TEMA 7: COMBINATORIA

Principio aditivo: Si una primera tarea puede realizarse de m formas, mientras que una segunda puede realizarse de n formas, y no es posible realizar ambas de manera simultánea, entonces para realizar ambas hay $m+n$ formas.

Ejemplo

Si una librería vende libros de literatura y biología, de los cuales posee 15 de literatura y 20 de biología ¿Cuántas opciones tiene una persona para escoger un libro de literatura ó un libro de biología?

Tendremos $15+20=35$ distintas opciones

Principio multiplicativo: Si un procedimiento puede descomponerse en dos etapas y para la primera existen m formas de realizarse y si, para cada uno de estos resultados existen n formas para la segunda etapa, entonces el procedimiento entero puede realizarse, en el orden dado, de $m \cdot n$ formas.

Ejemplo

En una cafetería sirven cuatro tipos de café de dos tamaños posibles, pequeño ó grande. ¿De cuántas formas posibles podemos pedir un café?

Diagrama en árbol:

pequeño { – 1, – 2, – 3, – 4

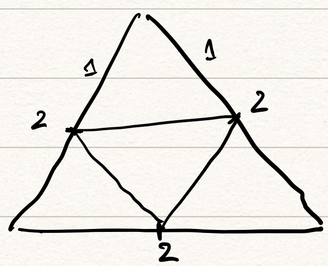
grande { – 1, – 2, – 3, – 4

tamaño, cafés.

$\underbrace{2}_{\text{tamaño}} \cdot \underbrace{4}_{\text{cafés}} = 8$ formas.

Principio del palomar: Si tenemos más palomas que nidos entonces hay un nido con más de una paloma.

Ejemplo: ¿Puede contener un triángulo equilátero de 2 centímetros de lado 5 puntos de forma que no hayan 2 a distancia menor ó igual que 1?



No.

Al tener cinco puntos y cuatro áreas para colocarlos, por el Pº del Palomar al menos uno tendrá dos puntos

Y dos puntos de un mismo área están a distancia menor ó igual a 1

Ejercicio: Sea B un conjunto de 3 números enteros. Demuestra que existe un subconjunto de B tal que la suma de sus elementos es múltiplo de 3.

Ejemplo.

Calcular cuántos números de cinco cifras podemos formar con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5. (sin repetir)

¿Y de tres cifras?

$\underline{5}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{3}\ \underline{4}$ | $\overline{5}\cdot\overline{4}\cdot\overline{3}\cdot\overline{2}\cdot\overline{1}$

Tendremos $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5! = 120$ de 5 cifras

$\overline{5}\cdot\overline{4}\cdot\overline{3} = 60$ habrá 60 formas de formar un nº de 3 cifras con 1, 2, 3, 4, 5.

¿Y si se pudiesen repetir? Un nº de cinco cifras usando 1, 2, 3, 4, 5 pudiendo repetir cifra.

$\overline{5}\cdot\overline{5}\cdot\overline{5}\cdot\overline{5}\cdot\overline{5}$ habrá 5^5 formas de construir el número.

Ejemplo

¿Cuántas cadenas de 8 bits existen?

$\overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}$ hay 2^8 cadena de 8 bits diferentes.

Ejemplo

¿Cuántas cadenas de 8 bits existen en el que los tres primeros sean 101? ¿Y con un 1 en la cuarta posición?

$\underline{1}\ \underline{0}\ \underline{1}\ \overline{2}\cdot\overline{2}\cdot\overline{2}\cdot\overline{2}\cdot\overline{2} = 2^5$ | $\overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \underline{1}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2} = 2^7$

Definición.

Una **variación sin repetición** de m elementos tomados de n en n es una lista <u>ordenada</u> de n elementos distintos elegidos. Se denota por $V_{m,n}$

Ejemplo

Determinar de cuántas maneras se pueden elegir un delegado y subdelegado de una clase de 50 personas.

Si una persona puede cubrir los dos cargos:	Si una persona puede cubrir un único cargo:
$\overline{50}\cdot\overline{50} = 50^2$	$\overline{50}\cdot\overline{49}$

Ejemplo.

a) Calcular $V_{5,2} = 5\cdot 4 = 20 = \dfrac{5!}{(5-2)!} = \dfrac{5!}{3!} = \dfrac{5\cdot 4\cdot \cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}$

$$\overline{5}\cdot\overline{4}$$

b) Calcular $V_{m,2} = m\cdot(m-1)$

$$\overline{m}\ \ \overline{m-1}$$

$\boxed{0! = 1}$

c) Calcular $\boxed{V_{m,n} = m\cdot(m-1)\cdots(m-n+1) = \dfrac{m!}{(m-n)!}}$

$$\overbrace{\overline{m}\ \ \overline{m-1}\ \cdots\ \overline{m-n+1}}^{n}$$

Definición.

