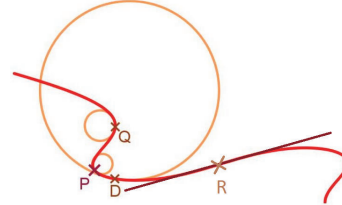


1.3. Curvatura de una curva regular

1. Curvas parametrizadas.
 - 1.1 Curvas.
 - 1.2 Reparametrizaciones.
 - 1.3 Curvatura de una curva.
 - 1.4 Curvas en el espacio.
 - 1.5 Curvas generadas por familias de curvas.
2. Teoría elemental de superficies.
 - 2.1 Superficies parametrizadas.
 - 2.2 Plano tangente.
 - 2.3 Primera forma fundamental.
 - 2.4 Curvatura normal.
 - 2.5 Curvatura geodésica.
3. Superficies orientadas.
 - 3.1 Segunda forma fundamental.
 - 3.2 Clasificación de los puntos de una superficie.
 - 3.3 Curvatura de Gauss.
 - 3.4 Superficies regladas.
 - 3.5 Geodésicas y el teorema de Gauss Bonnet.



Obtener el vector aceleración:

$$\gamma_1(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}t + 1, \frac{2}{\sqrt{5}}t - 1 \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\gamma_2(t) = (t^3 + 1, 2t^3 - 1), \quad t \in \mathbb{R}$$

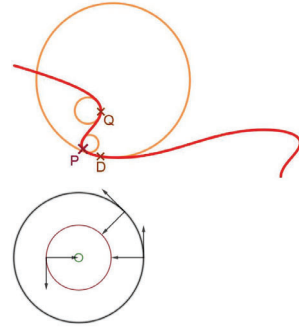
Si alguna de ellas no tiene velocidad unitaria, reparametrizar a velocidad unitaria y calcular el vector aceleración de la curva reparametrizada.



Obtener la aceleración escalar de la curva:

$$\gamma_3(t) = (x_0 + R \cos(\frac{t}{R}), y_0 + R \sin(\frac{t}{R})), \quad t \in (-\pi, \pi),$$

$$R > 0$$



Curvatura de una curva con velocidad unitaria

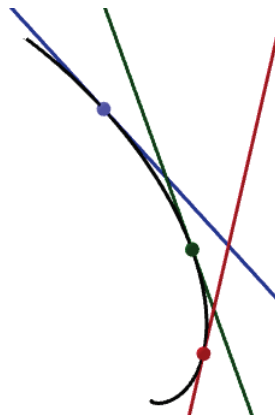
Sea $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ curva parametrizada con velocidad unitaria.

Se define su **función curvatura** como: $\kappa : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\kappa(t) = \| \ddot{\gamma}(t) \|$$

Curvatura de una curva regular

Si $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es curva regular, se define su **función curvatura** como la de una de sus reparametrizaciones a velocidad unitaria.



Consistencia de la definición de curvatura

Todas las reparametrizaciones a velocidad unitaria de una curva regular, tienen la misma aceleración escalar.



Calcular la curvatura

Hélice circular: (\mathbb{R}, γ)

$$\gamma(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt), \quad a > 0$$



Cálculo de la curvatura de curvas regulares generales

Sea $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular. Se verifica que:

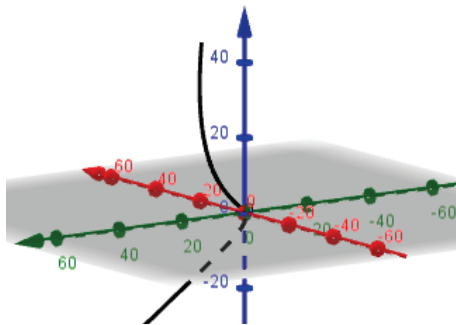
$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\gamma}'(t) \times \dot{\gamma}''(t)\|}{\|\dot{\gamma}'(t)\|^3}$$

Para obtener la curvatura de una curva regular $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$, se puede usar la fórmula anterior considerándola inmersa en el plano xy .



