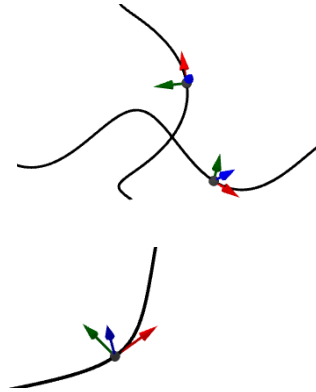


1.4. Curvas espaciales

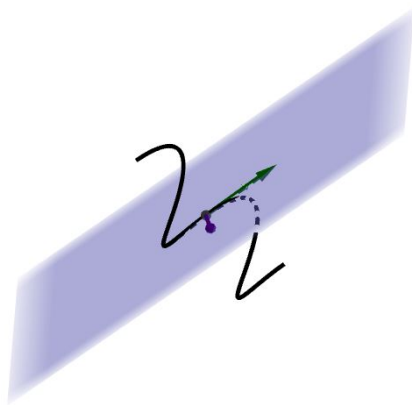
1. Curvas parametrizadas.
 - 1.1 Curvas.
 - 1.2 Reparametrizaciones.
 - 1.3 Curvatura de una curva.
 - 1.4 Curvas en el espacio.
 - 1.5 Curvas generadas por familias de curvas.
2. Teoría elemental de superficies.
 - 2.1 Superficies parametrizadas.
 - 2.2 Plano tangente.
 - 2.3 Primera forma fundamental.
 - 2.4 Curvatura normal.
 - 2.5 Curvatura geodésica.
3. Superficies orientadas.
 - 3.1 Segunda forma fundamental.
 - 3.2 Clasificación de los puntos de una superficie.
 - 3.3 Curvatura de Gauss.
 - 3.4 Superficies regladas.
 - 3.5 Geodésicas y el teorema de Gauss Bonnet.



Plano osculador

Si $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular con curvatura no nula, se llama **plano osculador de γ** en $t_0 \in (a, b)$, al plano que pasa por $\gamma(t_0)$ y tiene por vector ortogonal a

$$\vec{\gamma}'(t_0) \times \vec{\gamma}''(t_0)$$



Curvatura de una curva alabeada

Sea $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular. La curvatura de γ es:

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)\|}{\|\vec{\gamma}'(t)\|^3}$$

Calcular la curvatura

$$\gamma(t) = (-\sqrt{3}\cos(t) + \sin(t), \sqrt{3}\cos(t) + \sin(t), -2\sin(t))$$



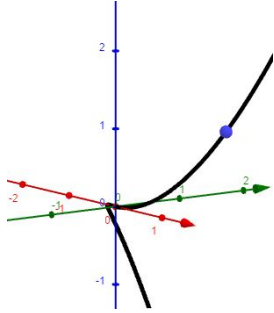
Plano osculador y reparametrizaciones

El plano osculador no cambia al reparametrizar la curva.



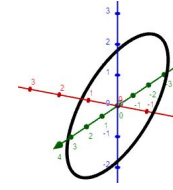
Obtener el plano osculador

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3), \quad \text{en} \quad t_0 = 1$$



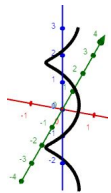
Calcular el plano osculador en un punto genérico

$$\gamma(t) = (-\sqrt{3}\cos(t) + \sin(t), \sqrt{3}\cos(t) + \sin(t), -2\sin(t))$$



Calcular la curvatura y el plano osculador en un punto genérico

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{2} \cos(t), \frac{1}{2} \sin(t), \frac{t}{2} \right)$$

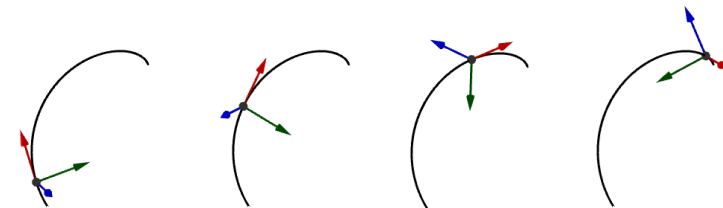


Triedro de Frenet

Si $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva regular con velocidad unitaria, entonces para todo $s \in (a, b)$, con $\kappa(s) \neq 0$, se llama **triedro de Frenet** a la base de \mathbb{R}^3 , ortonormal y positivamente orientada: $B^{on+} = \{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ donde:

$$\vec{T}(s) = \dot{\gamma}'(s), \quad \vec{N}(s) = \frac{\ddot{\gamma}''(s)}{\|\ddot{\gamma}''(s)\|}, \quad \vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$$

los vectores $\vec{T}(s)$, $\vec{N}(s)$ y $\vec{B}(s)$, se denominan respectivamente **vector tangente**, **vector normal** y **vector binormal** de γ en $s \in (a, b)$.



El triedro de Frenet de una curva con parametrización arbitraria se define como el triedro de cualquiera de sus reparametrizaciones a velocidad unitaria, que conserve la orientación.



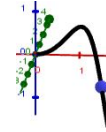
Cálculo del triedro de Frenet en curvas con parametrización arbitraria

Sea $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular con curvatura no nula en todos sus puntos. Entonces se verifica que:

$$\vec{T} = \frac{\vec{\gamma}'}{\|\vec{\gamma}'\|}, \quad \vec{B} = \frac{\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}''}{\|\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}''\|}, \quad \vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$$

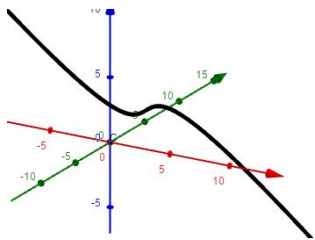
Obtener el triedro de Frenet, la curvatura y el plano osculador

$$\gamma(t) = (\sqrt{t}, -t, \sin(t)), \quad t \in (0, 10), \quad \text{en } t_0 = \pi$$



Obtener el triedro de Frenet y el plano osculador

$$\gamma(t) = (3 + t^3, 3t, 3 - t^3) \quad \text{en un punto genérico } t \in (0, 10)$$



Ecuaciones de Frenet - Serret

Sea $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular con velocidad unitaria y curvatura no nula, y sea $B^{on+} = \{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ su triedro de Frenet. Entonces, si $\kappa(s)$ es la curvatura de la curva, se verifica que:

$$\left. \begin{aligned} \vec{T}'(s) &= \kappa(s) \vec{N}(s) \\ \vec{N}'(s) &= -\kappa(s) \vec{T}(s) + \tau(s) \vec{B}(s) \\ \vec{B}'(s) &= -\tau(s) \vec{N}(s) \end{aligned} \right\},$$

Para cierta función suave: $\tau : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

