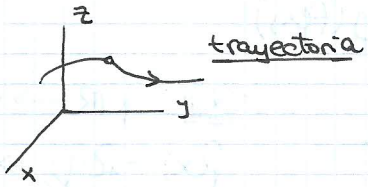
OBSER: Dado $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ se puede pensar en funciones de

$f\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Ejemplo:

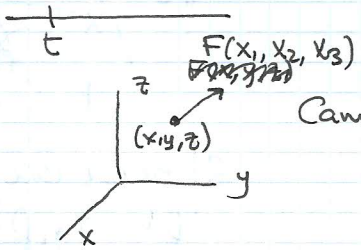
$f\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longrightarrow f(t) = (x_1, x_2, x_3)$



$F\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \rightarrow F(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3)$



Campo de fuerzas.

Usualmente una función

$f\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ viene dada por una fórmula.

Ejemplo: $\cdot\ f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

$\cdot\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$

Se llama dominio de f al conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ donde la fórmula tiene sentido.

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ $\quad \mathrm{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$f(x) = \sum \dfrac{x^n}{n!}$ esta serie converge $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$

Se llama imagen de f

$\mathrm{Im}\, f = \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in \mathrm{Dom} f\}$

DEF: Dado $f\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función se llama gráfica de f

$\mathrm{Graf}\, f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathrm{Dom} f\}$

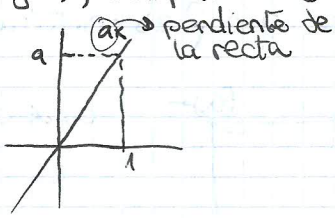
31-10-14

OPERACIONES CON FUNCIONES

Dadas dos funciones $f, g\ A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se pueden sumar $(f+g)(x) \overset{DEF}{=} f(x) + g(x)$; multiplicar $(f \cdot g)(x) \overset{DEF}{=} f(x)\, g(x)$; en particular si $g \equiv \alpha$ $(\alpha * f)(x) = \alpha f(x)$

dividir si $g(x) \neq 0$ $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) \underset{DEF}{=} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Ejemplo: $f_1(x) = a \in \mathbb{R}$ y $f_2(x) = x$



$n=2$ $(f_2 \cdot f_2)(x) = x^2$

$n \in \mathbb{N}$ $\underbrace{f_2 \cdot f_2}_{n \text{ veces}} = x^n$

FUNCIÓN POLINÓMICA

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$; donde $a_0 a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}$

FUNCIÓN RACIONAL

$$h(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Dadas f_1 y $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De modo que $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Dom} y$ se define ~~como~~ la composición de f con y $\quad y \circ f(x) \overset{DEF}{=} y(f(x))$.

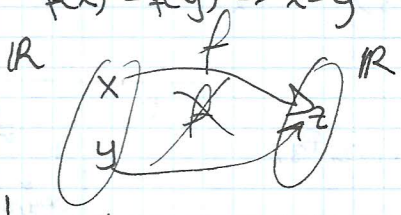
Ejemplo: $h(x) = (x^2+2x+2)^2$

$g(x) = x^2$ $\qquad f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2+2x+2$

y $h(x) = y \circ f(x)$

DEF: $f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que f es inyectiva si $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$



$\mathbb{R}$ | en este caso se define f^{-1} la función inversa como

$f^{-1} \quad \operatorname{Im} f \longrightarrow \mathbb{R}$

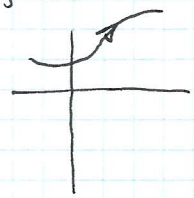
$z \longrightarrow f^{-1}(z)$

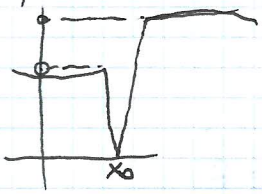
el único $x \in \operatorname{Dom} f$ tal que $f(x) = z$ y por tanto $f^{-1} \circ f(x) = x$

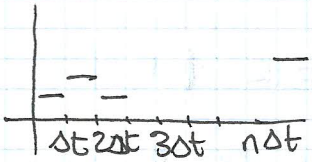
Ejemplo: $f(x) = x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$; $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Efectivamente $\sqrt{x^2} = x$

Gráficos de funciones

$f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \operatorname{Graf} f = \{(x, f(x)) : x \in \operatorname{Dom} f\}$

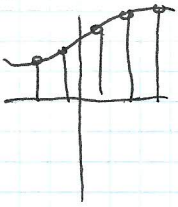






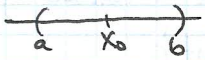
Nos interesan las funciones con un gráfico de "una pieza".

MUESTREAR!



