

## 5 Integrales sobre caminos

### 5.1 Integrandos para caminos

**Definición 125.** Un *integrando (de primer orden) para caminos* en  $\mathbb{R}^n$  es una función escalar  $L(x, v)$  donde  $x, v$  son elementos de  $\mathbb{R}^n$  y el par  $(x, v)$  recorre un abierto de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ .

La *integral de  $L$  sobre un camino*  $\alpha(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es el número  $\int_{\alpha} L$  que se calcula de la manera siguiente. Se hace actuar  $L$  sobre las parejas punto-velocidad  $(\alpha(t), \alpha'(t))$  del camino, dando lugar a la función  $[t_0, t_1] \ni t \mapsto L(\alpha(t), \alpha'(t))$ , y se hace:

$$\int_{\alpha} L \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t=t_0}^{t=t_1} L(\alpha(t), \alpha'(t)) dt .$$

Veamos una notación que permite dar y manipular ágilmente esos integrandos. Sólo necesitamos introducir un sencillo concepto.

**Definición 126.** Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  al menos  $\mathcal{C}^1$ . El *campo diferencial*  $df$  significa dos cosas a la vez:

1. La función que a cada par  $(x, v)$  le asocia el número  $(df)_x(v) = D_v f(x)$ , Aquí es  $x \in U$  pero  $v$  puede ser cualquier vector de  $\mathbb{R}^n$ .
2. El **campo** que a cada punto  $x \in U$  le asocia la función lineal  $(df)_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Es decir que  $df$  es el campo de formas lineales que reúne todas las diferenciales  $(df)_x$  en un solo objeto.

Apliquemos esto a las *funciones coordenadas*  $x_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . La función  $x_j$  es la definida por  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$ . Su campo diferencial  $dx_j$  es la función

$$(dx_j)(x, v) \stackrel{\text{def}}{=} v_j ,$$

que lo único que hace es darnos la  $j$ -ésima entrada del vector  $v$ .

Las  $2n$  funciones  $x_1, \dots, x_n, dx_1, \dots, dx_n$  son las coordenadas estándar  $x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n$  en el espacio  $\mathbb{R}^{2n}$  de los pares  $(x, v)$ . Dado un camino  $\alpha(t) \equiv (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , es más fácil recordar  $(dx_j)(\alpha(t), \alpha'(t)) = x'_j(t)$  que recordar  $v_j(\alpha(t), \alpha'(t)) = x'_j(t)$ . Entonces preferimos escribir  $dx_j$  mejor que  $v_j$ , ya que nuestro propósito ahora es integrar sobre caminos.

Cualquier fórmula en las funciones  $x_1, \dots, x_n, dx_1, \dots, dx_n$  define un integrando para caminos  $L(x, v)$ . Ejemplos en  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ :

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv x_1 x_2 dx_1 + x_2^3 e^{dx_2} & \text{actúa como} & L_1(x, v) = x_1 x_2 v_1 + x_2^3 e^{v_2} , \\ L_2 &\equiv 7 + x_1 (\cos x_2) \frac{dx_2}{dx_1} & \text{actúa como} & L_2(x, v) = 7 + x_1 (\cos x_2) \frac{v_2}{v_1} , \\ L_3 &\equiv (\log x_1) dx_1 dx_2 & \text{actúa como} & L_3(x, v) = (\log x_1) v_1 v_2 . \end{aligned}$$

El dominio de cada ejemplo es un abierto de  $\mathbb{R}^4$ :  $L_1$  está definido en todo  $\mathbb{R}^4$ ,  $L_2$  está definido en los  $(x, v)$  con  $v_1 \neq 0$  y  $L_3$  en los  $(x, v)$  con  $x_1 > 0$ .