Una **variación con repetición** de m elemtos tomados de n en n es una lista ordenada de n elemtos posiblemente repetidos. Se denota por $VR_{m,n}$

Ejemplo

Calcular todas las posibilidades para rellenar una quiniela de forma simple.

En una quiniela hay 15 partidos. $m=3: \{1, X, 2\}$

$$\overbrace{\overline{3}\ \overline{3}\ \overline{3}\ \cdots\ \overline{3}\cdot\overline{3}\cdot\overline{3}}^{15 \text{ partidos}} = 3^{15} \text{ formas de rellenar}$$

una quiniela.

Ejemplo

a) Calcular $VR_{2,5} = 2^5$

$$\overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2} = 2^5$$

b) Calcular $VR_{m,n} = m^n$

$$\overbrace{\overline{m}\cdot\overline{m}\cdot\overline{m}\ \cdots\ \cdot\overline{m}}^{n}$$

Ejemplo.

¿De cuántas maneras se pueden sentar en una mesa presidencial con cinco sillas los cinco miembros de la comisión?

$$\overline{5}\ \overline{4}\ \overline{3}\ \overline{2}\ \overline{1} = 5! = V_{5,5} = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = 5!$$

Definición

Una permutación sin repetición de n elementos es una variación de n elementos tomados de n en n

Ejemplo

Calcular $\boxed{P_n = n!}$

$$\overbrace{\underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \cdots\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }}^{n}$$
$$n \quad n-1 \quad n-2 \quad \cdots \quad 2 \quad 1 = n!$$

Ejemplo. ¿De cuántas formas podemos ordenar los números del 1 al 6?

$$\underline{\ \ }_6\ \underline{\ \ }_5\ \underline{\ \ }_4\ \underline{\ \ }_3\ \underline{\ \ }_2\ \underline{\ \ }_1 = 6! = P_6$$

Ejemplo.

Estudiar cuántos números distintos se pueden construir reordenando las cifras del 121

Observar que no es $P_3 = 3!$ ya que el 1 se repite.

$$\left.\begin{matrix} 1^A 1^B 2 & 1^A 2 1^B & 2 1^A 1^B \\ 1^B 1^A 2 & 1^B 2 1^A & 2 1^B 1^A \end{matrix}\right\} P_3$$

Entonces tenemos $\dfrac{P_3}{2!} = \dfrac{3!}{2!} = \dfrac{3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 3$

Definición.

Una permutación con repetición de n elementos donde uno aparece n_1 veces, otro n_2 veces, ..., n_s veces es una lista ordenada de n elementos donde cada uno de ellos aparece $n_1, n_2, ..., n_s$ veces. Se denota por $PR_n^{n_1, n_2, ..., n_s}$. (Observar que $n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$)

Ejemplo.

a) Calcular $PR_5^{2,2,1} = \dfrac{P_5}{2!2!1!} = \dfrac{5!}{2!2!1!} = \dfrac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 1} = 30$

b) Calcular $PR_n^{n_1, n_2, \ldots, n_s} = \dfrac{n!}{n_1! \, n_2! \cdots n_s!}$

Ejemplo

Determinar las palabras de nueve letras que se pueden construir como resultado de ordenar las letras de la palabra "cocodrilo".

Hay 9 letras $\{c, c, d, r, l, i, o, o, o\}$

$$PR_9^{2,1,1,1,1,3} = \frac{9!}{2! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot \cancel{8}^{4} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4}^{2} \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{2 \cdot 1} \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}} =$$

Ejemplo.

Calcular cuántos grupos de tres personas diferentes podemos formar de un grupo de nueve.

Con $9 \cdot 8 \cdot 7 = V_{9,3}$ conseguimos todos los grupos posibles pero estamos contando de más ya que estamos teniendo en cuenta el orden. Entonces habrá: $\dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = \dfrac{V_{9,3}}{P_3}$

$$\underset{9}{\underline{A}} \cdot \underset{8}{\underline{B}} \cdot \underset{7}{\underline{C}} = BAC = ACB = BCA = CAB = CBA$$

Definición.

Se llama combinación de m elementos tomados de n en n a todas las agrupaciones posibles sin importar el orden ni repetir elementos. y se denota por $C_{m,n} = \binom{m}{n}$

Ejemplo.

a) Vamos a calcular $C_{5,2}$

b) Calcular $C_{m,3}$

c) Calcular $C_{m,n}$

a)
$\frac{A}{5}\ \frac{B}{4} = BA \qquad C_{5,2} = \frac{5\cdot 4}{2!} = \frac{V_{5,2}}{P_2} = \frac{20}{2} = 10$

b)
$\underset{m}{\_}\ \underset{m-1}{\_}\ \underset{m-2}{\_} \qquad C_{m,3} = \frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{3!} = \frac{V_{m,3}}{P_3}$

c)
$$\boxed{C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m}{(m-n)!}\cdot\frac{1}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}}$$

$$\frac{V_{m,n}}{P_n} = V_{m,n}\cdot\frac{1}{P_n} \qquad \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$