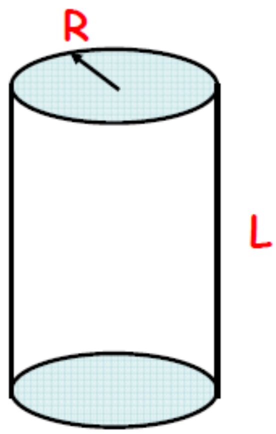
Problemas de Metodos Matematicos III.

Problema 1 Solucion general para problema de conduccion de calor en cilindro con contronos homogeneos de primer tipo y usando metodo Fourier



Solución:

1. Formulacion matematica:
   $\frac{u_t}{a^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}] + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$

   CC: u(todas superficies)=0

   CI: $u(\text{t=0}) = f(\rho, \varphi, z)$
2. Separando variables:
   u=v*T(t)=R(ρ)$\Phi(\varphi)Z(z)$T(t)

   $\frac{1}{a^2}\frac{T_t}{T} = \frac{1}{R}\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}]\} + \frac{1}{\rho^2}[\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}] + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$
3. Usando soluciones conicodos de problemas SL bajamos la dimencionalidad del problema:
   $\frac{1}{a^2}\frac{T_t}{T} = \frac{1}{R}\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}]\} + \frac{(-m^2)}{\rho^2} + (-\mu) = -\lambda$
4. La constante de separacion (λ) tiene en cuenta que ambas partes son funciones de distintas variables:
5. Nota: en el caso considerado: m=0,1,2,3..; $\mu = (\frac{\pi k}{L})^2; (k = 1, 2, 3...)$

6. La solucion de problema SL para desarollar solucion por autofunciones ortogonales (todos bordes son homogeneos) i.e.

   Δv+$\lambda v = 0$

   v(superficie)=0

   Entonces el problema radial es:

   $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}] + [(\lambda - \mu_k) - \frac{m^2}{\rho^2}]R = 0$

   o

   $\frac{\partial^2 R}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\rho} + [(\lambda - \mu_k) - \frac{m^2}{\rho^2}]R = 0$

7. Soluciones acotados son funciones Bessel J$_m(\sqrt{(\lambda - \mu_k)}\rho$)

   $(\lambda - \mu_k)$ se obtienen como soluciones de ecuacion J$_m(\sqrt{(\lambda - \mu_k)}$R)=0 para valores de argumento $x_{nmk} = \sqrt{(\lambda_{nmk} - \mu_k)}R$

   $[\frac{x_{nmk}}{R}]^2 = (\lambda_{nmk} - \mu_k)$

8. Entonces, los autovalores de problema serian:

   $\lambda_{nmk} = [\frac{x_{nmk}}{R}]^2 + (\frac{\pi k}{L})^2$

9. Autofunciones ortogonales para desarollar la solucion son:

   v$_{nmk}$=J$_m(\sqrt{(\lambda_{nmk} - \mu_k)}\rho$)*exp(-imφ) $*$ sin($\frac{\pi n}{L}z$)

10. Finalmente, la solucion general para ecuacion de difusion en cilindro, usando desarollo por autofunciones ortogonales obtenidos:

    $u(\rho, \varphi, z, t) = \sum\limits_{nmk}$ exp$\{-a^2\lambda_{nmk}t\}$J$_m(\frac{x_{nm}}{R}\rho$)*[A$_{nmk}$cos(mφ) + $B_{nmk}\sin(m\varphi)] *$ sin($\frac{\pi n}{L}z$)