Denotemos por  $\alpha(t) \equiv (x_1(t), x_2(t))$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , el camino general en  $\mathbb{R}^2$ . Siempre podemos integrar  $L_1$  sobre  $\alpha$ , siendo:

$$\int_{\alpha} L_1 = \int_{\alpha} (x_1 x_2 dx_1 + x_2^3 e^{dx_2}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} (x_1(t) x_2(t) x'_1(t) + x_2(t)^3 e^{x'_2(t)}) dt .$$

Podemos integrar  $L_2$  sobre los caminos que tienen  $x'_1(t)$  nunca nula, es decir caminos con la velocidad  $\alpha'(t)$  nunca vertical, siendo:

$$\int_{\alpha} L_2 = \int_{\alpha} \left( 7 + x_1 (\cos x_2) \frac{dx_2}{dx_1} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} \left( 7 + x_1(t) (\cos x_2(t)) \frac{x'_2(t)}{x'_1(t)} \right) dt .$$

Podemos integrar  $L_3$  sobre los caminos que cumplan  $x_1(t) > 0$ , es decir caminos contenidos en el semiplano  $\{x_1 > 0\}$ , siendo:

$$\int_{\alpha} L_3 = \int_{\alpha} (\log x_1) dx_1 dx_2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} (\log x_1(t)) x_1'(t) x_2'(t) dt .$$

## 5.2 Cambio de parámetro

**Definición 127.** *Dados un camino  $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  y un difeomorfismo entre intervalos  $\sigma(\tilde{t}) : \tilde{I} \rightarrow I$ , la correspondiente **reparametrización** de  $\alpha$  es el camino  $\alpha \circ \sigma(\tilde{t}) : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , es decir el resultado de efectuar en  $\alpha(t)$  el cambio de parámetro  $t = \sigma(\tilde{t})$ .*

El camino  $\alpha$  y el reparametrizado  $\alpha \circ \sigma$  tienen el mismo conjunto imagen  $\alpha(I) = (\alpha \circ \sigma)(\tilde{I})$  y los dos pasan *el mismo número de veces* por cada punto de dicha imagen. Por ejemplo, tanto el camino

$$\alpha(t) \equiv (\cos t, \sin t) : [0, 5\pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (56)$$

como sus reparametrizaciones tienen por imagen la circunferencia unidad, pasando dos veces por cada punto de ella en el primer cuadrante y una sola vez por los demás puntos. La restricción al intervalo abierto  $\alpha|_{(0,5\pi/2)}$  pasa dos veces por los puntos de la circunferencia *interiores* al primer cuadrante y pasa una sola vez por los otros puntos; igual hacen sus reparametrizaciones.

**Efecto sobre el sentido.** Si el cambio de parámetro  $t = \sigma(\tilde{t})$  es (estrictamente) creciente, entonces el reparametrizado  $\alpha \circ \sigma$  avanza en el mismo sentido que  $\alpha$ . Si, por el contrario,  $\sigma$  es decreciente, entonces  $\alpha \circ \sigma$  avanza en sentido opuesto al de  $\alpha$  y se intercambian punto inicial y punto final. Por ejemplo el camino (56) recorre la circunferencia en el sentido antihorario, empezando en  $(1, 0)$  y terminando en  $(0, 1)$ ; mientras que la siguiente reparametrización:

$$\beta(\tilde{t}) \equiv \alpha(-\tilde{t}/4) \equiv \left( \cos \frac{-\tilde{t}}{4}, \sin \frac{-\tilde{t}}{4} \right) : [-10\pi, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

recorre la circunferencia en sentido horario, empezando en  $(0, 1)$  y terminando en  $(1, 0)$ .

**Definición 128.** *Un integrando para caminos  $L(x, v)$  es **paramétrico** si al reparametrizar el camino conservando el sentido de avance la integral no cambia. Es decir que para todo  $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sobre el que  $L$  pueda integrarse, y todo difeomorfismo creciente  $\sigma(\tilde{t}) : \tilde{I} \rightarrow I$ , se tiene:*

$$\int_{\alpha} L = \int_{\alpha \circ \sigma} L .$$

Intuitivamente, lo que se pretende con esta definición es que, al menos para caminos  $\alpha$  no muy complicados, el número  $\int_{\alpha} L$  esté determinado por el número de veces que se pasa por cada punto de la imagen  $\alpha(I)$  junto con el sentido de avance de  $\alpha$ . En particular, si  $\alpha(t)$  es inyectivo (salvo por un número finito de valores de  $t$ ) entonces  $\int_{\alpha} L$  quedaría determinado por la imagen  $\alpha(I)$  junto con el sentido de avance.