DEF: Sea $f(a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Sea $x_0 \in (a,b)$

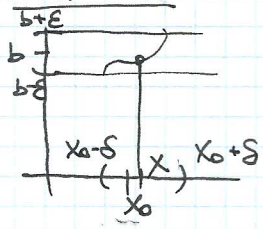


a) decimos que existe el límite de f en el punto x_0 si $\exists b \in \mathbb{R}$ de modo que $\forall \varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ para el cual si $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

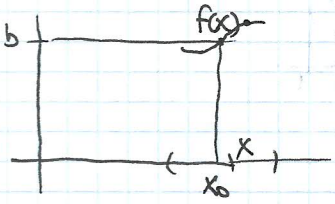
depende de ε

$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$

NOTACIÓN:



b) se dice que f es continua en $x_0 \in (a,b)$ si $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$



c) se dice que $f(x)$ es continua en (a,b) si es continua en todo $x_0 \in (a,b)$

Límites y operaciones

Teorema: sea $f, y\ (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo que para $x_0 \in (a,b)$ existen $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ y y $\exists \lim_{x\to x_0} y(x) = l_2$.

1) Existe $\lim_{x\to x_0} (f+y)(x) = l_1 + l_2$

2) " $\lim_{x\to x_0} (f\,y)(x) = l_1 \cdot l_2$

3) si $l_2 \neq 0$ $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f}{y}(x) = \frac{l_1}{l_2}$

Ejemplo: $\lim_{x\to\sqrt{2}} x^2 = (\sqrt{2})^2 = \lim_{x\to\sqrt{2}} x\cdot x = \lim_{x\to\sqrt{2}} x \cdot \lim_{x\to\sqrt{2}} x = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$

$$\lim_{x\to 7} \frac{x^2+3x-1}{x^3+18} = \frac{7^2+3\cdot 7-1}{\underbrace{7^3+18}_{\neq 0}}$$

Teorema: sea f y dos funciones con f continua en x_0 y g y continua en $f(x_0)$, entonces $g\circ f$ es continua en x_0, es decir, si $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ y si $\exists \lim_{x\to f(x_0)} g(x) = g(f(x_0))$ $\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} g\circ f = g(f(x_0))$.

3-11-14

Otros límites

Ej: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad x \sim 0 \Rightarrow f(x)$ GRANDE

Si $x = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

DEF: Sea $f(a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$

A) Se dice que

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \overset{DEF}{\Longleftrightarrow} \forall M>0\ \exists \delta>0$ tal que $0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq M$

B) Se dice que

$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ si $\forall N<0$ existe $\delta>0$ tal que $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x) \leq N$

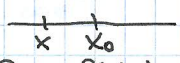
Teorema: Sea $y\ (a,b) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$:

A) Si $y(x) \geq 0$ y $\lim_{x\to x_0} y(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{y(x)} = \infty$

B) Si $y(x) \leq 0$ y $\lim_{x\to x_0} y(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{y(x)} = -\infty$

Ejemplo: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$

C) Se dice que el límite por la izquierda de f en x_0 es l, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \overset{DEF}{\Longleftrightarrow}$
$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que si $0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$



D) $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\delta>0$ tal que si $0<x_0-x<\delta \Rightarrow f(x) \geq M$

Teorema:

$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$ ó $l = \infty$ ó $l = -\infty \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$ y $\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$

DEF: $f(a,b) \to \mathbb{R}$ se dice que la recta $x = x_0$, $x_0 \in (a,b)$ es una asíntota vertical de f si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ ó si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$

Límites en el infinito:

$f(-\infty, \infty) = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

DEF: $f:(-\infty,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que:

A) $\lim_{x \to \infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \overset{DEF}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0$ tal que si $x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

B) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \overset{DEF}{\iff} \forall R > 0 \ \exists M > 0$ tal que si $x > M \Rightarrow f(x) > R$

C) $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \overset{DEF}{\iff} \forall S < 0 \ \exists M > 0$ tal que si $x > M \Rightarrow f(x) < S$

DEF: Sea $f(-\infty,\infty) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que f tiene asíntota horizontal en $y = l$ si $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ ó bien si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$

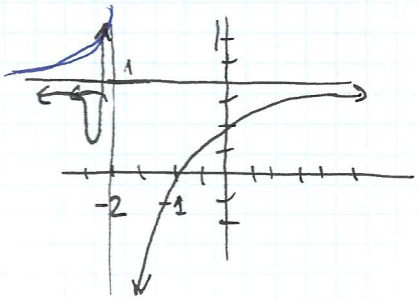
Ej:

$f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{x+2} = 1$

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{x+2} = 1$

$y = 1$ tiene una asíntota (doble)



$$\lim_{x \to -2} \frac{x+1}{x+2} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < -2 \\ -\infty & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$x = -2$ Asíntota vertical

