) = (R\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, R\cos\phi),$$

para $\theta \in (0, 2\pi)$, $\phi \in (0, \pi)$.

Solución: Sabemos que en un punto $\mathbf{x}(\theta, \phi)$ se tiene

$$\begin{aligned} E &= R^2 \operatorname{sen}^2\phi, \; F = 0, \; G = R^2, \\ e &= R \operatorname{sen}^2\phi, \; f = 0, \; g = R. \end{aligned}$$

Entonces la curvatura normal en la dirección $(d\theta, d\phi)$ es

$$\kappa_n = \frac{II_P(d\theta, d\phi)}{I_P(d\theta, d\phi)} = \frac{R \operatorname{sen}^2\phi (d\theta)^2 + R(d\phi)^2}{R^2 \operatorname{sen}^2\phi (d\theta)^2 + R^2 (d\phi)^2} = \frac{1}{R} \frac{\operatorname{sen}^2\phi (d\theta)^2 + (d\phi)^2}{\operatorname{sen}^2\phi (d\theta)^2 + (d\phi)^2} = \frac{1}{R}.$$

26. Sea la superficie dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 + u^4 + v^6)$$

donde $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Determínense las secciones normales en el punto $(0, 0, 0) = \mathbf{x}(0, 0)$.

Solución: Las derivadas parciales de $\mathbf{x}(u, v)$ son

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u, v) &= (1, 0, 2u + 4u^3), \quad & \mathbf{x}_u(0, 0) &= (1, 0, 0), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= (0, 1, 6v^5), & \mathbf{x}_v(0, 0) &= (0, 1, 0). \end{aligned}$$

El vector normal unitario $\mathbf{N}$ es

$$(1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1).$$

Tenemos que considerar ahora los planos normales a la superficie, es decir, planos que contienen al vector normal en $(0, 0, 0) = \mathbf{x}(0, 0)$, $\mathbf{N}(0, 0) = (0, 0, 1)$. Vamos a suponer que el otro vector director del plano es tangente a la curva, es decir, es de la forma $(v_1, v_2, 0)$. También podemos suponer que $v_1 = \pm 1, 0$.

La ecuación paramétrica del plano es

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (0, 0, 0) + \lambda(0, 0, 1) + \mu(v_1, v_2, 0) \\ &= (\mu v_1, \mu v_2, \lambda). \end{aligned}$$

Para determinar la intersección de estos planos con la superficie hacemos:

$$(u, v, u^2 + u^4 + v^6) = (\mu v_1, \mu v_2, \lambda).$$

Si $v_1 = 0$, entonces $u = 0$ y la ecuación de la curva es, considerando $v = t$:

$$\mathbf{x}(t) = \left(0, t, t^6\right).$$

Si $v_1 = 1$, podemos hacer:

$$u = 1 \cdot \mu \Longrightarrow \mu = u,$$
$$v = \mu v_2 = u v_2.$$

Si llamamos $u = t$, tenemos la ecuación de la curva:

$$\mathbf{x}(t) = \left(t, t v_2, t^2 + t^4 + (t v_2)^6\right).$$

Si $v_1 = -1$, el vector tangente que resulta tiene la misma dirección y sentido contrario que el vector con $v_1 = 1$ y la curva resultante sería la misma, aunque su ecuación variara.

27. Determíne las curvaturas principales del cilindro de ecuación

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v).$$

Calcúlese, a partir de ellas, la curvatura de Gauss y la curvatura normal.

Determine, además, las direcciones principales.

Solución. Primero determinamos los coeficientes de las formas fundamentales. Sabemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(u, v) &= (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0), \ \mathbf{x}_v(u, v) = (0, 0, 1), \\
\mathbf{N}(u, v) &= \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\|} = \frac{(-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1)}{\|(-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1)\|} \\
&= (\cos u, \operatorname{sen} u, 0).
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \cdot (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) = 1, \\
F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0, \\
G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = (0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1) = 1.
\end{aligned}$$

Además,

$$\mathbf{x}_{uu}(u, v) = (-\cos u, -\operatorname{sen} u, 0), \quad \mathbf{x}_{uv}(u, v) = (0, 0, 0), \quad \mathbf{x}_{vv}(u, v) = (0, 0, 0).$$