**Teorema 129.**  *$L(x, v)$  es un integrando paramétrico para caminos si y sólo si es positivamente homogéneo de grado 1 en la variable vectorial  $v$ , es decir:*

$$c > 0 \implies L(x, cv) = c \cdot L(x, v) .$$

*Demostración parcial.* Vamos a demostrar la parte “si”. La parte “sólo si” no nos va a hacer falta y omitiremos su demostración.

Sea, pues,  $\sigma(\tilde{t}) : \tilde{I} \rightarrow I$  un difeomorfismo del intervalo  $\tilde{I}$  al intervalo  $I$  que cumple  $\sigma'(\tilde{t}) > 0$ . Por la regla de la cadena, la velocidad del camino reparametrizado es:

$$(\alpha \circ \sigma)'(\tilde{t}) = \sigma'(\tilde{t}) \cdot \alpha'(t)|_{t=\sigma(\tilde{t})} ,$$

y entonces, como  $\sigma' > 0$ :

$$\int_{\alpha \circ \sigma} L = \int_{\tilde{t} \in \tilde{I}} L(\alpha \circ \sigma(\tilde{t}), \sigma'(\tilde{t}) \cdot \alpha'(\sigma(\tilde{t}))) d\tilde{t} = \int_{\tilde{t} \in \tilde{I}} \sigma'(\tilde{t}) \cdot L(\alpha \circ \sigma(\tilde{t}), \alpha'(\sigma(\tilde{t}))) d\tilde{t},$$

y, como  $\sigma' = |\sigma'|$ , la fórmula de cambio de variable en integrales simples nos dice que:

$$\int_{\alpha \circ \sigma} L = \int_{t \in \sigma(\tilde{I})} L(\alpha(t), \alpha'(t)) dt = \int_{t \in I} L(\alpha(t), \alpha'(t)) dt = \int_{\alpha} L \quad \square$$

Para que  $L(x, v)$  sea un integrando paramétrico no basta con que sea homogéneo en  $v$ , es absolutamente necesario que su grado sea 1. Probemos, por ejemplo, con  $L \equiv (dx_1)^2$ , que es homogéneo pero de grado 2, y con el camino  $\alpha(t) = (t, 0)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Es obvio que  $\int_{\alpha} L = 1$ . Ahora reparametrizamos  $\alpha$  mediante  $\sigma(\tilde{t}) : \tilde{I} \rightarrow I$  dado por  $\tilde{I} = [0, 2]$  y  $\sigma(\tilde{t}) \equiv \tilde{t}/2$ , que es creciente. Se calcula  $\int_{\alpha \circ \sigma} L = \int_0^2 (1/2)^2 d\tilde{t} = 2 \cdot (1/4) = 1/2$ . Queda claro que la integral es sensible a cambios crecientes de parámetro, luego  $(dx_1)^2$  no es un integrando paramétrico.

### 5.3 Invariancias adicionales

En el apartado anterior hemos considerado transformaciones en el dominio del camino  $\alpha$ : difeomorfismos crecientes  $\tilde{I} \rightarrow I$ , y nos hemos preguntado por los integrandos  $L$  para los que estos cambios no alteran la integral  $\int_{\alpha} L$ . Ahora exigimos que, además, ciertas transformaciones del codominio  $\mathbb{R}^n$  tampoco alteren la integral. Concretamente, queremos que la integral no cambie al rotar o trasladar el camino.

**Teorema 130.** *Sea  $L(x, v)$  un integrando paramétrico para caminos. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. Si  $F$  es cualquier movimiento de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\int_{F \circ \alpha} L = \int_{\alpha} L$ .
2. Se tiene  $L \equiv c \cdot \sqrt{(dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2}$ , es decir  $L(x, v) \equiv c \cdot \|v\|_2$ , para algún  $c \in \mathbb{R}$ .