DEF: Sea $f(-\infty,\infty) \to \mathbb{R}$ se dice que f tiene una asíntota oblicua en $y = ax + b$ si A) $\exists \lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ y $\exists \lim_{x \to \infty} f(x) - ax = b$ ó bien B) $\exists \lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ y $\exists \lim_{x \to -\infty} f(x) - ax = b$

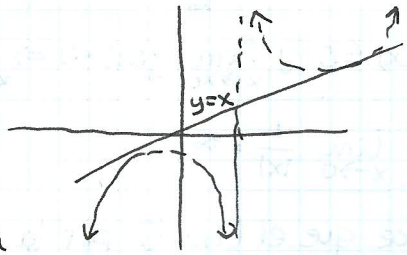
Ej: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ **Estudio:** $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

f continua: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = \dfrac{x_0^2+1}{x_0 - 1}$:

$\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x^2+1}{x-1} = \infty$ $\quad \lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2+1}{x-1} = \infty$

$\lim_{x \to 1^-} \dfrac{x^2+1}{x-1} = -\infty$ $\quad \lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2+1}{x-1} = -\infty$



Asíntota vertical en $x = 1$

No tiene as. horizontales.

(A.O): $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-x} = 1$

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2+1}{x-1} - x = \lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2+1-x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{2}{x-1} = 0$. $\quad y = x$ Asíntota oblicua.

CONTINUIDAD

teorema: $f(a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$ son equivalentes

a) f es continua en x_0

b) $\forall (x_n) \to x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

DEM: $a \Rightarrow b)$

f continua en $x_0 \overset{DEF}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que $0 \le |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$

Sea $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \overset{DEF}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : n \ge n_0 \Rightarrow |x - x_n| < \varepsilon$

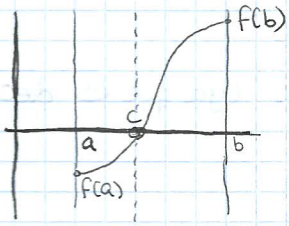
Importancia de las funciones continuas

teorema de Bolzano $f[a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y si $f(a) \cdot f(b) < 0$

$\Rightarrow \exists c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$

DEM: Dos casos: ① $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$

② $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$



$a_1 = a$ y $b_1 = b$

$k = \frac{a_1 + b_1}{2}$

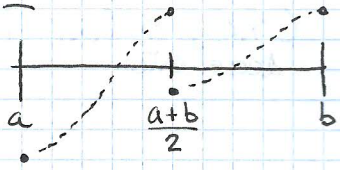
$a_2 = a_1$ si $f(k) \ge 0$ $(b_2 = k)$

$a_2 = k$ si $f(k) < 0$ $(b_2 = b_1)$

Repetimos el algoritmo

$f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$

$f(a_1) < 0$ y $f(b_1) \ge 0$



Además $a_1 \le a_2$ y $b_2 \le b_1$ $\quad a_3 = a_2$ si $f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) \ge 0$ $\left(b_3 = \frac{a_2+b_2}{2}\right)$

$a_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$ si $f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) < 0$ $(b_3 = b_2)$ se repite el proceso así $\exists (a_n)$ creciente con $f(a_n) < 0$; $\exists (b_n)$ decreciente con $f(b_n) \ge 0$.

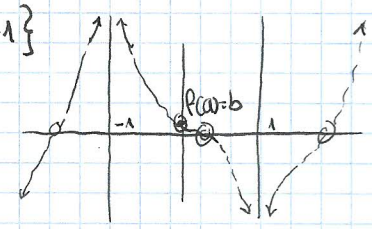
OBSER: $b_n \ge a_n$ y $b_n - a_n \le \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) \le \frac{1}{4}(b_{n-2} - a_{n-2}) \le \frac{1}{2^n}(b-a)$

Corolario: sea $f[a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y si $f(a) < \lambda < f(b)$ ó $f(b) < \lambda < f(a)$ entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c) = \lambda$

$\boxed{x^{15} + \frac{x^4 - 17x + 13}{(x^2-1)^2} = 0}$ ¿tiene solución? $\to f(x) = (x^2-1)^2 x^{15} + x^4 - 17x + 13 = 0$ (Grado 19)

Representamos la gráfica de f: Dom f: $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$

f continua $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \infty$ $\qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ $\qquad f(0) = 13 > 0$

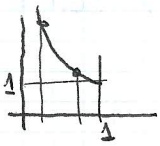
$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \infty$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad f\left(1 - \frac{1}{17}\right) < 0$ $\overset{\text{t. Bolzano}}{\Longrightarrow} \exists c \in \left(0, 1 - \frac{1}{17}\right) \Rightarrow f(c) = 0$

teorema: si $f[a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces está acotada, e.d. $\exists M>0$ tal que $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$

Ejemplo: $f(0,1) \to \mathbb{R}$

$x \to f(x) = \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$; no está acotada



$f(x) = \frac{1}{x} \quad x \in (0,1)$

no tiene máximo

no tiene mínimo

teorema: si $f[a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ entonces $\exists x_0 \in [a,b]$ MÁXIMO y $\exists x_1 \in [a,b]$ MÍNIMO.