Por eso:

$$\begin{aligned}
e &= \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} = (-\cos u, -\operatorname{sen} u, 0) \cdot (\cos u, \operatorname{sen} u, 0) = -1, \\
f &= \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} = (0, 0, 0) \cdot (\cos u, \operatorname{sen} u, 0) = 0, \\
g &= \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} = (0, 0, 0) \cdot (\cos u, \operatorname{sen} u, 0) = 0.
\end{aligned}$$

Entonces la ecuación de las curvaturas principales es:

$$\begin{aligned}\left(EG-F^2\right)k^2-(Eg+Ge-2Ff)\,k+\left(eg-f^2\right)=0 &\Longleftrightarrow\\ k^2+k=0 &\Longleftrightarrow\\ k\,(k+1)=0.&\end{aligned}$$

Las soluciones de esta ecuación son las curvaturas principales

$$\kappa_1=0,\quad \kappa_2=-1.$$

La curvatura de Gauss es:

$$K=\kappa_1\kappa_2=0,$$

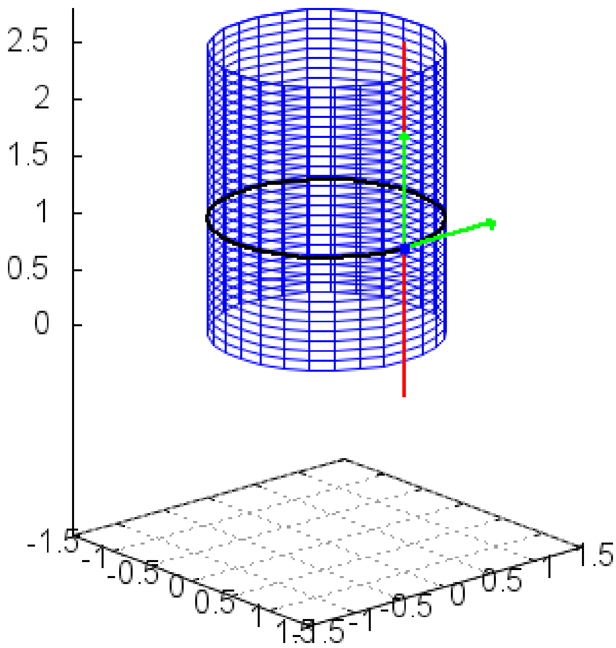
y la curvatura media es

$$H=\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Vamos a determinar ahora las direcciones principales a partir de su ecuación:

$$\begin{vmatrix} m^2 & -m & 1\\ E & F & G\\ e & f & g\end{vmatrix}=0\Longleftrightarrow\begin{vmatrix} m^2 & -m & 1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$
$$\Longleftrightarrow m=0.$$

Entonces, una dirección principal es $(h,0)$. La otra dirección principal es ortogonal a esta y, por tanto, es la dirección de $(0,1)$. La curvatura $\kappa_1=0$ corresponde a la dirección con curvatura mayor, que es la de v o dirección paralela al eje (en rojo en la figura). Es lo que podíamos esperar, porque es una recta con vector director $\mathbf{x}_v=(0,0,1)$. La otra dirección corresponde a $\mathbf{x}_u=(-\operatorname{sen}u,\cos u,0)$, que es la dirección, entre otras curvas, de la circunferencia perpendicular al eje que pasa por $\mathbf{x}\,(u,v)$, representada en negro en la figura. Obsérvese que es negativa, y la razón está en que el vector normal a la superficie es exterior a ella y el vector curvatura de la circunferencia tiene sentido contrario a él.



En esta superficie, tanto la curvatura de Gauss como la curvatura media son constantes y valen:

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = 0\,(-1) = 0, \quad H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = -\frac{1}{2}.$$

28. Calcular la curvatura de Gauss, la curvatura media y las curvaturas principales de la superficie dada por $z^2 = x^2 - y^2$ en el punto $(1, 0, 1)$.