*Demostración parcial.* Sólo demostraremos que 2. implica 1. Cada movimiento  $F$  viene dado por un vector constante  $b$  y una matriz constante  $A \in O(n)$ , de modo que  $F(x) \equiv b + Ax$  y  $F \circ \alpha(t) \equiv b + A\alpha(t)$ . Calculamos:

$$\int_{F \circ \alpha} L = \int_{t \in I} c \|A\alpha'(t)\|_2 dt = \int_{t \in I} c \|\alpha'(t)\|_2 dt = \int_{\alpha} L. \quad \square$$

Para especificar el valor de la constante  $c$  basta establecer el valor de la integral sobre un camino concreto. Exigiendo que para el camino  $\alpha(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dado por  $\alpha(t) \equiv t \mathbf{e}_1$ , la integral sea igual a 1, queda determinado el integrando  $L(x, v) \equiv \|v\|_2$ .

**Definición 131.** *Llamamos **longitud** del camino  $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  a la integral  $\int_{t \in I} \|\alpha'(t)\|_2 dt$ , asociada al integrando  $L \equiv \sqrt{(dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2}$ .*

La longitud es, pues, la más invariante de las integrales paramétricas sobre caminos.

**Aviso:** si un camino no es inyectivo su longitud puede ser mayor que la longitud del conjunto imagen; por ejemplo el camino (56) tiene longitud  $(5/2)\pi$  mientras que su imagen (la circunferencia unidad) tiene longitud  $2\pi$ .

Como  $\| -v \|_2 = \|v\|_2$ , resulta que la longitud de un camino no varía al reparametrizarlo tanto si el cambio de parámetro es creciente como si es decreciente: el sentido de avance no influye en la longitud. Esta última invariancia la tienen también todos los integrandos paramétricos  $L(x, v)$  que cumplan  $L(x, -v) \equiv L(x, v)$ , en particular los de la forma  $L(x, v) \equiv f(x) \|v\|_2$ , cuyas integrales se estudian en cursos de Cálculo y se las denota  $\int_{\alpha} f ds$ .

## 5.4 Los integrandos más sencillos

Si lo que queremos es que  $L(x, v)$  sea (positivamente) homogéneo de grado 1 en la variable  $v$ , lo más sencillo es fijarnos en los que son lineales en  $v$ .

**Definición 132.** Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto. Una **1-forma** o **forma de Pfaff** en  $U$  es un integrando  $\omega(x, v)$ ,  $(x, v) \in U \times \mathbb{R}^n$ , que es lineal en la variable  $v$ . Esto quiere decir que para cada punto  $x \in U$  la correspondiente función  $\omega_x(\cdot) = \omega(x, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $v \mapsto \omega(x, v)$ , es lineal.

La fórmula que describe estos integrandos es especialmente sencilla, pues todos ellos se expresan como:

$$\omega \equiv a_1(x) dx_1 + \cdots + a_n(x) dx_n ,$$

para ciertas funciones escalares  $a_1(x), \dots, a_n(x) : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Una manera útil de entenderlos es como **campos de formas lineales** en  $U$ , pues asocian a cada punto  $x \in U$  una función lineal  $\omega_x$  cuya matriz, la fila  $[ a_1(x) \ a_2(x) \ \cdots \ a_n(x) ]$ , puede variar a medida que el punto  $x$  se mueve dentro del abierto  $U$ .

**Ejemplo especial.** Un caso particular de las integrales que estamos considerando en este apartado es el **trabajo** hecho por un *campo de fuerzas*  $\mathbf{F}(x) \equiv (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$  a lo largo de un camino  $\alpha(t) \equiv (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ , que es la siguiente integral:

$$\int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\alpha} (F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3) .$$

Las formas de Pfaff satisfacen la identidad  $\omega_x(-v) \equiv -\omega_x(v)$ , de donde dado un difeomorfismo  $\sigma : \tilde{I} \rightarrow I$  se tiene:

$$\int_{\alpha \circ \sigma} \omega = \begin{cases} \int_{\alpha} \omega & \text{si } \sigma \text{ es creciente} \\ -\int_{\alpha} \omega & \text{si } \sigma \text{ es decreciente} \end{cases} \quad (57)$$

Así, pues, la integral de una forma de Pfaff es sensible al sentido de avance del camino, de modo que se multiplica por  $-1$  al invertir dicho sentido de avance.