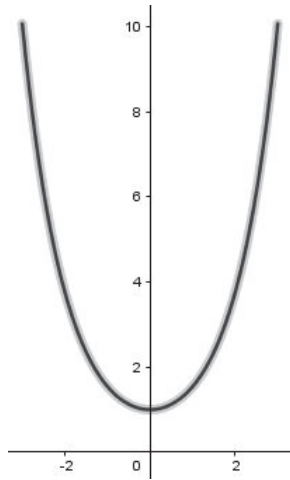
Obtener la curvatura

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \gamma(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$$



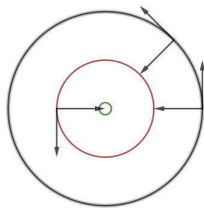
Obtener la curvatura

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \gamma(t) = (t, \cosh(t))$$



Calcular la curvatura

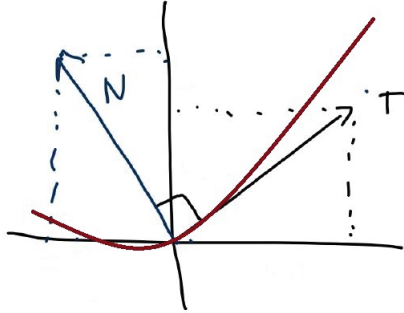
$$\gamma(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$$



Vector normal a una curva plana

Sea $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva regular, para cada $t \in I$, sea $\vec{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ el vector tangente. Se denomina **vector normal** a (I, γ) en $t \in I$, al vector que se obtiene girando \vec{T} un ángulo $\frac{\pi}{2}$ en sentido positivo:

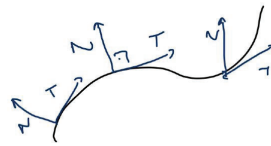
$$\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{T}$$



Diedro de Frenet

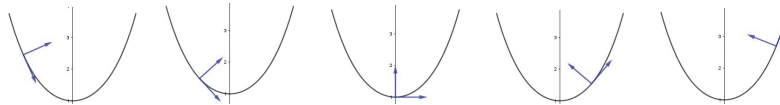
Se llama **diedro de Frenet**, de la curva regular (I, γ) con $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, a la base de \mathbb{R}^2 definida para cada $t \in I$ por:

$$B^{on+} = \{\vec{T}(t), \vec{N}(t)\}$$



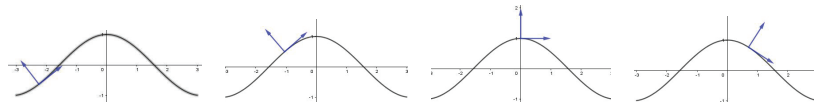
Obtener el diedro de Frenet

$$\gamma(t) = (t, \cosh(t))$$



Obtener el el diedro de Frenet

$$\gamma(t) = (t, \cos(t))$$

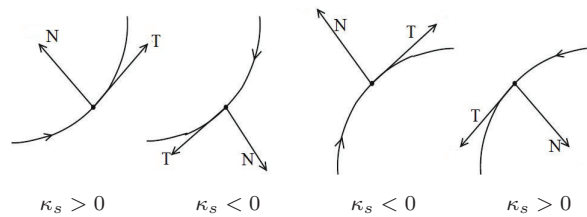


1.3. Curvatura de una curva regular

Curvatura con signo de una curva plana con velocidad unitaria

Sea $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular con velocidad unitaria, se llama **curvatura con signo** a la función $\kappa_s : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{\alpha}''(s) = \kappa_s(s) \vec{N}(s)$$



Curvatura con signo de una curva regular plana

La curvatura con signo de una curva regular plana es la curvatura con signo de cualquiera de sus reparametrizaciones a velocidad unitaria que conserve la orientación de la curva.



1.3. Curvatura de una curva regular

Obtención de la curvatura con signo de una curva regular plana

Sea $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular con parámetro arbitrario, la curvatura con signo es la función $\kappa_s : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

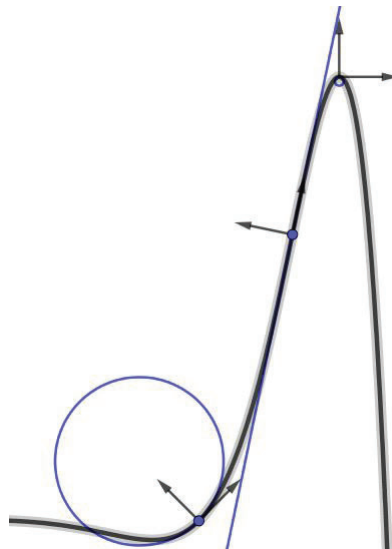
$$\frac{\tilde{\gamma}'(t) \times \tilde{\gamma}''(t)}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|^3} = \kappa_s(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Relación entre curvatura con signo y curvatura

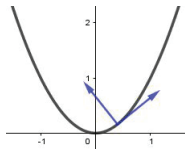
Para toda curva regular $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ se verifica que

$$|\kappa_s| = \kappa$$



Obtener la curvatura con signo

$$\gamma(t) = (t, t^2)$$



Calcular la curvatura con signo

$$\alpha(t) = (t, e^t \sin(t)) \quad \text{en} \quad t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{\pi}{2}, \quad t_2 = \frac{3\pi}{4}$$