Solución: En un entorno de $(1, 0, 1)$ la superficie está dada por la ecuación $\mathbf{x}\,(u, v) = \left(u, v, \sqrt{u^2 - v^2}\right)$. Entonces:

$$\mathbf{x}_u\,(u, v) = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 - v^2}}\right), \quad \mathbf{x}_v\,(u, v) = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{u^2 - v^2}}\right),$$

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{u}{\sqrt{u^2-v^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{v}{\sqrt{u^2-v^2}} \end{vmatrix} = -\frac{u}{\sqrt{u^2 - v^2}}\mathbf{i} + \frac{v}{\sqrt{u^2 - v^2}}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{x}_{uu}\,(u, v) = \left(0, 0, \frac{v^2}{\sqrt{u^2 - v^2}^3}\right), \quad \mathbf{x}_{uv}\,(u, v) = \left(0, 0, -\frac{1}{\left(\sqrt{u^2 - v^2}\right)^3}uv\right),$$

$$\mathbf{x}_{vv}\,(u, v) = \left(0, 0, -\frac{u^2}{\sqrt{u^2 - v^2}^3}\right).$$

En $(u,v)=(1,0)$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(1,0) &= (1,0,1)\,,\ \mathbf{x}_v(1,0)=(0,1,0)\,,\\
\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v &= (-1,0,1)\,,\ \mathbf{N}=\frac{\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\\
\mathbf{x}_{uu}(1,0) &= (0,0,0)\,,\ \mathbf{x}_{uv}(1,0)=(0,0,0)\,,\ \mathbf{x}_{vv}(1,0)=(0,0,-1)\,.
\end{aligned}
$$

Podemos ya calcular los coeficientes de las formas fundamentales en $(1,0,1)$:

$$
\begin{aligned}
E&=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u=(1,0,1)\cdot(1,0,1)=2,\\
F&=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v=(1,0,1)\cdot(0,1,0)=0,\\
G&=\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v=(0,1,0)\cdot(0,1,0)=1,\\
e&=\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{u\,u}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(0,0,0)=0,\\
f&=\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uv}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(0,0,0)=0,\\
g&=\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{vv}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(0,0,-1)=-\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

La curvatura de Gauss es

$$K=\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=\frac{0-0}{2}=0.$$

La curvatura media es

$$H=\frac{Eg-2Ff+Ge}{2\left(EG-F^2\right)}=\frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+0+0}{2\cdot 2}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

La ecuación de las curvaturas principales es

$$
\begin{aligned}
k^2\left(EG-F^2\right)-\left(Eg-2Ff+Ge\right)k-f^2+eg=0 \Longleftrightarrow\\
2k^2+\frac{2}{\sqrt{2}}k=0
\end{aligned}
$$

Y las curvaturas principales son

$$\kappa_1=0,\kappa_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

29. Sea S el cilindro dado por la ecuación paramétrica

$$\mathbf{x}\,(u,v) = (\cos u,\, \operatorname{sen} u, v)\,.$$

Se pide determinar las líneas de curvatura que pasan por $(1,0,0)$.

Solución: Sabemos que $(1,0,0) = \mathbf{x}\,(0,0)$. También sabemos que

$$\begin{array}{lll} E = 1, & F = 0, & G = 1, \\ e = -1, & f = 0, & g = 0. \end{array}$$

La ecuación diferencial de las líneas de curvatura es

$$-dudv = 0.$$

Como $dudv = 0$, entonces debe ser

$$du = 0 \text{ o } dv = 0.$$

En el primer caso:

$$du = 0 \implies u = c \in \mathbb{R}.$$

Al pasar por $(1,0,0) = \mathbf{x}\,(0,0)$, se cumple $u = 0$ y la ecuación de la línea de curvatura es

$$\mathbf{x}\,(t) = (\cos 0,\, \operatorname{sen} 0, t) = (1,0,t)\,.$$

Es la ecuación de la recta vertical, paralela al eje del cilindro, y que pasa por $(1,0,0)$.

La condición $dv = 0$ implica que debe ser constante v. Como en este punto $v = 0$, la ecuación de la línea de curvatura es

$$\mathbf{x}\,(t) = (\cos t,\, \operatorname{sen} t, 0)\,.$$

Esta ecuación corresponde a una circunferencia, intersección del plano xy con el cilindro.

30. Sea S la superficie dada por $z = y^2 - x^2$. Se pide determinar las líneas de curvatura y líneas asintóticas que pasan por $(0,0,0)$.