Existen unas formas de Pfaff particulares cuyas integrales muestran una invariancia extremadamente fuerte:

**Definición 133.** Una forma de Pfaff es **exacta** en  $U$  si coincide con el campo diferencial  $df$  de una función  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Su fórmula en coordenadas es:  $df \equiv f_{x_1} dx_1 + \cdots + f_{x_n} dx_n$ . Dada una forma de Pfaff exacta  $\omega$ , llamamos **potenciales** de  $\omega$  a las funciones diferenciables  $f$  tales que  $df \equiv \omega$ .

**Teorema 134.** Sea  $\omega$  una forma de Pfaff en un abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Las condiciones siguientes son equivalentes:

- 1)  $\omega$  es exacta en  $U$ .
- 2) Para todo camino  $\alpha \subset U$ , la integral  $\int_{\alpha} \omega$  sólo depende de los puntos inicial y final de  $\alpha$ .
- 3) Se tiene  $\int_{\alpha} \omega = 0$  para todo camino cerrado  $\alpha \subset U$ , es decir con los puntos inicial y final iguales.

*Demostración.*

1)  $\Rightarrow$  2) y 3). Supongamos primero que  $\omega$  es exacta:  $\omega \equiv df$  para alguna  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $\alpha(t) : [t_0, t_1] \rightarrow U$  es cualquier camino diferenciable, entonces:

$$\frac{d}{dt} f(\alpha(t)) = (df)_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) ,$$

de donde:

$$\int_{\alpha} df = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) dt = f(\alpha(t_1)) - f(\alpha(t_0)) ,$$

sólo depende de los puntos  $\alpha(t_0), \alpha(t_1)$ :

Mientras mantengamos los extremos intactos, el inicial como inicial y el final como final, el valor de una integral exacta no cambia por mucho que cambiemos el camino.

Que  $\alpha$  sea un camino cerrado significa que  $\alpha(t_0) = \alpha(t_1)$ , de donde  $f(\alpha(t_1)) - f(\alpha(t_0)) = 0$  y así  $\int_{\alpha} df = 0$ .

Veamos ahora que 3)  $\Rightarrow$  2). Sean  $\alpha, \beta$  dos caminos en  $U$  que empiezan en un punto  $p$  y terminan en un punto  $q$ . El camino  $\gamma$ , que consiste en recorrer primero  $\alpha$  y luego una reparametrización de  $\beta$  con el sentido de avance invertido, es un camino cerrado. Luego:

$$0 = \int_{\gamma} \omega = \int_{\alpha} \omega - \int_{\beta} \omega , \quad (58)$$

y queda visto que  $\int_{\alpha} \omega$  y  $\int_{\beta} \omega$  son iguales si los extremos de  $\alpha$  y  $\beta$  son iguales; esto es lo que afirma 2).

Veamos por último que que 2)  $\Rightarrow$  1). Para construir una función  $f$  tal que  $\omega \equiv df$ , o sea un potencial para  $\omega$ , fijamos un punto  $p_0 \in U$  y, para todo  $p \in U$ , elegimos un camino suave  $\alpha_p$  en  $U$  que comience en  $p_0$  y termine en  $p$ . Entonces hacemos:

$$f(p) = \int_{\alpha_p} \omega ,$$

y la propiedad 2) nos dice que el valor  $f(p)$  sólo depende de  $p$  y no de la elección que hayamos hecho para  $\alpha_p$ , luego esta  $f$  está bien definida. Afirmamos que en cada  $p \in U$  se cumple  $f_{x_j}(p) = \omega_p(\mathbf{e}_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Se prueba que  $f_{x_1}(p) = \omega_p(\mathbf{e}_1)$  eligiendo un primer camino  $\alpha_p^1$  que termina en un pequeño segmento paralelo a  $\mathbf{e}_1$  y con extremo final  $p$ . Se prueba que  $f_{x_2}(p) = \omega_p(\mathbf{e}_2)$  eligiendo un segundo camino  $\alpha_p^2$  que termina en un pequeño segmento paralelo a  $\mathbf{e}_2$  y con extremo final  $p$ . Así sucesivamente, hasta llegar a  $f_{x_n}(p) = \omega_p(\mathbf{e}_n)$  que se prueba eligiendo un  $n$ -ésimo camino  $\alpha_p^n$  que termina en un pequeño segmento paralelo a  $\mathbf{e}_n$  y con extremo final  $p$ .

Al tener  $f$  derivadas parciales  $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$  en todo punto de  $U$ , respectivamente iguales a las funciones  $\omega(\mathbf{e}_1), \dots, \omega(\mathbf{e}_n)$ , que son continuas, resulta que  $f$  es una función diferenciable en  $U$  y tal que  $(df)_p = \omega_p$  para todo  $p \in U$ .  $\square$

**Comentarios.** (1) En realidad el camino  $\gamma$  de la demostración anterior es  $\mathcal{C}^1$  a trozos: puede tener una “esquina” en el punto final de  $\alpha$ . Todo integrando para caminos se integra a lo largo de los caminos  $\mathcal{C}^1$  a trozos, y es evidente cómo hacerlo: se integra en cada tramo  $\mathcal{C}^1$  y se suman los resultados. Suponemos, pues, enunciada la condición 3) del teorema 134 para esta clase un poco más general de caminos.

(2) En la fórmula (58) de la demostración precedente, ha sido crucial que  $\int_{\beta} \omega$  cambie de signo al invertir el sentido de avance del camino. El teorema 134 es cierto gracias a la sensibilidad al cambio de sentido expresada por las fórmulas (57).

Ninguna de las condiciones del teorema anterior es fácil de comprobar en la práctica. Para eso es mejor lo siguiente.

**Teorema-definición 135.** Decimos que una forma de Pfaff  $\omega$  es **cerrada** en  $U$  si es localmente exacta en  $U$ , es decir exacta en abiertos pequeños contenidos en  $U$ .

Si  $\omega \equiv a_1(x) dx_1 + \dots + a_n(x) dx_n \in \mathcal{C}^1(U)$ , entonces es cerrada si y sólo si cumple la **condición de las derivadas cruzadas**:

$$\text{para cualesquiera } i \neq j, \text{ se tiene } \frac{\partial}{\partial x_i} a_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} a_i \text{ en } U .$$

Si además  $U$  es **convexo**, entonces cada forma de Pfaff que cumpla esto es exacta en  $U$ .

*Demostración.* Estamos suponiendo que  $\omega$  es, al menos, de clase  $\mathcal{C}^1$ . Si en un abierto  $V \subseteq U$  tenemos  $\omega \equiv df$ , entonces  $f$  es al menos de clase  $\mathcal{C}^2$  y, por el teorema de Schwarz, debe cumplir  $f_{x_j x_i} \equiv f_{x_i x_j}$  para cualesquiera  $i, j$ , luego  $a_{j, x_i} \equiv a_{i, x_j}$ , en  $V$ . Como se recubre todo  $U$  por abiertos pequeños  $V$ , en los que hay potenciales para  $\omega$ , se tiene  $a_{j, x_i} \equiv a_{i, x_j}$  en todo  $U$ .