7-10-14

a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in [0,5]$

Dom $f = [0,5]$ Continua (sabemos que acotada y que tiene un máximo y un mínimo).

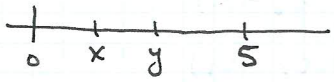
Mínimo f:

$0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$

decreciente en $[0,5]$

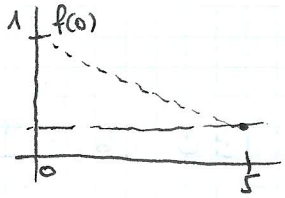
Máximo $x=0$

Mínimo $x=5$ (ya que es decreciente)



$x^2 < y^2$

$\frac{1}{1+y^2} < \frac{1}{1+x^2}$ $\quad$ ($x<y \Rightarrow f(x) > f(y)$) decreciente

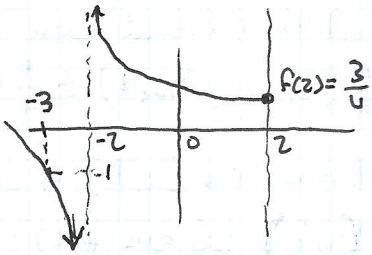


b) $g(x) = \frac{3}{2+x} \qquad x \in [-3,2]$ $\qquad$ Dom $g = [-3,2] \setminus [-2]$

$\lim_{x \to -2^+} \frac{3}{2+x} = \infty$

$\lim_{x \to -2^-} \frac{3}{2+x} = -\infty$

No está acotada, no puede tener ni máximo ni mínimo.



$x < y < -2$

$2+x < 2+y < 0$

$1 > \frac{2+y}{2+x}$

$\frac{1}{2+y} < \frac{1}{2+x}$ Decreciente

Si $-2 < x < y$

$0 < x+2 < 2+y$

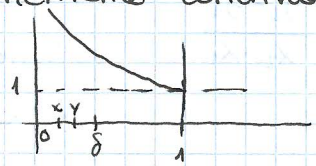
$\Rightarrow \frac{1}{2+y} < \frac{1}{2+x}$ Decreciente

Funciones uniformemente continuas

DEF: Sea $f\ A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

A intervalo. Se dice que f es uniformemente continua en A si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ tal que si $\forall x, y \in A$ si $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

PROP: $f\ A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A intervalo y f uniformemente continua en A; entonces $\forall x_0 \in A \Rightarrow f$ continua en x_0



Ejemplos: $f(0,1) \to \mathbb{R}$

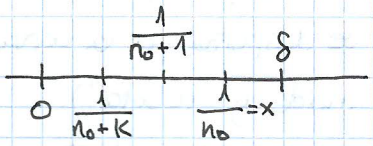
$x \to f(x) = \frac{1}{x}$

$\left(\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty\right)$ continua en $(0,1)$

No es uniformemente continua en $(0,1)$, fijamos δ.

Sea $x, y \in (0, \delta)$

Ejemplo $n_0 \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n_0} < \delta$



$x = \frac{1}{n_0}$

$|x-y| < \delta$ $\quad y = \frac{1}{n_0+k} \Rightarrow |f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{\frac{1}{n_0}} - \frac{1}{\frac{1}{n_0+k}} \right| = |n_0 - (n_0+k)|$

$= k \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$

3.15: $f(1,\infty) \to \mathbb{R}$

$x \to f(x) = x^2$

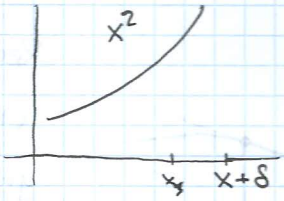
es continua $(1,\infty)$

No es uniformemente continua en el $(1,\infty)$

$\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$

Sea $\delta > 0$

$x_1 \quad x + \delta$



$|x^2 - (x+\delta)^2| = |x^2 - (x^2 + 2x\delta + \delta^2)|$

$= 2x\delta + \delta^2 \geq x\delta \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$

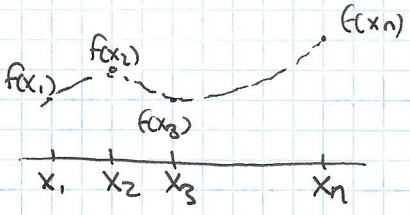
δ FIJO

teorema: $f\ [a,b] \to \mathbb{R}$

f continua sobre un intervalo cerrado y acotado, entonces f es uniformemente continua en $[a,b]$

~~Ejemplo~~

3.10: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$



¿$\exists\, P(x) = a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0$ tal que $P(x_1) = f(x_1)$? SI