Solución: Tenemos que determinar los coeficientes de la primera y de la segunda forma fundamental. Hacemos, para la parametrización $\mathbf{x}(u,v) = (u, v, v^2 - u^2)$,

$$\begin{array}{lll} \mathbf{x}_u = (1,0,-2u), & \mathbf{x}_v = (0,1,2v), & \\ \mathbf{x}_{uu} = (0,0,-2), & \mathbf{x}_{uv} = (0,0,0), & \mathbf{x}_{vv} = (0,0,2). \end{array}$$

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (1,0,-2u) \times (0,1,2v) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix} = (2u, -2v, 1)\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{N} &= \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}\,(2u,-2v,1)\,,\\
E &= (1,0,-2u)\cdot(1,0,-2u) = 1+4u^2,\\
F &= (1,0,-2u)\cdot(0,1,2v) = -4uv,\\
G &= (0,1,2v)\cdot(0,1,2v) = 1+4v^2,\\
e &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uu} = -\frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}},\\
f &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uv} = 0,\\
g &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{vv} = \frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}.
\end{aligned}$$

En $(0,0,0)$, es

$$\begin{aligned}
&\mathbf{n} = (0,0,1)\,, \quad E=1, \quad F=0, \quad G=1,\\
&e=-2, \quad f=0, \quad g=2.
\end{aligned}$$

La ecuación diferencial de las líneas de curvatura es

$$\begin{aligned}
(Ef-Fe)\,du^2 + (Eg-Ge)\,dudv + (gF-Gf)\,dv^2 = 0 \Longleftrightarrow\\
(0-0)\,du^2 + (1\cdot 2 - 1\cdot(-2))\,dudv + (2\cdot 0 - 1\cdot 0)\,dv^2 = 0 \Longleftrightarrow\\
4dudv = 0 \Longleftrightarrow dudv = 0.
\end{aligned}$$

Su solución es

$$u=c,\ v=k,$$

donde c y k son constantes.

La ecuación de las líneas asintóticas es

$$edu^2+2fdudv+gdv^2=0 \Longleftrightarrow -2du^2+2dv^2=0 \quad \Longrightarrow \quad du^2-dv^2=0.$$

Esto implica

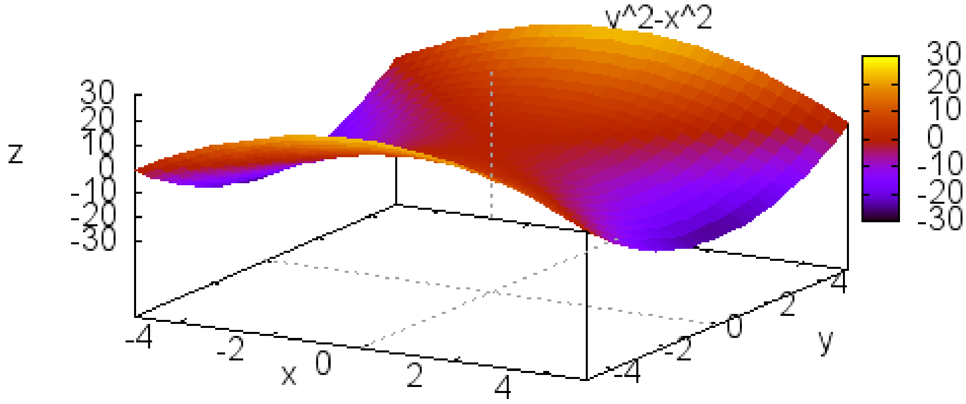
$$dv-du=0, \quad du+dv=0.$$

Puede dar $v=u, v=-u$. Entonces tenemos

$$x=u, y=u, z=0; x=u, y=-u, z=0.$$

Las soluciones son las líneas asintóticas $v=u, v=-u$, ya que las constantes de integración son cero por pasar por $(0,0)$, su imagen en el espacio $x=u, y=u, z=0; x=u, y=-u, z=0$.

La gráfica de esta función es la siguiente:


y^2-x^2
z
30
20
10
0
-10
-20
-30
x
-4
-2
0
2
4
y
-4
-2
0
2
4
30
20
10
0
-10
-20
-30