Sea ahora  $\omega$  cumpliendo las condiciones de derivadas cruzadas. Entonces sabemos calcular, por un método aprendido en el curso de Cálculo (lo recordamos un poco más abajo) funciones  $f$  tales que  $df \equiv \omega$ . Dicho método de cálculo funciona en abiertos *convexos*, en los cuales  $\omega$  es, pues, exacta. Como para todo punto  $p \in U$  existe una bola  $B(p, r)$  contenida en  $U$ , y las bolas son convexas, resulta que  $\omega$  es exacta en esas bolas, es decir localmente exacta en  $U$ .  $\square$

**Ejemplo estándar de una 1-forma cerrada que no es exacta:**

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad , \quad \omega = (x dy - y dx)/(x^2 + y^2) .$$

El camino  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , contenido en  $U$ , es cerrado pero  $\int_{\alpha} \omega = 2\pi$  no es cero, luego  $\omega$  no es exacta. Es trivial comprobar que esta  $\omega$  satisface la condición de derivadas cruzadas. El abierto  $U$ , en el que  $\omega$  está definida, es conexo pero está lejos de ser convexo.

**Recuerdo de método.** Se calcula un potencial en cualquier abierto convexo en el que  $\omega$  satisfaga las condiciones de derivadas cruzadas. El método consiste en ir reduciendo el número de variables que aparecen en la forma. Hagámoslo para  $\omega \equiv e^z dx + z dy + (xe^z + y + \cos z) dz$ . La función  $f_1 \equiv \int_0^x e^z dx \equiv xe^z$  es tal que  $\omega$  y  $df_1$  tienen el mismo coeficiente de  $dx$ , luego va a ser  $\omega - df_1 \equiv b_2 dy + b_3 dz$  para ciertas funciones  $b_2, b_3$ . Además  $df_1$ , siendo exacta, cumple las condiciones de derivadas cruzadas y  $\omega - df_1$  también las cumple, lo que fuerza  $b_{1x} \equiv b_{2x} \equiv 0$ , es decir que la variable  $x$  no va a aparecer en  $\omega - df_1$  por ninguna parte. Efectivamente:

$$\omega - df_1 = z dy + (y + \cos z) dz .$$

La función  $f_2 \equiv \int_0^y z dy \equiv zy$ , además de no depender de  $x$ , es tal que  $\omega - df_1 - df_2$  sólo tiene no nulo el coeficiente de  $dz$ , el cual no depende ni de  $x$  ni de  $y$ :  $\omega - df_1 - df_2 \equiv \cos z dz$ . Finalmente  $f_3 \equiv \int_0^z \cos z dz \equiv \sin z$  sólo depende de  $z$  y es tal que  $\omega - df_1 - df_2 - df_3 \equiv 0$ , es decir  $\omega \equiv d(f_1 + f_2 + f_3) \equiv d(xe^z + zy + \sin z)$ .

El método hace uso de integraciones *en una variable cada vez*, que pueden verse como integraciones a lo largo de segmentos paralelos a los ejes coordenados. Esto se puede hacer de una manera consistente, de modo a obtener funciones definidas en todo el abierto  $U$ , si la intersección de  $U$  con cada recta afín paralela a un eje es o vacía o “ininterrumpida”, es decir consistente en un segmento y nada más, una semirrecta y nada más, o la recta entera. Esta “ausencia de interrupciones” está garantizada si  $U$  es convexo.

**Proposición 136.** Si  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  es un abierto conexo y  $\omega$  es una 1-forma exacta en  $U$ , entonces dos potenciales cualesquiera de  $\omega$  difieren en una constante.

*Demostración.* Si  $\omega \equiv df \equiv dg$  entonces  $h = f - g$  es tal que  $dh \equiv 0$ . Fijemos un punto  $p_0 \in U$ . Dado cualquier otro punto  $p \in U$ , existe un camino  $\alpha(t) : [0, 1] \rightarrow U$  tal que  $\alpha(0) = p_0$  y  $\alpha(1) = p$ , además podemos tomar  $\alpha$  diferenciable. Por la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt} h(\alpha(t)) = (dh)_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) \equiv 0 ,$$

luego  $h(\alpha(t))$  es función constante de  $t$  y en particular  $h(\alpha(0)) = h(\alpha(1))$ , es decir  $h(p_0) = h(p)$ . Como  $p$  era arbitrario, resulta que  $h \equiv h(p_0)$  es función constante.  $\square$

Por ejemplo, los (únicos) potenciales de  $\omega \equiv e^z dx + z dy + (xe^z + y + \cos z) dz$  son las funciones  $f \equiv (xe^z + zy + \sin z) + \text{cte}$ .

## 5.5 Pullback de formas de Pfaff

Denotamos por  $\mathbb{R}_u^k$  el espacio  $\mathbb{R}^k$  con coordenadas  $(u_1, \dots, u_k)$ ; análogamente  $\mathbb{R}_x^n$ . Tenemos abiertos  $U_1 \subseteq \mathbb{R}_u^k$ ,  $U_2 \subseteq \mathbb{R}_x^n$  y una aplicación diferenciable  $U_1 \rightarrow U_2$  escrita como  $x = f(u)$ . Entonces a partir de cada 1-forma  $\omega$  en  $U_2$  se obtiene una 1-forma  $f^*\omega$  en  $U_1$  dada por:

$$\text{para } p \in U_1 \text{ y } v \in \mathbb{R}^k \text{ es } (f^*\omega)_p(v) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{f(p)}((df)_p v).$$

La 1-forma  $f^*\omega$  recibe el nombre de **pullback de  $\omega$  por  $f$**  (en castellano sería “traída de  $\omega$  por  $f$ ”, pero se usa el nombre inglés).

El pullback  $f^*\omega$  es muy fácil de calcular a partir de una expresión de  $\omega$  en coordenadas:

$$\omega \equiv a_1(x_1, \dots, x_n) dx_1 + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n) dx_n, \quad (59)$$

y de las funciones que definen  $f$ :

$$f(u) \equiv (x_1(u) \dots x_n(u));$$

simplemente se sustituye en (59) cada  $x_j$  por la función  $x_j(u)$ , se hacen las operaciones y se reagrupa.

Aclaremos eso con un ejemplo. Consideramos la siguiente 1-forma en  $\mathbb{R}_x^3$ :

$$\omega \equiv x_1 dx_1 - dx_2 + (x_1 + x_3) dx_3,$$

y la aplicación  $f : \mathbb{R}_u^2 \rightarrow \mathbb{R}_x^3$  dada por:

$$(x_1, x_2, x_3) = f(u_1, u_2) = \left( 1 + u_1 + u_2, u_1 u_2 + \frac{u_2^2}{2}, -u_1 \right),$$

entonces:

$$f^*\omega = (1 + u_1 + u_2) d(1 + u_1 + u_2) - d\left(u_1 u_2 + \frac{u_2^2}{2}\right) + (1 + u_1 + u_2 - u_1) d(-u_1),$$

que se desarrolla y reagrupa así:

$$\begin{aligned} f^*\omega &= (1 + u_1 + u_2)(du_1 + du_2) - u_1 du_2 - u_2 du_1 - u_2 du_2 - (1 + u_2) du_1 = \\ &= (1 + u_1 + u_2 - u_2 - 1 - u_2) du_1 + (1 + u_1 + u_2 - u_1 - u_2) du_2 = \\ &= (u_1 - u_2) du_1 + du_2. \end{aligned}$$

Nos interesa especialmente el caso  $k = 1$ . Entonces  $U_1 \subseteq \mathbb{R}_t$  y lo que tenemos es un camino  $\alpha(t) : U_1 \rightarrow U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dada cualquier 1-forma  $\omega$  en  $U_2$ , se tiene una sencillísima expresión:

$$\alpha^*\omega \equiv a(t) dt,$$

donde  $a(t) \equiv \omega_{\alpha(t)}(\alpha'(t))$  y para cualquier intervalo  $I \subseteq U_1$  es:

$$\int_{\alpha|_I} \omega = \int_I \omega_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) dt = \int_I a(t) dt = \int_I \alpha^*\omega,$$

en conclusión:

Para integrar una 1-forma  $\omega$  sobre un camino  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se hace el pullback  $\alpha^*\omega$  y se integra éste sobre  $I$ .